Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1973)

Artikel: Meromorphe Approximationen
Autor: Roth, Alice
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37151

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Meromorphe Approximationen

von ALICE ROTH

§ 1. Approximationen durch rationale Funktionen

1.1. Die rationale Approximation ist in vielen Publikationen der letzten Jahrzehnte behandelt worden. Eine zusammenfassende Darstellung der Sätze und Beweise, sowie eine Literaturübersicht findet man in den Büchern von Zalcman [12] und von Gamelin [4].

Im folgenden interessiert, was rationale Approximationen anbelangt, zunächst der Fall, wo eine *nirgendsdichte* kompakte Teilmenge N der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ vorgelegt ist. Wie üblich bezeichne $C(N)$ die Menge aller auf N stetigen Funktionen und $R(N)$ die Menge aller Funktionen, die auf N durch rationale Funktionen mit Polen ausserhalb N gleichmässig approximierbar sind. Da $R(N) \subset C(N)$, stellte sich bekanntlich die Frage nach den Bedingungen, denen N genügen muss, damit $R(N) = C(N)$ ist. Einfache hinreichende (jedoch nicht notwendige) Bedingungen sind z.B.:

(a) N hat das Flächenmass 0 (Hartogs und Rosenthal [5]); (dass diese Bedingung nicht notwendig ist, folgt bereits daraus, dass diese Autoren mit einem Überdeckungsverfahren zeigten: ist für jede Komponente N_i von N die Bedingung $R(N_i) = C(N_i)$ erfüllt, so ist auch $R(N) = C(N)$);

(b) N zerlegt die Ebene nicht (Lavrentieff [7] und Mergelyan [8]) (notwendig für Polynomapproximation);

(c) N ist von endlichem Zusammenhang (Mergelyan [10]).

Andererseits gibt es aber nirgendsdichte kompakte Mengen N, für die $R(N) \neq C(N)$ ist. Dies wurde 1938 in [11], S. 96 und S. 103, gezeigt. Es handelt sich dabei um eine nirgendsdichte Menge, die dadurch entsteht, dass aus einer abgeschlossenen Kreisscheibe abzählbar viele in ihrem Innern enthaltene und zueinander paarweise fremde offene Kreisscheiben, deren Radiensumme endlich ist, herausgestochen werden. Mergelyan konstruierte 1952 ein allgemeineres Beispiel, bei dem statt der Kreise Jordangebiete auftreten. Später wurde wieder auf das Beispiel mit den Kreisen zurückgegriffen und die betreffende Menge „Swiss cheese" getauft.

Einen grossen Schritt vorwärts bedeutete es, dass Vitushkin 1959 (Darstellung bei Zalcman [12]) zeigte, dass die Bedingung $R(N) = C(N)$ *äquivalent* ist mit gewissen an die Menge N zu stellenden Bedingungen, in denen die analytische Kapazität γ auftritt, u.a. mit der Bedingung:

$$\gamma(K^0(z, \delta) \backslash N) = \gamma(K^0(z, \delta)) = \delta, \qquad z \in N, \quad \delta > 0,$$

wobei $K^0(z, \delta)$ die offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z und dem Radius δ bezeichnet.

1.2. Diese Bedingung zeigt, dass die rationale Approximierbarkeit *lokalen Charakter* besitzt. Dies geht bereits, ohne dass die Kapazität herangezogen wird, aus einem *Satz von Bishop* (Beweise von Garnett und von Bishop, dargestellt bei Zalcman [12], S. 97 und S. 125) hervor: *Es sei M eine echte und kompakte Teilmenge von $S^2 = \mathbf{C} \cup \infty$. Gibt es zu jedem $z \in M$ eine solche abgeschlossene Umgebung K_z, dass*

$$f|_{M \cap K_z} \in R(M \cap K_z),$$

so ist $f \in R(M)$.

1.3 Der folgende Hilfssatz ist das einzige Hilfsmittel aus dem Kreis der rationalen Approximationen, das in §2 verwendet wird.

HILFSSATZ 1: *A und B seien zwei Teilmengen von $\mathbf{C}$, deren in S^2 abgeschlossene Hüllen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ zueinander fremd sind. Ferner sei eine kompakte und nirgendsdichte Teilmenge N von $\mathbf{C}$ gegeben, derart, dass für jede kompakte Teilmenge N^* von N, die zu $\bar{A} \cup \bar{B}$ fremd ist, $R(N^*) = C(N^*)$ ist. Dann kann zu jeder rationalen Funktion q, deren Pole ausserhalb $\bar{B} \cup N$ liegen, und zu jeder positiven Zahl ε eine zweite rationale Funktion r so bestimmt werden, dass*

$$|r(z)| < \varepsilon, \quad z \in A,$$
$$|r(z) - q(z)| < \varepsilon, \quad z \in B,$$
$$|r(z)| < |q(z)| + \varepsilon, \quad z \in A \cup B \cup N.$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass in S^2 zwei solche offene Mengen A_1 und B_1 existieren, dass

(a) $\bar{A}_1 \cap \bar{B}_1 = \emptyset$,

(b) $\bar{A} \subset A_1$ und $\bar{B} \subset B_1$,

(c) q keinen Pol hat auf $\bar{B}_1 \cup N$.

Ferner sei φ eine auf S^2 stetige Funktion mit den Eigenschaften:

$$\varphi(z) = 0, \quad z \in \bar{A}_1,$$
$$\varphi(z) = 1, \quad z \in \bar{B}_1$$
$$\varphi(z) \leqslant 1, \quad z \in S^2.$$

Definiert man:

$$f(z) = 0, \quad z \in \bar{A}_1,$$
$$f(z) = \varphi(z)\, q(z), \quad z \in \bar{B}_1 \cup (N \backslash A_1),$$

so genügt f auf der Menge $\bar{A} \cup \bar{B} \cup N$ den Voraussetzungen des Satzes von Bishop. Da nämlich q auf $\bar{B}_1 \cup N$ keinen Pol aufweist, ist f stetig auf $\bar{A}_1 \cup \bar{B}_1 \cup N$; zu jedem Punkt z von A_1 bezw. B_1 gibt es eine Umgebung K_z, die in A_1 bezw. B_1 liegt, und auf der f selbst rational ist (0 bezw. q); andererseits kann zu jedem Punkt von $N \backslash (A_1 \cup B_1)$ eine abgeschlossene Umgebung K_z gefunden werden, für die $K_z \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$ ist, sodass für $N^* = K_z \cap N$ die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ erfüllt und also $f|_{N^*} \in R(N^*)$ ist. Es gibt somit eine rationale Funktion r:

$$|r(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad z \in (\bar{A} \cup \bar{B} \cup N).$$

$r(z)$ hat die geforderten Eigenschaften.

Anmerkung: Für gewisse Punktmengen kann der Hilfssatz 1 auch ohne den Satz von Bishop bewiesen werden. So ist dann, wenn $\bar{A} \cup \bar{B} \cup N$ die Ebene nicht zerlegt, die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ erfüllt und der Satz von Mergelyan [9] kann angewendet werden; für r kann ein Polynom genommen werden. Ganz elementar wurden in [11] die dortigen Hilfssätze 2c und 3c als Vorläufer von Hilfssatz 1 bewiesen.

§ 2. Approximationen mit Hilfe von Funktionen, die auf dem Kreis oder auf der Ebene meromorph sind

2.1. *Bezeichnungen*

K bezeichnet das offene Einheitskreisgebiet oder die Ebene $\mathbf{C}$, also

$$K = \{z \mid |z| < r\}, \quad \text{wobei } r = 1 \text{ oder } r = \infty,$$

M ist eine in K abgeschlossene Teilmenge von K,
M^0 das Innere von M,
$\bar{M}^0$ die in K abgeschlossene Hülle von M^0,
$N = M \backslash \bar{M}^0$ (der „nirgendsdichte Teil von M"),
$\bar{N}$ die in K abgeschlossene Hülle von N.

M, $\bar{M}^0$ und N dürfen kompakt sein; jedoch ist im folgenden nur der Fall von wirklichem Interesse, wo M nicht kompakt ist, also „an den Rand von K heranreicht". Auch möge beachtet werden, dass zwar $\bar{M}^0 \cap N = \emptyset$ ist, jedoch diese beiden Mengen gemeinsame Randpunkte (auf $\{z \mid |z| = r\}$) aufweisen dürfen.

2.2. Soll eine Funktion f auf der Menge M gleichmässig approximierbar sein durch Funktionen, die auf K meromorph (d.h. bis auf Pole regulär analytisch) sind und deren Pole ausserhalb M liegen, so ist zweierlei notwendig:

(a) $f(z)$ muss für $z \in M$ stetig und für $z \in M^0$ regulär (d.h. in einer Umgebung von z in eine Potenzreihe entwickelbar) sein. Wird, analog wie bei den rationalen Approximationen (dort für eine kompakte Menge M) die Menge aller Funktionen mit dieser Eigenschaft mit $A(M)$ bezeichnet, so ist also notwendig, dass

$$f \in A(M);$$

(b) auf jeder kompakten Teilmenge M^* von M muss die Beschränkung $f|_{M^*}$ gleichmässig approximierbar sein durch rationale Funktionen:

$$f|_{M^*} \subset R(M^*).$$

In einer gewissen offenen Umgebung von M^* ist die annähernde meromorphe Funktion nämlich regulär und also der Satz von Runge über die rationale Approximation anwendbar.

