Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1972)

Artikel: Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux

Autor: Ronga, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36348

Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux

F. Ronga

INTRODUCTION

Dans ce travail on établit un procédé pour calculer les classes de cohomologie duales aux singularités d'ordre deux $\bar{\Sigma}^{i,j}$ d'une application différentiable générique $f: V \to W$ introduites par Thom [10], dont la définition a été précisée par Boardman [1]. L'adhérence d'une telle singularité est une «collection de variétés», dont la classe duale est un polynôme dans les classes caractéristiques des fibrés $T(V)$ et $T(W)$; ce polynôme provient d'un polynôme universel (voir [4]), qu'il suffit de calculer dans le cas complexe (voir [2]).

Les propos énoncés sont pour la plupart valables à la fois dans le cas réel et dans le cas complexe; on spécifiera les éventuelles modifications à apporter dans chaque cas. Par exemple, dans le cas réel on considèrera la cohomologie modulo deux et les classes de Stiefel-Whitney, alors que dans le cas complexe ce seront les classes de Chern et la cohomologie entière. Signalons que dans le cas complexe, lorsque W est un espace numérique et V est telle qu'en chacun de ses points on peut définir les coordonnées locales par des fonctions globales, on peut montrer que presque toute application est générique pour les singularités envisagées.

Au chapitre I on contruit les «désingularisations» des singularités $\bar{\Sigma}^i$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}$ et on montre comment passer des singularités d'applications aux singularités de morphismes de fibrés. Au §4 on montre que la classe duale à la singularité $\bar{\Sigma}^{i,j}$ d'une application générique $f: V \to W$ ne dépend que du fibré normal à f, qui est le fibré différence $f^*(T(W)) - T(V) \in K(V)$. Cette classe s'obtient en remplaçant c_i par $c_i(f^*(T(W)) - - T(V))$ dans un polynôme universel, qui ne dépend que de $r = \dim(W) - \dim(V)$, i et j, et qui sera noté $q^r_{i,j}(c)$, où c désigne la classe de Chern totale du fibré canonique γ^n sur la grassmannienne $G_{n,N}$ des n-plans dans $\mathbf{C}^{n+N}$ (n et N étant pris suffisamment grands par rapport à la codimension de $\Sigma^{i,j}$). Soit $P_{i,j}: F_{i,j} \to G_{n,N}$ le fibré associé à γ^n de fibre les couples formés par un j-plan contenu dans un i-plan de la fibre de γ^n; le résultat principal de ce travail est le théorème (4.5) du chapitre I, qui exprime $q^r_{i,j}(c)$ comme image par l'homomorphisme de Gysin associé à $P_{i,j}$ d'une classe caractéristique d'un fibré sur $F_{i,j}$.

Au chapitre II on établit quelques propositions d'algèbre élémentaire qui permettent de décrire le procédé de calcul; on applique ensuite ce procédé à quelques cas particuliers.

L'idée de la désingularisation canonique pour l'ordre 1 est formulée par I. R. Porteous dans [6]. Dans [7], le même auteur a effectué quelques calculs dans des cas particuliers, par une toute autre méthode.

Je prie le professeur A. Haefliger de trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir posé le problème et aidé de ses conseils tout au long de mon travail. Je remercie également les professeurs S. Łojasiewicz, A. Roy et C. Weber pour les nombreuses conversations utiles que j'ai eues avec eux. C'est le professeur A. Roy qui m'a fait découvrir les identités entre déterminants dont il est question au chapitre II, §1.

Enfin, je remercie le «referee» de m'avoir permis, par des suggestions détaillées, d'améliorer considérablement plusieurs passages.

Dans le cas réel on supposera toujours que les variétés et applications différentiables sont de classe C^∞.

I. DESINGULARISATION DE $\bar{\Sigma}^i$ ET $\bar{\Sigma}^{i,j}$

Fixons quelques notations. Soient $\xi=(E\to X)$ et $\eta=(F\to X)$ des fibrés vectoriels réels (respectivement complexes). Si $x\in X$, E_x ou ξ_x désignent la fibre au-dessus de x; si $A\subset X$, $\xi \mid A$ désigne la restriction de ξ à A. $\mathrm{HOM}(\xi, \eta)$ désigne le fibré vectoriel associé à ξ et η de fibre les homomorphismes linéaires de E_x dans F_x (que l'on notera $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$). $\overset{r}{\bigcirc}\xi$ désigne le r-ième produit symétrique de ξ, qui est le quotient du r-ième produit tensoriel de ξ par l'action du r-ième groupe symétrique (voir [1], p. 399). Si ζ est un sous-fibré de ξ, $\zeta\bigcirc\xi$ désigne le sous-fibré de $\xi\bigcirc\xi$ qui est l'image de $\zeta\otimes\xi$ par le passage au quotient $\xi\otimes\xi\to\xi\bigcirc\xi$. Si $n=\mathrm{rang}(\xi)$ et $k=\mathrm{rang}(\zeta)$, $n\bigcirc k$ désigne le rang de $\zeta\bigcirc\xi$ (qui est d'ailleurs égal à $(k/2)\cdot(2n-k+1)$).

1. Désingularisation de $\bar{\Sigma}^i$

Soient $\xi=(E\to X)$ et $\eta=(F\to X)$ des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) différentiables de rang respectivement n et p.

Posons:

$$S^r(\xi,\eta)=\mathrm{HOM}(\xi,\eta)\oplus\mathrm{HOM}(\xi\bigcirc\xi,\eta)\oplus\cdots\oplus\mathrm{HOM}(\overset{r}{\bigcirc}\xi,\eta).$$

On a une projection $\pi: S^r(\xi,\eta)\to X$, qui est un fibré vectoriel de fibre $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)\times\times\mathrm{Hom}(E_x\bigcirc E_x, F_x)\times\cdots\times\mathrm{Hom}(\overset{r}{\bigcirc}E_x, F_x)$.

