

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1973)

Artikel: Die Existenz einer Greenschen Funktion auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
Autor: Keller, Sebastian
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-37155>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Existenz einer Greenschen Funktion auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

VON SEBASTIAN KELLER, Basel

Ergebnisse

Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (Abkürzung: RMF) ist der Laplaceoperator Δ erklärt; Lösungen der Laplacegleichung $\Delta u = 0$ heissen harmonische Funktionen. *Greensche Funktion* der RMF M (zum Aufpunkt $q \in M$) nennen wir jede in $M - \{q\}$ positive und harmonische Funktion g_q , welche in q die Singularität

$$\lim_{p \rightarrow q} \frac{g_q(p)}{s(p, q)^{2-n}} = 1$$

hat; dabei bedeutet n die Dimension von M , $s(p, q)$ die geodätische Distanz auf M (für $n=2$ ist $s(p, q)^{2-n}$ durch $-\log s(p, q)$ zu ersetzen). Die Existenz bzw. Nichtexistenz einer Greenschen Funktion ist eine vom Aufpunkt q unabhängige Eigenschaft der RMF M , welche unter isometrischen Abbildungen von M invariant bleibt. Es stellt sich die Frage, welchen Einfluss das Verhalten von geometrischen Grössen wie der Riemannschen Schnittkrümmung auf diese Eigenschaft einer RMF hat. Darauf bezieht sich das folgende Hauptergebnis dieser Arbeit:

SATZ A. *Auf einer einfachzusammenhängenden vollständigen RMF M mit Dimension n und Schnittkrümmung K existiert eine Greensche Funktion*

- 1) *wenn K durch eine negative Zahl nach oben beschränkt ist,*
- 2) *wenn K nirgends positiv und $n \geq 3$ ist.*

Im Fall 2) kann man auf die Bedingung $n \geq 3$ nicht verzichten, wie das Beispiel der komplexen Ebene zeigt.

Eine Riemannsche Fläche besitzt genau dann eine Greensche Funktion, wenn das harmonische Mass der Fläche nicht die Nullfunktion ist. Dieses Kriterium gilt unverändert auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten (Satz 3.2) und dient als Ausgangspunkt des Beweises von Satz A. Wenn das harmonische Mass einer RMF M die Nullfunktion ist, so wird auch der Limes der Dirichletintegrale $D(u_k)$ der gegen das harmonische Mass konvergierenden Folge u_k gleich null (Satz 3.3). Demnach gilt es, für die Integrale $D(u_k)$ eine positive untere Schranke zu bestimmen. Wir verwenden dazu die Idee von Szegő [9] zur Abschätzung der Kapazität eines Kondensatos im euklidischen \mathbf{R}^3 . Bei der Übertragung auf die RMF M stellt sich das Problem, für die im \mathbf{R}^3 gültige isoperimetrische Ungleichung, die in der Szegö'schen Abschätzung eine entscheidende Rolle spielt, und in welcher die spezielle Geometrie des \mathbf{R}^3 zum

Ausdruck kommt, einen geeigneten Ersatz zu finden. Die Lösung dieses Problems liefert nebenbei

SATZ B. *Auf einer einfachzusammenhängenden vollständigen n -dimensionalen RMF M , deren Schnittkrümmung K durch eine negative Zahl $-b^2$ ($b > 0$) nach oben beschränkt ist, besteht zwischen dem Mass $m(G)$ jedes regulären Gebiets G von M und dem Mass $m(\partial G)$ des Randes von G die lineare Ungleichung $m(\partial G) \geq (n-1) \cdot b \cdot m(G)$.*

Herrn Professor Heinz Huber, der die Anregung zu dieser Arbeit gegeben und mir mit wichtigen Ratschlägen geholfen hat, spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

Bezeichnungen

Alle vorkommenden RMF gehören der Klasse C^∞ an und sind, sofern nichts anderes gesagt wird, unberandet und nicht notwendig zusammenhängend. „Differenzierbar“ heisst stets beliebig oft differenzierbar. Folgende Bezeichnungen werden in der ganzen Arbeit verwendet:

M_p	Tangentialraum der RMF M im Punkt $p \in M$
ϕ_*	Differentialabbildung einer differenzierbaren Abbildung ϕ
$\langle \ , \ \rangle$	Masstensor von M (Bilinearformschreibweise)
$\text{grad } f$	Gradient einer differenzierbaren Funktion f

$$\|X_1 \dots X_k\| = \sqrt{\det \langle X_i, X_j \rangle_{i,j=1 \dots k}} \quad \text{für } X_1 \dots X_k \in M_p$$

(für $k=1$ ist $\|X\|$ die Norm des Skalarprodukts $\langle X, Y \rangle$ auf M_p).

1. Integration

Bekanntlich lässt sich auf jeder RMF M in natürlicher Weise ein Integral von Funktionen erklären, welches im Fall $M = \mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgueintegral übereinstimmt ([2], p. 10). Zum einfacheren Verständnis stellen wir hier drei im folgenden wichtige Integralformeln zusammen.

1.1. Für Diffeomorphismen $\phi: M \rightarrow M'$ zwischen zwei RMF besteht die

$$\text{Transformationsformel:} \quad \int_{\phi(A)} h = \int_A (h \circ \phi) J(\phi)$$

($A \subset M$ messbar, h über $\phi(A)$ integrierbar); dabei bedeutet $J(\phi)$ die

$$\text{Jacobideterminante von } \phi: \quad J(\phi)(p) = \frac{\|\phi_* X_1 \dots \phi_* X_n\|}{\|X_1 \dots X_n\|},$$

$X_1 \dots X_n$ eine (beliebige) Basis von M_p .

1.2. Für eine berandete RMF M und zwei auf M differenzierbare Funktionen u und v gilt die

$$\text{Greensche Formel: } - \int_{\partial M} v \frac{\partial u}{\partial n} = \int_M v \Delta u + \langle \text{grad } v, \text{grad } u \rangle ;$$

hier bezeichnet $\partial/\partial n$ das innere Normalenfeld längs dem Rand ∂M .

1.3. M sei jetzt eine RMF der Dimension n . Für den Rest von Abschnitt 1 gelten folgende Voraussetzungen:

O offene Teilmenge von M mit kompaktem Abschluss \bar{O}

I offenes Intervall in \mathbf{R}

f reellwertige Funktion auf \bar{O} mit den Eigenschaften

(1) f stetig auf \bar{O} , f differenzierbar auf O

(2) $f(\partial O) \cap I$ leer, $f(O) \cap I$ nichtleer

(3) $(\text{grad } f)(p) \neq 0 \quad \forall p \in O$.

Wir setzen: $X = \text{grad } f$, $G = \{p \in O \mid f(p) \in I\}$ und $F_t = \{p \in O \mid f(p) = t\}$ für $t \in I$. Wegen (3) sind die Niveauflächen F_t kompakte Hyperflächen in M . Zu jedem $p \in G$ gibt es genau eine maximale Integralkurve c_p des auf O differenzierbaren Vektorfeldes $\|X\|^{-2} X$ mit $c_p(f(p)) = p$. Wegen (2) ist c_p auf ganz I definiert, und es ist $c_p(t) \in F_t$ für $t \in I$. Wir wählen eine feste Fläche $F = F_s (s \in I)$ und definieren die Abbildungen

$$\phi: F \times I \rightarrow G \quad \text{durch} \quad \phi(p, t) = c_p(t)$$

$$\phi_t: F \rightarrow F_t \quad \text{durch} \quad \phi_t(p) = c_p(t) \quad (t \in I).$$

ϕ und ϕ_t erweisen sich als Diffeomorphismen.