Es fragt sich, ob umgekehrt jede Funktion f, $f \in A(M)$, auf der Menge M gleichmässig approximierbar ist durch auf K meromorphe Funktionen, wenn M so beschaffen ist, dass für jede kompakte Teilmenge M^* die Bedingung $f|_{M^*} \in R(M^*)$ erfüllt ist. Der folgende Satz I zeigt, dass dies mindestens dann zu bejahen ist, wenn M nirgendsdicht (also $M^0 = \emptyset$, $M = N$, $A(M) = C(M)$). Im Falle, dass N nicht kompakt ist (also an den Rand von K heranreicht), zeigt sich gegenüber der rationalen Approximation die Möglichkeit einer tangentialen Approximation, wie sie bei der Approximation mit ganzen Funktionen als „Carleman-Approximation" bekannt ist.

2.3. SATZ I: *N sei eine nirgendsdichte, in K abgeschlossene Teilmenge von K und $\varepsilon(\varrho)$ eine für $0 < \varrho < r$ definierte stetige, positive Funktion. Dann und nur dann, wenn für jede kompakte Teilmenge N^* von N die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$* (s. 1.1.) *erfüllt ist, gibt es zu jeder Funktion f, $f \in C(N)$, eine auf K meromorphe Funktion $m(z)$, für die gilt:*

$$|m(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|), \qquad z \in N.$$

Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich daraus, dass nach einem Satz von Tietze jede auf N^* stetige Funktion ergänzt werden kann zu einer auf N stetigen Funktion und aus der Überlegung (b) von 2.2.

Die Konstruktion der Annäherungsfunktion habe ich für spezielle Punktmengen in [11] mit einfachen Hilfsmitteln durchgeführt. (Sätze I, I′, II, II′ jener Arbeit). Die

dortigen Sätze I und I′ betreffen den Fall, wo M das Flächenmass 0 hat. Deren Beweis kann fast wörtlich übernommen werden, wenn statt des dortigen Hilfssatzes 2c der allgemeinere Hilfssatz 1 der vorliegenden Arbeit benutzt wird. Dies auszuführen erübrigt sich aber, da die Konstruktion der im Satz I vorkommenden Funktion $m(z)$ beim folgenden Hilfssatz 2 als Spezialfall enthalten ist.

2.4. HILFSSATZ 2: *Gegeben seien*

(a) *die Mengen* K, $M=\bar{M}^0 \cup N$, $\bar{N}$ *wie in* 2.1., *wobei* $\bar{N}$ *so beschaffen sein soll, dass für jede kompakte Teilmenge* N^* *von* $\bar{N}$ *die Bedingung* $R(N^*)=C(N^*)$ *erfüllt ist*;

(b) *eine in* K *abgeschlossene Teilmenge* $\hat{N}$ *von* N;

(c) *eine Funktion* f, $f \in C(M)$, *für die gilt*:

$$|f(z)| < \eta \qquad (\eta > 0),\ z \in \bar{M}^0;$$

(d) $\varepsilon(\varrho)$ *wie in Satz* I.

Dann existiert eine auf K *meromorphe Funktion* $m(z)$:

$$|m(z) - f(z)| < 5\eta, \qquad z \in M$$
$$|m(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|), \qquad z \in \hat{N}.$$

Beweis: $\{r_n\}$ sei eine Radienfolge $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Es bedeutet keine Einschränkung, anzunehmen, $\varepsilon(\varrho)$ strebe streng monoton abnehmend gegen 0, sodass die Zahlen

$$\varepsilon_n = \tfrac{1}{4}(\varepsilon(r_n) - \varepsilon(r_{n+1})), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

alle positiv sind und dass

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(r_n) = 0. \tag{2}$$

Ferner kann vorausgesetzt werden, dass $\varepsilon(\varrho)$ so gewählt wurde, dass

$$\sum_1^\infty \varepsilon_\nu = \tfrac{1}{4}\varepsilon(r_1) < \eta/6. \tag{3}$$

Als Punktmengen, die benutzt werden bei der Annäherung von f, führt man ein:

$$K_n = \{z \mid |z| \leqslant r_n\}$$
$$N_n = N \cap \{z \mid r_{n-1} \leqslant |z| \leqslant r_n\}, \qquad \text{wobei } r_0 = 0.$$
$$K_{-2} = K_{-1} = K_0 = N_0 = \emptyset$$

Da $f \in C(M)$ und nach der Voraussetzung über N gibt es eine rationale Funktion q_n:

$$|q_n - f| < \varepsilon_n \quad \text{auf} \quad N_{n-1} \cup N_n \neq \emptyset. \tag{4}$$

Wenn $N_{n-1} = N_n = \emptyset$ ist, braucht q_n nicht erklärt zu werden, da dann auch im folgenden keine Bedingung mit diesem q_n vorkommt.

Aus (4) und der Voraussetzung (c) folgt

$$|q_n| < \eta + \varepsilon_n \quad \text{auf} \quad \bar{M}^0 \cap N_n. \tag{5}$$

Rekursiv wird nun, nachdem $t_0 = 0$ gesetzt wurde, eine zweite Folge von rationalen Funktionen $t_1, t_2, \ldots$ und zu jeder Menge N_n eine kompakte Teilmenge M_n so bestimmt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$t_k \text{ hat keine Pole auf } M, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

$$|t_k| \leqslant \varepsilon_k \text{ auf } \bar{M}_0 \cup K_{k-2}, \text{ wobei } \varepsilon_0 = 0; \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

$$\left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| < \varepsilon_n \text{ auf } N_n \backslash M_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

$$\left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| < \tfrac{7}{3}\eta \text{ auf } M_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Zur Konstruktion der Menge M_n und der Funktion t_n braucht bloss vorausgesetzt zu werden, dass die Funktionen $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ so bestimmt wurden, dass sie (6) und (7) für $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$ erfüllen. Dann folgt zusammen mit (5)

$$\left|q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right| < \eta + \sum_0^n \varepsilon_\nu \quad \text{auf } \bar{M}^0 \cap N_n. \tag{10}$$

Die Menge M_n wird so definiert:

Ist $\bar{M}^0 \cap N_n = \emptyset$, so wird $M_n = \emptyset$ gesetzt.

Falls $\bar{M}^0 \cap N_n \neq \emptyset$, gibt es eine offene Menge O_n, die $\bar{M}^0 \cap N_n$ enthält und auf deren abgeschlossener Hülle $\bar{O}_n$ die Ungleichung von (10) auch noch erfüllt ist. Setzt man

$$M_n = \bar{O}_n \cap N_n,$$

so ist also

$$\left|q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right| < \eta + \sum_1^n \varepsilon_\nu \quad \text{auf } M_n. \tag{11}$$

Weil $\hat{N} \cap \bar{M}^0 = \emptyset$, kann $\bar{O}_n$ so gewählt werden, dass

$$M_n \cap \hat{N} = \emptyset. \tag{12}$$

Nun wird Hilfssatz 1 angewandt auf die rationale Funktion $(q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu)$, die (wegen $f \in C(M)$, (4) und (6)) keine Pole hat auf $N_{n-1} \cup N_n$. Für die im Hilfssatz 1. vorkommenden Mengen A, B, N werden die Mengen $\bar{M}^0 \cup K_{n-2}$, $N_n \backslash M_n$, $N_{n-1} \cup M_n$ eingesetzt. Dabei ist zu beachten, dass die Konstruktion von M_n so erfolgte, dass

$$(\bar{M}^0 \cup K_{n-2}) \cap (N_n \backslash M_n) = \emptyset$$

ist, ferner, dass $N_{n-1} \cup M_n$ eine nirgendsdichte, kompakte Teilmenge von $\bar{N}$ ist und also für jede kompakte Teilmenge N^* die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ nach der Voraussetzung über $\bar{N}$ erfüllt ist. Nach Hilfssatz 1 existiert eine solche rationale Funktion t_n, dass

$$|t_n| < \varepsilon_n \quad \text{auf } \bar{M}^0 \cup K_{n-2} \tag{13}$$

$$\left|\sum_0^n t_\nu - q_n\right| = \left|t_n - \left(q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right)\right| < \varepsilon_n \quad \text{auf } N_n \backslash M_n \tag{14}$$

$$|t_n| < \left|q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right| + \varepsilon_{n+1} \quad \text{auf } N_{n-1} \cup M_n. \tag{15}$$

Setzt man voraus, dass r_1 so gewählt wurde, dass $N_1 \neq \emptyset$, so ist für jede natürliche Zahlt n mindestens eine der Mengen, die in den zur Bestimmung von t_n dienenden Bedingungen (13), (14), (15) vorkommen, nicht leer. Enthält eine Bedingung nur leere Mengen, so wird sie weggelassen.
Aus (15), (11), (3) folgt

$$\left|\sum_0^n t_\nu - q_n\right| \leqslant |t_n| + \left|q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right| < 2\left|q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu\right| + \varepsilon_{n+1} < 2\eta + 2\sum_1^{n+1} \varepsilon_\nu < \tfrac{7}{3}\eta \quad \text{auf } M_n. \tag{16}$$

(13) zeigt, dass aus der vorausgesetzten Existenz der Funktionen $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, die (6) und (7) genügen, die Existenz der Funktion t_n, die (7) erfüllt, folgt. Da $t_0 = 0$, so erfüllt t_0 die Bedingungen (6) und (7) und es folgt also nacheinander die Existenz der Funktionen $t_1, t_2, \ldots$, die (7) genügen und für die ausserdem die durch Einsetzung von $t_0 = 0$ in (8) und (9) übergehenden Abschätzungen (14) und (16) erfüllt sind.