Soit $\Sigma^i(\xi,\eta)$ l'ensemble des $\alpha\in\mathrm{HOM}(\xi,\eta)$ dont la dimension du noyau est égale à i; $\Sigma^i(\xi,\eta)$, que l'on notera parfois simplement Σ^i, est un sous-fibré de $\mathrm{HOM}(\xi,\eta)$ de fibre $\Sigma^i_x=\{\alpha\in\mathrm{Hom}(E_x,F_x)\mid \dim(\ker(\alpha))=i\}$.

Si $\zeta=(G\to Z)$ est un fibré vectoriel réel ou complexe et k un entier compris entre zéro et n, on désigne par $p: F_k(\zeta)\to Z$ le fibré associé à ζ de fibre l'espace des k-plans dans G_x (que l'on notera $F_k(G_x)$). Sur $F_k(\zeta)$ on définit un sous-fibré ζ_k de rang k de $p^*(\zeta)$ en considérant les couples (a, v), où a est un k-plan dans G_x et v est un vecteur appartenant à a.

Soit π la projection de $S^1(\xi, \eta)$ sur X. Soit $\xi' = \pi^*(\xi)$ et notons par $p_1: F_i(\xi') \to S^1(\xi, \eta)$ le fibré en i-plans associé à ξ'. Un élément de $F_i(\xi')$ est un couple (a, α), où $\alpha \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ et a est un i-plan de E_x.

DÉFINITION. $\tilde{\Sigma}^i(\xi, \eta) = \tilde{\Sigma}^i$ désignera le sous-ensemble de $F_i(\xi')$ formé des couples (a, α) tels que α s'annule sur a.

Posons $\eta' = p_1^*(\pi^*(\eta))$; définissons la section $\Psi_1: F_i(\xi') \to \mathrm{HOM}(\xi_i', \eta')$ en associant à $(a, \alpha) \in F_i(\xi')$ la restriction de α à a. $\tilde{\Sigma}^i$ est en fait l'ensembre des zéros de cette section.

Soit ker le sous-fibré de rang i de $\xi' \mid \Sigma^i$ formé des couples $(\alpha, v) \in \Sigma^i_x \times E_x$ tels que $\alpha(v) = 0$. Soit im le sous-fibré de rang $n-i$ de $\pi^*(\eta) \mid \Sigma^i$ formé des couples $(\alpha, v) \in \Sigma^i_x \times F_x$ tels que $v \in \mathrm{im}(\alpha)$. Soit enfin coker le fibré quotient de $\pi^*(\eta) \mid \Sigma^i$ par le sous-fibré im. Remarquons que les fibres de ces fibrés au-dessus de α sont respectivement $\ker(\alpha)$, $\mathrm{im}(\alpha)$ et $\mathrm{coker}(\alpha)$.

Soit $\tilde{\Sigma}^i_\circ = \{(a, \alpha) \in \tilde{\Sigma}^i \mid \ker(\alpha) = a\}$; c'est un ouvert dense de $\tilde{\Sigma}^i$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\Sigma}^i_\circ & \subset & \tilde{\Sigma}^i & \subset & F_i(\xi') \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ \Sigma^i & \subset & \bar{\Sigma}^i & \subset & S^1(\xi, \eta) \end{array}$$

(1.1) PROPOSITION.

(i) $p_1(\tilde{\Sigma}^i) = \bar{\Sigma}^i(\xi, \eta)$

(ii) Ψ_1 *est transverse à la section nulle, de sorte que* $\tilde{\Sigma}^i$ *est une sous-variété de* $F_i(\xi')$.

(iii) *La restriction de* p_1 *à* $\tilde{\Sigma}^i_\circ$ *est un plongement d'image* Σ^i, *qui se trouve ainsi être une sous-variété de* $S^1(\xi, \eta)$.

(iv) *Le fibré tangent aux fibres de* $\pi \mid \Sigma^i : \Sigma^i \to X$, *qui est un sous-fibré de* $\pi^*(\mathrm{HOM}(\xi, \eta)) \mid \Sigma^i$, *coïncide avec le noyau du morphisme surjectif* $\varrho: \pi^*(\mathrm{HOM}(\xi, \eta)) \mid \Sigma^i \to \mathrm{HOM}(\ker, \mathrm{coker})$ *qui associe à* $(\alpha, \alpha') \in \pi^*(\mathrm{HOM}(\xi, \eta)) \mid \Sigma^i$ *la composition*:

$$\ker(\alpha) \subset \xi'_\alpha \xrightarrow{\alpha'} \pi^*(\eta)_\alpha \to \mathrm{coker}(\alpha).$$

Ainsi $\mathrm{HOM}(\ker, \mathrm{coker})$ *peut être considéré comme fibré normal à* Σ^i *dans* $S^1(\xi, \eta)$.

Démonstration. (i) Si $(a, \alpha) \in \tilde{\Sigma}^i$, $\dim(\ker(\alpha)) \geqslant i$ et $\alpha \in \bar{\Sigma}^i$. D'autre part, si $\alpha \in \bar{\Sigma}^i$ la dimension du noyau de α est au moins i et il content un i-plan a; alors $(a, \alpha) \in \tilde{\Sigma}^i$ et $p_1(a, \alpha) = \alpha$.

