

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1973)  
  
**Artikel:** Konvexe Polytope mit Symmetriegruppe  
**Autor:** Ewald, G. / Voss, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37150>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Konvexe Polytope mit Symmetriegruppe

G. EWALD und K. VOSS

## 1. Einleitung

Besitzen zwei konvexe Polytope des  $d$ -dimensionalen Euklidischen Raumes  $E^d$  kombinatorisch isomorphe Randkomplexe, dann nennt man sie kombinatorisch äquivalent. Die Untersuchung von Klassen kombinatorisch äquivalenter Polytope gehört zu den zentralen Fragen der Theorie konvexer Polytope. Insbesondere fragt man nach der Anzahl solcher Klassen bei vorgegebenen Zusatzbedingungen, etwa Eckenzahl oder Eckenzahl und zentrale Symmetrie (s. Grünbaum [1, 2], McMullen-Shepard [4]). Als besonders schlagkräftige Methode bei derartigen Anzahlbestimmungen hat sich die Methode der sogenannten Gale-Diagramme erwiesen. Mit ihrer Hilfe kann man die Anzahl von Klassen konvexer Polytope im  $E^d$  in vielen Fällen explizit berechnen. rechnen.

Wir geben in der vorliegenden Arbeit zunächst eine neue Darstellung der Gale-Diagramme an (Abschnitt 2). Diese gestattet es, einen Zerfällungssatz für die Gale-Diagramme von Polytopen mit beliebig vorgegebener Symmetriegruppe zu beweisen (Abschnitt 3) und so eine Reihe weiterer Anzahlbestimmungen von Klassen kombinatorisch äquivalenter Polytope vorzunehmen (Abschnitt 4). In einer auf die vorliegende Arbeit folgenden Veröffentlichung dehnen P. Kleinschmidt und C. Schulz den Kreis derartiger Anzahlbestimmungen weiter aus [3].

Genaue Formulierung und Ausarbeitung der Beweise der Formeln (19), (20), (22) sowie Formel (21) stammen von Herrn W. Schulte-Ladbeck [5]. Herr B. Kind hat wertvolle Hinweise und Bemerkungen, insbesondere zu Abschnitt 4, beigesteuert.

## 2. Gale-Diagramme

Wir betrachten im  $d$ -dimensionalen affinen Raum  $R^d$  ein  $n$ -tupel von Punkten  $x_i$ , die nicht in einem echten Teilraum von  $R^d$  enthalten sind. Jedem solchen  $n$ -tupel  $X = (x_1, \dots, x_n)$  lässt sich nach folgender Vorschrift ein  $n$ -tupel  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  von Vektoren in einem Vektorraum der Dimension  $p = n - d - 1$  zuordnen: Das Gleichungssystem der affinen Abhängigkeiten im Punktsystem  $X$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \quad (1)$$

wobei die  $\alpha_i$  Zahlen des zu Grunde gelegten Körpers sind, hat  $p$  linear unabhängige Lösungsvektoren  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , die wir als Zeilenvektoren einer  $p \times n$ -Matrix schreiben;

die Spalten dieser Matrix sind die Vektoren von  $X^{*1}$ ). Wir nennen  $X^*$  ein zu  $X$  gehöriges Gale-Diagramm<sup>2)</sup>.

Im folgenden wird eine mehr koordinatenunabhängige Definition von  $X^*$  gegeben, wie sie sich für die Diskussion affiner Symmetrien als zweckmässig erweist und aus der sich auch sonst die Eigenschaften der Zuordnung  $X \rightarrow X^*$  leicht ablesen lassen.

Man kann die Punkte  $x$  von  $R^d$  als Vektoren eines Vektorraums  $W$  der Dimension  $q = d + 1$  auffassen, indem man zu den  $d$  Koordinaten  $\xi_j$  in  $R^d$  eine weitere Koordinate  $\xi_{d+1} = 1$  hinzufügt:

$$R^d = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_d, 1)\} \subset W. \quad (2)$$

Affine Abhängigkeit (1) in  $R^d$  ist dann gleichbedeutend mit linearer Abhängigkeit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \quad \text{in } W. \quad (1')$$

Seien jetzt  $U, V, W$  Vektorräume über dem Grundkörper  $K$  mit

$$\dim U = p, \quad \dim V = n, \quad \dim W = q \quad \text{und} \quad n = p + q.$$

In  $V$  sei eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  fest gewählt. Der  $n$ -dimensionale Vektorraum  $V^*$  sei dual zu  $V$ , das heisst: vermöge einer nicht ausgearteten bilinearen Funktion

$$(v^*, v) \quad \text{für} \quad v^* \in V^*, v \in V \quad (3)$$

mit Werten in  $K$  kann  $V^*$  als Menge der linearen Funktionen  $V \rightarrow K$  aufgefasst werden und  $V$  als Menge der linearen Funktionen  $V^* \rightarrow K$ .  $e_1^*, \dots, e_n^*$  sei die zu  $e_1, \dots, e_n$  duale Basis in  $V^*$ :

$$(e_i^*, e_j) = \delta_{ij}. \quad (4)$$

In  $W$  sei ein  $n$ -tupel von Vektoren mit maximalem Rang gegeben:

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in W, \quad \text{Rang } X = q.$$

$g$  sei diejenige lineare Abbildung, bei der

$$g: V \rightarrow W, \quad g(e_i) = x_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Wegen  $\text{Rang } X = q$  ist  $g$  epimorph, und für den Kern von  $g$  gilt

$$\hat{U} = \text{Kern } g, \quad \dim \hat{U} = n - q = p.$$

<sup>1)</sup> Vergleiche Grünbaum [1].

<sup>2)</sup> Bei Grünbaum: Gale transform.