Nun sollte t_n noch der Bedingung (6) genügen. Da, wie bereits bemerkt, $(q_n - \sum_0^{n-1} t_\nu)$ keinen Pol auf $N_{n-1} \cup N_n$ aufweist, folgt aus (13), (14) und (15), dass t_n keinen Pol

hat auf

$$A_n = \bar{M}^0 \cup K_{n-2} \cup N_{n-1} \cup N_n .$$

Durch eine eventuelle Polverschiebung kann aber auch erreicht werden, dass t_n keinen Pol hat auf $N \backslash K_n$. Wäre a Pol auf dieser Menge, so kann, da sie nirgendsdicht ist und a einen positiven Abstand hat von A_n, ein Punkt b, $b \in K \backslash (A_n \cup M)$, so nahe an a gewählt werden, dass sich $(z-a)^{-1}$ und $(z-b)^{-1}$ auf A_n beliebig wenig unterscheiden. Somit kann jede auf A_n rationale Funktion, welche (13), (14), (15) erfüllt, so gut durch eine andere rationale Funktion mit Polen ausserhalb M angenähert werden, dass diese Funktion (13), (14), (15) ebenfalls erfüllt.

Um auf N_n auch noch die Funktion t_{n+1} abzuschätzen, ersetzt man in (15) n durch $(n+1)$

$$|t_{n+1}| < \left|\sum_1^n t_\nu - q_{n+1}\right| + \varepsilon_{n+2} \leqslant \left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| + |q_n - f| + |q_{n+1} - f| + \varepsilon_{n+2} \quad \text{auf } N_n . \tag{17}$$

Aus (17), (8), (4) folgt

$$|t_{n+1}| < 2\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} \quad \text{auf } N_n \backslash M_n , \tag{18}$$

andererseits aus (17), (9), (4), (3)

$$|t_{n+1}| < \tfrac{7}{3}\eta + \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} < \tfrac{5}{2}\eta \quad \text{auf } M_n . \tag{19}$$

Für irgend eine natürliche Zahl n ist nach (7) und (1)

$$\left|\sum_n^\infty t_\nu\right| < \sum_n^\infty \varepsilon_\nu = \tfrac{1}{4}\varepsilon(r_n) \quad \text{auf } K_{n-2}$$

Aus der Voraussetzung (2) und weil $\bigcup_{n=1}^\infty K_{n-2} = K$ ist, so ist

$$m(z) = \sum_1^\infty t_\nu(z)$$

eine im ganzen Gebiet K meromorphe Funktion.

Aus (7), der Voraussetzung (c) und (3) folgt

$$|m - f| \leqslant \sum_1^\infty |t_\nu| + |f| < 2\eta \quad \text{auf } \bar{M}_0 . \tag{20}$$

Für die Abschätzung von $(m-f)$ auf den Mengen $N_n \backslash M_n$ und M_n benutzt man, dass

$$|m-f| \leqslant \left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| + |q_n - f| + |t_{n+1}| + \sum_{n+2}^{\infty} |t_\nu|.$$

So ergibt sich aus (8), (4), (18), (7) und (1)

$$|m-f| < 4\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \sum_{n+2}^{\infty} \varepsilon_\nu < \varepsilon(r_n) \quad \text{auf } N_n \backslash M_n, \tag{21}$$

andererseits aus (9), (4), (19), (7) und (3)

$$|m-f| < \tfrac{7}{3}\eta + \varepsilon_n + \tfrac{5}{2}\eta + \sum_{n+2}^{\infty} \varepsilon_\nu < 5\eta \quad \text{auf } M_n. \tag{22}$$

Aus (20), (21), (22) und da nach (3)

$$\varepsilon(r_n) \leqslant \varepsilon(r_1) < \eta$$

ist, folgt

$$|m(z) - f(z)| < 5\eta, \quad \text{wenn } z \in \left(\bar{M}_0 \cup \bigcup_1^{\infty} N_n\right) = M.$$

Berücksichtigt man, dass aus (12) und $\hat{N} \subset N$

$$\hat{N} \subset \bigcup_1^{\infty} (N_n \backslash M_n)$$

folgt und dass $\varepsilon(r_n) \leqslant \varepsilon(|z|)$, $z \in N_n$, so ergibt sich aus (21)

$$|m(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|), \quad z \in \hat{N}.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Für einen spätern Zweck soll noch folgende *Modifikation* angegeben werden:

Hilfssatz 2 *bleibt richtig, wenn für jede kompakte Teilmenge N^* von $\bar{N}$ die Beschränkung $f|_{N^*}$ in $R(N^*)$ liegt, und wenn die Bedingung $R(N^{**}) = C(N^{**})$ für jede kompakte Teilmenge N^{**} von N* (nicht mehr unbedingt von $\bar{N}$) *zutrifft.*

Die erste Bedingung garantiert die Existenz der rationalen Funktion q_n, die (4) genügt. Die Bedingung $R(N^{**}) = C(N^{**})$ spielt nur noch eine Rolle bei der Konstruk-

tion der Funktion t_n mit dem Hilfssatz 1; zu seiner Anwendbarkeit genügt es, dass N^{**} irgend eine Teilmenge von N sein kann.

2.5. *Anmerkungen zum Hilfssatz* 2:

Der Satz 1 ergibt sich aus dem Hilfssatz 2, wenn $\bar{M}^0=\emptyset$ und $\hat{N}=N$ gesetzt wird. Dann wird der Beweis kürzer, da alle Mengen M_n leer sind. Dies gilt auch dann, wenn $\bar{N}\cap\bar{M}^0=\emptyset$. Auch in diesem Fall kann $\hat{N}=N$ genommen werden, da $N=\bar{N}$. Ist aber $\bar{N}\cap\bar{M}^0\neq\emptyset$, so *darf im allgemeinen* $\hat{N}$ nicht durch $\bar{N}$ und damit (wegen der Stetigkeit von $(m-f)$ auf N) auch *nicht durch N ersetzt werden.* Man wähle z.B. die Menge M so, dass M^0 die obere Halbebene ist, dass N das Flächenmass 0 hat (sodass $R(N^*)=C(N^*)$ ist) und dass jeder Punkt der reellen Achse Häufungspunkt von N ist (also zu $\bar{N}$ gehört). Sei $f\in C(M)$; $f(z)=0$, $z\in\bar{M}^0$. Dann ist die im Hilfssatz 2 vorkommende Funktion $(m-f)$, die auf $\bar{M}^0$ mit m zusammenfällt, auf der abgeschlossenen oberen Halbebene regulär und beschränkt und kann bekanntlich nicht mit beliebiger Raschheit gegen 0 streben, wenn z auf der positiven reellen Achse gegen ∞ strebt, ohne dass $m(z)\equiv 0$, $z\in\mathbf{C}$. Falls also $\hat{N}=N$ gesetzt werden dürfte, so würde bei passender Wahl von $\varepsilon(\varrho)$ folgen, dass $m\equiv 0$ und somit $|f(z)|<\varepsilon(|z|)$, $z\in N$; dies braucht aber nicht zu gelten.

2.6. Wenn die Menge M innere Punkte aufweist, so muss eine auf ihr durch meromorphe Funktionen mit Polen ausserhalb M gleichmässig approximierbare Funktion $f(z)$ für jeden innern Punkt z_0 von M *regulär* sein, d.h. in einer gewissen Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe von $(z-z_0)$ entwickelt werden können. Es sei zunächst angenommen, f sei für alle Punkte von M regulär.

SATZ II: *Vorgelegt sei eine im Gebiet K enthaltene und in ihm abgeschlossene Menge M, eine für $z\in M$ reguläre Funktion $f(z)$ und eine positive Zahl η. Es gibt eine auf K meromorphe Funktion $m(z)$, für die gilt:*

$$|m(z)-f(z)|<\eta, \qquad z\in M.$$

Weil um jeden Punkt von M ein offenes Kreisgebiet gelegt werden kann, auf dem f regulär ist und jede Menge

$$M\cap\{z\mid |z|\leqslant\varrho\}, \qquad 0<\varrho<r,$$

kompakt ist, gibt es eine abzählbare Menge von Gebieten G_n mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $G_i\cap G_k=\emptyset$, wenn $i\neq k$;

(b) $M \subset \bigcup_1^\infty G_n$;

(c) die Gebiete häufen sich höchstens gegen den Rand $\{z \mid |z| = r\}$ von K; d.h., irgend ein Kreisbereich $\{z \mid |z| \leqslant \varrho < r\}$ hat mit nur endlich vielen der Gebiete einen nicht leeren Durchschnitt;

(d) die Funktion f ist in jedem dieser Gebiete G_n eine auf ihm reguläre analytische Funktion f_n; (für $i \neq k$ brauchen aber die Funktionen f_i und f_k nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorzugehen).

Berücksichtigt man diese Vorbemerkung, so ist der Satz II dann, wenn $r = \infty$ ist, also $K = \mathbf{C}$, identisch mit einem Satz, der in [11] bewiesen wurde und zwar mit dem Zusatz

$$\lim_{|z| \to \infty} (m(z) - f(z)) = 0 \quad \text{gleichmässig auf } M.$$

Der entsprechende Zusatz ist im allgemeinen nicht richtig, wenn r endlich ist. Enthält z.B. M einen Kreissektor

$$S = \{z \mid |z| < r, \quad |\arg z| \leqslant p < \pi\}$$

als echte Teilmenge und setzt man $f(z) = 0$, $z \in S$, so würde aus

$$\lim_{|z| \to r} (m(z) - f(z)) = 0 \quad \text{gleichmässig auf } M$$

folgen, dass m identisch 0 ist. Dann müsste auf der ganzen Menge M $|f(z)| < \eta$ sein.