(ii) Introduisons des coordonnées au voisinage de $(a, \alpha) \in F_i(\xi')$, où $\alpha \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$. Soit U un voisinage de x au-dessus duquel ξ et η sont triviaux. Alors $p_1^{-1}(\pi^{-1}(U))$ s'identifie à $U \times \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \times F_i(E_x)$. Soit a un i-plan de E_x et a' un

$(n-i)$-plan complémentaire; soit $V_a=\{b\in F_i(E_x)\mid b\cap a'=0\}$; en considérant tout $b\in V_a$ comme graphe d'une application linéaire de a dans a' on définit un homéomorphisme de $\mathrm{Hom}(a, a')$ sur V_a qui en fait une carte locale sur $F_i(E_x)$. De plus, la restriction de $\mathrm{HOM}(\xi_i', \eta')$ à $U\times \mathrm{Hom}(E_\alpha, F_x)\times V_a$ s'identifie à $U\times \mathrm{Hom}(E_x, F_x)\times$ $\times \mathrm{Hom}(a, a')\times \mathrm{Hom}(a, F_x)$. Dans ces coordonnées, $\Psi_1(x, \alpha, b)=(x, \alpha, b, \alpha_1+\alpha_2\cdot b)$, où $\alpha_1=\alpha \mid a$ et $\alpha_2=\alpha \mid a'$. Notons par Ψ' la composition de Ψ_1 avec la projection sur $\mathrm{Hom}(a, F_x)$. Calculons la dérivée de Ψ' au point (a, α) dans la direction $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)\times$ $\times \mathrm{Hom}(a, a')$: Ψ' est linéaire par rapport à α et affine par rapport à b; dès lors il n'est pas difficile de voir que $d\Psi'_{a,\alpha}(0, A, B)=A_1+\alpha_2\cdot B$, où $A_1=A \mid a$. Il est évident que cette dérivée est surjective.

Dans la démonstration des deux numéros suivants, (a, α) désigne un élément de $\tilde{\Sigma}^i_\circ$; ainsi $\alpha_1=0$ et α_2 est injective. Toutes les dérivées seront prises au point (a, α).

(iii) Dans les mêmes coordonnées, reprenons l'expression de la dérivée de Ψ'; de $d\Psi'(0, 0, B)=0$ on déduit $\alpha_2\cdot B=0$, d'où $B=0$, puisque α_2 est injective. Or l'espace tangent à $\tilde{\Sigma}^i_\circ$ au point (a, α) coïncide avec le noyau de $d\Psi'$; ce qui précède prouve que que $p_1 \mid \tilde{\Sigma}^i_\circ$ est une immersion. De plus on peut définir $\sigma: \Sigma^i\to\tilde{\Sigma}^i_\circ$ en associant à $\alpha\in\Sigma^i$ le couple $(\ker(\alpha), \alpha)\in\tilde{\Sigma}^i_\circ$; on vérifie aussitôt que $p_1\cdot\sigma=\mathrm{id.}$ et que $\sigma\cdot p_1 \mid \tilde{\Sigma}^i_\circ=\mathrm{id.}$; on en déduit les propriétés voulues de $p_1 \mid \tilde{\Sigma}^i_\circ$.

(iv) désignons par ϱ_α l'homomorphisme de $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ dans $\mathrm{Hom}(\ker(\alpha), \mathrm{coker}(\alpha))$ qu'on déduit de ϱ. Dans les coordonnées introduites sous (ii), l'espace tangent aux fibres de Σ^i au point α est la projections dans $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ de l'espace vectoriel $T=\{(A, B)\in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)\times \mathrm{Hom}(a, a')\mid d\Psi'(0, A, B)=0\}$. Or $d\Psi'(0, A, B)$ $=0$ entraîne $\mathrm{Im}(A_1)\subset \mathrm{Im}(\alpha_2)=\mathrm{Im}(\alpha)$ et donc $\varrho_\alpha(A)=0$. D'autre part, si $\varrho_\alpha(A)=0$, l'équation $A_1+\alpha_2\cdot B=0$ définit univoquement B (rappelons que α_2 est injectif) et on a $(A, B)\in T$. Ainsi ce dernier espace se projette isomorphiquement sur $\ker(\varrho_\alpha)$. ‖

On appellera $\tilde{\Sigma}^i$ la désingularisation de $\bar{\Sigma}^i$.

Soit $\varphi: \xi\to\eta$ un morphisme de fibrés; on peut le considérer comme section $\varphi: X\to S^1(\xi, \eta)$.

(1.3) DÉFINITION. On dira que le morphisme φ est Σ^i-transverse si l'application associée de X dans $S^1(\xi, \eta)$ est transverse à $\Sigma^i(\xi, \eta)$. Posons $\Sigma^i(\varphi)=$ $\varphi^{-1}(\Sigma^i(\xi, \eta))$; si φ est Σ^i-transverse, c'est une sous-variété de X.

On vérifie que si φ est Σ^k-transverse pour $k\geqslant i$, l'adhérence de $\Sigma^i(\varphi)$ est égale à $\bigcup \Sigma^k(\varphi)$, $k\geqslant i$.

2. Désingularisation de $\bar{\Sigma}^{i,j}$

Soient $\xi=(E\to X)$ et $\eta=(F-X)$ des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) différentiables. Soit $(\alpha, \beta)\in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)\times \mathrm{Hom}(E_x\bigcirc E_x, F_x)$; par l'inclusion

$\operatorname{Hom}(E_x \bigcirc E_x, F_x) \subset \operatorname{Hom}(E_x \otimes E_x, F_x) \simeq \operatorname{Hom}(E_x, \operatorname{Hom}(E_x, F_x))$ on déduit de β une application linéaire de E_x dans $\operatorname{Hom}(E_x, F_x)$, puis par restriction et passage au quotient une application linéaire $\beta^* : \ker(\alpha) \to \operatorname{Hom}(\ker(\alpha), \operatorname{coker}(\alpha))$.

DÉFINITION. On pose $\Sigma^{i,j}(\xi, \eta) = \{(\alpha, \beta) \in S^2(\xi, \eta) \mid \alpha \in \Sigma^i(\xi, \eta)$ et $\dim(\ker(\beta^*)) = j\}$.

$\Sigma^{i,j}(\xi, \eta)$, que l'on notera parfois encore $\Sigma^{i,j}$, est un sous-fibré de $S^2(\xi, \eta)$. Il est vide à moins que $\max\{0, n-p\} \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

Comme L. Lander me l'a fait remarquer, l'adhérence de $\Sigma^{i,j}$ contient mais ne coïncide pas avec $\bigcup \Sigma^{k,l}$, $k \geqslant i$, $l \geqslant j$, contrairement à ce que je prétends dans [8].