Der Teilraum  $\hat{U}$  von  $V$  ist der Raum der linearen Abhängigkeiten im Vektorsystem  $X$ : für einen Vektor  $v \in V$  gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \hat{U} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0. \quad (6)$$

Wir wählen noch einen Isomorphismus  $f$  zwischen  $U$  und  $\hat{U}$  und fassen  $f$  als Abbildung von  $U$  in  $V$  auf. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0 \quad (7)$$

exakt, d.h.  $f$  ist monomorph,  $g$  epimorph und

$$\text{Bild } f = \text{Kern } g \quad (8)$$

Wir betrachten ausserdem die zu (7) duale Sequenz

$$0 \leftarrow U^* \xleftarrow{f^*} V^* \xleftarrow{g^*} W^* \leftarrow 0. \quad (7^*)$$

Dabei sind  $f^*, g^*$  die zu  $f$  und  $g$  dualen Abbildungen; für die lineare Abbildung  $f^*$  gilt

$$(f^* v^*, u) = (v^*, f u) \quad (9)$$

Für den Übergang von (7) zu (7\*) gilt: Der Funktor\* ist exakt, also  $f^*$  epimorph,  $g^*$  monomorph und  $\text{Kern } f^* = \text{Bild } g^*$  5).

Wir definieren nun das  $n$ -tupel  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  von Vektoren in  $U^*$  durch die zu (5) dualen Formeln

$$f^*: V^* \rightarrow U^*, \quad x_i^* = f^*(e_i^*) \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (5^*)$$

Da  $e_1^*, \dots, e_n^*$  eine Basis und  $f^*$  epimorph ist, wird  $\text{Rang } X^* = p$  6).  $X^*$  heisst *Gale-Diagramm* von  $X$ , der von  $X^*$  aufgespannte Vektorraum  $U^*$  *Gale-Raum* von  $X$ . Normiert man die von Null verschiedenen  $x_i^*$  auf Länge 1 (bezüglich eines Skalarprodukts in  $U^*$ ), so sprechen wir vom *normierten Gale-Diagramm*.

Ein Isomorphismus  $\varphi: W \rightarrow W$  führt  $X = (x_1, \dots, x_n)$  in das linear äquivalente  $n$ -tupel  $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$  über, wobei  $x'_i = \varphi(x_i)$ . Ersetzt man  $g$  in (5) durch  $g' = \varphi g$ , so wird  $\text{Kern } g = \text{Kern } g'$ ; zu  $X$  und  $X'$  gehört also dasselbe  $X^*$ .

3) Für die Abbildungsmatrizen  $A$  und  $B$  von  $f$  und  $g$  bedeutet dies:  $A$  und  $B$  haben maximalen Rang, und es ist  $BA=0$ .

4) Wählt man auch in  $U$  und  $U^*$  zueinander duale Basen  $u_1, \dots, u_p$  und  $u^*_1, \dots, u^*_p$ , so werden die Abbildungsmatrizen von  $f$  und  $f^*$  zueinander transponiert: aus  $f(u_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j$  folgt wegen (9) und (4)  $(f^* e^*_k, u_i) = \alpha_{ik}$ , d.h.  $f^*(e^*_k) = \sum_{i=1}^p \alpha_{ik} u^*_i$ .

5) Dies folgt z.B. daraus, dass die in Anmerkung 3) genannten Eigenschaften beim Übergang zu den transponierten Matrizen erhalten bleiben.

6) Da die Vektoren  $f(u_i)$  in Anmerkung 4) eine Basis von  $\hat{U}$  bilden, kann man die  $x_i^*$  nach der Am anfang dieses Abschnitts erwähnten Vorschrift berechnen.



Andererseits ist  $f$  nur bis auf einen Isomorphismus  $\psi: U \rightarrow U$  bestimmt; Abänderung von  $f$  bewirkt einen Isomorphismus von  $U^*$ .  $X^*$  ist daher nur bis auf lineare Äquivalenz in  $U^*$  bestimmt:

*Durch (5\*) wird jeder Klasse  $\{X\}$  linear äquivalenter  $n$ -tupel von Vektoren in  $W$  mit Rang  $X=q$  eine Klasse  $\{X^*\}$  linear äquivalenter  $n$ -tupel von Vektoren in  $U^*$  mit Rang  $X^*=p$  zugeordnet.<sup>7)</sup>*

Zwischen den Eigenschaften von  $X$  und  $X^*$  besteht folgender Zusammenhang:

LEMMA 1.  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$  gilt dann und nur dann, wenn es eine lineare Funktion  $L: U^* \rightarrow K$  gibt, so dass  $L(x_i^*) = \alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.*  $L$  werde analog (3) als Element  $u \in U$  aufgefasst, so dass  $L(x_i^*) = (x_i^*, u)$ . Indem man der Reihe nach (6), (4) und (8), (9) und (5\*) anwendet, erhält man:  $\sum \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow v = \sum \alpha_j e_j \in \hat{U} \Leftrightarrow (e_i^*, v) = \alpha_i$  und  $v = f(u) \Leftrightarrow (x_i^*, u) = \alpha_i$ .

Die Abbildung  $\Gamma: \{X\} \rightarrow \{X^*\}$  hat folgende Eigenschaften<sup>8)</sup>:

(a)  $\Gamma$  ist involutorisch,  $X$  ist also auch Gale-Diagramm von  $X^*$ ; insbesondere ist  $\Gamma$  bijektiv: zu vorgegebenem  $X^*$  gibt es bis auf lineare Äquivalenz genau ein  $X$ .

Dies folgt daraus, dass der Übergang von (7) zu (7\*) und von den  $e_i$  zu den  $e_i^*$  involutorisch ist.

(b)  $L$  sei eine nicht identisch verschwindende lineare Funktion  $W \rightarrow K$  und

$$R^d = \{x \mid L(x) = 1\} \subset W \quad 9).$$

Dann gilt (bis auf lineare Äquivalenz in  $W$ ):

$$x_i \in R^d \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^* = 0. \quad (10)$$

Dies folgt aus Lemma 1, angewandt auf  $X^*$  (an Stelle von  $X$ ) und  $W$  (an Stelle von  $U^*$ ).

Von jetzt an sei  $K$  der Körper der reellen Zahlen. Wir betrachten speziell Punktsysteme  $X$  in  $R^d$ , also Vektorsysteme in  $W$  mit der Zusatzbedingung (b).