Der in [11] geführte Beweis von Satz II für $r = \infty$ kann, abgesehen von den sich auf den Zusatz beziehenden Stellen, mit geringen Modifikationen übernommen werden für den Fall, dass r endlich und also K ein offenes Kreisgebiet ist. Nachdem man $M_n = M \cap G_n$ gesetzt hat, ist der dort auf S.106 vorkommende Kreisring

$$\{z \mid \nu - 1 \leqslant |z| \leqslant \nu\}$$

zu ersetzen durch einen Kreisring

$$\{z \mid r_{n-1} \leqslant |z| \leqslant r_n\},$$

wobei $0 = r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \ldots$ mit $\lim_{n \to \infty} r_n = r$.
Die Beweismethode ist einfach, indem sie bloss den Satz I (2.3) für den speziellen Fall, dass N das Flächenmass 0 besitzt und ein Cauchy-Integral benutzt.

2.7. Der folgende Satz III enthält für $M^0 = \emptyset$ den Satz I und ist für $N = \emptyset$ im Satz II enthalten.

SATZ III: *Gegeben seien*

(a) *eine im Gebiet K enthaltene und in ihm abgeschlossene Menge M, bei der die in K abgeschlossene Hülle des Innern mit $\bar{M}^0$ bezeichnet wird,*

(b) *eine in K abgeschlossene Teilmenge $\hat{N}$ von $N=M\backslash\bar{M}^0$,*

(c) *eine stetige, positive Funktion $\varepsilon(\varrho)$, $0<\varrho<r$, und eine positive Zahl η.*

Dann und nur dann, wenn für jede kompakte Teilmenge N^* von N $R(N^*)=C(N^*)$ ist, gibt es zu jeder Funktion $f(z)$, die stetig ist für $z\in M$ und die regulär ist für $z\in\bar{M}^0$, eine auf K meromorphe Funktion $m(z)$:

$$|m(z)-f(z)|<\eta, \qquad z\in M \tag{23}$$

$$|m(z)-f(z)|<\varepsilon(|z|), \qquad z\in\hat{N} \tag{24}$$

Notwendigkeit der Bedingung: Ist $f^*\in C(N^*)$, so kann f^* ergänzt werden zu einer auf der ganzen Menge M die Bedingungen erfüllenden Funktion f. Nach einem Satz von Tietze gibt es nämlich (da $N^*\cap\bar{M}^0=\emptyset$) eine Funktion f, $f\in C(M)$; $f(z)=f^*(z)$, $z\in N^*$; $f(z)=0$, $z\in\bar{M}^0$. Aus der Existenz der meromorphen Annäherungsfunktion m folgt nach 2.2, Absatz (b), dass $R(N^*)=C(N^*)$ sein muss.

Konstruktion der Annäherungsfunktion $m(z)$:

Im Gegensatz zu den Vorausetzungen von Hilfssatz 2 ist nicht mehr vorausgesetzt, dass die Bedingung $R(N^*)=C(N^*)$ für jede kompakte Teilmenge N^* von $\bar{N}$ (sondern nur von N) erfüllt sei. Deshalb muss die Menge $\bar{M}^0$ zur Vorbereitung der Anwendung von Hilfssatz 2 ersetzt werden durch eine sie enthaltende Umgebung. Da f auch noch in einer gewissen Umgebung von $\bar{M}^0$ regulär ist und $\bar{M}^0\cap\hat{N}=\emptyset$ ist, gibt es eine offene Menge U:

$$\bar{M}^0\subset U\subset K, \qquad \bar{U}\cap\hat{N}=\emptyset,$$

auf deren in K abgeschlossener Hülle $\bar{U}$ die Funktion f noch regulär ist. Nach Satz II existiert eine auf K meromorphe Funktion $m_1(z)$:

$$|m_1(z)-f(z)|<\eta/5, \qquad z\in\bar{U}.$$

Es darf angenommen werden, m_1 habe keine Pole auf $\bar{U}\cup N$. Für $\bar{U}$ gilt dies ohnehin. Durch eine eventuelle Verschiebung von abzählbar vielen Polen und eine entsprechende Konvergenzüberlegung kann erreicht werden, dass auch keine Pole von m_1 auf $N\backslash\bar{U}$ liegen. Analog wie beim Beweis von Hilfssatz 2 wird benutzt, dass $N\backslash\bar{U}$ nirgendsdicht ist.

Nun wird der Hilfssatz 2 angewandt auf die Funktion $(f-m_1)$, die auf der Menge $\bar{U}\cup N$ stetig ist. Die im Hilfssatz 2 vorkommende Menge $\bar{M}^0$ wird ersetzt durch $\bar{U}$ und die Menge $\bar{N}$ durch die Menge $N\backslash U$, sodass jede kompakte Teilmenge N^* von $N\backslash U$

auch Teilmenge von N ist. Es gibt also eine zweite auf K meromorphe. Funktion $m_2(z)$:

$$|m_2(z) - (f(z) - m_1(z))| < \eta, \quad z \in \bar{U} \cup N,$$
$$|m_2(z) - (f(z) - m_1(z))| < \varepsilon(|z|), \quad z \in \hat{N}.$$

Da $M \subset \bar{U} \cup N$, erfüllt die Funktion $m(z) = m_1(z) + m_2(z)$ die an die Annäherungsfunktion gestellten Bedingungen.

Im allgemeinen darf im Satz III *die Menge* $\hat{N}$ *nur dann, wenn* $N = \hat{N}$ *ist, durch die Menge* N *ersetzt werden* (s. das Beispiel in 2.5., wo f auch den Anforderungen von Satz III genügt.)

Zwischen Satz II und Satz III besteht nicht nur die Beziehung, dass für $N = \emptyset$ III aus II folgt, sondern *Satz* II *kann auch aus Satz* III *hergeleitet werden.* Um dies einzusehen, braucht man nur zu beachten, dass die im Satz II vorkommende Menge M in einer offenen Menge U enthalten ist, auf deren in K abgeschlossener Hülle U f nocht regulär ist.

2.8. In Anbetracht des in 2.6 für den Fall $r = \infty$ geltenden Zusatzes zu Satz II, fragt es sich, unter welchen Bedingungen für M im Satz III

$$\lim_{|z| \to r} (m(z) - f(z)) = 0 \tag{25}$$

nicht bloss auf $\hat{N}$, sondern auf einer in K abgeschlossenen Teilmenge von M, die umfassender ist als jede Menge $\hat{N}$, gleichmässig erfüllbar ist. Zur Untersuchung dieser Frage dient der folgende *Zusatz* 1 *zu Satz* III: *Ist* $h(z)$ *eine auf* K *meromorphe Funktion, die nicht konstant* 1 *ist, und für die*

$$0 < |h(z)| \leqslant 1, \quad z \in M, \tag{26}$$

so darf im Satz III *die Bedingung* (23) *ersetzt werden durch die schärfere Bedingung*

$$|m(z) - f(z)| < \eta\, |h(z)|, \quad z \in M \tag{27}$$

(wobei gleichzeitig (24) weiterbesteht).

Wendet man nämlich den Satz III an auf die Funktion $f(z)/h(z)$, so ergibt sich die Existenz einer auf K meromorphen Funktion $m^*(z)$:

$$\left| m^*(z) - \frac{f(z)}{h(z)} \right| < \eta, \quad z \in M$$
$$\left| m^*(z) - \frac{f(z)}{h(z)} \right| < \varepsilon(|z|), \quad z \in \hat{N}$$

Dann ist $m(z) = m^*(z)\, h(z)$ die gesuchte Annäherungsfunktion.

Eine entsprechende, jedoch ganze, bzw. in einem allgemeinen Gebiet reguläre Hilfsfunktion $h(z)$ wurde bereits von Keldyš-Mergelyan [10], bzw. von Arakeljan [1] bei ihren Approximationen mit Hilfe von ganzen bzw. von in einem Gebiet regulären Funktionen eingeführt, vergl. 4.9.

2.9. Es soll gezeigt werden, dass für $K=\mathbf{C}$ die Bedingung (25) für die ganze Menge M erfüllbar ist. Dies zeigt sich zuerst in trivialer Weise, wenn $M=\mathbf{C}$ ist, denn dann ist f eine ganze Funktion und es kann $m(z)=f(z)$ gesetzt werden. Es darf also angenommen werden, es gebe einen Punkt z_0, $z_0 \in K \backslash M$.

Zusatz 2 *zu Satz* III: *Ist* $K=\mathbf{C}$, *so kann* $m(z)$ *so bestimmt werden, dass*

$$\lim_{|z|\to\infty} (m(z)-f(z)) = 0 \quad \text{gleichmässig auf } M.$$

Ist $z_0 \in K \backslash M$ *und* n *eine beliebige natürliche Zahl, so kann nämlich*

$$|m(z)-f(z)| < \eta\,|z-z_0|^{-n}, \qquad z \in M, \tag{28}$$

und gleichzeitig (24) *erfüllt werden.*

Zum Beweis sei δ, $0<\delta<1$, so klein angenommen, dass $\{z \mid |z-z_0| \leqslant \delta\}$ ausserhalb M liegt. Dann wird im Zusatz 1, 2.8.,

$$h(z) = \delta^n (z-z_0)^{-n} \quad \text{eingesetzt}.$$

Wenn über die Menge M keine weiteren Voraussetzungen als diejenigen von Satz III gemacht werden, so ist die durch (28) gegebene *Annäherungsstärke bestmöglich* in dem Sinn, dass $|z-z_0|^{-n}$ nicht durch eine rascher als jede solche Potenzfunktion für $|z|\to\infty$ gegen 0 strebende positive Funktion ersetzt werden kann, ausser dann, wenn f selbst meromorph ist und $m=f$ gesetzt wird. Enthält nämlich M das Kreisäussere $\{z \mid 0<\varrho<|z|<\infty\}$, so hat $(m-f)$ in ∞ entweder eine Nullstelle von bestimmter Ordnung oder es ist $m \equiv f$. Hingegen braucht bei speziellen Voraussetzungen über M die Approximation (28) nicht bestmöglich zu sein, vergl. 4.10.