1.4. LEMMA. Für jede auf $G(a, b) := \{p \in O \mid a \leq f(p) \leq b\}$ ($a, b \in I$) stetige Funktion h ist $\int_{F_t} h / \|X\|$ eine stetige Funktion von t auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_{G(a, b)} h = \int_a^b \left(\int_{F_t} \frac{h}{\|X\|} \right) dt.$$

Beweis. (V, y) sei eine Karte von F , dann ist $(V \times I, z)$ mit $z(p, t) = (y(p), t) \in \mathbf{R}^n$ ($p \in V, t \in I$) eine Karte der RMF $F \times I$. Verwendet man zur Berechnung der Jacobi-determinante von ϕ die Basis $\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n$, so ergibt sich

$$J(\phi)(p, t) = \frac{J(\phi_t)(p)}{\|X(\phi(p, t))\|} \quad (p \in F, t \in I). \quad (1)$$

Nach der Transformationsformel ist daher

$$\int_{F_t} \frac{h}{\|X\|} = \int_F \frac{h}{\|X\|} \circ \phi_t \cdot J(\phi_t) = \int_{p \in F} (h \circ \phi \cdot J(\phi))(p, t). \quad (2)$$

Wegen $G(a, b) = \phi(F \times [a, b])$ ist $(h \circ \phi) J(\phi)$ stetig auf $F \times [a, b]$, daher wird das Integral (2) eine stetige Funktion von $t \in [a, b]$. Nach der Transformationsformel und dem Satz von Fubini ist ferner

$$\int_{G(a, b)} h = \int_{F \times [a, b]} h \circ \phi \cdot J(\phi) = \int_a^b \left(\int_{p \in F} (h \circ \phi \cdot J(\phi))(p, t) \right) dt,$$

daraus folgt mit (2) die angegebene Formel.

2. Harmonische Funktionen

Die Haupteigenschaften der harmonischen Funktionen im euklidischen \mathbf{R}^2 und \mathbf{R}^3 (Mittelwertsatz, Maximumprinzip, Harnacksche Sätze) gelten auch für die harmonischen Funktionen auf einer RMF [4]. Wir geben zunächst den etwas vereinfachten und invariant formulierten Beweis des Mittelwertsatzes von Feller [4] wieder. Dann leiten wir eine Abschätzung der Richtungsableitungen Xu einer harmonischen Funktion u durch die Funktionswerte von u her. Schliesslich zeigen wir, wie sich die Harnacksche Ungleichung direkt aus dem Mittelwertsatz ergibt; damit lässt sich eine Schwierigkeit des ursprünglichen Beweises in [4] (die Stetigkeit des Poissonkerns) umgehen.

2.1. Entscheidend für die Theorie der harmonischen Funktionen ist die Existenz von Grundlösungen der Laplacegleichung $\Delta u = 0$. In lokalen Koordinaten ist $\Delta u = 0$ eine elliptische Differentialgleichung; die Grundlösungen solcher Gleichungen sind von Miranda in [7] untersucht worden. Aus den Sätzen 19.I, II und IV, pp. 49 in [7] erhält man den folgenden

SATZ. *M sei eine RMF der Dimension n , $s(p, q)$ die geodätische Distanz auf M . Zu jedem Punkt von M gibt es eine offene Umgebung U mit kompaktem Abschluss \bar{U} und eine auf $U \times U$ stetige Funktion $r(p, q)$ mit den Eigenschaften:*

- 1) $r_p(q) := r(p, q)$ ist differenzierbar in $U - \{q\} \forall q \in U$
- 2) $r_q > 0$ und $\Delta r_q^{2-n} = 0$ in $U - \{q\} \forall q \in U$
- 3) $\lim_{s(p, q) \rightarrow 0} r(p, q)/s(p, q) = 1$ gleichmässig in $U \times U - d$, wo d die Diagonale von $U \times U$, und $r(q, q) = 0$.
- 4) $\exists C < 0$, sodass $|r(p, a) - r(p, q)| \leq C \cdot s(q, a) \forall p, q, a \in U$.

5) Die Funktion L , $L(p, q) = \|(\text{grad } r_q)(p)\|^2$, ist stetig in $U \times U - d$;

$$\lim_{s(p, q) \rightarrow 0} L(p, q) = 1$$

gleichmässig in $U \times U - d$, also L stetig fortsetzbar in $U \times U$ durch $L(p, p) = 1$.

6) $\exists C > 0$, sodass $\int_{p \in U} |L(p, a) - L(p, q)| \leq C \cdot s(q, a) \quad \forall q, a \in U$.

Für $n=2$ hat man in 2) r_q^{2-n} durch $\log r_q$ zu ersetzen. Um die daraus entstehenden Fallunterscheidungen zu vermeiden, schreiben wir die Beweise in diesem Abschnitt stets für $n \geq 3$ auf; die Modifikationen für den Fall $n=2$ sind offensichtlich.

2.2. Die Umgebungen von Satz 2.1 nennen wir *Grundumgebungen*. $U_q(b)$ bezeichnet immer die metrische Umgebung $\{p \in M \mid s(p, q) < b\}$; $\dot{U}_q(b) = U_q(b) - \{q\}$. Aus 3) und 5) in Satz 2.1 folgt:

LEMMA. Zu jedem Kompaktum K in der Grundumgebung U gibt es eine Zahl $b > 0$ mit der Eigenschaft: Für alle $q \in K$ gilt

$$1) \frac{r(p, q)}{s(p, q)} \geq \frac{1}{2} \text{ und } \|(\text{grad } r_q)(p)\|^2 \geq \frac{1}{2} \quad \forall p \in \dot{U}_q(2b)$$

2) Das Tripel $0 = \dot{U}_q(2b)$, $I = (0, b)$ und $f = r_q$ erfüllt die in 1.3 genannten Voraussetzungen.

2.3. U sei eine Grundumgebung des Punktes $q \in M$, $b_q > 0$ eine Zahl wie in Lemma 2.2 für $K = \{q\}$. Dann ist $V_q(t) := \{p \in U_q(2b) \mid r_q(p) < t\}$ für jedes $t \in (0, b_q)$ ein reguläres Gebiet (dh. der Abschluss $\overline{V_q(t)}$ ist eine kompakte berandete Untermannigfaltigkeit von M) mit der Hyperfläche $F_{qt} = \{p \in U_q(2b) \mid r_q(p) = t\}$ als Rand.

MITTELWERTSATZ. Ist u harmonisch in einer Umgebung $\overline{V_q(b)}$ von q ($b \in (0, b_q)$), so hat u die Mittelwerteigenschaft

$$u(q) \cdot \int_{V_q(b)} \|X_q\|^2 = \int_{V_q(b)} u \cdot \|X_q\|^2, \quad X_q = \text{grad } r_q.$$

Beweis. Den Index q lassen wir weg und setzen $v = r^{2-n} - b^{2-n}$, $G_t = V(b) - \overline{V(t)}$ für $t \in (0, b)$. G_t ist ein reguläres Gebiet mit Rand $\partial G_t = F_b \cup F_t$, u und v sind harmonisch in \bar{G}_t . Daher wird nach der Greenschen Formel

$$\int_{\partial G_t} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \int_{\partial G_t} \frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

Weil $\partial/\partial n = X/\|X\|$ auf F_t , $\partial/\partial n = -X/\|X\|$ auf F_b , $Xr = \|X\|^2$ und $v=0$ auf F_b , folgt daraus

$$(2-n) \int_{F_t} u \cdot \|X\| \cdot r^{1-n} - \int_{F_t} v \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = (2-n) \int_{F_b} u \|X\| r^{1-n} \quad (1)$$

$$\int_{F_t} \|X\| \cdot r^{1-n} = \int_{F_b} \|X\| \cdot r^{1-n}. \quad (2)$$

Die beiden Integrale auf der linken Seite von (1) bezeichnen wir mit $I_u(t)$ und $I_v(t)$, das Integral rechterhand in (2) mit I . Für $I_u(t)$ hat man die Ungleichung

$$(2-n) \cdot I \cdot \min_{p \in F_t} u(p) \leq I_u(t) \leq (2-n) \cdot I \cdot \max_{p \in F_t} u(p). \quad (3)$$

Weil auf $V(b)$ $|\partial u/\partial n| \leq \|\text{grad } u\| \leq C$ (C eine positive Konstante) und nach Lemma 2.2 $0 < v < r^{2-n} \leq \sqrt{2} \cdot \|X\| \cdot r^{2-n}$ gilt, erhalten wir für $I_v(t)$ die Abschätzung

$$|I_v(t)| \leq \sqrt{2} \cdot C \cdot I \cdot t. \quad (4)$$

Für $t \rightarrow 0$ konvergieren die Punkte von F_t gleichmässig gegen q , da nach Lemma 2.2 $s(p, q) \leq 2t$ für $p \in F_t$. Deshalb folgt aus (3) und (4)

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_u(t) = (2-n) \cdot I \cdot u(q), \quad \lim_{t \rightarrow 0} I_v(t) = 0.$$

