

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 48 (1973)  
  
**Artikel:** Höhere Whitehead Produkte der zwei dimensional en Sphäre  
**Autor:** Baues, Hans Joachim  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37148>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Höhere Whitehead Produkte der zwei dimensionalen Sphäre

HANS JOACHIM BAUES

In Theorem 2.4 von [3] wurde gezeigt, das Whitehead Produkte  $[\alpha, \beta] \in \pi_n(S^2)$  für  $n \neq 3$  trivial sind. K. A. Hardie bemerkt im Anschluß an Theorem 5.5 in [2], daß auch Whitehead Produkte dritter Ordnung  $\xi \in \pi_n(S^2)$  für  $n \neq 3$  verschwinden. In dieser Arbeit zeigen wir, daß allgemein Whitehead Produkte höherer Ordnung  $\xi \in \pi_n(S^2)$  für  $n \neq 3$  trivial sind.

Sei  $P = S^{m_1} \times \dots \times S^{m_n}$  ein Produkt von Sphären mit  $m_i \geq 1$  für alle  $i$ . Die Grundpunkte dieser Sphären bestimmen eine Zellenzerlegung von  $P$  mit genau einer  $N$ -Zelle  $e^N$ ,  $N = \sum m_i$ . Sei  $P^\bullet = P - e^N$  und sei  $w: S^{N-1} \rightarrow P^\bullet$  die anheftende Abbildung für die Zelle  $e^N$ . Zu einer Abbildung  $g: P^\bullet \rightarrow X$  heißt dann das Element  $w^*(g) \in \pi_{N-1}(X)$  höheres Whitehead Produkt, siehe [4].

**SATZ.** Sei  $w^*(g) \in \pi_{N-1}(S^2)$  höheres Whitehead Produkt zu  $g: P^\bullet \rightarrow S^2$ , dann ist  $w^*(g) = 0$  für  $N \neq 4$ .

Aus diesem Satz folgt, daß es im Kern der Suspension, zum Beispiel in  $\pi_6(S^2)$ , Elemente gibt, welche nicht durch Whitehead Produkte höherer Ordnung darstellbar sind. Weiterhin erhalten wir wegen 2.4 in [4] das Korollar:

**KOROLLAR.** Sei  $P^k$  das  $k$ -Skelett von  $P$ . Für  $k \geq 4$  läßt sich jede Abbildung  $f: P^k \rightarrow S^2$  über  $P$  fortsetzen.

Der Beweis des Satzes macht keine Schwierigkeit, wenn alle  $m_i \geq 3$ . Falls in dem Produkt  $P$  auch 1-Sphären oder 2-Sphären vorkommen, so benötigen wir zum Beweis des Satzes den folgenden zahlentheoretischen Hilfssatz. Sei  $M_{n,k}$  die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Für  $a, b \in M_{n,k}$  mit  $c = a \cup b \in M_{n,2k}$  sei  $\varepsilon_{a,b} \in \{-1, 1\}$  das Vorzeichen der  $2k$ -stelligen Permutation  $\sigma$  mit  $c_{\sigma i} = a_i$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $c_{\sigma i} = b_{i-k}$  für  $k < i \leq 2k$ . Dabei sei  $c_1 < \dots < c_{2k}$ ,  $a_1 < \dots < a_k$  und  $b_1 < \dots < b_k$  für  $c_i \in c$ ,  $a_i \in a$  und  $b_i \in b$  mit  $i = 1, 2, \dots, 2k$  bzw.  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**HILFSSATZ.** Sei  $s = (s_a \mid a \in M_{n,2})$  mit  $s_a \in \mathbb{Z}$  ein Tupel von ganzen Zahlen, so daß für alle  $c \in M_{n,4}$  gilt

$$\sum_{a \cup b = c} \varepsilon_{a,b} \cdot s_a \cdot s_b = 0.$$

Dann gibt es eine ganzzahlige  $n \times 2$ -Matrix  $A = (a_{ij})$ , so daß  $s_a = \det(A_a)$  für alle  $a \in M_{n,2}$ . Dabei sei  $A_a = (a_{ij})_{i \in a}$  die durch  $a$  bestimmte  $2 \times 2$ -Untermatrix von  $A$ .

*Beweis des Hilfssatzes.* Sei  $s \neq 0$ . Falls  $s_{12} = 1$ , sei  $A$  gleich  $L(s) = (a_{ij})$  mit  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = a_{21} = 0$  und  $a_{i1} = -s_{2i}$ ,  $a_{i2} = s_{1i}$  für  $n \geq i > 2$ . Es operiert  $B \in GL(n, \mathbb{Z})$  auf der Menge der Tupel  $s$ , die die Gleichung im Hilfssatz erfüllen, durch