2.10. Kann dann, wenn die Menge M innere Punkte aufweist, nicht bloss (25), sondern sogar (24) für die ganze Menge M erfüllt sein? Dass solche Mengen existieren und zwar für endliches r, wie für $r=\infty$, zeigt:

Zusatz 3 *zu Satz* III: *Sind sämtliche Komponenten von* $\bar{M}^0$ *kompakt*, (ohne dass dies auch für $\bar{M}^0$ selbst zu gelten braucht) *so kann die Annäherungsfunktion* m *so bestimmt werden, dass*

$$|m(z)-f(z)| < \varepsilon(|z|), \qquad z \in M.$$

Skizze des Beweises: Es gibt eine Folge von in K enthaltenen abgeschlossenen Jordanbereichen $B_1, B_2, B_3, \ldots$, mit den Eigenschaften:

(a) B_n liegt im Innern B_{n+1}^0 von B_{n+1},

(b) $\bigcup B_n = K$,

(c) $(B_{2n} \backslash B_{2n-1}^0) \cap \bar{M}^0 = \emptyset$, ($\bar{M}^0$ liegt also ganz in der Vereinigungsmenge der getrennten Bereiche B_1, $(B_3 \backslash B_2^0), \ldots (B_{2n+1} \backslash B_{2n}^0) \ldots$).

Werden die Voraussetzungen über f, die Voraussetzung $R(N^*) = C(N^*)$ und der Satz von Bishop (1.2.) berücksichtigt, so zeigt sich, dass für jede kompakte Teilmenge M^* von M die Bedingung $f_{M^*} \in R(M^*)$ erfüllt ist. Somit existieren rationale Funktionen $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$:

$$|q_n - f| < \varepsilon_n \quad \text{auf } M \cap (B_{2n} \backslash B_{2n-3}^0), \qquad \text{wobei } B_{-1} = \emptyset,$$

Ist t_1 eine rationale Funktion ohne Pole auf M, für die $|t_1 - q_1| < \varepsilon_1$ auf B_2, so erhält man durch die fortgesetzte Anwendung von Hilfssatz 1 (1.3.) eine weitere Folge von rationalen Funktionen $t_2, t_3, \ldots$, deren Pole ausserhalb M liegen (was durch eine eventuelle Polverschiebung erreicht wird) und für die gilt:

$$|t_n| < \varepsilon_n \quad \text{auf } B_{2n-3}$$

$$\left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| < 2\varepsilon_{n-1} + 2\varepsilon_n \quad \text{auf } M \cap (B_{2n-2} \backslash B_{2n-3}^0)$$

$$\left|\sum_1^n t_\nu - q_n\right| < \varepsilon_n \quad \text{auf } M \cap (B_{2n} \backslash B_{2n-2}^0)$$

Durch geeignete Wahl der positiven Zahlen ε_n erreicht man, dass $\sum_1^\infty t_\nu$ eine auf K meromorphe Funktion m darstellt und dass

$$|m(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|), \qquad \text{wenn } z \in M.$$

Anmerkung: Es kann durch andere Beispiele belegt werden, dass die Bedingung von Zusatz 3 nicht notwendig ist für die Möglichkeit einer $\varepsilon(|z|)$-Approximation (24) für die ganze Menge M.

2.11. Der Zusatz 2 in 2.9. zeigt, dass im Fall $K = \mathbf{C}$ die Bedingung (25) stets erfüllbar ist. Wie bereits im Anschluss an den Satz II in 2.6. bemerkt wurde, gilt dies im allgemeinen nicht, wenn K das Kreisgebiet ist. Im folgenden *Beispiel* wird eine Menge M konstruiert, bei der zwar sämtliche Komponenten von M^0 an den Kreisrand heranreichen und die $\varepsilon(|z|)$-Annäherung (24) nicht möglich ist, jedoch immerhin eine tangentiale Approximation (25) erreicht wird:

$\{a_n\}$ sei eine abzählbare Menge von Punkten auf dem Rand $\{z \mid |z|=1\}$ von K. Jedem Punkt a_n sei eine offene Kreisscheibe D_n, $D_n \subset K$, deren Rand den Rand von K in a_n berührt, zugeordnet. Wird mit $\bar{D}_n$ die in K abgeschlossene Hülle von D_n bezeichnet, so mögen die Kreise so gewählt werden, dass $\bar{D}_i \cap \bar{D}_k = \emptyset$, wenn $i \neq k$.

Sei ferner $\hat{N}$ eine in K enthaltene und abgeschlossene nirgendsdichte Menge, die zu $\bigcup \bar{D}_n$ fremd ist und bei der jede kompakte Teilmenge N^* die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ erfüllt. Dann kann zu jeder Funktion f, die auf

$$M = \bigcup \bar{D}_n \cup \hat{N}$$

stetig und auf $\bar{M}^0 = \bigcup \bar{D}_n$ regulär ist, eine auf K meromorphe Funktion m gefunden werden, die ausser (23) und (24) auch (25) gleichmässig auf M erfüllt.

Beweis: Sei $\varphi(z)$ die Funktion, die man erhält durch die Festsetzungen:

$$\varphi(z) = 4(z - a_n)^{-1}, \quad z \in \bar{D}_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$\varphi(z) = 2, \quad z \in \hat{N}.$$

Nach Satz III existiert eine auf K meromorphe Funktion k:

$$|k(z) - \varphi(z)| < 1, \quad \text{wenn } z \in M.$$

Die Funktion $h = k^{-1}$ erfüllt auf M die Bedingung (26) und zudem ist

$$\lim_{|z| \to 1} h(z) = 0 \quad \text{auf } \bigcup \bar{D}_n$$

und zwar (wie eine elementargeometrische Überlegung zeigt) gleichmässig auf $\bigcup \bar{D}_n$. Aus dem Satz III, seinem Zusatz 1 in 2.8. und daraus, dass $\lim_{\varrho \to 1} \varepsilon(\varrho) = 0$ vorausgesetzt werden darf, folgt die Existenz einer auf K meromorphen Funktion m, welche die Abschätzungen (23) und (24) erfüllt und für die

$$\lim_{|z| \to 1} (m(z) - f(z)) = 0 \quad \text{gleichmässig auf } M.$$

Anmerkung: Im Hinblick auf Anwendungen dieses Beispiels zur Konstruktion von von auf K meromorphen Funktionen mit gewissem Randverhalten ist beachtenswert: zwar ist $\bigcup \bar{D}_n \cap N = \emptyset$, jedoch können Punkte von $\{a_n\}$ gemeinsame Randpunkte der beiden Mengen sein. Ferner: die Beschränkungen $f|_{D_n}$ sind voneinander unabhängige reguläre analytische Funktionen und auch unabhängig von $f|_N$.

2.12. Zurückkommend auf das in 2.2. angeschnittene Problem fragt es sich, ob der Satz III richtig bleibt, wenn die in ihm vorkommende Voraussetzung über die Funk-

tion f ersetzt wird durch die Voraussetzung

$$f \in A(M),$$

dass also f bloss noch auf M^0 statt auf $\bar{M}^0$ regulär zu sein braucht. Dies ist nicht möglich, ohne dass dafür an die *Menge M schärfere Forderungen* gestellt werden. Es gibt nämlich eine kompakte Menge $M = \bar{M}^0$ (für die also $N = \emptyset$ und somit die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ dahinfällt), bei der $R(M) \neq A(M)$ ist, s. Zalcman [12], 9.8.

Wie in 2.2. (b) ausgeführt wurde, kann dann die Funktion f dieses Gegenbeispieles auch nicht durch Funktionen, die meromorph sind in einem M enthaltenden Kreisgebiet K, gleichmässig approximiert werden.

Falls die Menge M kompakt ist und also die Annäherungsfunktionen nach 2.2. (b) als rational angenommen werden können, muss M die Forderung $R(M) = A(M)$ erfüllen. Vitushkin (vgl. Zalcman [12], S. 100) stellte für eine kompakte Menge M unter der Verwendung der „AC-Kapazität α" Bedingungen auf, die mit $R(M) = A(M)$ äquivalent sind.

Wie bereits beim Satz III die Bedingung für die meromorphe Approximation auf einer nicht kompakten Menge M zurückgeführt wurde auf das Problem der rationalen Approximierbarkeit auf gewissen Teilmengen (dort der Mengen N^*), kann vermutlich auch dann, wenn bloss $f \in A(M)$ vorausgesetzt wird, eine solche Zurückführung gelingen. Insbesondere stellt sich die *Frage*:

Existiert zu jeder Funktion f, $f \in A(M)$, eine auf K meromorphe Funktion m, welche die Bedingungen (23) *und* (24) *von Satz* III *erfüllt, wenn die Menge M so beschaffen ist, dass für jeden abgeschlossenen Kreisbereich K^*, $K^* \subset K$, die Bedingung*

$$R(M \cap K^*) = A(M \cap K^*) \tag{29}$$

erfüllt ist?

Mindestens unter gewissen noch spezielleren Voraussetzungen über die Menge M genügt die Voraussetzung $f \in A(M)$, zunächst natürlich im Fall $M^0 = \emptyset$ (Satz I), da dann $A(M) = C(M)$ ist, jedoch auch für die im Zusatz 3 (2.10.) vorkommende Menge, wenn die Voraussetzung $R(N^*) = C(N^*)$ ersetzt wird durch die schärfere Voraussetzung (29). (Dies geht aus dem Beweis jenes Zusatzes hervor.) Vor allem genügt die Voraussetzung $f \in A(M)$ bei den Mengen, die im §4 als A_K-Mengen eingeführt werden. Im übrigen steht meines Wissens die Anwort auf die oben gestellte Frage noch aus.