Mit (1) ergibt sich

$$u(q) \cdot \int_{F_b} \|X\| = \int_{F_b} u \cdot \|X\|. \quad (5)$$

(5) gilt für jedes $b \in (0, b_q)$. Ersetzt man b durch t und integriert (5) über $t \in [\varepsilon, b]$ ($0 < \varepsilon < b$), so erhält man mit Lemma 1.4 die Behauptung durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.4. SATZ. *Ist G eine offene Teilmenge der RMF M und K ein Kompaktum in G , dann gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass für jede in G harmonische Funktion und alle $X \in M_a$, $a \in K$, die Abschätzung $|Xu| \leq C \cdot \|X\| \cdot \sup_{p \in G} |u(p)|$ gilt.*

Es genügt, den Satz für $G = U$, U eine Grundumgebung, zu beweisen. Ist c die Geodätische mit $c(0) = a$ und dem Tangentialvektor $\dot{c}(0) = X \in M_a$, so wird für kleines $t > 0$ die Distanz $s(c(t), a) = t \cdot \|X\|$ und

$$Xu = \dot{c}(0) u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(c(t)) - u(a)}{s(c(t), a)} \|X\|.$$

Daher genügt es zu zeigen: *Es gibt Zahlen $C > 0$, $\varepsilon > 0$, sodass $|u(q) - u(a)| \leq C \cdot s(q, a) \cdot \sup_{p \in U} |u(p)|$ für alle $a \in K$, $q \in U_a(\varepsilon)$.*

Beweis. 2δ sei die Distanz von K zu $M - U$, $K_\delta = \bigcup_{q \in K} U_q(\delta)$, $b > 0$ eine Zahl wie in Lemma 2.2 für das Kompaktum K_δ in U , C die Konstante aus Satz 2.1, 4) und $\varepsilon = \min(b, b/2C, \delta)$. Für $q \in K_\delta$ setzen wir

$$f(q) = \int_{V_q} \|X_q\|^2 \quad \text{und} \quad h(q) = \int_{V_q} u \|X_q\|^2, \quad \text{wo} \quad V_q = V_q\left(\frac{b}{2}\right)$$

(X_q und $V_q(t)$ wie in 2.3). Wir wählen jetzt $a \in K$, $q \in U_a(\varepsilon) \subset K_\delta$. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$u(q) - u(a) = \frac{h(q)}{f(q)} - \frac{h(a)}{f(a)} = \frac{h(q)(f(a) - f(q))}{f(q) \cdot f(a)} + \frac{h(q) - h(a)}{f(a)}.$$

Es sei

$$I = \int_{V_q \cap V_a} |\|X_q\|^2 - \|X_a\|^2|, \quad I_q = \int_{V_q - V_a} \|X_q\|^2, \quad I_a = \int_{V_a - V_q} \|X_a\|^2.$$

Dann gilt

$$|f(q) - f(a)| \leq I + I_q + I_a, \tag{1}$$

$$|h(q) - h(a)| \leq \alpha(I + I_q + I_a) \quad \text{mit} \quad \alpha = \sup_{p \in U} |u(p)|,$$

$$|u(q) - u(a)| \leq \frac{2\alpha}{f(a)} (I + I_q + I_a). \tag{2}$$

Die drei Integrale schätzen wir einzeln ab. Nach Satz 2.1, 6) ist

$$I \leq C_1 \cdot s(q, a). \tag{3}$$

$$V_q - V_a \subset V_q\left(\frac{b}{2}\right) - V_q\left(\frac{b}{2} - C \cdot s(q, a)\right). \tag{4}$$

Begründung: Wenn $p \in V_q - V_a$, so ist $s(p, q) \leq 2 \cdot r(p, q) < b$ nach Lemma 2.2; mit $s(q, a) < \varepsilon \leq b$ folgt $p \in U_a(2b) - V_a$, also muss $r(p, a) \geq b/2$ sein, und mit Satz 2.1, 4) ergibt sich $r(p, q) \geq r(p, a) - C \cdot s(q, a) \geq b/2 - C \cdot s(q, a)$.

Wegen der Inklusion (4) hat man nach Lemma 1.4

$$I_q \leq \int_{b/2 - C \cdot s(q, a)}^{b/2} \left(\int_{F_{qt}} \|X_q\| \right) dt, \tag{5}$$

F_{qt} die Niveaufäche $r_q = t$. Nach (2) im Beweis des Mittelwertsatzes ist

$$s^{n-1} \cdot \int_{F_{qt}} \|X_q\| = t^{n-1} \cdot \int_{F_{qs}} \|X_q\| \quad \text{für } s, t \in (0, b).$$

Integriert man diese Gleichung über $s \in (0, b/2)$, so erhält man wiederum mit Lemma 1.4

$$\frac{1}{n} \left(\frac{b}{2}\right)^n \int_{F_{qt}} \|X_q\| = t^{n-1} \int_{V_q} \|X_q\|^2 \leq \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} \cdot \int_U \|X_q\|^2$$

für jedes $t \in (0, b/2)$. Mit Satz 2.1, 5) folgt daraus, dass der Integrand in (5) gleichmässig in q und t beschränkt ist, daher wird $I_q \leq C_2 \cdot s(q, a)$. Genau gleich zeigt man $I_a \leq C_2 \cdot s(q, a)$. Mit (3) zusammen ergibt sich

$$I + I_q + I_a \leq C_3 \cdot s(q, a).$$

Daraus folgt zunächst mit (1), dass die Funktion $f(q)$ auf K stetig ist und daher auf K ein positives Minimum C_4 annimmt. Mit (2) folgt $|u(q) - u(a)| < \alpha(2C_3/C_4) \cdot s(q, a)$, also die Behauptung.

2.5. HARNACKSCHE UNGLEICHUNG. *Zu jedem Punkt a der RMF M gibt es eine Umgebung U von a und positive Konstanten C, C', ε so, dass für jede in U harmonische nichtnegative Funktion u die Ungleichung $C \cdot u(a) \leq u(q) \leq C' \cdot u(a) \forall q \in U_a(\varepsilon)$ besteht.*

Beweis. Wegen Satz 2.1, 5) lässt sich eine Grundumgebung U von a so klein wählen, dass $\|X_a\|^2 > 0$ auf \bar{U} und die Funktion $H(p, q) := \|X_q(p)\|^2 \cdot \|X_a(p)\|^{-2}$ auf $\bar{U} \times \bar{U}$ stetig ist. Da $H(p, a) = 1$, findet man eine abgeschlossene Umgebung K von a in U , sodass $\frac{1}{2} \leq H(p, q) \leq \frac{3}{2} \forall (p, q) \in U \times K$ oder

$$\frac{1}{2} \cdot \|X_a\|^2 \leq \|X_q\|^2 \leq \frac{3}{2} \|X_a\|^2 \quad \text{auf} \quad \bar{U} \quad \forall q \in K. \quad (1)$$

$b > 0$ sei eine Zahl wie in Lemma 2.2 für das Kompaktum K in U ; $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U_a(\varepsilon)$ in K liegt und $\varepsilon < \min(b/2, b/4C)$, C die Konstante aus Satz 2.1, 4). Für $q \in U_a(\varepsilon)$ gilt dann

$$V_a\left(\frac{b}{4}\right) \subset V_q\left(\frac{b}{2}\right) \subset V_a\left(\frac{3b}{4}\right). \quad (2)$$

Begründung: Wenn $p \in V_a(b/4)$, so ist nach Lemma 2.2 $s(p, a) \leq 2 \cdot r(p, a) < b/2$, mit $s(q, a) < \varepsilon < b/2$ folgt $s(p, q) < b$. Nach Satz 2.1, 4) ist $r(p, q) \leq r(p, a) + C \cdot s(q, a) < b/4 + C \cdot \varepsilon < b/2$, mithin $p \in V_q(b/2)$. Die andere Inklusion zeigt man gleich.