Soient k et l des entiers tels que $0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n$ et soit $F_{k,l}(E_x)$ l'espace des couples (a, b) formés par le l-plan b contenu dans le k-plan a contenu dans E_x. On notera par $p : F_{k,l}(\xi) \to X$ le fibré associé à ξ de fibre $F_{k,l}(E_x)$. En considérant les triples (a, b, v), où $(a, b) \in F_{k,l}(E_x)$ et v est un vecteur de E_x contenu dans b, on définit un fibré ξ_l de rang l sur $F_{k,l}(\xi)$, sous-fibré de $p^*(\xi)$. Définissons $g : F_{k,l}(\xi) \to F_k(\xi)$ par $g(a, b) = a$; c'est une fibration localement triviale de fibre $F_l(a)$. ξ_l est un sous-fibré de $g^*(\xi_k)$.

Soient π la projection de $S^2(\xi, \eta)$ sur X, $\xi' = \pi^*(\xi)$, $p_2 : F_{i,j}(\xi') \to S^2(\xi, \eta)$ et $g : F_{i,j}(\xi') \to F_i(\xi')$ les analogues pour ξ' des fibrations introduites plus haut. Un élément de $F_{i,j}(\xi')$ est un quadruple (a, b, α, β), où $\alpha \in \operatorname{Hom}(E_x, F_x)$, $\beta \in \operatorname{Hom}(E_x \bigcirc E_x, F_x)$ et b est un j-plan dans le i-plan a de E_x.

On peut refaire les constructions du §1 au-dessus de $S^2(\xi, \eta)$. Désignons encore par $p_1 : F_i(\xi') \to S^2(\xi, \eta)$ le fibré en i-plans associé à ξ' et posons:

$$\begin{aligned}
\Sigma^i &= \{(\alpha, \beta) \in S^2(\xi, \eta) \mid \dim(\ker(\alpha)) = i\} \\
\tilde{\Sigma}^i &= \{(a, \alpha, \beta) \in F_i(\xi') \mid a \subset \ker(\alpha)\} \\
\tilde{\Sigma}^i_\circ &= \{(a, \alpha, \beta) \in F_i(\xi') \mid a = \ker(\alpha)\}
\end{aligned}$$

Considérons $g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i) = \{(a, b, \alpha, \beta) \in F_{i,j}(\xi') \mid a \subset \ker(\alpha)\}$; il suit de (1.1) que c'est une sous-variété de $F_{i,j}(\xi')$.

Reprenons dans un diagramme ces différents espaces:

$$\begin{tikzcd}
F_{i,j}(\xi') \supset g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i) \arrow[dd, "p_2"'] \arrow[dr, "g"] & \\
& F_i(\xi') \supset \tilde{\Sigma}^i \supset \tilde{\Sigma}^i_\circ \arrow[dl, "p_1"] \\
S^2(\xi, \eta) \supset \bar{\Sigma}^i \supset \Sigma^i &
\end{tikzcd}$$

Soit $\xi'_{i,j} = (p_2^*(\xi')/g^*(\xi'_i)) \oplus (\xi'_j \bigcirc g^*(\xi'_i))$ et soit $\eta' = (\pi \cdot p_2)^*(\eta)$. Définissons $\Psi_2 : g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i) \to \operatorname{HOM}(\xi'_{i,j}, \eta') \mid g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ en associant à (a, b, α, β) le couple $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, où $\tilde{\alpha}\in\mathrm{Hom}(E_x/a, F_x)$ se déduit de α, vu que celui-ci s'annule sur a, et $\tilde{\beta}\in\mathrm{Hom}(b\bigcirc a, F_x)$ est la restriction de β.

(2.1) PROPOSITION. *Considéré comme morphisme du fibré* $\xi_{i,j}\mid g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ *dans le fibré* $\eta'\mid g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$, Ψ_2 *est* Σ^k*-transverse pour tout* k *(voir déf.* 1.3*).*

Démonstration. Soit $f=(a, b, \alpha, \beta)\in g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ et $x=\pi(\alpha, \beta)$. Les restrictions de ξ_i' et η' à l'espace vectoriel $V=\{(a, b, A, B)\in g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)\mid\pi(A, B)=x\}$ sont triviales, de fibre respectivement $(E_x/a)\oplus(b\bigcirc a)$ et F_x. La restriction de Ψ_2 à V composée avec la projection sur la fibre $\mathrm{Hom}(E_x/a\oplus b\bigcirc a; F_x)$ est linéaire et surjective. L'affirmation en résulte. ‖

DÉFINITION. Rappelons que $i\bigcirc j$ désigne la dimension du produit symétrique d'un espace vectoriel de dimension i par un sous-espace de dimension j. On pose: $\tilde{\Sigma}^{i,j}=\bar{\Sigma}^{i\bigcirc j}(\Psi_2)$. Autrement dit, $\tilde{\Sigma}^{i,j}=\{(a, b, \alpha, \beta)\mid\dim(\ker(\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}))\geqslant i\bigcirc j\}$.

(2.2) PROPOSITION. (i) $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}=p_2^{-1}(\Sigma^{i,j})\cap\tilde{\Sigma}^{i,j}$ *est un ouvert dense de la variété* $\Sigma^{i\bigcirc j}(\Psi_2)$*, donc aussi de* $\tilde{\Sigma}^{i,j}$*.*

(ii) *la restriction de* p_2 *à* $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ *est un plongement d'image* $\Sigma^{i,j}$*. Ainsi,* p_2 *étant fermée,* $p_2(\tilde{\Sigma}^{i,j})=\bar{\Sigma}^{i,j}$*.*

Démonstration. Reprenons dans un diagramme les différents espaces qui apparaissent:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, dashed] & \Sigma^{i\bigcirc j}(\Psi_2) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{\Sigma}^{i\bigcirc j}(\Psi_2) = \tilde{\Sigma}^{i,j} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dashed] & g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i) \arrow[r, phantom, "\subset"] & F_{i,j}(\xi') \arrow[d, "p_2"] \\
& \Sigma^{i,j} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{\Sigma}^{i,j} \arrow[rr, phantom, "\subset"] & & S^2(\xi, \eta)
\end{tikzcd}$$

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où X est un point; dans ce cas E et F sont des espaces vectoriels.