Immerhin kann folgender Hinweis gemacht werden: *Es genügt, das gestellte Problem für den Spezialfall $M = \bar{M}^0$ (bei dem* (24) *wegfällt) zu lösen, also zu untersuchen, ob der Satz* II *für $M = \bar{M}^0$ richtig bleibt unter den veränderten Voraussetzungen.*

Angenommen, dies treffe zu, so folgt, dass auch beim Satz III die Voraussetzungen $f \in A(M)$ und (29) hinreichend sind für die Existenz der den Bedingungen (23) und (24)

genügenden Annäherungsfunktion $m = m_1 + m_2$. Zuerst folgt nämlich ähnlich wie beim Beweis von Satz III (jedoch einfacher, da statt der dortigen Menge $\bar{U}$ direkt $\bar{M}^0$ eintritt) aus dem veränderten Satz II die Existenz der Funktion m_1, die auf $\bar{M}^0$ die Bedingung $|m_1 - f| < \eta/5$ erfüllt. Dann ergibt die am Schluss von 2.2. angegebene Modifikation von Hilfssatz 2 die Existenz der Funktion m_2, für die

$$|m_2(z) - (f(z) - m_1(z))| < \eta, \qquad z \in M,$$
$$|m_2(z) - (f(z) - m_1(z))| < \varepsilon(|z|), \qquad z \in \hat{N}.$$

Die dortigen Voraussetzungen $R(N^{**}) = C(N^{**})$ und $f_{N^*} \in R(N^*)$ sind nämlich erfüllt, wenn $f \in A(M)$ und (29) zutrifft.

Für weitere Untersuchungen über die Approximationen mit Hilfe von meromorphen Funktionen dürfte die vollständige Abklärung des Problems von Bedeutung sein. Doch habe ich den Satz III hauptsächlich aufgestellt im Hinblick auf die *Konstruktion von meromorphen Funktionen mit vorgeschriebenem Randverhalten*, worüber ich in einer späteren Arbeit zu berichten hoffe. Für diese Anwendungen spielt es aber keine wesentliche Rolle, die Voraussetzung über f im Satz III zu ersetzen durch die Voraussetzung $f \in A(M)$, besonders, da dies erkauft werden muss durch kompliziertere Voraussetzungen über die Menge M. Die Untersuchung, wann eine kompakte nirgendsdichte Menge N^* die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ erfüllt, ist nämlich einfacher als die Beantwortung der Frage, wann eine kompakte Menge M^* mit inneren Punkten die Bedingung $R(M^*) = A(M^*)$ erfüllt (Unterschied der in 1.1. erwähnten Kapazität γ und der AC-Kapazität α).

§ 3. Approximationen mit Hilfe von Funktionen, die in einem beliebigen offenen Gebiet meromorph sind

3.1. *Im Satz* III *von* 2.7. *kann für K ein beliebiges offenes Gebiet G genommen werden. Dabei wird die frühere Funktion $\varepsilon(|z|)$ ersetzt durch eine auf $\hat{N}$ stetige und positive Funktion $\varepsilon(z)$.* (Natürlich können diese beiden Aenderungen auch in den im Satz III enthaltenen Sätzen I und II vorgenommen werden.)

Nachdem die im §2 angewandten Beweismethoden bereits so gestaltet wurden, dass K sowohl das offene Kreisgebiet als auch die Ebene $\mathbf{C}$ sein kann, genügen einige einfache Anpassungen der Beweise, wenn G eingeführt wird.

Die in den Beweisen von Hilfssatz 2 in 2.4. und von Satz II in 2.6. vorkommende Folge $\{K_n\}$ von Kreisscheiben wird ersetzt durch die Folge $\{\bar{G}_n\}$ der abgeschlossenen Hüllen einer Folge $\{G_n\}$ von Gebieten, die eine normale Gebietsausschöpfung von G bilden.

Bekanntlich versteht man darunter eine Folge von Teilgebieten von G mit den Eigenschaften:

(a) $\bigcup G_n = G$,

(b) $\bar{G}_n \subset G_{n+1}$,

(c) jedes Gebiet G_n wird berandet von endlich vielen paarweise fremden Jordankurven, die ganz in G liegen.

Natürlich muss dementsprechend der Durchschnitt einer Menge mit $\{z \mid r_{n-1} \leqslant z \leqslant r_n\}$ ersetzt werden durch den Durchschnitt mit $(\bar{G}_n \backslash G_{n-1})$, wobei $G_0 = \emptyset$.

Die Einführung der neuen Funktion $\varepsilon(z)$ kann so erfolgen: es sei $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > \cdots$ eine monoton abnehmende Folge positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$, für die $\eta_n < \varepsilon(z)$, wenn $z \in (\bar{G}_n \backslash G_{n-1}) \cap \hat{N}$.

Dann wird im Beweise von Hilfssatz 2 die dort vorkommende Zahl $\varepsilon(r_n)$ ersetzt durch η_n.

Nach diesen beiden Modifikationen können alle anderen Ueberlegungen bei den Beweisen von Hilfssatz 2 und von Satz II übernommen werden. Der sich auf diese beiden Sätze stützende Beweis von Satz III bleibt unverändert, wenn K durch G ersetzt wird und für die Funktionen m_1, m_2, m auf G meromorphe Funktionen genommen werden.

3.2. *Die zur Verbesserung der Approximationsstärke auf Mengen mit inneren Punkten dienenden Zusätze* 1 (in 2.8.) *und* 3 (*in* 2.10) (und ihre Beweise) *sind unverändert gültig, wenn für K ein beliebiges Gebiet G eintritt.*

§ 4. Approximationen mit regulären analytischen Funktionen

4.1. Welche Bedingung muss die Menge M erfüllen, damit im (nach §3) für ein allgemeines offenes Gebiet G verallgemeinerten Satz III als approximierende Funktion m eine auf G reguläre analytische Funktion genommen werden darf? Die Approximation mit regulären analytischen Funktionen wurde im Gegenstaz zur meromorphen Approximation in einer grösseren Reihe von Publikationen behandelt.

Zunächst ist leicht einzusehen, dass $G \backslash M$ keine Komponente enthalten darf, deren in G abgeschlossene Hülle kompakt ist. (Alle Komponenten von $G \backslash M$ müssen vielmehr „an den Rand von G heranreichen"). Bereits bei Keldyš-Mergelyan [10] wurde gezeigt, dass bei einem unbeschränkten Teilkontinuum von $\mathbf{C}$ diese Bedingung nicht hinreicht.

4.2. *Definition der A_G-Menge*:

Eine Menge M heisst dann und nur dann eine A_G-Menge, wenn M im offenen Gebiet G enthalten und abgeschlossen ist und wenn eine solche normale Gebietsausschöpfung $\{G_n\}$ (s.3.1.) *existiert, dass die in G abgeschlossene Hülle jeder Komponente von $G \backslash M$ und von $G \backslash (M \cup \bar{G}_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, nicht kompakt ist.*

Bezeichnet G^* die Einpunktkompaktrifizierung von G, so ist diese Definition äquivalent damit, dass G^*/M *zusammenhängend und lokal susammenhängend ist.*

Im Zusammenhang mit Approximationsproblemen wurden für $G=\mathbf{C}$ die A_G-Menge (mit anderen Bezeichnungen) zuerst in [11] und dann bei Keldyš-Mergelyan [10] eingeführt. Arakeljan [1] legt ein allgemeines Gebiet D zugrunde und gebraucht die Bezeichnung K_D-Menge.

Die Bezeichnung mit den Buchstaben A und G möge darauf hinweisen, dass die A_G-Mengen identisch sind mit denjenigen Teilmengen M von G, auf denen jede Funktion $f, f \in A(M)$, auf M gleichmässig angenähert werden kann durch auf G reguläre Funktionen g, $g \in A(G)$ (s. Satz A_1 in 4.5.).

4.3. HILFSSATZ 3: *Ist M eine A_G-Menge, m eine auf G meromorphe Funktion, deren Pole ausserhalb M liegen und ε eine positive Zahl, so existiert eine solche auf G reguläre analytische Funktion g, dass*

$$|g(z) - m(z)| < \varepsilon, \qquad z \in M.$$

Dieser Hilfssatz wurde in [11] (S. 110) für den Fall $G=\mathbf{C}$ bewiesen und zwar mit dem Zusatz

$$\lim_{|z| \to \infty} (g(z) - m(z)) = 0.$$

(Ein entsprechender Zusatz ist im allgemeinen für $G \neq \mathbf{C}$ nicht gültig.)

Der mit einer Polverschiebung geführte Beweis kann, abgesehen von den sich auf den Zusatz beziehenden Stellen, übernommen werden, wenn die dortige Folge von Kreisbereichen ersetzt wird durch die Folge der abgeschlossenen Hüllen der besondern in der Definition von 4.2. vorkommenden Gebietsausschöpfung $\{G_n\}$.

4.4. HILFSSATZ 4: *Ist M eine A_G-Menge und G_n ein Glied der in* 4.2. *eingeführten Folge $\{G_n\}$,) ferner N^* eine kompakte Teilmenge von $N = M \backslash \bar{M}^0$, so ist*

(a) $R(M \cap \bar{G}_n) = A(M \cap \bar{G}_n)$,

(b) $R(N^*) = C(N^*)$.

(Bedeutung von R, A, C s. 1.1. und 2.2.)

Der Beweis kann mit dem folgenden Satz von Mergelyan [10] geführt werden (unter Anwendung des Satzes von Bishop auch mit dem einfacheren Satz von Mergelyan über die Polynomapproximation):

Ist M eine kompakte Menge, deren Komplement $\mathbf{C} \backslash M$ aus endlich vielen Komponenten besteht, so ist $R(M) = A(M)$.