(c) Bekanntlich sind die Punkte  $X = (x_1, \dots, x_n)$  in  $R^d$  dann und nur dann die Ecken eines konvexen Polytops, wenn

$$x_i \notin \text{conv}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Übergang zu  $X^*$  liefert auf Grund von Lemma 1 folgendes zum Eckenkriterium (11) äquivalente *Halbraumkriterium*:

<sup>7)</sup> Da die  $X$  bijektiv den Abbildungen  $g$  oder  $g^*$  zugeordnet sind, entsprechen die Klassen  $\{X\}$  auch bijektiv den  $q$ -dimensionalen Teilräumen  $\hat{W}^* = g^*W^*$  von  $V^*$ , die Klassen  $\{X^*\}$  den  $p$ -dimensionalen Teilräumen  $\hat{U} = fU$  von  $V$ .

<sup>8)</sup> Auf Grund von Anmerkung 7) kann  $\Gamma$  auch als Dualitätsabbildung im Sinne der projektiven Geometrie aufgefasst werden, die jedem  $q$ -dimensionalen Teilraum  $\hat{W}^*$  von  $V^*$  den  $p$ -dimensionalen Teilraum  $\hat{U}$  von  $V$  zuordnet, der durch Nullsetzen von (3) definiert ist.

<sup>9)</sup> Bei geeigneter Wahl der Basis in  $W$  bekommt man für  $R^d$  die Darstellung (2).

(11\*) Zu jeder nicht identisch verschwindenden linearen Funktion  $L: U^* \rightarrow K$  gibt es mindestens zwei Indizes  $i$  mit  $L(x_i^*) > 0$ .<sup>10)</sup>

(d) Für die Seiten eines konvexen Polytops mit Ecken  $X = (x_1, \dots, x_n)$  gilt das folgende *Schwerpunktkriterium*:

Ein Teilsystem von  $X$  – z.B.  $x_{k+1}, \dots, x_n$  – spannt dann und nur dann eine Seite eines konvexen Polytops auf, wenn es positive Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  gibt mit  $\alpha_1 x_1^* + \dots + \alpha_k x_k^* = 0$ .<sup>11)</sup>

Für die  $0$ -dimensionalen Seiten ( $k = n - 1$ ) ist in (d) ein zu (c) äquivalentes Eckenkriterium enthalten.

(e)  $X$  und  $\tilde{X}$  seien die Eckenmengen zweier konvexer Polytope in  $R^d$ .

Aus (d) folgt: Die Polytope sind genau dann kombinatorisch äquivalent, wenn es eine bijektive Zuordnung zwischen  $X$  und  $\tilde{X}$  gibt, so dass im Gale-Raum folgendes gilt: Liegt  $O$  im relativen Innern der konvexen Hülle einer Teilmenge  $Y^*$  von  $X^*$ , dann liegt  $O$  auch im relativen Innern der konvexen Hülle der entsprechenden Teilmenge  $\tilde{Y}^*$  von  $\tilde{X}^*$ , und umgekehrt.

Diese Bedingung ändert sich nicht, wenn man einen der Vektoren  $x_i^*$  mit einem positiven Faktor multipliziert. Entsprechendes gilt beim Halbraumkriterium (c). Man kann diese Bedingungen daher im normierten Diagramm nachprüfen. Ist ein normiertes Diagramm mit (11\*) vorgegeben, so lassen sich die Längen der  $x_i^*$  so festlegen, dass (10) gilt.

(f) Beim Übergang von  $X$  zu  $X^*$  kann es vorkommen, dass verschiedene Punkte von  $X$  im Gale-Diagramm zusammenfallen (z.B.  $x_1 \neq x_2$ , aber  $x_1^* = x_2^*$ ), oder dass zusammenfallende Punkte (etwa  $x_1 = x_2$ ) in  $X^*$  aufgespalten werden ( $x_1^* \neq x_2^*$ ). Hierüber beweisen wir folgendes Kriterium:

**LEMMA 2.** Im Gale-Diagramm ist  $x_1^* = x_2^* = \dots = x_{k+1}^*$  ( $k \geq 0$ ) dann und nur dann, wenn in  $R^d$  folgendes gilt: Es ist  $k \leq d$ ; die Punkte  $x_1, \dots, x_{k+1}$  spannen ein nicht-ausgeartetes  $k$ -Simplex auf, welches in dem affinen  $k$ -dimensionalen Teilraum  $S$  liegt; der Schwerpunkt  $s = (1/(k+1))(x_1 + \dots + x_{k+1})$  und die Punkte  $x_{k+2}, \dots, x_n$  spannen zusammen einen affinen Teilraum  $T$  der Dimension  $d - k$  auf;  $S \cap T$  ist der Punkt  $s$ .

*Beweis.* Aus dem Bestehen der Abhängigkeiten (10) und  $x_1^* - x_i^* = 0$  für  $i = 2, \dots, k+1$  folgt nach Lemma 1 (in dualer Form) die Existenz von linearen Funktionen  $L(x)$  (gemäß (b)) und  $L_i(x)$ , für welche  $L_i(x_1) = 1$ ,  $L_i(x_i) = -1$ ,  $L_i(x_j) = 0$  für alle  $j \neq 1, i$ , und daher auch  $L_i(s) = 0$ . Dabei sind  $L, L_2, \dots, L_{k+1}$  linear unabhängig, wie man bestätigt, indem man in einer Abhängigkeit  $\lambda L + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_{k+1} L_{k+1} = 0$  der Reihe nach  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  einsetzt. Die  $k$  Gleichungen  $L_i(x) = 0$  ( $i = 2, \dots, k+1$ )

<sup>10)</sup> Das heisst: bei jeder nicht-trivialen Abhängigkeit (1') der  $x_i$  treten mindestens zwei positive  $\alpha_i$  auf. Man beachte, dass beim  $d$ -Simplex in  $R^d$   $n = d + 1$ , also  $p = 0$  ist.

