Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 48 (1973)

Artikel: Höhere Whitehead Produkte der zwei dimensionalen Sphäre

Autor: Baues, Hans Joachim

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37148

Höhere Whitehead Produkte der zwei dimensionalen Sphäre

HANS JOACHIM BAUES

In Theorem 2.4 von [3] wurde gezeigt, das Whitehead Produkte $[\alpha, \beta] \in \pi_n(S^2)$ für $n \neq 3$ trivial sind. K. A. Hardie bemerkt im Anschluß an Theorem 5.5 in [2], daß auch Whitehead Produkte dritter Ordnung $\xi \in \pi_n(S^2)$ für $n \neq 3$ verschwinden. In dieser Arbeit zeigen wir, daß allgemein Whitehead Produkte höherer Ordnung $\xi \in \pi_n(S^2)$ für $n \neq 3$ trivial sind.

Sei $P = S^{m_1} \times \dots \times S^{m_n}$. ein Produkt von Sphären mit $m_i \geqslant 1$ für alle i. Die Grundpunkte dieser Sphären bestimmen eine Zellenzerlegung von P mit genau einer N-Zelle e^N, $N = \sum m_i$. Sei $P^\cdot = P - e^N$ und sei $w: S^{N-1} \to P^\cdot$ die anheftende Abbildung für die Zelle e^N. Zu einer Abbildung $g: P^\cdot \to \mathbf{X}$ heißt dann das Element $w^*(g) \in \pi_{N-1}(\mathbf{X})$ höheres Whitehead Produkt, siehe [4].

SATZ. *Sei $w^*(g) \in \pi_{N-1}(S^2)$ höheres Whitehead Produkt zu $g: P^\cdot \to S^2$, dann ist $w^*(g) = 0$ für $N \neq 4$.*

Aus diesem Satz folgt, daß es im Kern der Suspension, zum Beispiel in $\pi_6(S^2)$, Elemente gibt, welche nicht durch Whitehead Produkte höherer Ordnung darstellbar sind. Weiterhin erhalten wir wegen 2.4 in [4] das Korollar:

KOROLLAR. *Sei P^k das k-Skelett von P. Für $k \geqslant 4$ läßt sich jede Abbildung f: $P^k \to S^2$ über P fortsetzen.*

Der Beweis des Satzes macht keine Schwierigkeit, wenn alle $m_i \geqslant 3$. Falls in dem Produkt P auch 1-Sphären oder 2-Sphären vorkommen, so benötigen wir zum Beweis des Satzes den folgenden zahlentheoretischen Hilfssatz. Sei $M_{n,k}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$.

Für $a, b \in M_{n,k}$ mit $c = a \cup b \in M_{n,2k}$ sei $\varepsilon_{a,b} \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen der $2k$-stelligen Permutation σ mit $c_{\sigma i} = a_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $c_{\sigma i} = b_{i-k}$ für $k < i \leqslant 2k$. Dabei sei $c_1 < \dots < c_{2k}$, $a_1 < \dots < a_k$ und $b_1 < \dots < b_k$ für $c_i \in c$, $a_i \in a$ und $b_i \in b$ mit $i = 1, 2, \dots, 2k$ bzw. $i = 1, 2, \dots, k$.

HILFSSATZ. *Sei $s = (s_a \mid a \in M_{n,2})$ mit $s_a \in \mathbf{Z}$ ein Tupel von ganzen Zahlen, so daß für alle $c \in M_{n,4}$ gilt*

$$\sum_{a \cup b = c} \varepsilon_{a,b} \cdot s_a \cdot s_b = 0 .$$

Dann gibt es eine ganzzahlige $n \times 2$-Matrix $A = (a_{ij})$, so daß $s_a = \det(A_a)$ für alle $a \in M_{n,2}$. Dabei sei $A_a = (a_{ij})_{i \in a}$ die durch a bestimmte 2×2-Untermatrix von A.

Beweis des Hilfssatzes. Sei $s \neq 0$. Falls $s_{12}=1$, sei A gleich $L(s)=(a_{ij})$ mit $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{12}=a_{21}=0$ und $a_{i1}=-s_{2i}$, $a_{i2}=s_{1i}$ für $n \geqslant i > 2$. Es operiert $B \in GL(n, \mathbf{Z})$ auf der Menge der Tupel s, die die Gleichung im Hilfssatz erfüllen, durch