Aus 4.2. folgt, dass jede Komponente von $G_n \backslash M$ zusammenhängt mit $\mathbf{C} \backslash \bar{G}_n$. Da $\mathbf{C} \backslash \bar{G}_n$ endlich viele Komponenten aufweist, so gilt dies auch für $\mathbf{C} \backslash (M \cap \bar{G}_n) = (\mathbf{C} \backslash \bar{G}_n) \cup (\bar{G}_n \backslash M)$ und damit ist (a) bewiesen.

G_n werde so gewählt, dass $N^* \subset G_n$. Da $N^* \cap \bar{M}^0 = \emptyset$ ist, hat $\mathbf{C} \backslash N^*$ (unabhängig

davon, dass M eine A_G-Menge ist) höchstens so viele Komponenten wie $\mathbf{C}\backslash(M \cap \bar{G}_n)$, also wieder endlich viele. Daraus folgt (b).

4.5. Nach dem Hilfssatz 4b ist die im Satz III von 2.7. vorkommende Bedingung $R(N^*)=C(N^*)$ für eine A_G-Menge erfüllt. Durch die Anwendung von Hilfssatz 4 auf den für G verallgemeinerten Satz III folgt also

HILFSSATZ 5: *Jede auf einer A_G-Menge M stetige und auf $\bar{M}^0$ reguläre Funktion f kann auf M gleichmässig angenähert werden durch Funktionen, die auf G regulär analytisch sind.*

Dieser Satz ist enthalten in einem *Satz von Arakeljan* [1], der (mit den Bezeichnungen, die hier eingeführt wurden) lautet:

(A_1) *Ist M eine im offenen Gebiet G enthaltene und abgeschlossene Menge, so kann dann und nur dann, wenn M eine A_G-Menge ist, jede Funktion $f, f \in A(M)$, auf M gleichmässig angenähert werden durch auf G reguläre analytische Funktionen.*

4.6. Um auf der in G abgeschlossenen Teilmenge $\hat{N}$ von $N=M\backslash\bar{M}^0$ zur gleichmässigen Approximation auf der ganzen Menge M hinzu noch eine $\varepsilon(z)$-Annäherung zu erhalten, kann der folgende Hilfssatz, der eine für eine A_G-Menge geeignete Modifikation von Hilfssatz 2 in 2.4. darstellt, verwendet werden.

HILFSSATZ 6: *Gegeben seien eine A_G-Menge M, die Menge $\hat{N}$ wie oben, eine Funktion $f, f \in A(M)$, die auf $\bar{M}^0$ der Abschätzung $|f|<\eta\,(\eta>0)$ genügt, und eine auf $\hat{N}$ stetige und positive Funktion $\varepsilon(z)$. Dann existiert eine auf G reguläre analytische Funktion g:*

$$|g(z)-f(z)| < 5\eta, \quad z \in M,$$
$$|g(z)-f(z)| < \varepsilon(z), \quad z \in \hat{N}.$$

Zurückgreifend auf den Beweis von Hilfssatz 2 wird zunächst die Folge $\{K_n\}$ ersetzt durch die Folge $\{\bar{G}_n\}$, wobei die besondere Gebietsausschöpfung von 4.2. genommen wird. Die Einführung von $\varepsilon(z)$ erfolgt wie in 3.1. Sodann müssen noch folgende Änderungen vorgenommen werden:

(a) Die Existenz der rationalen Funktion q_n, die der Bedingung (4) genügt, folgt jetzt aus $f \in A(M)$ und dem Hilfssatz 4a.

(b) Bei der Einführung der Funktion t_n wird die Bedingung (6) ersetzt durch die Bedingung

$$\sum_0^k t_\nu \text{ hat keine Pole} \quad \text{auf } M \cup \bar{G}_k; \tag{6'}$$

dies kann mit einer eventuellen Polverschiebung nach Runge auf Grund der Definition der A_G-Menge erreicht werden.

(c) Die Anwendbarkeit von Hilfssatz 1 zur Konstruktion der Funktion t_n ist jetzt deshalb möglich, weil nach dem Hilfssatz 4b für jede kompakte Teilmenge N^* von $(N_{n-1} \cup N_n) \cap N$ die Bedingung $R(N^*) = C(N^*)$ erfüllt ist.

Alle anderen Ueberlegungen des Beweises von Hilfssatz 2 bleiben unverändert. Da (6) durch (6′) ersetzt wurde, ist $g = \sum_1^\infty t_\nu$ eine auf G reguläre Funktion.

4.7. *Korollar zum Satz* III:

Gegeben seien ein beliebiges offenes Gebiet G von $\mathbf{C}$, *eine A_G-Menge M, eine in G abgeschlossene Teilmenge $\hat{N}$ von $N = M \backslash \bar{M}^0$, eine auf N stetige und positive Funktion $\varepsilon(z)$ und eine positive Konstante η. Dann gibt es zu jeder auf M stetigen und auf $\bar{M}^0$ regulären Funktion f eine auf G reguläre analytische Funktion g, für die*

$$|g(z) - f(z)| < \eta, \quad z \in M, \tag{30}$$

$$|g(z) - f(z)| < \varepsilon(z), \quad z \in \hat{N}. \tag{31}$$

Beweis: Mit M ist, wie aus 4.2. sofort folgt, auch $\bar{M}^0$ eine A_G-Menge. Nach dem Hilfssatz 5 existiert eine auf G reguläre Funktion g_1:

$$|g_1 - f| < \tfrac{1}{5}\eta \quad \text{auf } \bar{M}^0.$$

Weil die Funktion $(g_1 - f)$ auf M stetig und auf $\bar{M}^0$ regulär ist, ist erst recht $(g_1 - f) \in \in A(M)$ und nach dem Hilfssatz 6 in 4.6. existiert eine zweite auf G reguläre Funktion g_2:

$$|g_2(z) - (f(z) - g_1(z))| < \eta, \quad z \in M,$$
$$|g_2(z) - (f(z) - g_1(z))| < \varepsilon(z), \quad z \in \hat{N}.$$

Die auf G reguläre analytische Funktion $g = g_1 + g_2$ genügt den Bedingungen (30) und (31).

Setzt man $M^0 = \emptyset$ (wobei $f \in C(N)$ wird und (30) wegfällt), so ergibt sich aus diesem Korollar (oder bereits aus Hilfssatz 6) ein *zweiter Satz* A_2 *von Arakeljan* [1], der dem Satz I von §2 für den Fall dass N eine A_G-Menge ist, entspricht. Dieser Satz und der in 4.5. zitierte Satz A_1 wurden unter der Annahme, dass N bezw. M eine zusammenhängende A_C-Menge ist, bereits von *Keldyš-Mergelyan* [10] bewiesen.

Abgesehen vom noch folgenden Satz IV und der Anregung zur Einführung eines allgemeinen Gebietes G, entstand die vorliegende Arbeit unabhängig von [1]. Auf diese Publikation von Arakeljan machte mich dann Herr Prof. A. Pfluger, dem ich auch für weitere Hinweise dankbar bin, aufmerksam.

Während der Satz III gemäss den Ausführungen von 2.12. nicht richtig bleibt, wenn

dort die Bedingung, f sei regulär auf $\bar{M}^0$, ersetzt wird durch die Bedingung, f sei regulär auf M^0, ist diese schwächere Bedingung nach Arakeljan beim Hilfssatz 5 und (wie Satz IV zeigen wird) auch beim Korollar von Satz III hinreichend. Der wichtige Schritt der Beschränkung auf die Voraussetzung $f \in A(M)$ wurde bei den rationalen Approximationen schon seit längerer Zeit ausgeführt, zuerst von Walsh bei seiner Verschärfung des Satzes von Runge, dann aber vor allem, nachdem Mergelyan bei seinen Beweisen nicht bloss Sätze über allgemeine konforme Abbildungen, sondern die Formel von Green verwendete. Diese beiden Hilfsmittel habe ich nicht benutzt beim sehr elementaren Beweis von Satz II (den einzig man, wie ich in 2.12. ausführte, bei der Beschränkung auf die Bedingung $f \in A(M)$, zu ändern braucht).

4.8. Die beiden Sätze A_1 und A_2 von Arakeljan und das Korollar zum Satz III in 4.7. sind enthalten im

SATZ IV: *Gegeben seien die Mengen G, M, $\hat{N}$, die Funktion $\varepsilon(z)$ und die Konstante η wie im Korollar* 4.7.

Dann und nur dann, wenn M eine A_G-Menge ist, gibt es zu jeder Funktion f, die $A(M)$ angehört, eine auf G reguläre analytische Funktion $g(z)$, die den Abschätzungen (30) *und* (31) *genügt.*

Die Notwendigkeit der Bedingung wurde bereits von Arakeljan bei seinem durch Weglassung von (31) entstehenden Satz A_1 begründet.

Die Konstruktion der Annäherungsfunktion g erfolgt wie beim Beweis des Korollars in 4.7. mit dem einzigen Unterschied, dass jetzt die Existenz von g_1 wegen der verminderten Annahme $f \in A(M)$ mit dem Satz A_1 von Arakeljan (für den Spezialfall $M = \bar{M}^0$) begründet wird.

Der Satz IV dürfte alle früheren Resultate über die Approximation einer Funktion f, $f \in A(M)$, auf einer A_G-Menge M durch auf G reguläre analytische Funktionen umfassen.

Ist M kompakt, so handelt es sich um rationale Approximationen (für einfachzusammenhängendes G um Polynomapproximationen), die früh einsetzten mit den Sätzen von Weierstrass, Runge und Walsh, denen der bereits in 1.1. zitierte Satz von Lavrentieff folgte und die abgeschlossen wurden durch den Satz von Mergelyan, bei dem die Menge M die allgemeinste kompakte A_G-Menge ist, indem das Komplement $\mathbf{C} \backslash M$ endlich viele Komponenten aufweist.