<sup>11)</sup> Das heisst (nach Lemma 1 in dualer Form): es gibt ein  $L: W \rightarrow K$  mit  $L(x_i) > 0$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $L(x_i) = 0$  für  $i = k+1, \dots, n$ . Für  $k \geq 1$  bedeutet das: es gibt eine Stützhyperebene von  $X$  in  $R^d$ , die mit  $X$  den Durchschnitt  $x_{k+1}, \dots, x_n$  hat.

definieren einen Teilraum  $T_1$  von  $W$  mit der Dimension  $d+1-k$ , welcher  $s$  und  $x_{k+2}, \dots, x_n$  enthält; Schnitt mit  $L(x)=1$  liefert den affinen Teilraum  $T$  von  $R^d$ .

Für die Vektoren in  $W$  gilt  $\text{Rang}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \text{Rang}(x_1, \dots, x_k, s)$  und

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rang}(x_1, \dots, x_k, s) = a \leq k+1 \\ \text{Rang}(s, x_{k+2}, \dots, x_n) = b \leq d+1-k \quad (\text{in } T_1), \end{array} \right\} \quad (12)$$

ferner  $\text{Rang}(x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) = \text{Rang}(x_1, \dots, x_k, s, x_{k+2}, \dots, x_n) = d+1$ . Wegen  $L(s)=1$  ist  $s \neq 0$ . Da die beiden Vektorsysteme in (12) also den ganzen Raum  $W$  aufspannen, aber den Vektor  $s \neq 0$  gemeinsam haben, folgt  $a=k+1$ ,  $b=d+1-k$ . Daraus ergeben sich die Behauptungen von Lemma 2 über die Lage der  $x_j$ .

Haben umgekehrt die  $x_j$  die in Lemma 2 angegebene Lage, so spannt  $T$  zusammen etwa mit  $x_3, \dots, x_{k+1}$  eine Hyperebene in  $R^d$  auf, die den Mittelpunkt der Strecke  $x_1x_2$  enthält; es gibt also ein  $L_2(x)$  mit  $L_2(x_1)=1$ ,  $L_2(x_2)=-1$ ,  $L_2(x_j)=0$  für alle  $j>2$ . Nach Lemma 1 gilt daher  $x_1^* - x_2^* = 0$ . Analog folgt  $x_1^* = x_i^*$  für  $i=3, \dots, k+1$ .

Lemma 2 folgt auch aus den im Abschnitt 3 bewiesenen Sätzen 1 und 2.

(g) Aus Lemma 1 folgt ferner:

**LEMMA 3.** *Im Gale-Diagramm ist  $x_1^* = 0$  dann und nur dann, wenn die Punkte  $x_2, \dots, x_n$  in einer Hyperebene von  $R^d$  liegen. Ist  $X$  Eckenmenge eines Polytops, so hat man also eine Pyramide mit Spitze  $x_1$ .*

Im Hinblick auf die beabsichtigten Symmetriebetrachtungen nehmen wir nun folgende Normierungen vor: Erstens identifizieren wir  $U$  mit  $\hat{U} = \text{Kern } g$ : Es sei also  $U = \text{Kern } g \subset V$  und  $f$  die Injektion von  $U$  in  $V$ . Zweitens führen wir in  $V$  ein Skalarprodukt ein und wählen für  $e_1, \dots, e_n$  eine feste orthonormierte Basis. Drittens nehmen wir  $V^* = V$ ,  $U^* = U$  und für (3) das Skalarprodukt in  $V$ . Gemäss (4) wird dann  $e_i^* = e_i$  für  $i=1, \dots, n$ . Wir haben

$$V = U \oplus U^\perp, \quad U^\perp = \text{orthogonales Komplement von } U.$$

Aus (9) folgt  $(f^*v, u) = (v, u)$  für alle  $u \in U$ , an Stelle von (5\*) haben wir also jetzt

$$f^* = \text{Orthogonalprojektion von } V \text{ auf } U. \quad (5')$$

Das Gale-Diagramm entsteht also durch Projektion der Basis  $e_i$  auf den Raum  $U$  der Abhängigkeiten.

### 3. Zerfällungssatz

Wir untersuchen nun affine Abbildungen  $\varphi$  von  $R^d$ , welche das Punktsystem  $X$  in sich transformieren. Als Nullpunkt in  $R^d$  nehmen wir den Schwerpunkt  $s$  von  $X$ .  $R_0^d$  sei der Teilraum von  $W$ , der aus  $R^d$  durch Parallelverschiebung in Richtung  $-s$  ent-

steht, bei dem also in (2)  $\xi_{d+1}=0$  gesetzt ist; man hat

$$W = R_0^d \oplus W^1. \quad (13)$$

Wegen  $\varphi(s)=s$  kann man  $\varphi$  als lineare Abbildung von  $W$  auffassen, die  $R_0^d$  (und  $R^d$ ) in sich abbildet und  $W^1$  elementweise festlässt.

Wir betrachten eine Gruppe  $\hat{G}$  von Permutationen der Elemente  $1, 2, \dots, n$ . Zu jeder Permutation

$$\hat{\varphi}: v \rightarrow i_v \quad \text{für } v = 1, \dots, n \quad (14)$$

gibt es höchstens eine affine Abbildung

$$\varphi: R^d \rightarrow R^d \quad \text{mit} \quad \varphi(x_v) = x_{i_v} \quad \text{für } v = 1, \dots, n, \quad (14)$$

denn da unter den  $x_j$   $d+1$  Punkte in allgemeiner Lage vorkommen, ist  $\varphi$  durch die Eigenschaft (14) eindeutig festgelegt.

Wir sagen,  $\hat{G}$  lasse sich als affine Symmetriegruppe von  $X$  darstellen, wenn es zu jedem  $\hat{\varphi} \in \hat{G}$  eine Abbildung  $\varphi$  mit Eigenschaft (14) gibt. Die Menge  $G = \{\varphi\}$  ist dann eine homomorphe Darstellung von  $\hat{G}$  als Untergruppe der affinen Gruppe des  $R^d$ .