$$(B \circ s)_a = \sum_{b \in M_{n,2}} s_b \cdot \det(B_{a,b})$$

für $a \in M_{n,2}$, ($B_{a,b}$ sei die $a \times b$ Untermatrix von B). Dazu vergleiche den Laplaceschen Entwicklungssatz. Sei $\bar{m} = \mathrm{Min}\{|(B \circ s)_{12}|, B \in GL(n, \mathbf{Z}) \text{ und } (B \circ s)_{12} \neq 0\}$, ($|\ldots|$ bezeichne den Absolutbetrag), und sei $B_0 \in GL(n, \mathbf{Z})$ mit $(B_0 \circ s)_{12} = m$ und $|m| = \bar{m} \neq 0$. Dann gilt, daß m Teiler ist von $(B_0 \circ s)_a$ für alle $a \in M_{n,2}$. Die Matrix A im Hilfssatz sei nun gegeben durch das Produkt $B_0^{-1} L\left(\frac{1}{m} B_0 \circ s\right) E_m$ von Matrizen mit $E_m = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis des Satzes. Für $N < 4$ ist die Behauptung trivial, sei also $N > 4$. Sei $T_n = S^1 \times \cdots \times S^1$ der n-dimensionale Torus und sei T_n^k das k-Skelett von T_n. Sei $p_n \colon T_n \to T_n / T_n^{n-1} = S^n$ die Projektion. Das Produkt $p_{m_1} \times \cdots \times p_{m_n} : T_N \to P$ induziert eine Abbildung p, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S^{N-1} \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "w"] & \\ T_N^{\cdot} \arrow[rr, "p"] & & P^{\cdot} \end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist. Dabei ist $T_N^{\cdot} = T_N^{N-1} = T_N - e^N$. Die Darstellung von S^3 als universeller Überlagerungsgruppe von SO(3) bestimmt eine Abbildung $m \colon S^3 \times S^2 \to S^2$ vom Typ (γ, ι_2), wo $\gamma \in \pi_3(S^2)$ das Hopfelement und $\iota_2 \in \pi_2(S^2)$ ein Erzeugendes ist. Wir konstruieren zu $f = gp$ gerüstweise eine Abbildung F, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_N^{\cdot} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & S^2 \\ S^3 \times T_2 \arrow[r, "id \times p_2"'] \arrow[ur, "m'"] & S^3 \times S^2 \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd}$$

homotopiekommutativ ist. Dabei sei $m' = m(id \times p_2)$. Da $S^3 \times T_2$ ein H-Raum ist, folgt $w^*(F) = 0$ und damit auch $w^*(g) = w^*(f) = 0$, was zu beweisen ist. Sei $f^k \colon T_N^k \to S^2$ die Einschränkung von f. Die Abbildung f^2 bestimmt ein Tupel von Zahlen $s = (s_a \mid a \in M_{N,2})$, so daß f^2 zu der Hintereinanderschaltung

$$T_N^2 \xrightarrow{\bar{p}} T_N^2 / T_N^1 = \bigvee_{a \in M_{N,2}} S^2 \xrightarrow{s \cdot \iota_2} S^2$$

homotop ist mit $\bar{p}$ als Projektion. Aus dem Satz in der Einleitung von [1] folgt wegen $N>4$, daß s die Gleichungen in obigem Hilfssatz erfüllt. Die zu s gegebene Matrix A induziert dann eine Abbildung $\bar{A}$, so daß f^2 zu der Hintereinanderschaltung

$$T_N^2 \subset T_N \xrightarrow{\bar{A}} T_2 \xrightarrow{p_2} S^2$$

homotop ist. Sei F^2 gegeben durch die Hintereinanderschaltung

$$F^2 : T_N^2 \subset T_N \xrightarrow{(0,\bar{A})} S^3 \times T_2$$

mit 0 als trivialer Abbildung. Es ist dann $m'F^2 \simeq f^2$ homotop. Sei nun für $k \geqslant 3$ eine Abbildung $F^{k-1} : T_N^{k-1} \to S^3 \times T_2$ konstruiert mit $m'F^{k-1} \simeq f^{k-1}$. Dann ist F^{k-1} über T_N^k fortsetzbar, denn $S^3 \times T_2$ ist H-Raum. Da $m \ :\pi_k(S^3 \times T_2) \to \pi_k(S^2)$ surjektiv ist, gibt es zu F^{k-1} sogar eine Fortsetzung F^k mit $m'F^k \simeq f^k$. Wir setzen $F = F^{N-1}$. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Baues, H. J., *Hindernisse in dem Produkt von Suspensionen*, Math. Ann. 200 (1973), 11–23.
[2] Hardie, K. A., *On a construction of E. C. Zeeman*, J. London Math. Soc. *35* (1960), 452–464.
[3] Hilton, P. J. und Whitehead, J. H. C., *Note on the Whitehead product*, Ann. Math. *58* (1953), 429–442.
[4] Porter, G. J., *Higher order Whitehead products*, Topology *3* (1965), 123–135.

Sonderforschungsbereich 'Theoretische Mathematik'
Mathematisches Institut der Universität Bonn
BRD–5300 Bonn
Wegelerstr. 10
Deutschland

Received October 6, 1972