(i) Montrons l'égalité $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}=\{(a, b, \alpha, \beta)\mid a=\ker(\alpha), b=\ker(\beta^*)\}$. Si $(a, b, \alpha, \beta)\in\in\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$, $\ker(\alpha)=a$ et $\dim(\ker(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))\geqslant i\bigcirc j$; $\tilde{\alpha}$ est alors injective et $\dim(\ker(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))$ est égale à la dimension du noyau de la composée: $a\bigcirc b\xrightarrow{\tilde{\beta}}F\to F/\mathrm{Im}(\alpha)$, qui doit donc être nulle. Il s'en suit que $\beta^*:\ker(\alpha)\to\mathrm{Hom}(\ker(\alpha), \mathrm{coker}(\alpha))$ s'annulle sur b; comme $\dim(\ker(\beta^*))=j$, on doit avoir $b=\ker(\beta^*)$. Réciproquement, si $a=\ker(\alpha)$, $\tilde{\alpha}$ est injective et $\dim(\ker(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}))$ est égale à la dimension du noyau de la composée de $\tilde{\beta}$ avec la projection $F\to F/\mathrm{Im}(\alpha)$. Cette composée est zéro puisque β^* s'annulle sur b. Ainsi $(a, b, \alpha, \beta)\in\Sigma^{i\bigcirc j}(\Psi_2)$; de plus, $(\alpha, \beta)\in\Sigma^{i,j}$.

Monstrons que $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ est ouvert dans $\Sigma^{i\bigcirc j}(\Psi_2)$: si $f=(a, b, \alpha, \beta)\in\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$, pour tout $(a', b', \alpha', \beta')$ dans un voisinage de f dans $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ on aura $\dim(\ker(\alpha'))\leqslant i$, et puisque

$a' \subset \ker(\alpha')$, on aura $a' = \ker(\alpha')$. De même, $\dim(\ker(\beta'^*)) \leqslant j$ pour β' assez proche de β; or α' étant injectif, la composée de $\tilde{\beta}'$ avec la projection $F \to F/\mathrm{Im}(\alpha')$ est nulle, d'où $b' = \ker(\beta'^*)$.

Montrons que $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ est dense dans $\Sigma^{i \bigcirc j}(\Psi_2)$; soit $(a, b, \alpha, \beta) \in \Sigma^{i \bigcirc j}(\Psi_2)$ et $K = \ker(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, sous-espace de dimension $i \bigcirc j$ de $(E/a) \oplus (b \bigcirc a)$. Etant donné que $b \bigcirc a$ a même dimension que K, il existe un automorphisme A de $(E/a) \oplus (b \bigcirc a)$ aussi proche qu'on veut de l'identité, tel que $A^{-1}(K) \cap (E/a) = 0$. Le composé $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \cdot A$ se met sous la forme (S, T), où $S: E/a \to F$ et $T: b \bigcirc a \to F$. Soit α' la composée $E \to E/a \xrightarrow{S} F$ et β'' l'homomorphisme de $E \bigcirc E \to F$ qui coïncide avec T sur $b \bigcirc a$ et avec β sur un supplémentaire à $b \bigcirc a$ dans $E \bigcirc E$. Puisque $\ker(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}'') = A^{-1}(K)$, l'intersection de cet espace avec E/a est zéro; on en déduit que $b \subset \ker((\beta'')^*)$; aussi près que l'on veut de β'' il existe β' tel que $b = \ker((\beta')^*)$ et $\ker(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') \cap (E/a) = 0$. Dans tout voisinage de (α, β) on trouve un tel (α', β'), pour lequel $(a, b, \alpha', \beta') \in \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$.

(ii) Décrivons des coordonnées locales sur $F_{i,j}(E)$. Soit $(a, b) \in F_{i,j}(E)$ et soit b' un $(i-j)$-plan complémentaire à b dans a et a' un $(n-i)$-plan complémentaire à a dans E. Soit $\lambda: E \to a$ la projection parallèle à a'. Soit $V_{a,b} = \{(\sigma, \tau) \in F_{i,j}(E) \mid \sigma \cap a' = 0, \lambda(\tau) \cap b' = 0\}$. Si $(\sigma, \tau) \in V_{a,b}$, on peut considérer σ comme graphe d'une application linéaire de a dans a'; de même $\lambda(\tau)$ sera le graphe d'un application linéaire de b dans b'. On définit ainsi un homéomorphisme de $\mathrm{Hom}(a, a') \times \mathrm{Hom}(b, b')$ sur $V_{a,b}$, qui en fait une carte locale sur $F_{i,j}(E)$.

Les restrictions à $V_{a,b}$ de ξ_j' et $g^*(\xi_i')$ sont triviales.

Vérifions que la restriction de g à $\tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ est une immersion dans $\tilde{\Sigma}_\circ^i$. Soit $f = (a, b, \alpha, \beta) \in \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$, où $\alpha \in \mathrm{Hom}(E, F)$ et $\beta \in \mathrm{Hom}(E \bigcirc E, F)$; on a que $a = \ker(\alpha)$ et que $b = \ker(\beta^*)$. En utilisant les coordonnées introduites auparavant, il y a un voisinage de f dans $g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ qui s'identifie à $\Sigma^i \times \mathrm{Hom}(b, b')$. En coordonnées, la restriction de Ψ_2 à ce voisinage est une application à valeurs dans $\Sigma^i \times \mathrm{Hom}(a', F) \times \mathrm{Hom}(b \bigcirc a, F)$. Soit Ψ' la composition de cette application avec la projection sur $\mathrm{Hom}(b \bigcirc a, F)$; $\Psi'(a, \tau, \alpha, \beta)$ est l'application bilinéaire de $b \times a$ dans F qui à $(u, v) \in b \times a$ associe $\beta(u + \tau(u), v) = \beta(u, v) + \beta(\tau(u), v)$. Le deuxième facteur de la somme est linéaire par rapport à τ; il est dès lors facile de voir que $d\Psi'_f(0, T, 0, 0)$ est l'application bilinéaire qui à $(u, v) \in b \times a$ associe $\beta(T(u), v)$. Si $\beta(T(u), v) = 0$, $\forall u \in b$, $\forall v \in a$, alors $T(u) \subset \ker(\beta^*)$, $\forall u \in b$; vu que $\ker(\beta^*) = b$, ceci entraîne que $T = 0$. Ainsi $\ker(dg_f) \cap \cap \ker(d\Psi'_f) = 0$ et $g \mid \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ est une immersion, dont il est clair que l'image est contenue dans $\tilde{\Sigma}_\circ^i$. D'autre part $p_2 = p_1 \cdot g$ et $p_1 \mid \tilde{\Sigma}_\circ^i$ est une immersion; il s'en suit que $p_2 \mid \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ est une immersion.