**HILFSSATZ 1.** *Falls  $X$  aus  $n$  verschiedenen Punkten besteht, ist  $G$  isomorph zu  $\hat{G}$ .*

$\varphi$  legt dann nämlich nach (14) und  $(14)$  die Permutation  $\hat{\varphi}$  eindeutig fest.

Falls dagegen in  $X$  mehrere Punkte zusammenfallen, z.B.  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k+1}$ , so können verschiedene Permutationen durch dieselbe affine Abbildung dargestellt werden; z.B. lässt sich jede Permutation von  $1, \dots, n$  mit Fixelementen  $k+2, \dots, n$  durch die identische Abbildung  $\varphi$  affin darstellen.

**SATZ 1.** *Wenn sich die Permutationsgruppe  $\hat{G}$  als affine Symmetriegruppe von  $X$  darstellen lässt, dann gibt es auch eine Darstellung von  $\hat{G}$  als orthogonale Symmetriegruppe  $G^*$  von  $X^*$ . Falls dabei  $X^*$  aus  $n$  verschiedenen Punkten besteht, ist  $G^*$  isomorph zu  $\hat{G}$ .*

Jeder Permutation  $(14)$  aus  $\hat{G}$  lässt sich also eine orthogonale Abbildung

$$\varphi^*: U \rightarrow U \quad \text{mit} \quad \varphi^*(x_v^*) = x_{i_v}^* \quad \text{für } v = 1, \dots, n \quad (14^*)$$

zuordnen.  $\varphi$  und  $\varphi^*$  bewirken gemäß (14) und  $(14^*)$  in  $X$  und  $X^*$  dieselbe Permutation  $(14)$  der Indizes.

Wir beweisen zuerst

**HILFSSATZ 2.**  $\hat{G} = \{\hat{\varphi}\}$  sei eine Permutationsgruppe, welche sich als affine Symmetriegruppe  $G = \{\varphi\}$  von  $X$  darstellen lässt. Dann gibt es eine isomorphe Darstellung  $G' = \{\varphi'\}$  von  $\hat{G}$  als orthogonale Gruppe von  $V$  mit folgenden Eigenschaften:

- (A)  $\varphi'$  bewirkt auf den Basisvektoren die Permutation  $\hat{\varphi}$   
 (B)  $g\varphi' = \varphi g$   
 (C)  $G'$  lässt  $U$  und  $U^\perp$  invariant  
 (D) Die Restriktion von  $G'$  auf  $U^\perp$  ist linear äquivalent zu  $G$ .

*Beweis.* Zu jedem  $\hat{\varphi} \in \hat{G}$  gibt es genau eine orthogonale Abbildung  $\varphi'$  mit der Eigenschaft

$$\varphi': V \rightarrow V, \quad \varphi'(e_v) = e_{i_v} \quad \text{für } v = 1, \dots, n. \quad (14')$$

$G' = \{\varphi'\}$  ist also eine Darstellung von  $\hat{G}$  mit (A).

Wegen (5), (14) und (14') folgt für jeden Vektor  $v = \sum \alpha_v e_v$ , dass  $g\varphi'(v) = \varphi g(v)$  ist, also (B).

Für  $u = \sum \alpha_v e_v \in U$  wird  $g(u) = 0$ , also auch  $\varphi g(u) = 0 = g(\varphi'(u))$ , d.h.  $\varphi'(u) \in U$ .  $\varphi'$  bildet also  $U$  in sich ab, und da  $\varphi'$  orthogonal ist, wird auch  $U^\perp$  in sich abgebildet, es gilt also (C).

Wegen  $U = \text{Kern } g$  bildet  $g$  den Teilraum  $U^\perp$  von  $V$  isomorph auf  $W$  ab; nach (B) gilt also für die Restriktionen von  $g$  und  $\varphi'$  auf  $U^\perp$ :  $\varphi' = g^{-1}\varphi g$ , also (D).

*Beweis des Satzes 1.* Die Darstellung

$G^* = \text{Restriktion von } G' \text{ auf } U$

hat die gewünschten Eigenschaften: denn wegen (C) und (5') gilt  $\varphi' f^* = f^* \varphi'$ , wegen (5') folgt also (14\*). Nach Hilfssatz 1 sind  $G^*$  und  $\hat{G}$  isomorph, falls  $X^*$  aus verschiedenen Punkten besteht.

Wir betrachten nun die *Orbits* (Transitivitätsklassen), die bei der Anwendung von  $\hat{G}$  auf die Elemente  $1, 2, \dots, n$  entstehen. Sei

$$k_v = \text{Anzahl der Orbits der Länge } v, \quad \sum_v v k_v = n.$$

Wir nehmen an,  $\hat{G}$  lasse sich als affine Symmetriegruppe  $G$  von  $X$  darstellen. Es sei

$$\text{Fixraum von } G = A \subset R^d, \quad \dim A = a. \quad (15)$$

Von den Punkten  $x_i$  von  $X$  liegen also genau  $k_1$  Punkte in  $A$ ; allgemein entspricht jedem Orbit der Länge  $v$  ein Orbit von  $v$  Punkten in  $X$ , die in einem zu  $A$  transversalen Teilraum  $G$ -symmetrisch verteilt sind.

**SATZ 2 (ZERFÄLLUNGSSATZ).** Wenn  $X$  die affine Symmetriegruppe  $G$  mit  $a$ -dimensionalem Fixraum  $A$  gestattet, so lässt sich die von  $G$  auf  $X$  bewirkte Permutationsgruppe im Gale-Raum als orthogonale Symmetriegruppe  $G^*$  von  $X^*$  darstellen, und für den Fixraum  $A^*$  von  $G^*$  gilt

$$\dim A^* = a^* = \sum_v k_v - a - 1. \quad (16)$$

Hierbei brauchen die Punkte von  $X$  nicht alle verschieden zu sein, und im Gale-Raum können einzelne Orbits zu einem Punkt in  $A^*$  zusammenfallen.  $A^*$  heisst *Gale-Achse*.