Spezialfälle von Satz IV für eine nicht kompakte A_G-Menge wurden in den folgenden Publikationen bewiesen: Carleman [3], Roth [11], Keldyš-Lavrentieff-Mergelyan (Zusammenfassung in [10]), Bagemihl und Seidel [2], Kaplan [6] und Arakeljan [1] (in chronologischer Reihenfolge, leider vielleicht unvollständig).

Alle Autoren erreichen dann, wenn M nirgendsdicht ist, eine Carleman-Approximation (31). Ist $G = \mathbf{C}$, also die Annäherungsfunktion ganz, so gelingt für eine Menge

mit innern Punkten stets wenigstens eine tangentiale Annäherung (s. Zusatz 2′ in 4.10.) Hingegen kommt noch nirgends im Fall $M^0 \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$, ausser der gleichmässigen Approximation auf der ganzen Menge M eine gleichzeitige Carleman-Approximation auf einer Teilmenge von N vor, wie dies der Satz IV aufweist.

Die Approximation auf der allgemeinen A_G-Menge erfolgte durch Arakeljan, nachdem Kaplan bereits früher das allgemeine Gebiet G eingeführt hatte, jedoch mit ganz speziellem M.

Anmerkung: Wie beim Satz III kann im Satz IV die Menge $\hat{N}$ im allgemeinen nur dann durch N ersetzt werden, wenn $N = \bar{N}$ ist. Beim Beispiel von 2.5. kann M leicht so konstruiert werden, dass eine A_G-Menge entsteht.

4.9. *Zusatz* 1′ *zu Satz* IV: *Ist h eine auf G reguläre Funktion, welche die Bedingung*

$$0 < |h(z)| \leqslant 1, \quad z \in M, \tag{32}$$

erfüllt, so darf im Satz IV *die Bedingung* (30) *ersetzt werden durch*

$$|g(z) - f(z)| < \eta\, |h(z)|, \quad z \in M, \tag{33}$$

wobei (31) *weitergilt.*

Dieser Zusatz kommt mit (33), jedoch ohne (31), bei Keldyš-Mergelyan (für $G = \mathbf{C}$) und bei Arakeljan vor.

Der Beweis verläuft ganz entsprechend wie der einfache Beweis vom Zusatz 1 in 2.8., nur dass jetzt der Satz IV angewendet wird.

4.10. Besonders interessiert wieder der Fall $G = \mathbf{C}$, wobei die Annäherungsfunktion g jetzt eine *ganze Funktion* ist. Analog wie bei den meromorphen Approximationen (Zusatz 2 in 2.9.) gilt:

Zusatz 2′ *zu Satz* IV: *g kann so bestimmt werden, dass* $\lim_{|z| \to \infty} (g(z) - f(z)) = 0$ *gleichmässig auf M.*

Zum Beweis genügt es, eine ganze Funktion h zu finden, die ausser (32) noch die Bedingung $\lim_{|z| \to \infty} h(z) = 0$ gleichmässig auf M erfüllt, und dann den Zusatz 1′ von 4.9. anzuwenden. Die Konstruktion von h ist nicht mehr so einfach wie in 2.9., wo h den Pol z_0, $z_0 \notin M$, haben durfte.

Bei Keldyš-Mergelyan [10] wird eine solche Hilfsfunktion h für den Fall, dass M eine zusammenhängende $A_{\mathbf{C}}$-Menge ist, konstruiert. Dabei werden *bestmögliche Approximationen* für den allgemeinen Fall und bei den Spezialfällen, wo M in einem Winkelraum oder in einem Parallelstreifen liegt, ausgeführt. Ausserdem wird das *Wachstum* der Annäherungsfunktion untersucht.

Arakeljan [1] gibt eine Verfeinerung und Ergänzung jener Resultate an, wobei M eine allgemeine $A_{\mathbf{C}}$-Menge ist.

Diesen, eine längere und subtile Herleitung erfordernden Untersuchungen habe ich ergänzend bloss beizufügen, dass bei allen diesen Approximationen, entsprechend 4.9., *zusätzlich auf der Teilmenge $\hat{N}$ die stärkere Annäherung* (31) *möglich ist.*

4.11. Das im Zusatz 3 von 2.10. angeschnittene Problem, welche zusätzlichen Bedingungen die Menge M (mit inneren Punkten) erfüllen muss, damit auf ganz M eine *Carleman-Approximation* (31) möglich ist, wurde für den Fall, dass M eine A_G-Menge ist, vollständig gelöst von *Nersesian* [14].

4.12. Entsprechend wie in 2.11., gibt es auch, wenn $G \neq \mathbf{C}$, A_G-Mengen, bei denen die Komponenten des Innern an den Rand von G heranreichen und für die doch im Satz IV die Abschätzungen (30) und (31) ergänzt werden können durch die Bedingung, dass $(g(z)-f(z))$ gegen 0 strebe, wenn z sich dem Rand von G nähert. Man wähle etwa im Beispiel von 2.11. die Menge $\hat{N}$ so, dass M eine A_G-Menge ist.

4.13. Nach der Beendigung der vorliegenden Arbeit wurde mir freundlicherweise Einsicht gewährt in eine noch unveröffentlichte Untersuchung von *Brown und Gauthier* [13], die einen Approximationssatz enthält, aus dem sich Satz IV ohne weiteres ableiten lässt, nämlich: (mit den Bezeichnungen dieses §)

Ist M eine A_G-Menge und $\varepsilon(z)$ eine auf M stetige und positive Funktion, die zudem konstant ist auf jeder Komponente von M^0, so gibt es zu jeder Funktion f, die $A(M)$ angehört, eine solche auf G reguläre analytische Funktion g, dass

$$|g(z)-f(z)| < \varepsilon(z), \qquad z \in M.$$

Der Beweis stützt sich auf den Satz A_1 (4.5.) von Arakeljan und wird dadurch ganz kurz, dass eine raffiniert einfach konstruierte Hilfsfunktion h eingeführt wird, wobei

$$0 < |h(z)| < \varepsilon(z), \qquad z \in M,$$

und dann die Methode von Zusatz 1′ in 4.9. angewandt wird.

Der Kunstgriff von Brown und Gauthier lässt sich ohne die Anwendung des Satzes A_1, jedoch mit dem Hilfssatz 5 in 4.5. leicht so modifizieren, dass dadurch das Korollar in 4.7. kürzer bewiesen werden kann, nämlich ohne den Hilfssatz 6.

Die von Brown und Gauthier angewandte Konstruktion von h kann nicht übertragen werden auf eine bei den meromorphen Approximationen vorkommende Menge M, sofern sie nicht eine A_G-Menge ist.

4.14. *Ausblick*: Sollte es gelingen, die zur Einführung der reduzierten Bedingung $f \in A(M)$ im Satz III von 4.7. notwendigen und hinreichenden schärferen Bedingungen für M zu finden (dass es sich z.B. erweisen sollte, dass die in 2.12. gestellte Frage positiv zu beantworten ist), so liessen sich die Resultate von §4 aus der meromorphen Approximation recht kurz ableiten. Aus dem entsprechend modifizierten Satz III könnte dann mit den einfachen Hilfssätzen 3 und 4 sofort der Satz A_1 und daraus die Hilfsfunktion und der Approximationssatz von Brown und Gauthier hergeleitet werden.

QUELLENANGABEN

[1] N. U. ARAKELJAN, *Approximation complexe et propriétés des fonctions analytiques*, Actes Congrès intern. Math. 1970, tome 2, p. 595–600.
[2] F. BAGEMIHL and W. SEIDEL, *Some boundary properties of analytic functions*. Math. Z., *61* (1954), 186–199.
[3] T. CARLEMAN, *Sur un théorème de Weierstrass*, Ark. Mat. Astr. Fys. 20 B, No 4 (1927).
[4] TH. W. GAMELIN, *Uniform Algebras*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1969.
[5] F. HARTOGS und A. ROSENTHAL, *Über Folgen analytischer Funktionen*, Math. Annalen *100* (1928), 212–263, und *104* (1931), 606–610.
[6] W. KAPLAN, *Approximation by entire functions*, The Michigan Math. J., *3*, No. 1 (1955/56), 43–52.
[7] M. A. LAVRENTIEFF, *Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes*, Hermann, Paris 1936.
[8] S. N. MERGELYAN, *On a theorem of M. A. Lavrentieff*, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 1, Vol. 3, (Russische Originalpublikation 1951), p. 281–286.
[9] S. N. MERGELYAN, *On the representation of functions by series of polynomials on closed sets*, ibid. p. 287–293. (Original 1951.)
[10] S. N. MERGELYAN, *Uniform approximations to functions of a complexe variable*, ibid. p. 294–391. (Original 1952).
Diese Publikation enthält auch eine Darstellung früherer Arbeiten von *Keldyš* und *Lavrentieff* über Approximationen mit ganzen Funktionen.
[11] ALICE ROTH, *Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen*, Comment. Math. Helv., *11* (1938), 77–125.
[12] L. ZALCMAN, *Analytic Capacity and Rational Approximation*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1968).
Enthält insbesondere die Darstellung der Arbeiten von *Vitushkin*.
[13] LEON BROWN und P. M. GAUTHIER, *The local range set of a meromorphic function*. (Noch unveröffentlicht.)
[14] NERSESIAN, A. A. *On the Carleman sets*. Izvestija Akad. Nauk Armjan. SSR, Mat. *6* (1971), 465–471.

Morillonstr. 28
CH 3007, Bern

Eingegangen den 7. Dezember 1972 / 2. April 1973.