Définissons $\sigma: \Sigma^{i,j} \to \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$ en posant:

$$\sigma(\alpha, \beta) = (\ker(\alpha), \ker(\beta^*), \alpha, \beta).$$

On vérifie que σ est continue, que $p_2 \cdot \sigma = \mathrm{id.}$ et que $\sigma \cdot (p_2 \mid \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}) = \mathrm{id.}$ On en déduit les propriétés voulues de $p_2 \mid \tilde{\Sigma}_\circ^{i,j}$. ‖

3. Passage des singularités d'applications aux singularités de morphismes de fibrés

Soient V et W des variétés différentiables (resp. analytiques complexes) et soit $f: V \to W$ une application différentiable (resp. analytique). Posons $\Sigma^i(f) = \{x \in V \mid \dim(\ker(df_x)) = i\}$. Soient $T(V)' = p_V^*(T(V))$ et $T(W)' = p_W^*(T(W))$, où $p_V: V \times W \to V$ et $p_W: V \times W \to W$ sont les projections canoniques. On a que $\Sigma^i(f) = (df)^{-1}(\Sigma^i(T(V)', T(W)'))$, où la dérivée est considérée comme application $df: V \to \to \mathrm{HOM}(T(V)', T(W)')$.

Soit $x \in \Sigma^i(f)$; en coordonnées locales, f est une application d'un ouvert U de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F; la deuxième dérivée de f au point x peut être considérée comme application linéaire $d^2 f_x: E \to \mathrm{Hom}(E, F)$. On en déduit par passage au quotient une application linéaire $d^2 \hat{f}_x: E \to \mathrm{Hom}(\ker(df_x), \operatorname{coker}(df_x))$, qui est en fait indépendante des coordonnées choisies. Ainsi on en déduit un morphisme de fibrés $d^2 \hat{f}: T(V) \mid \Sigma^i(f) \to \mathrm{HOM}(\ker(df); \operatorname{coker}(df))$ (c'est la «dérivée intrinsèque de Porteous»; voir [1], §7).

(3.1) PROPOSITION (cf. [1], lemme 7.13). *Supposons $df: V \to \mathrm{HOM}(T(V)', T(W)')$ transverse à $\Sigma^i(T(V)', T(W)')$. On a alors une suite exacte de fibrés:*

$$0 \to T(\Sigma^i(f)) \to T(V) \mid \Sigma^i(f) \xrightarrow{d^2\hat{f}} \mathrm{HOM}(\ker(df), \operatorname{coker}(df)) \to 0.$$

Démonstration. Vu que df est transverse à Σ^i, cela suit de (1.1), (iv). ||

Si on suppose que df est Σ^i-transverse, $\Sigma^i(f)$ est une sous-variété de V. On peut alors poser:

$$\Sigma^{i,j}(f) = \{x \in \Sigma^i(f) \mid \dim(\ker(d(f \mid \Sigma^i(f))_x)) = j\}.$$

On va montrer comment $\Sigma^{i,j}(f)$ s'obtient comme image réciproque de $\Sigma^{i,j}(T(V)'; T(W)')$.

Une gerbe sur la variété M (voir [5], chap. 4, §3–4) est une application différentiable $e: T(M) \to M$ (dans le cas différentiable comme dans le cas analytique complexe), qui vérifie:

(i) e restreinte à la section nulle est l'identité;

(ii) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U_x de l'origine dans $T(M)_x$, tel que $e \mid U_x$ est un difféomorphisme sur son image.

Supposons que les variétés V et W (resp. différentiables ou analytiques complexes) soient munies de «gerbes» $e_V: T(V) \to V$ et $e_W: T(W) \to W$. Soit $f: V \to W$ une application différentiable (resp. analytique complexe). Soient $x \in V$, $y = f(x)$, U_y un voisinage de zéro dans $T(W)_y$ tel que $e_W \mid U_y$ soit un difféomorphisme sur son image et U_x un voisinage analogue pour x, tel que de plus $f(e(U_x))$ soit contenu dans U_y. La composition $f' = (e_W \mid U_y)^{-1} \cdot f \cdot (e_V \mid U_x): U_x \to V_y$ est bien définie. U_x et U_y étant des ouverts d'espaces vectoriels, on peut considérer la k-ième dérivée de f' en 0, $d^k f_0'$, comme élément de $\mathrm{Hom}(\overset{r}{\bigcirc} T(V)_x, T(W)_y)$. En posant $S^r(f)_{(x)}=(d^1f_0', \dots, d^kf_0')$ on définit une application $S^r(f)\colon V \to S^r(T(V)', T(W)')$, dont on vérifie qu'elle est différentiable.