*Beweis.* Auf Grund von Satz 1 ist nur noch die Dimensionsaussage (16) zu beweisen.

a)  $G' = \{\varphi'\}$  sei die orthogonale Darstellung (14') von  $\hat{G}$  in  $V$ . Bei  $G'$  werden diejenigen Basisvektoren unter  $e_1, \dots, e_n$ , die zu einem Orbit gehören, untereinander transitiv vertauscht. Für einen Vektor  $v = \sum \alpha_v e_v$  gilt daher  $\varphi(v) = v$  für alle  $\varphi \in G'$  genau dann, wenn die Koordinaten  $\alpha_v$ , die zu einem Orbit gehören, untereinander gleich sind. Es sind also genau so viele Koordinaten frei wählbar wie es Orbits gibt. Daher folgt

$$\text{Fixraum von } G' = A' \subset V, \quad \dim A' = \sum_v k_v. \quad (17)$$

b) Wir fassen jedes  $\varphi$  aus  $G$  gemäss (13) als lineare Abbildung von  $W$  auf. Da  $W^1$  elementweise festbleibt, hat der Fixraum von  $G$  in  $W$  die Dimension  $a+1$ .  $G'$  lässt  $U$  und  $U^\perp$  invariant.  $\tilde{G}$  sei die Restriktion von  $G'$  auf  $U^\perp$ . Dann folgt aus Hilfssatz 2, (D):

$$\text{Fixraum von } \tilde{G} = \tilde{A} \subset U^\perp, \quad \dim \tilde{A} = a + 1. \quad (18)$$

c) Jeder Vektor  $v \in V$  besitzt die eindeutige Zerlegung  $v = u + u^\perp$  mit  $u \in U$ ,  $u^\perp \in U^\perp$ . Wegen (C) (Hilfssatz 2) folgt für alle  $\varphi' \in G'$ :  $\varphi'(v) = v \Leftrightarrow \varphi'(u) = u$  und  $\varphi'(u^\perp) = u^\perp$ , dass heisst

$$A' = A^* \oplus \tilde{A},$$

also  $\dim A^* = \dim A' - \dim \tilde{A}$ . Aus (17) und (18) folgt (16).

Ausser in den Vektorräumen  $V$  und  $U$  kann man auch noch in  $W$  ein Skalarprodukt einführen, den affinen Raum  $R^d$  also als Euklidischen  $E^d$  auffassen; dabei kann das Skalarprodukt in  $W$  so gewählt werden, dass die affine Symmetriegruppe  $G$  von  $X$  aus orthogonalen Abbildungen, also Bewegungen von  $E^d$  besteht.

#### 4. Abzählung kombinatorischer Klassen von Polytopen

Seien  $P$  ein Polytop im  $E^d$  und  $G$  eine Symmetriegruppe von  $P$ . Wie oben sei  $A$  der Fixraum von  $G$  und  $\dim A = a$ .  $A$  ist die Gesamtheit aller Punkte des  $E^d$ , die unter sämtlichen Elementen von  $G$  festbleiben.  $A$  heisst *Achse* von  $P$  (bezüglich  $G$ ).  $c_G(v, d, a)$  sei definiert als die Anzahl der Klassen kombinatorisch äquivalenter  $d$ -Polytope mit  $v$  Ecken, Symmetriegruppe  $G$  (als abstrakte Gruppe vorgegeben) und zugehöriger Achsendimension  $a$ . Werden dabei nur simpliziale Polytope betrachtet, so setzen wir  $c_G^s(v, d, a)$  für die entsprechende Anzahl. Beschränken wir uns auf den Fall, daß keine Ecke des Polytops auf der Achse liegt, so wird die verbleibende Zahl mit  $c_G^*(v, d, a)$

bezeichnet. Mit  $c(v, d)$  wird die Zahl aller kombinatorischen Klassen von  $d$ -Polytopen mit  $v$  Ecken benannt (Grünbaum [1]). Wir geben nun einige Anwendungen des Zerfallungssatzes (Satz 2) auf die Berechnung von Anzahlen der genannten Art an.

(19) Sei  $p$  eine Primzahl und  $k \geq 2$  eine natürliche Zahl. Dann gilt ( $Z_p$  = zyklische Gruppe der Ordnung  $p$ ):

$$c_{Z_p}^*(pk, (p-1)k+1, 1) = \left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor$$

Für  $p=2$  ist dies Formel (23) in [4].

*Beweis.* Für die Dimension des Gale-Raumes erhalten wir  $d^* = pk - (p-1)k - 1 - 1 = k - 2$ . Die Gale-Achse besitzt die Dimension  $a^* = k - 1 - 1 = k - 2$ . Folglich besteht der Gale-Raum nur aus Fixpunkten, und daher wird jeder der  $k$  Orbits von  $G$  auf einen  $p$ -fach belegten Punkt abgebildet. Wegen der Halbraumbedingung fällt höchstens einer dieser Punkte in den Nullpunkt.

Die Anzahl der möglichen kombinatorischen Typen ist unabhängig von dem Wert der Primzahl  $p$ . Wir können also aus der Formel (23) in [4] den behaupteten Wert folgern. (Shepard und McMullen benutzen eine elementare Abzählmethode, ohne Gale-Diagramm. In [5] ist auch mit Hilfe von Gale-Diagrammen die obige Formel noch einmal explizit berechnet worden).

(20) Sei  $p > 2$  eine Primzahl und  $a \geq 0$  eine ganze Zahl. Dann gilt  $c_{Z_p}^*(p(a+1), p(a+1)-3, a) = c(a+1, a-2) + f(a) + a + 1 - \delta_{p,3} + g(a)$ , wobei

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \text{ oder } 1 \\ \frac{1}{2} \binom{a+3}{5} + \frac{5}{8} \binom{a-1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(a-5) \left[ \frac{1}{2}(3a-5) \right] & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g(a) = \frac{1}{6} \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{a+3}{2} \right\rfloor \left( 6 \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 5 \right)$$

und  $c(a+1, a-2) = 0$  für  $a = 0$  oder  $1$ . ( $\delta_{p,3}$  = Kroneckersymbol).