Wir multiplizieren jetzt die Ungleichung (1) mit der gegebenen Funktion u und integrieren über $V_q(b/2)$ bei festem $q \in U_a(\varepsilon)$. Da $u \geq 0$ in U , ergibt sich mit den Inklusionen (2)

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{V_a(b/4)} u \|X_a\|^2 \leq \int_{V_q(b/2)} u \|X_q\|^2 \leq \frac{3}{2} \cdot \int_{V_a(3b/4)} u \|X_a\|^2.$$

Wendet man auf jedes der drei Integrale den Mittelwertsatz an, so folgt

$$C_1 u(a) \leq f(q) \cdot u(q) \leq C_2 u(a), \quad (3)$$

wobei

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \int_{V_a(b/4)} \|X_a\|^2, \quad C_2 = \frac{3}{2} \cdot \int_{V_a(3b/4)} \|X_a\|^2, \quad f(q) = \int_{V_q(b/2)} \|X_q\|^2.$$

Die Funktion f ist, wie im Beweis von Satz 2.4 gezeigt wurde, auf K stetig und positiv und nimmt daher auf K ein Maximum $C_3 > 0$ und ein Minimum $C_4 > 0$ an. Aus (3) erhalten wir

$$\frac{C_1}{C_4} \cdot u(a) \leq u(q) \leq \frac{C_2}{C_3} \cdot u(a).$$

Das gilt für jedes $q \in U_a(\varepsilon)$, und die Konstanten $C_1 \dots C_4$, ε sind von u unabhängig. Damit ist die Ungleichung bewiesen.

2.6. Aus dem Mittelwertsatz folgt in bekannter Weise das *Maximumprinzip*: eine im Gebiet $G \subset M$ harmonische nicht konstante Funktion u nimmt in G kein Maximum an. Weil das Dirichlet problem für reguläre Gebiete lösbar ist ([7] p. 60, [6] p. 264), gilt auch das *Harmonizitätskriterium*: eine im Gebiet $G \subset M$ stetige Funktion u ist in G harmonisch genau dann, wenn u die Mittelwerteigenschaft aus 2.3 für jedes $q \in G$ besitzt. Aus der Harnackschen Ungleichung ergibt sich damit wie im klassischen Fall der *Harnacksche Satz*: Eine Folge monoton wachsender, im Gebiet G harmonischer Funktionen, welche in einem Punkt $q \in G$ beschränkt bleibt, konvergiert in G lokal gleichmäßig gegen eine in G harmonische Grenzfunktion.

3. Greensche Funktion und harmonisches Mass

Wie in der Klassifikationstheorie der Riemannschen Flächen hat man auf einer RMF als Kriterium für die Existenz einer Greenschen Funktion das Nichtverschwinden des harmonischen Masses. Das Ziel des Abschnitts ist, eine hinreichende geometrische Bedingung dafür anzugeben.

3.1. Das *harmonische Mass* einer zusammenhängenden RMF M ist folgendermassen erklärt: Es sei $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ eine Ausschöpfung von M durch reguläre Gebiete (d.h. $\bar{G}_k \subset G_{k+1}$ und $\bigcup_{k=1}^\infty G_k = M$), A eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von G_1 , sodass $G_1 - A$ (und damit $G_k - A$) ein reguläres Gebiet, u_k die Lösung des Dirichletproblems $\Delta u = 0$ in $G_k - A$, $u = 0$ auf ∂A , $u = 1$ auf ∂G_k . Wegen des Maximumprinzips ist $0 < u_k < 1$ und $u_k \geq u_{k+1}$, daher konvergiert die Folge u_k nach dem Satz von Harnack gegen eine in $M - A$ harmonische Grenzfunktion u_A , diese heisst har-

monisches Mass von M (bezüglich A). u_A ist unabhängig von der Wahl der Gebietsfolge G_k .

3.2. Nach dem Vorbild der Riemannschen Flächen nennen wir eine RMF M *hyperbolisch*, wenn es eine nicht konstante auf M negative subharmonische Funktion v gibt, und *parabolisch*, falls es ein solches v nicht gibt; der Begriff der subharmonischen Funktion ist dabei wörtlich derselbe wie auf Riemannschen Flächen ([1] p. 135).

SATZ. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) M ist hyperbolisch

(b) das harmonische Mass u_A ist nicht die Nullfunktion auf $M - A$

(c) es existiert eine Greensche Funktion g_q von M .

Die Gültigkeit der Aussagen (b) und (c) ist demnach eine von der Wahl von $A \subset M$ bzw. $q \in M$ unabhängige Eigenschaft der RMF M .

Der Beweis des entsprechenden Satzes für Riemannsche Flächen benützt ausschliesslich Eigenschaften der harmonischen Funktionen, welche auch auf einer RMF gelten, und lässt sich daher wörtlich auf den Fall einer RMF M übertragen. Für (a) \Leftrightarrow (b) vergleiche man [1] p. 204; (c) \Rightarrow (a) ist klar, da $-g_q$ auf M subharmonisch, negativ und nicht konstant ist. Zum Beweis von (b) \Rightarrow (c) verwendet man die Perronsche Methode ([1] p. 139) mit der Klasse Π der in $M - \{q\}$ subharmonischen Funktionen v mit kompaktem Support und $\overline{\lim}_{p \rightarrow q} (v(p) - s(p, q)^{2-n}) < \infty$: aus (b) folgt, dass $g_q(p) := \sup \{v(p) \mid v \in \Pi\}$ nicht konstant gleich $+\infty$ und daher harmonisch in $M - \{q\}$ ist; g_q ist die gesuchte Greensche Funktion.

3.3. Die Funktionen u_k aus 3.1, deren Limes das harmonische Mass u_A ist, sind auf der berandeten RMF $\overline{G_k - A}$ differenzierbar ([6] p. 264). Daher existieren die *Dirichlet-integrale*

$$D(u_k) = \int_{G_k - A} \|\text{grad } u_k\|^2.$$

SATZ. Aus $u_A = 0$ in $M - A$ folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} D(u_k) = 0$.

Beweis. Nach der Greenschen Formel gilt

$$D(u_k) = - \int_{\partial(G_k - A)} u_k \cdot \frac{\partial u_k}{\partial n}, \quad \int_{\partial(G_k - G_1)} \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0.$$

Wegen $u_k = 0$ auf ∂A , $u_k = 1$ auf ∂G_k folgt daraus für $k \geq 2$:

$$D(u_k) = \int_{\partial G_1} \frac{\partial u_k}{\partial n}.$$

Wir wählen eine offene Menge G mit kompaktem Abschluss $\bar{G} \subset G_2 - A$ und $\partial G_1 \subset G$. Da ∂G_1 kompakt und $\|\partial/\partial n\| = 1$, gibt es nach Satz 2.4 eine positive Konstante C , sodass

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial n} \right| \leq C \cdot \alpha_k \quad \text{auf } \partial G_1 \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \sup_{p \in G} |u_k(p)|.$$

Somit wird $D(u_k) \leq C \cdot \alpha_k \cdot m$, m das Mass der RMF ∂G_1 . Die Folge u_k konvergiert auf $M - A$ lokal gleichmässig, also auf G gleichmässig gegen $u_A = 0$, dh. es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} D(u_k) = 0$.

3.4. Wir leiten jetzt eine Abschätzung der Dirichletintegrale $D(u_k)$ nach unten her. Der Index k wird festgehalten und im folgenden weggelassen. Vorgegeben ist also die im regulären Gebiet $G - A$ harmonische Funktion u mit Randwerten 0 auf ∂A , 1 auf ∂G . Wir setzen u auf \bar{G} stetig fort durch die Definition $u = 0$ auf A .

Es sei $X = \text{grad } u$, P die Menge der regulären Werte $t \in (0, 1)$ von $u: G - A \rightarrow (0, 1)$. Für $t \in P$ ist $\|X\| > 0$ auf $F_t = \{p \in G \mid u(p) = t\}$, also auch auf einer offenen Menge O in G , die F_t enthält. Da t nicht zum Kompaktum $u(\bar{G} - O)$ gehört, gibt es ein offenes Intervall $I \subset (0, 1)$ mit $t \in I$ und $u(\bar{G} - O) \cap I = \emptyset$. Das Tripel $O, I, f = u$ erfüllt die in 1.3 genannten Voraussetzungen. Wegen $u^{-1}(I) \subset O$ ist $I \subset P$, daher ist P eine offene Teilmenge in \mathbb{R} . Für $t \in [0, 1]$ setzen wir $G_t = \{p \in G \mid u(p) \leq t\}$ ($G_0 = A$, $G_1 = G$). Wenn $t \in P$, ist G_t eine berandete RMF mit Rand F_t .