Soit $J^r(V, W)$ l'espace des jets d'ordre r d'applications de V dans W; si $s\in J^r(V, W)$ est le jet au point $x\in V$ de $f\colon V\to W$, on peut lui associer $S^r(f)_{(x)}\in S^r(T(V)', T(W)')$. On vérifie que l'on définit ainsi un difféomorphisme entre $J^r(V, W)$ et $S^r(T(V)', T(W)')$. Il découle de la proposition suivante que par ce difféomorphisme les sous-variétés $\Sigma^{i,j}$ de $J^r(V, W)$ définies dans [1] et les $\Sigma^{i,j}(T(V)', T(W)')$ se correspondent.

(3.2) PROPOSITION. *Supposons que $f\colon V\to W$ soit telle que df est transverse à $\Sigma^i(T(V)', T(W)')$. Alors $\Sigma^{i,j}(f)=S^2(f)^{-1}(\Sigma^{i,j}(T(V)', T(W)'))$.*

Démonstration. $\dim(\ker(d(f \mid \Sigma^i(f))))=j$ si et seulement si $\dim(\ker(df_x)\cap \cap T(\Sigma^i(f))_x)=j$, ce qui revient à dire, d'après (3.1), que $\dim(\ker(d^2\hat{f} \mid \ker(df_x)))=j$. Indépendamment des gerbes choisies, ceci équivaut à dire que $S^2(f)\in\Sigma^{i,j}(T(V)', T(W)')$; pour voir cela, reprenons les notations du §2: on pose $\alpha=df_x$, $\beta=d^2f_x$; on a que $d^2\hat{f} \mid \ker(df_x)=\beta^*$. ||

4. Les classes duales à $\bar{\Sigma}^i$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}$

La proposition suivante m'a été suggérée par le «referee»; elle est essentiellement contenue dans [1].

(4.1) PROPOSITION. *$\bar{\Sigma}_x^i$ et $\bar{\Sigma}_x^{i,j}$ sont des sous-ensembles algébriques respectivement de* $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ *et* $S^2(E_x, F_x)$.

Démonstration. Si E_x et F_x sont munis de bases, $\alpha\in\bar{\Sigma}_x^i$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre $n-p+i$ de la matrice de α s'annulent, ce qui montre que $\bar{\Sigma}_x^i$ est algébrique.

Reprenons les notations des paragraphes 1 et 2 de [1], avec $V=\mathbf{R}^n$ et $W=\mathbf{R}^p$. Soit M le sous-ensemble algébrique de $J^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ défini par:

$$M = \{s\in J^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p) \mid tkr_s(\mathfrak{M}_q)\geqslant i,\ tkr_s(\mathfrak{M}_q)\geqslant j\}$$

On a: $M\cap\bar{\Sigma}^i\backslash M\cap\bar{\Sigma}^{i+1}=M\cap\Sigma^i=\bigcup\Sigma^{i,l}$, $l\geqslant j$. On vérifie que ce dernier ensemble est contenu dans l'adhérence de $\Sigma^{i,j}$; il s'en suit que l'adhérence de $M\cap\bar{\Sigma}^i\backslash M\cap\bar{\Sigma}^{i+1}$ est égale à $\bar{\Sigma}^{i,j}$. Or l'adhérence de $M\cap\bar{\Sigma}^i\backslash M\cap\bar{\Sigma}^{i+1}$ est un ensemble algébrique, car c'est la réunion des composantes irréductibles de $M\cap\bar{\Sigma}^i$ qui ne sont pas contenues dans $M\cap\bar{\Sigma}^{i+1}$. ||

Dans le cas complexe, supposons que X est orienté; on déduit alors de (4.1) et de ([2], théorème 3.2 et proposition 2.7) que $\bar{\Sigma}^i(\xi, \eta)$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}(\xi, \eta)$ portent des classes fondamentales en homologie entière à supports les fermés.

Dans le cas réel, il suit de (4.1) et de ([2], th. 3.7) que $\bar{\Sigma}^i(\xi, \eta)$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}(\xi, \eta)$ portent des classes fondamentales en homologie à coefficients modulo deux et à supports les fermés.

Dans le cas d'une application $f: V \to W$, respectivement différentiable ou analytique complexe, pour s'assurer de l'existence de la classe fondamentale de $\bar{\Sigma}^i(f)$ ou $\bar{\Sigma}^{i,j}(f)$, il suffit de supposer que $S^1(f)$ ou $S^2(f)$ sont transverses à une stratification vérifiant la condition «b» de Whitney de $\bar{\Sigma}^i(T(V)', T(W)')$ ou $\bar{\Sigma}^{i,j}(T(V)', T(W)')$. Si tel est le cas, l'existence d'une classe fondamentale suit de ([2], prop. 2.15) et de propriétés élémentaires des ensembles stratifiés. Une stratification de $\bar{\Sigma}^i$ vérifiant la condition «b» est donnée par les Σ^k, $k \geqslant i$; l'existence d'une stratification de $\bar{\Sigma}^{i,j}$ suit par example de ([11], th. 8.5).

On appellera classe duale à $\bar{\Sigma}^i$ ou $\bar{\Sigma}^{i,j}$ la classe de la cohomologie de $S^2(\xi, \eta)$ (à supports les fermés, ce qui donne la cohomologie ordinaire, et à coefficients entiers ou modulo deux selon les cas) obtenue en appliquant l'isomorphisme de dualité de Poincaré à l'image de la classe fondamentale dans l'homologie de $S^2(\xi, \eta)$. Par l'isomorphisme induit en cohomologie par la projection de $S^2(\xi, \eta)$ sur X on pourra considérer ces classes duales comme éléments de la cohomologie de X.

On sait, d'après un théorème de Thom (voir [4], exposé 8), que la classe duale à l'ensemble singulier d'un type donné d'une application différentiable (resp. analytique complexe) $f: V \to W$, générique pour la singularité envisagée, est obtenue en évaluant un polynôme universel sur les classes caractéristiques des fibrés $T(V)$ et $f^*(T(W))$. On va montrer l'existence de ce polynôme dans le cas particulier de $\bar{\Sigma}^i$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}$ et le fait que dans ces cas il ne dépend que des classes caractéristiques du fibré différence $T(V) - f^*(T(W))$.