$$(B \circ s)_a = \sum_{b \in M_{n,2}} s_b \cdot \det(B_{a,b})$$

für  $a \in M_{n,2}$ , ( $B_{a,b}$  sei die  $a \times b$  Untermatrix von  $B$ ). Dazu vergleiche den Laplaceschen Entwicklungssatz. Sei  $\bar{m} = \min \{|(B \circ s)_{12}|, B \in GL(n, \mathbb{Z}) \text{ und } (B \circ s)_{12} \neq 0\}$ , ( $|\dots|$  bezeichne den Absolutbetrag), und sei  $B_0 \in GL(n, \mathbb{Z})$  mit  $(B_0 \circ s)_{12} = m$  und  $|m| = \bar{m} \neq 0$ . Dann gilt, daß  $m$  Teiler ist von  $(B_0 \circ s)_a$  für alle  $a \in M_{n,2}$ . Die Matrix  $A$  im Hilfssatz sei nun gegeben durch das Produkt  $B_0^{-1} L\left(\frac{1}{m} B_0 \circ s\right) E_m$  von Matrizen mit  $E_m = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Beweis des Satzes.* Für  $N < 4$  ist die Behauptung trivial, sei also  $N > 4$ . Sei  $T_n = S^1 \times \dots \times S^1$  der  $n$ -dimensionale Torus und sei  $T_n^k$  das  $k$ -Skelett von  $T_n$ . Sei  $p_n: T_n \rightarrow T_n/T_n^{n-1} = S^n$  die Projektion. Das Produkt  $p_{m_1} \times \dots \times p_{m_n}: T_N \rightarrow P$  induziert eine Abbildung  $p$ , für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & S^{N-1} & \\ w \swarrow & & \searrow w \\ T_N^* & \xrightarrow{p} & P^* \end{array}$$

homotopiekommutativ ist. Dabei ist  $T_N^* = T_N^{N-1} = T_N - e^N$ . Die Darstellung von  $S^3$  als universeller Überlagerungsgruppe von  $SO(3)$  bestimmt eine Abbildung  $m: S^3 \times S^2 \rightarrow S^2$  vom Typ  $(\gamma, \iota_2)$ , wo  $\gamma \in \pi_3(S^2)$  das Hopfelement und  $\iota_2 \in \pi_2(S^2)$  ein Erzeugendes ist. Wir konstruieren zu  $f = gp$  gerüstweise eine Abbildung  $F$ , für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_N^* & \xrightarrow{f} & S^2 \\ F \downarrow & \nearrow m' & \uparrow m \\ S^3 \times T_2 & \xrightarrow{id \times p_2} & S^3 \times S^2 \end{array}$$

homotopiekommutativ ist. Dabei sei  $m' = m(id \times p_2)$ . Da  $S^3 \times T_2$  ein  $H$ -Raum ist, folgt  $w^*(F) = 0$  und damit auch  $w^*(g) = w^*(f) = 0$ , was zu beweisen ist. Sei  $f^k: T_N^k \rightarrow S^2$  die Einschränkung von  $f$ . Die Abbildung  $f^2$  bestimmt ein Tupel von Zahlen  $s = (s_a \mid a \in M_{N,2})$ , so daß  $f^2$  zu der Hintereinanderschaltung

$$T_N^2 \xrightarrow{\bar{p}} T_N^2/T_N^1 = \bigvee_{a \in M_{N,2}} S^2 \xrightarrow{s \cdot \iota_2} S^2$$

homotop ist mit  $\bar{p}$  als Projektion. Aus dem Satz in der Einleitung von [1] folgt wegen  $N > 4$ , daß  $s$  die Gleichungen in obigem Hilfssatz erfüllt. Die zu  $s$  gegebene Matrix  $A$  induziert dann eine Abbildung  $\bar{A}$ , so daß  $f^2$  zu der Hintereinanderschaltung

$$T_N^2 \subset T_N \xrightarrow{\bar{A}} T_2 \xrightarrow{p_2} S^2$$

homotop ist. Sei  $F^2$  gegeben durch die Hintereinanderschaltung

$$F^2: T_N^2 \subset T_N \xrightarrow{(0, \bar{A})} S^3 \times T_2$$

mit 0 als trivialer Abbildung. Es ist dann  $m'F^2 \simeq f^2$  homotop. Sei nun für  $k \geq 3$  eine Abbildung  $F^{k-1}: T_N^{k-1} \rightarrow S^3 \times T_2$  konstruiert mit  $m'F^{k-1} \simeq f^{k-1}$ . Dann ist  $F^{k-1}$  über  $T_N^k$  fortsetzbar, denn  $S^3 \times T_2$  ist  $H$ -Raum. Da  $m: \pi_k(S^3 \times T_2) \rightarrow \pi_k(S^2)$  surjektiv ist, gibt es zu  $F^{k-1}$  sogar eine Fortsetzung  $F^k$  mit  $m'F^k \simeq f^k$ . Wir setzen  $F = F^{N-1}$ . Damit ist der Satz bewiesen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAUES, H. J., *Hindernisse in dem Produkt von Suspensionen*, Math. Ann. 200 (1973), 11–23.
- [2] HARDIE, K. A., *On a construction of E. C. Zeeman*, J. London Math. Soc. 35 (1960), 452–464.
- [3] HILTON, P. J. und WHITEHEAD, J. H. C., *Note on the Whitehead product*, Ann. Math. 58 (1953), 429–442.
- [4] PORTER, G. J., *Higher order Whitehead products*, Topology 3 (1965), 123–135.

*Sonderforschungsbereich 'Theoretische Mathematik'*  
 Mathematisches Institut der Universität Bonn  
 BRD-5300 Bonn  
 Wegelerstr. 10  
 Deutschland

Received October 6, 1972