3.5. Es sei a ein Punkt im Innern von A , h eine auf $M - \{a\}$ positive und stetige Funktion, für welche das Integral

$$\mu(t) = \int_{G_t} h^2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{G_t - U_a(\varepsilon)} h^2, \quad t \in [0, 1],$$

existiert. Nach Lemma 1.4 ist μ auf P stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\mu'(t) = \int_{F_t} \frac{h^2}{\|X\|} \quad (t \in P).$$

Das Dirichletintegral von u berechnet sich aus der Greenschen Formel wie in 3.3 zu

$$D(u) = - \int_{\partial(G-A)} u \frac{\partial u}{\partial n} = - \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial G_t} \frac{\partial u}{\partial n} \quad (t \in P).$$

Im letzten Integral ist $\partial/\partial n = \|X\|^{-1} X$ zu setzen, also wird

$$D(u) = \int_{F_t} \|X\|.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$D(u) \cdot \mu'(t) = \int_{F_t} \|X\| \cdot \int_{F_t} \frac{h^2}{\|X\|} \geq \left(\int_{F_t} h \right)^2. \quad (1)$$

Wir machen jetzt die Annahme, dass sich bei geeigneter Wahl von h eine stetige Funktion $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ ($= (0, \infty)$) finden lässt mit den Eigenschaften

$$(a) \quad \int_{\partial G} h \geq \varphi \left(\int_G h^2 \right) \quad \text{für alle regulären Gebiete } G \text{ von } M \text{ mit } a \in G$$

$$(b) \quad \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{\varphi(t)^2} < \infty \quad (\alpha > 0).$$

Damit folgt aus (1):

$$\frac{D(u) \cdot \mu'(t)}{\varphi(\mu(t))^2} \geq 1 \quad (t \in P).$$

Integriert man diese Ungleichung über ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subset P$ und macht die Substitution $\tau = \mu(t)$, so erhält man

$$D(u) \cdot \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} \frac{d\tau}{(\varphi(\tau))^2} \geq b - a. \quad (2)$$

Da P offen in \mathbf{R} , ist $P = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ mit offenen disjunkten Intervallen I_j . Wir wählen abgeschlossene Intervalle $I_{jk} = [a_{jk}, b_{jk}]$ in I_j mit $I_{jk} \subset I_{j,k+1}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk} = I_j$, und setzen $P_k = \bigcup_{j=1}^k I_{jk}$. Dann ist $P_k \subset P_{k+1}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = P$.

Weil μ streng monoton wachsend auf $[0, 1]$ und stetig auf P , sind bei festem k die Bilder $\mu(I_{jk})$ die disjunkten Intervalle $[\mu(a_{jk}), \mu(b_{jk})]$, und ihre Vereinigung über $j=1 \dots k$ liegt in $[\mu(0), \mu(1)]$. Anwendung von (2) auf die Intervalle $I_{jk} = [a_{jk}, b_{jk}]$ und Summation über $j=1 \dots k$ ergibt daher

$$D(u) \cdot \int_{\mu(0)}^{\mu(1)} \frac{d\tau}{(\varphi(\tau))^2} \geq \sum_{j=1}^k D(u) \cdot \int_{\mu(I_{jk})} \frac{d\tau}{(\varphi(\tau))^2} \geq \sum_{j=1}^k b_{jk} - a_{jk}.$$

Auf der rechten Seite steht das Lebesguemass $m(P_k)$ von P_k ; dieses geht für $k \rightarrow \infty$ gegen $m(P)$. Da $(0, 1) - P$ gleich dem Bild der kritischen Punkte von u in

$G - A$, also nach dem Satz von Sard ([8] p. 66) eine Nullmenge ist, wird $m(P) = 1$. Ersetzt man auf der linken Seite noch $\mu(1)$ durch ∞ , so folgt

$$D(u) \cdot \int_{\mu(0)}^{\infty} \frac{d\tau}{(\varphi(\tau))^2} \geq 1. \quad (3)$$

Das gilt für jede Funktion u der das harmonische Mass u_A definierenden Folge u_k . Wir haben also mit (3) eine positive untere Schranke für die Dirichletintegrale $D(u_k)$ gefunden. Mit Satz 3.3 ergibt sich als Resultat:

SATZ. *Wenn es Funktionen h und φ gibt, sodass die Bedingungen (a) und (b) erfüllt sind, dann ist das harmonische Mass u_A der RMF M nicht die Nullfunktion.*

Das Hauptresultat Satz A werden wir jetzt erhalten, indem wir für die dort genannten RMF die Bedingungen (a) und (b) (mit sehr einfachen Funktion h und φ) nachweisen.

4. Abschätzung der in Bedingung (a) auftretenden Integrale

4.1. Im ganzen Abschnitt ist M eine einfachzusammenhängende vollständige n -dimensionale RMF mit einem Punkt $a \in M$, in dem die Exponentialabbildung $\exp: M_a \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist. Durch Wahl einer linearen Isometrie $y: \mathbb{R}^n \rightarrow M_a$ hat man dann Riemannsche Normalkoordinaten zum Zentrum $a: x = (\exp \circ y)^{-1}$, und dazu die differenzierbaren Funktionen

$$\varrho: \dot{M} = M - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \varrho(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i(p)^2 \right)^{1/2} = s(p, a),$$

$$\xi: \dot{M} \rightarrow S^{n-1} \text{ (Einheitssphäre im } \mathbb{R}^n), \quad \xi(p) = \frac{x(p)}{\varrho(p)},$$

$$f := \left\| \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\| \circ x^{-1}.$$

Weil $\|\text{grad } \varrho\| = 1$ auf \dot{M} , sind die Sphären $\Sigma_t = \{p \in M \mid \varrho(p) = t\}$ ($t > 0$) Hyperflächen in M . Die Inklusion von Σ in M wird mit j_t bezeichnet, der Teilraum $j_{t*}((\Sigma_t)_p)$ ($p \in \Sigma_t$) mit E_p . Die geodätischen Strahlen $c(t) = x^{-1}(t \cdot u)$ ($u \in S^{n-1}$, $t > 0$) sind Integralkurven des Vektorfeldes $\text{grad } \varrho$, somit stehen die Tangentialvektoren $\dot{c}(t)$ senkrecht auf $E_{c(t)}$.

4.2. **SATZ.** $\xi_t := \xi \circ j_t: \Sigma_t \rightarrow S^{n-1}$ ist ein Diffeomorphismus, und die Jacobideterminante von ξ_t^{-1} im Punkt $u \in S^{n-1}$ ist gegeben durch $J(\xi_t^{-1})(u) = f(t \cdot u) \cdot t^{n-1}$.

Beweis. Bezeichnet $\iota: S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ die Inklusion, $\sigma_t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ die Homothetie $\sigma_t(u) = t \cdot u$ ($u \in \mathbf{R}^n$), so gilt

$$\sigma_t \circ \iota \circ \xi_t = x \circ j_t. \quad (1)$$

$\xi_t: \Sigma_t \rightarrow S^{n-1}$ ist bijektiv; da x_* und j_{t*} injektiv sind, wird nach (1) auch $\xi_{t*}: (\Sigma_t)_p \rightarrow (S^{n-1})_{\xi_t(p)}$ injektiv ($p \in \Sigma_t$). Somit ist ξ_t ein Diffeomorphismus.

Zur Berechnung von $J(\xi_t^{-1})(u)$ nehmen wir eine Basis $Y_1 \dots Y_{n-1}$ von $(S^{n-1})_u$. Nach (1) ist $j_t \circ \xi_t^{-1} = x^{-1} \circ \sigma_t \circ \iota$, folglich $j_{t*}(\xi_t^{-1}(Y_i)) = \phi_* X_i$ mit $\phi = x^{-1} \circ \sigma_t$ und $X_i = \iota_* Y_i$. Daher wird

$$J(\xi_t^{-1})(u) = \frac{\|\xi_t^{-1} Y_1 \dots Y_{n-1}\|_{\Sigma_t}}{\|Y_1 \dots Y_{n-1}\|_{S^{n-1}}} = \frac{\|\phi_* X_1 \dots \phi_* X_{n-1}\|_M}{\|X_1 \dots X_{n-1}\|_{\mathbf{R}^n}} \quad (2)$$