Über ein Gegenstück zu dieser Formel für  $p=2$  vgl. Shepard-McMullen [4, (26)].

*Beweis.* Der Gale-Raum ist jetzt 2-dimensional, die Gale-Achse 0-dimensional. Es gibt  $a+1$  Orbits der Länge  $p$ . Das Bild eines Orbits ist entweder ein  $p$ -Eck, oder es fällt ganz nach  $O$ . Im Falle eines  $p$ -Ecks ist dieses regelmäßig, weil es wieder  $Z_p$  als Symmetriegruppe hat. Durch Übergang zu Einheitsvektoren im Gale-Diagramm können wir annehmen, daß alle  $p$ -Ecke einem Kreis einbeschrieben sind (Figur 1 für  $p=3$ ). Liegt eine Ecke eines  $p$ -Ecks einer Ecke eines zweiten  $p$ -Ecks gegenüber, so liegen auch die anderen Ecken des ersten  $p$ -Ecks gegenüber Ecken des zweiten



$p$ -Ecks. Um die wesentlich verschiedenen Möglichkeiten zu studieren, genügt es daher, die Verteilung von Punkten in einem halboffenen Kreisbogen der Länge  $\pi/p$  und dessen Spiegelbild bei der Punktspiegelung an  $O$  zu betrachten. Wir bezeichnen die Vereinigungsmenge der beiden halboffenen Kreisbögen mit  $W'$ . Statt nun die Verteilung von Ecken in  $W'$  zu studieren, können wir wieder die ganze Kreislinie  $W$  betrachten, indem wir  $W'$  durch die komplexe Abbildung  $z \rightarrow z^p$  auf  $W$  abbilden; mit der Maßgabe allerdings, daß jetzt die Halbraumbedingung nicht zu gelten braucht. Es müssen nur mindestens zwei Ecken auf der Kreislinie liegen, da diesen zwei  $p$ -Ecke zugeordnet sind, die die Gültigkeit der Halbraumbedingung im ursprünglichen Problem gewährleisten. Im Falle  $p \geq 5$  genügt sogar eine Ecke.

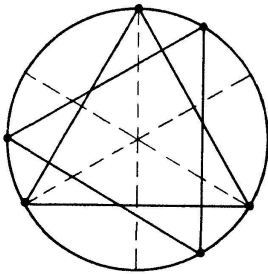


Fig. 1

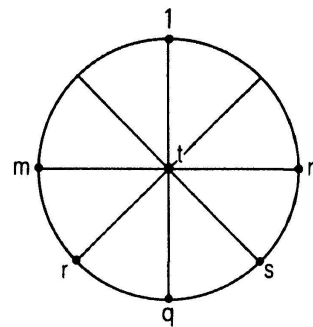


Fig. 2

Um die Abzählung durchzuführen, betrachten wir zuerst den Fall, daß die Verteilung der Ecken auf  $W$  die Halbraumbedingung erfüllt. Die  $q$  Punkte auf  $W$  ( $q \leq a+1$ ), zusammen mit dem  $(a+1-q)$ -fach belegten Nullpunkt sind dann Gale-Diagramm eines  $(a-2)$ -dimensionalen Polytops mit  $a+1$  Ecken. Wir erhalten hierfür  $c(a+1, a-2)$  Möglichkeiten. (Man beachte die in (20) festgelegte Schreibweise  $c(1, -2) = c(2, -1) = 0$ ).

Als nächsten Fall nehmen wir an, daß in jedem offenen Halbkreis von  $W$  mindestens eine Ecke liegt, in mindestens einem dieser Halbkreise aber auch nur eine Ecke. Man erhält (bis auf zulässige Abänderungen) Verteilungen der in Fig. 2 angedeuteten Art ( $m, n$  usw. bedeuten die Vielfachheiten der Belegung). Diese sind aber in [4, S. 284] für  $a+3$  statt  $a+1$  untersucht worden. Setzen wir in der dort angegebenen Größe  $\chi(a)$  formal  $a+1$  statt  $a+3$ , so erhalten wir die in (20) vorkommende Anzahl  $f(a)$  von Möglichkeiten.

Schließlich betrachten wir den Fall, daß es einen offenen Halbkreis von  $W$  gibt, in dem keine Ecke liegt. Wir erhalten die in Fig. 3 angedeuteten Verteilungen. Dabei können wir aus Symmetriegründen  $r \leq s$  annehmen. Ferner gilt  $r+s+q+t=a+1$ .

Sei zuerst  $r=0$ . Dann können die übrigen  $q+s$  Punkte auf der Kreislinie zusammengeschoben werden, ohne daß man den kombinatorischen Typ verändert (Fig. 4).



Liegt die  $Z_3$  als Symmetriegruppe vor, so muß zusätzlich  $s \geq 2$  eingeschränkt werden (sonst wäre im ursprünglichen Gale-Diagramm die Halbraumbedingung verletzt). Dies ergibt  $a$  Möglichkeiten. Ist  $p \geq 5$ , dann sind alle Fälle  $1 \leq s \leq a+1$  zugelassen, und wir erhalten  $a+1$  kombinatorische Typen. Für beliebiges  $p$  können wir bei  $r=0$  auch  $a+1 - \delta_{p,3}$  als Anzahl schreiben.

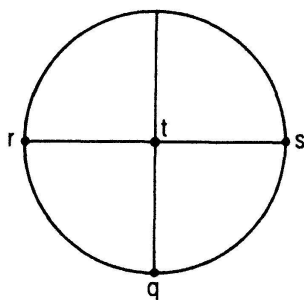


Fig. 3

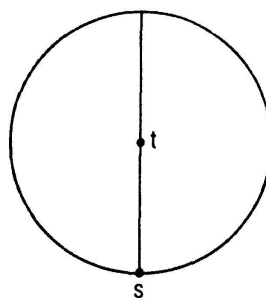


Fig. 4

Bleibt also  $r \geq 1$  zu untersuchen. Die hierbei durchzuführenden Rechnungen sind zwar elementar, aber etwas langwierig; wir führen sie hier nicht aus (vgl. [5]). Man bekommt als Anzahl die in (20) angegebene Zahl  $g(a)$ . Insgesamt ergibt sich der behauptete Wert.