(die Indices deuten an, auf welche RMF sich die Norm bezieht). Wir definieren $X_n = \dot{\alpha}(1)$, wo α die Gerade $\alpha(\tau) = \tau \cdot u$ im \mathbf{R}^n bedeutet. X_n hat die Norm 1 und steht senkrecht auf $X_1 \dots X_{n-1} \in \iota_*((S^{n-1})_u)$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $\phi_* X_n = t \cdot \dot{c}(t)$, c die Geodätische $c(\tau) = x^{-1}(\tau \cdot u)$. Daher wird $\|\phi_* X_n\| = t$, und $\phi_* X_n$ steht senkrecht auf $\phi_* X_1 \dots \phi_* X_{n-1} \in E_{c(t)}$. Mit (2) folgt

$$\frac{\|\phi_* X_1 \dots \phi_* X_n\|}{\|X_1 \dots X_n\|} = \frac{\|\phi_* X_1 \dots \phi_* X_{n-1}\|}{\|X_1 \dots X_{n-1}\|} \cdot \frac{\|\phi_* X_n\|}{\|X_n\|} = J(\xi_t^{-1})(u) \cdot t. \quad (3)$$

Da die $X_1 \dots X_n$ eine Basis von $(\mathbf{R}^n)_u$ bilden, steht links gerade die Jacobideterminante $J(\phi)(u)$ des Diffeomorphismus $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow M$. Berechnet man $J(\phi)(u)$ mit Hilfe der Orthonormalbasis $(D_i)_u$ (i -te partielle Ableitung zur Stelle u , $i=1 \dots n$) so ergibt sich wegen $\sigma_{t*}(D_i)_u = t \cdot (D_i)_{t \cdot u}$ $J(\phi)(u) = t^n \cdot f(t \cdot u)$, und daher zusammen mit (3) die Behauptung.

4.3. Im folgenden sei G ein reguläres Gebiet in M , das den ausgezeichneten Punkt $a \in M$ enthält, $j: \partial G \rightarrow M$ die Inklusion und $\partial/\partial n$ das innere Normalenfeld des Randes von G , K die Menge der Punkte $p \in \partial G$ mit $\langle \partial/\partial n, \text{grad } \varrho \rangle(p) = 0$. Für festes $t > 0$ bezeichnet $\pi_t: \dot{M} \rightarrow \Sigma_t$ die Projektion $\pi_t(p) = x^{-1}(t \cdot \xi(p))$ ($p \in \dot{M}$). π_t ist differenzierbar; auf Σ_t ist π_t die Identität.

SATZ. Die Jacobideterminante von $\pi_t \circ j: \partial G \rightarrow \Sigma_t$ hat in einem Punkt $p \in \partial G \cap \Sigma_t$ den Wert $J(\pi_t \circ j)(p) = |\langle \partial/\partial n, \text{grad } \varrho \rangle(p)|$. Somit ist $p \in \partial G \cap \Sigma_t$ genau dann ein kritischer Punkt der Abbildung $\pi_t \circ j$, wenn $p \in K$.

Beweis. Wegen $\varrho(p) = t$ ist $p = c(t)$, c die Geodätische $c(\tau) = x^{-1}(\tau \cdot u)$, $u = \xi(p) \in S^{n-1}$. Die Vektoren $N_p = \text{grad } \varrho(p) = \dot{c}(t)$ und $N = (\partial/\partial n)(p)$ haben die Norm 1, N_p steht senkrecht auf E_p und N senkrecht auf $E = j_*((\partial G)_p)$. Die Abbildung $\phi = j_t \circ \pi_t$ lässt p fest. Wegen $\pi_t \circ j_t = \text{id}$ ist $\phi_* \circ j_{t*} = j_{t*}$, also $\phi_* = \text{id}$ auf E_p . Da $\pi_t \circ c = p$ kon-

stant, ist $\phi_* N_p = j_{t*} \pi_{t*} \dot{c}(t) = 0$, mithin $\phi_* = 0$ auf dem orthogonalen Komplement E_p^\perp . Man hat also

$$\phi_* = \text{id auf } E_p, \quad \phi_* = 0 \text{ auf } E_p^\perp. \quad (1)$$

Zur Berechnung von $J = J(\pi_t \circ j)(p)$ wählen wir eine Basis $X_1 \dots X_{n-1}$ in $E: X_k = j_* Y_k$, $Y_1 \dots Y_{n-1}$ Basis von $(\partial G)_p$. Wegen $j_{t*}(\pi_t \circ j)_* Y_k = \phi_* X_k$ wird

$$J = \frac{\|(\pi_t \circ j)_* Y_1 \dots\|_{\Sigma_t}}{\|Y_1 \dots Y_{n-1}\|_{\partial G}} = \frac{\|\phi_* X_1 \dots \phi_* X_{n-1}\|}{\|X_1 \dots X_{n-1}\|}. \quad (2)$$

Jetzt sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $N = \pm N_p$, dann wird $E = E_p$ und nach (1) $\phi_* X_k = X_k$, also $J = 1 = |\langle N, N_p \rangle|$. Andernfalls sind N und N_p linear unabhängig. Den von N und N_p aufgespannten Teilraum von M_p bezeichnen wir mit E_0 . Man hat $\dim E_0 = 2$, $\dim(E \cap E_0) = \dim(E_p \cap E_0) = 1$, $E_0^\perp = E \cap E_p$. Wir wählen Vektoren $X \in E \cap E_0$ und $X_p \in E_p \cap E_0$ mit Norm 1, und eine ONB (Orthonormalbasis) $X_1 \dots X_{n-2}$ von E_0^\perp . Da X_p, N_p eine ONB von E_0 bilden, wird $X = \langle X, X_p \rangle X_p + \langle X, N_p \rangle N_p$. Mit (1) folgt $\phi_* X_k = X_k$ ($k = 1 \dots n-2$) und $\phi_* X = \langle X, X_p \rangle X_p$. Verwendet man daher in (2) die ONB $X_1 \dots X_{n-2}, X$ von E , so erhält man unter Beachtung, dass $X_1 \dots X_{n-2}, X_p$ eine ONB in E_p , $J = |\langle X, X_p \rangle|$. Da aber X, N und X_p, N_p zwei ONB in E_0 , ist die zum Basiswechsel $X, N \rightarrow X_p, N_p$ gehörige 2×2 -Matrix orthogonal, also ihre Diagonalelemente $\langle X, X_p \rangle$ und $\langle N, N_p \rangle$ bis auf das Vorzeichen gleich. Damit wird $J = |\langle N, N_p \rangle|$, wie behauptet.

4.4. Wegen $a \in G$ besitzt die Menge $I^u = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t \cdot u \in x(\bar{G})\}$ für jedes $u \in S^{n-1}$ ein positives Maximum $r(u)$. Wir definieren eine Abbildung $\phi: S^{n-1} \rightarrow \partial G$ durch $\phi(u) = x^{-1}(r(u) \cdot u)$, und setzen $O = \{u \in S^{n-1} \mid \phi(u) \in \partial G - K\}$.

SATZ. 1) $\xi \circ j: \partial G \rightarrow S^{n-1}$ bildet $\partial G - K$ lokal diffeomorph ab

2) $S^{n-1} - O$ ist eine Nullmenge, O ist offen in S^{n-1}

3) ϕ bildet O diffeomorph ab, und $\phi^{-1} = \xi$ auf $\phi(O)$.

Beweis. Ein Randpunkt $p \in \partial G$ liegt in $\partial G \cap \Sigma_t$, $t = \varrho(p) > 0$. Da $\xi \circ j = (\xi \circ j_t) \circ (\pi_t \circ j)$, folgt aus den Sätzen 4.2 und 4.3, dass p genau dann ein kritischer Punkt von $\xi \circ j$ ist, wenn $p \in K$. K ist also die Menge der kritischen Punkte von $\xi \circ j$, nach dem Satz von Sard ([8] p. 66) wird $\xi(K)$ eine Nullmenge in S^{n-1} . Wegen $u = \xi(\phi(u))$ für $u \in S^{n-1}$ ist $S^{n-1} - O \subset \xi(K)$, also ebenfalls eine Nullmenge. $\partial G - K$ ist die Menge der regulären Punkte von $\xi \circ j$, wird also lokal diffeomorph abgebildet. Damit ist 1) und der erste Teil von 2) gezeigt.

Es sei jetzt $u \in O$ fest gewählt, $p = \phi(u)$. Nach 1) gibt es eine Umgebung U von p in $\partial G - K$, sodass die Einschränkung ξ von $\xi \circ j$ auf U ein Diffeomorphismus $\xi: U \rightarrow \xi(U)$ wird. m bezeichne das Maximum von ϱ auf \bar{G} , c_v die Geodätische $c_v(t) = x^{-1}(t \cdot v)$, $v \in S^{n-1}$. Wegen $c_u(r(u)) = p$ und der Maximumeigenschaft von $r(u)$ sind die Kompak-

ta $\partial G - U$ und $c_u[r(u), m]$ disjunkt und haben daher eine positive Distanz 2ε . Die Distanz zwischen $\partial G - U$ und $c_u[r(u) - \varepsilon, m]$ ist dann mindestens noch ε . Zu diesem ε gibt es eine Umgebung V von u in S^{n-1} , sodass die Distanz von $c_v(t)$ zu $c_u(t)$ für $(v, t) \in V \times [r(u) - \varepsilon, m]$ kleiner als ε wird. Für $v \in V$ ist dann der Durchschnitt der Strahlen $C_v = c_v[r(u) - \varepsilon, \infty)$ mit $\partial G - U$ leer, d.h. $C_v \cap \partial G$ liegt in U . Wegen $\xi(C_v) = \{v\}$ folgt daraus, dass $C_v \cap \partial G$ für $v \in V$ höchstens aus dem Element $\xi^{-1}(v)$ besteht.

Weil $\varrho(p) = r(u)$, gibt es eine Umgebung U' in U von p , sodass $\varrho > r(u) - \varepsilon$ in U' . $V' = V \cap \xi(U')$ ist dann eine Umgebung in S^{n-1} von $u = \xi(p)$. Wenn $v \in V'$, so ist $q = \xi^{-1}(v)$ in U' und $\varrho(q) > r(u) - \varepsilon$. Daher liegt jeder Punkt $c_v(t)$ mit $t > \varrho(q)$ in C_v , kann also nicht Randpunkt von G sein (sonst wäre nach der vorigen Bemerkung über $C_v \cap \partial G$ $c_v(t) = q$ und $t = \varrho(c_v(t)) = \varrho(q)$). Der Strahl $c_v(\varrho(q), \infty)$ enthält demnach keine Randpunkte von G , folglich auch keine Punkte von \bar{G} . Dagegen liegt $c_v(\varrho(q)) = q$ in ∂G . Deshalb muss die Zahl $\varrho(q)$ gleich dem Maximum $r(v)$ von I^v sein, und $\xi^{-1}(v) = x^{-1}(r(v) \cdot v) = \phi(v)$. Da $v \in V'$ beliebig war, wird $\phi = \xi^{-1}$ auf V' .

Es folgt, dass die Umgebung V' von u durch ϕ diffeomorph in $U \subset \partial G - K$ hinein abgebildet wird, und damit selbst in O liegt. Das gilt für jedes $u \in O$, also ist O offen, und ϕ bildet O lokal diffeomorph ab. Weil aber $\xi \circ \phi$ die Identität auf S^{n-1} , ist $\phi: O \rightarrow \phi(O)$ ein Diffeomorphismus und $\phi^{-1} = \xi$ auf $\phi(O)$.

4.5 SATZ. Setzt man $s=0$ oder 1 im Fall $n \geq 3$, $s=0$ im Fall $n=2$, so gelten die Ungleichungen

$$\int_G \varrho^{-2s} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{G - U_{\varepsilon}(u)} \varrho^{-2s} \leq \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^{r(u)} f(t \cdot u) \cdot t^{n-1-2s} dt \right),$$

$$\int_{\partial G} \varrho^{-s} \geq \int_{S^{n-1}} f(r(u) \cdot u) \cdot r(u)^{n-1-s}.$$

Beweis. Unter Verwendung von Polarkoordinaten im \mathbb{R}^n erhält man

$$\int_G \varrho^{-2s} = \int_{x(\bar{G})} (\varrho \circ x^{-1})^{-2s} \cdot f = \int_{S^{n-1}} \left(\int_{I^u} f(t \cdot u) \cdot t^{n-1-2s} dt \right) \quad (1)$$

(I^u wie in 4.4. Das Integral existiert, da in jedem Fall $n-1-2s \geq 0$). Wegen $I^u \subset (0, r(u)]$ wird das innere Integral

$$\int_{I^u} f(t \cdot u) \cdot t^{n-1-2s} dt \leq \int_0^{r(u)} f(t \cdot u) \cdot t^{n-1-2s} dt \quad \forall u \in S^{n-1}. \quad (2)$$

$r(u) = \varrho(\phi(u))$ ist stetig auf O (Satz 4.4, 3)) und beschränkt auf S^{n-1} , somit ist die rechte Seite von (2) stetig auf O und beschränkt auf S^{n-1} , also wegen Satz 4.4, 2)

integrierbar über S^{n-1} . Aus (1) und (2) ergibt sich jetzt sofort die erste Ungleichung.

Die Funktion $g = |\langle \partial/\partial n, \text{grad } \varrho \rangle|$ ist stetig auf ∂G und $0 \leq g \leq 1$, daher folgt unter Benützung von Satz 4.4. 3):

$$\int_{\partial G} \varrho^{-s} \geq \int_{\phi(O)} g \cdot \varrho^{-s} = \int_O (g \cdot \varrho^{-s}) \circ \phi \cdot J(\phi). \quad (3)$$

Wir berechnen die Jacobideterminante $J(\phi)$ im Punkt $u \in O$. $p = \phi(u)$ liegt in $\partial G \cap \Sigma_t$, $t = \varrho(p) = r(u)$. Weil $(\xi \circ j_t) \circ (\pi_t \circ j) = \xi = \phi^{-1}$ auf $\phi(O)$, wird $(\pi_t \circ j) \circ \phi = \xi_t^{-1}$ ($\xi_t = \xi \circ j_t$ ist umkehrbar nach Satz 4.2) auf O und daher $J(\pi_t \circ j)(p) \cdot J(\phi)(u) = J(\xi_t^{-1})(u)$. Mit Satz 4.2 und 4.3 folgt $g(p) \cdot J(\phi)(u) = f(t \cdot u) \cdot t^{n-1}$ oder $g(\phi(u)) \cdot J(\phi)(u) = f(r(u) \cdot u) r(u)^{n-1}$. Setzt man das in (3) ein, so ergibt sich

$$\int_{\partial G} \varrho^{-s} \geq \int_O f(r(u) \cdot u) \cdot r(u)^{n-1-s}.$$

Hier ist der Integrand auf ganz S^{n-1} definiert, also kann man wegen Satz 4.4, 2) O durch S^{n-1} ersetzen und erhält so die zweite Ungleichung.

5. Beweis der Sätze A und B

5.1. M ist wieder eine n -dimensionale einfachzusammenhängende vollständige RMF. Für die Riemannsche Schnittkrümmung K von M soll jetzt eine obere Schranke $-b^2$ ($b \geq 0$) existieren, d.h. $K(P) \leq -b^2$ für jede Tangentialebene P (2-dimensionaler Unterraum eines Tangentialraums M_p , $p \in M$). Nach dem Satz von Cartan-Hadamard ist dann in jedem Punkt $a \in M$ $\exp: M_a \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus.

Zu einem festen Punkt $a \in M$ hat man wie in 4.1 die lineare Isometrie $y: \mathbb{R}^n \rightarrow M_a$, die Koordinaten $x = (\exp \circ y)^{-1}$ und die Funktion f . J_x sei der lineare Isomorphismus $J_x: M_a \rightarrow (M_a)_x$, definiert durch $J_x(Y) = \dot{\varphi}(0)$, φ die Gerade $\varphi(t) = X + t \cdot Y$ in M_a (vgl. [5] p. 10). Für $u \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x^{-1}(u)} = \exp_* y_* (D_i)_u = \exp_* J_{y(u)} X_i,$$

wo D_i die i -te partielle Ableitung und X_i die Orthonormalbasis $y((0 \dots 1 \dots 0))$ (1 an i -ter Stelle) von M_a bedeutet. Daher wird

$$f(u) = \frac{\|\exp_* J_{y(u)} X_1 \dots\|}{\|X_1 \dots X_n\|} \quad (u \in \mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Hier kann man $X_1 \dots X_n$ durch eine beliebige Basis von M_a ersetzen.

5.2. SATZ. Sei $u \in S^{n-1}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1) \quad f(r \cdot u) \cdot r^{n-1} &\geq (n-1) \cdot b \cdot \int_0^r f(t \cdot u) \cdot t^{n-1} dt \quad \text{falls } n \geq 2, b > 0 \\ 2) \quad f(r \cdot u) \cdot r^{n-2} &\geq (n-2) \cdot \int_0^r f(t \cdot u) \cdot t^{n-3} dt \quad \text{falls } n \geq 3, b = 0 \end{aligned}$$

Im Beweis wird die Idee von Bishop-Crittenden ([3] p. 253) zur Abschätzung der Funktion f benutzt.