BEISPIEL:  $c_{Z_3}^*(6, 3, 1) = 2$ . Repräsentanten der beiden Klassen sind in Fig. 5 gezeichnet (Dreiecksprisma und Oktaeder).

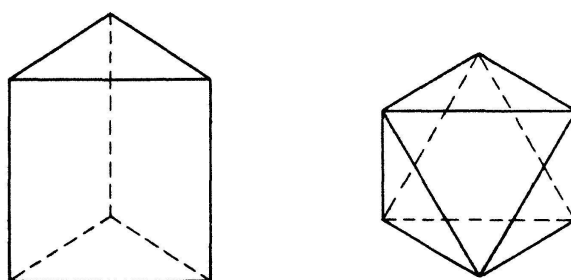


Fig. 5

(21) Sei  $p$  eine Primzahl und  $a \geq 0$  eine ganze Zahl. Dann gilt

$$c_{Z_p}^{s*}(p(a+1), p(a+1)-3, a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p = 2 \\ c^s(a+1, a-2) + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1 - \delta(a, p) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

$$\delta(a, p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a = 0 \text{ und } p = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $c^s(1, -2) = c^s(2, -1) = 0$  gesetzt wird.

*Beweis.* Wir gehen genauso vor wie im Beweis von (20) und haben die Verteilungen von  $a+1$  Ecken auf der Kreislinie  $W$  zu untersuchen. Da jetzt nur simpliziale Polytope betrachtet werden, dürfen im ursprünglichen Gale-Diagramm zwei  $p$ -Ecke niemals so liegen, daß eine Ecke des einen einer Ecke des anderen gegenüberliegt. Dies ist äquivalent damit, daß keine zwei Ecken den Abstand  $\pi/p$  haben. Ferner fällt keine Ecke nach  $O$ . In  $W$  berücksichtigen wir diesen Umstand, so daß keine diametral gelegenen Punkte gleichzeitig Ecken sind und keine Ecke nach  $O$  fällt.

Liegen in jedem offenen Halbkreis von  $W$  mindestens zwei der  $a+1$  Ecken, so erhalten wir  $c^s(a+1, a-2)$  Möglichkeiten. Nehmen wir also an, daß ein Halbkreis von  $W$  mit nur einer Ecke im Innern existiert. Dann lassen sich die anderen Ecken, wie in Fig. 6 angezeigt, zusammenschieben. Aus Symmetriegründen können wir  $q \leq r$  annehmen. Ferner gilt  $q \geq 1, r \geq 1$  und  $q+r=a$ . Daraus erhält man  $[a/2]$  Möglichkeiten.

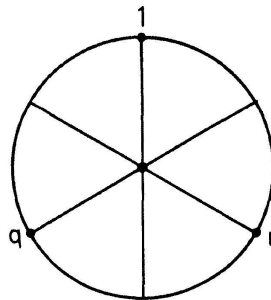


Fig. 6

Schließlich gebe es einen Halbkreis mit keiner der  $a+1$  Ecken im Innern. Wir müssen dann wie im Beweis von (20)  $p=3$  und  $p>3$  unterscheiden. Im ersten Fall erhalten wir für  $a=0$  keine zulässige Eckenverteilung, im zweiten Fall und im Fall  $a>0, p=3$  können wir uns alle Ecken zusammengeschoben denken und erhalten somit genau einen kombinatorischen Typ. Zusammengefaßt ergibt das  $1 - \delta(a, p)$ .

(22) Sei  $p$  eine Primzahl. Dann gilt

$$c_{Z_p}^{s*}(p(a+3), p(a+3)-3, a) = c^s(a+3, a) + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1.$$

*Beweis.* Gale-Raum und Gale-Achse sind jetzt beide 2-dimensional. Das Gale-Diagramm besteht daher aus  $a+3$  Punkten mit  $p$ -facher Belegung. Da nur simpliziale Polytope betrachtet werden, fällt kein Punkt des Gale-Diagramms nach  $O$ , und gegen-

überliegende Punkte gehören nicht gleichzeitig zum Gale-Diagramm. Die Fälle, in denen die  $a+3$  Ecken selbst die Halbraumbedingung erfüllen, ergeben  $c^s(a+3, a)$  Möglichkeiten.

Nehmen wir also an, ein Halbraum mit  $O$  auf dem Rand und nur einer ( $p$ -fach-belegten) Ecke im Innern existiert. Dann lassen sich die übrigen Punkte wie in Fig. 6 angezeigt zusammenschieben. Aus Symmetriegründen kann man wieder  $q \leq r$  annehmen. Es ergeben sich jetzt  $[a/2] + 1$  kombinatorische Typen.

Ein Halbraum mit  $O$  auf dem Rand und keiner Diagramm-Ecke im Innern existiert nicht, da sonst die Halbraumbedingung verletzt wäre. Insgesamt erhalten wir also Formel (22).

#### LITERATUR

- [1] GRÜNBAUM, B., *Convex Polytopes*, Interscience New York 1967.
- [2] —, *Polytopes, Graphs, and Complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), 1131–1201.
- [3] KLEINSCHMIDT, P. und SCHULZ, C., *Kombinatorische Klassifikation symmetrischer Polytope*, Erscheint demnächst.
- [4] McMULLEN, P. and SHEPARD, G. C., *Polytopes with an axis of symmetry*, Canad. J. Math., 22 (1970), 265–287.
- [5] SCHULTE-LADBECK, W., *Kombinatorische Klassifikation konvexer Polytope unter besonderer Berücksichtigung eines Satzes von Polya*, Diplomarbeit Bochum 1972.

Eingegangen den 27. Februar 1973.