Beweis. Wir setzen $X = y(u)$, $c(t) = \exp t \cdot X$, $g(t) = f(t \cdot u) \cdot t^{n-1}$ ($t \geq 0$), und zeigen zunächst: es gibt $n-1$ Jacobifelder $Y_1 \dots Y_{n-1}$ längs der Geodätischen c mit $Y_i(0) = 0$ und $\langle Y_i, \dot{c} \rangle = 0$, sodass für $t \geq 0$

$$g(t) = \frac{\|Y_1 \dots Y_{n-1}\|(t)}{\|\nabla Y_1 \dots \nabla Y_{n-1}\|(0)} \quad (2)$$

(∇ kovariante Ableitung längs c). Begründung: Verwendet man in (1) eine Basis mit $X_n = X$ und $\langle X_i, X \rangle = 0$ für $i = 1 \dots n-1$, so wird

$$g(t) = \frac{\|Y_1(t) \dots Y_n(t)\|}{\|X_1 \dots X_{n-1}\|},$$

wo

$$Y_i(t) = t \cdot \exp_* J_{tX} X_i \quad \text{für } i = 1 \dots n-1, Y_n(t) = \exp_* J_{tX} X.$$

Y_i ist ein Jacobifeld längs c mit $Y_i(0) = 0$ und $\nabla Y_i(0) = X_i$ ([5] p. 132), während $Y_n(t) = \dot{c}(t)$. $\langle Y_i, Y_n \rangle$ ist eine lineare Funktion von t mit $\langle Y_i, Y_n \rangle(0) = 0$ und Ableitung $\langle Y_i, Y_n \rangle'(0) = \langle X_i, X_n \rangle = 0$, also konstant null. Mit $\|Y_n\| = \|X\| = 1$ ergibt sich die Darstellung (2) von g .

Wir berechnen die Ableitung von $\log g$ in einem festen Punkt $t \in \mathbb{R}^+$. Durch eine lineare Transformation lässt sich erreichen, dass die Vektoren $Y_1(t) \dots Y_{n-1}(t)$ orthonormal sind. Dann wird nach (2)

$$\begin{aligned} \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{1}{2} (\|Y_1 \dots Y_{n-1}\|^2)'(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \langle Y_i, Y_i \rangle'(t), \\ \frac{g'(t)}{g(t)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla Y_i, Y_i \rangle(t). \end{aligned} \quad (3)$$

$Y = Y_i$ ist ein Jacobifeld mit $Y(0) = 0$, daher ist

$$\langle \nabla Y, Y \rangle(t) = \int_0^t \|\nabla Y\|^2 - \langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle$$

(R Krümmungstensor von M). Weil $\langle R(Y, \dot{c}) \dot{c}, Y \rangle = k \|Y\|^2$, $k(\tau)$ die Schnittkrümmung K bezüglich der durch $Y(\tau)$, $\dot{c}(\tau)$ aufgespannten Tangentialebene, folgt mit der Voraussetzung $K \leq -b^2$

$$\langle \nabla Y, Y \rangle(t) \geq \int_0^t \|\nabla Y\|^2 + b^2 \|Y\|^2.$$

Wählt man orthonormale Parallelfelder $P_1 \dots P_n$ längs c , sodass $P_n = \dot{c}$ und $Y(t) = P_1(t)$, so gilt die Darstellung

$$Y = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j P_j, \quad \|\nabla Y\|^2 + b^2 \|Y\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_j'^2 + b^2 \cdot \varphi_j^2,$$

wo die φ_j auf \mathbf{R} differenzierbar sind und φ_1 den Randbedingungen $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(t) = 1$ genügt. Mit der vorigen Ungleichung ergibt sich

$$\langle \nabla Y, Y \rangle(t) \geq \int_0^t \varphi_1'^2 + b^2 \cdot \varphi_1^2. \quad (4)$$

Um den kleinstmöglichen Wert des Integrals (4) zu ermitteln, betrachten wir die positiv definite symmetrische Bilinearform

$$I(\varphi, \psi) = \int_0^t \varphi' \psi' + b^2 \cdot \varphi \psi$$

auf der Klasse F der differenzierbaren Funktionen φ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = 1$. Nimmt man für $\psi \in F$ speziell die Lösung der Jacobigleichung $\psi'' - b^2 \cdot \psi = 0$ und integriert den ersten Term von $I(\varphi, \psi)$ partiell, so erhält man $I(\varphi, \psi) = \psi'(t) \forall \varphi \in F$. Es folgt $I(\varphi, \varphi) - \psi'(t) = I(\varphi - \psi, \varphi - \psi) \geq 0$ oder $I(\varphi, \varphi) \geq \psi'(t) \forall \varphi \in F$. Der Wert des Integrals in (4) ist also mindestens $\psi'(t)$. Damit folgt aus (3) und (4)

$$g'(t) \geq (n-1) \cdot \psi'(t) \cdot g(t). \quad (5)$$

Wenn $b > 0$, ist

$$\psi(\tau) = \frac{\sin b\tau}{\sin bt}, \quad \psi'(t) \geq b,$$

also nach (5)

$$(f(t \cdot u) \cdot t^{n-1})' \geq (n-1) \cdot b \cdot f(t \cdot u) \cdot t^{n-1} \quad (\text{Fall } b > 0). \quad (6)$$

Wenn $b=0$, ist $\psi(\tau)=\tau/t$, $\psi'(t)=1/t$, also nach (5)

$$\left(\frac{g(t)}{t}\right)' = \frac{g'(t)}{t} - \frac{g(t)}{t^2} \geq (n-2) \cdot \frac{g(t)}{t^2}$$

oder

$$(f(t \cdot u) \cdot t^{n-2})' \geq (n-2) \cdot f(t \cdot u) \cdot t^{n-3} \quad (\text{Fall } b=0). \quad (7)$$

Integriert man die für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gültigen Ungleichungen (6) und (7) über ein Intervall $[\varepsilon, r]$ ($0 < \varepsilon < r$), so erhält man im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung.

5.3. Es sei jetzt G ein reguläres Gebiet in M mit $a \in G$. Setzt man in Satz 5.2 für jedes $u \in S^{n-1}$ $r=r(u)$, $r(u)$ die Funktion in Satz 4.5, und integriert die Ungleichungen von Satz 5.2 über $u \in S^{n-1}$, so folgt zusammen mit Satz 4.5:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int_{\partial G} 1 &\geq (n-1) \cdot b \cdot \int_G 1 \quad \text{im Fall } n \geq 2, b > 0 \\ 2) \quad \int_{\partial G} \frac{1}{\varrho} &\geq (n-2) \cdot \int_G \frac{1}{\varrho^2} \quad \text{im Fall } n \geq 3, b = 0. \end{aligned}$$

Da $a \in M$ beliebig war, ist damit zunächst der Satz B bewiesen. Weiter sind die Bedingungen (a) und (b) in 3.5 erfüllt durch

$$\begin{aligned} 1) \quad h &= 1 \quad \text{und} \quad \varphi(t) = (n-1) \cdot b \cdot t \quad \text{im Fall } n \geq 2, b > 0, \\ 2) \quad h &= 1/\varrho \quad \text{und} \quad \varphi(t) = (n-2) \cdot t \quad \text{im Fall } n \geq 3, b = 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Sätzen 3.5 und 3.2 ergibt sich hieraus der Satz A.

LITERATUR

- [1] AHLFORS, L. V. und SARIO, L., *Riemann Surfaces*, (Princeton, 1960).
- [2] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E. *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194 (1971).
- [3] BISHOP, R. L. und CRITTENDEN, R. J., *Geometry of Manifolds*, (Academic Press, New York, 1964).
- [4] FELLER, W., *Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Ann. 102 (1930).
- [5] GROMOLL, D., KLINGENBERG, W., und MEYER, W., *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Lecture Notes in Mathematics 55 (1968).
- [6] HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, (Springer, 1963).
- [7] MIRANDA, C., *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Ergebnisse der Mathematik, NF Heft 2 (1955).
- [8] NARASIMHAN, R., *Analysis on real and complex manifolds*, (Masson, Paris, 1968).
- [9] SZEGÖ, G., *Über einige Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. 31 (1930).

Eingegangen den 12. März 1973.