(4.2) LEMME. *Soient $\xi = (E \to X)$, $\eta = (F \to X)$, $\xi' = (E' \to X')$ et $\eta' = (F' \to X')$ des fibrés vectoriels différentiables. Soient $\varphi: \xi \to \xi'$ et $\Theta: \eta \to \eta'$ des morphismes différentiables stricts (c'est-à-dire dont la restriction à chaque fibre est un isomorphisme) se projetant sur une même application $f: X \to X'$. Alors par l'application induite $f^*: H^*(X') \to \to H^*(X)$ les classes duales à $\bar{\Sigma}^i$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}$ se correspondent.*

Démonstration. On déduit de φ et Θ de manière naturelle un morphisme strict $\Psi: S^r(\xi, \eta) \to S^r(\xi', \eta')$ qui se projette sur f. Il est immédiat de vérifier que Ψ est transverse à $\Sigma^i(\xi', \eta')$ et à $\Sigma^{i,j}(\xi', \eta')$ et que $\Psi^{-1}(\Sigma^i(\xi', \eta')) = \Sigma^i(\xi, \eta)$, $\Psi^{-1}(\Sigma^{i,j}(\xi', \eta')) = \Sigma^{i,j}(\xi, \eta)$, de même que pour les adhérences. Le résultat suit alors de ([2], prop. 2.15). ||

Soient ξ, η et ζ des fibrés vectoriels différentiables complexes de même base X. On déduit de la projection $\xi \oplus \eta \to \xi$ une projection $\lambda_k: \overset{k}{\bigcirc}(\xi \oplus \zeta) \to \overset{k}{\bigcirc}\xi$. Soit $J: \eta \to \to \eta \oplus \zeta$ l'inclusion et définissons $s^r: S^r(\xi, \eta) \to S^r(\xi \oplus \zeta, \eta \oplus \zeta)$ par: $s^r(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = = (\alpha_1 \oplus 1_\zeta, J \cdot \alpha_2 \cdot \lambda_2, \ldots, J \cdot \alpha_r \cdot \lambda_r)$. Cette définition d'inspire du fait que si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est le jet à l'origine d'une application $f: E_x \to F_x$, le jet à l'origine de l'application «suspendue» $f\oplus 1_{G_x}: E_x\oplus G_x\to F_x\oplus G_x$, où G_x est la fibre de ζ au-dessus de x, est précisément $s^r(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$.

(4.3) LEMME.

(i) $(s^1)^{-1}(\Sigma^i(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta))=\Sigma^i(\xi,\eta)$, $(s^2)^{-1}(\Sigma^{i,j}(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta))=\Sigma^{i,j}(\xi,\eta)$. *Il en est de même pour les adhérences.*

(ii) s^1 *et* s^2 *sont transverses respectivement à* $\Sigma^i(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta)$ *et* $\Sigma^{i,j}(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta)$.

Démonstration. (i) Les deux premières égalités se vérifient immédiatement. Pour les adhérences, remarquons d'abord que si $\alpha\in\mathrm{Hom}(E_x,F_x)$, $\ker(\alpha)=\ker(\alpha\oplus 1_\zeta)$, où on identifie E_x à son image dans $E_x\oplus G_x$, G_x étant la fibre de ζ au-sessus de x. Or $(\alpha\oplus 1_\zeta)\in\bar\Sigma^i(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta)$ si et seulement si $\dim(\ker(\alpha\oplus 1_\zeta))\geqslant i$, ce qui équivaut à dire que $\dim(\ker(\alpha))\geqslant i$, ou encore que $\alpha\in\bar\Sigma^i(\xi,\eta)$. Si $s^2(\alpha,\beta)\in\bar\Sigma^{i,j}(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta)$, d'après la proposition (2.2) (ii), il existe un j-plan b contenu dans le i-plan a contenu dans $E_x\oplus G_x$ tels que $a\subset\ker(\alpha\oplus 1_\zeta)$ et la dimension du noyau de $(\alpha\oplus 1_\zeta, J\cdot\beta\cdot\lambda_2)$: $:((E_x\oplus G_x)/a)\oplus b\bigcirc a\to E_x\oplus G_x$ soit au moins $i\bigcirc j$. Or, puisque $\ker(\alpha\oplus 1_\zeta)=\ker(\alpha)$, on a que $b\subset a\subset E_x$; ainsi $\ker(\alpha\oplus 1_\zeta, J\cdot\beta\cdot\lambda_2)=\ker(\tilde\alpha,\tilde\beta)$ et il suit de (2.2) (ii) que $(\alpha,\beta)\in\bar\Sigma^{i,j}(\xi,\eta)$.

(ii) s^1 est linéaire le long des fibres et coïncide avec sa dérivée dans cette direction. La proposition (1.1) (iv) donne l'expression du fibré normal à Σ^i; la transversalité à Σ^i est alors conséquence du fait que $\ker(\alpha)=\ker(\alpha\oplus 1_\zeta)$, $\mathrm{coker}(\alpha)=\mathrm{coker}(\alpha\oplus 1_\zeta)$.

Reprenons les notations du §2 et considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{HOM}(\xi_{i,j},\eta') \arrow[r, "J"] & \mathrm{HOM}((\xi\oplus\zeta)_{i,j},(\eta\oplus\zeta)') & & \\
\tilde\Sigma_\circ^{i,j}(\Psi_2) \arrow[d, dashed] & \subset g^{-1}(\tilde\Sigma_i)\subset \arrow[ur, "\Psi_2"] & F_{i,j}(\xi') \arrow[r, "I"] \arrow[d, "p_2"] & F_{i,j}((\xi\oplus\zeta)') \arrow[d, "\bar p_2"] & \supset g^{-1}(\tilde\Sigma^i)\supset \arrow[ul, "\bar\Psi_2"'] & \tilde\Sigma_\circ^{i,j} \arrow[d, dashed] \\
\Sigma^{i,j} & \subset & S^2(\xi,\eta) \arrow[r, "s^2(\zeta)"] & S^2(\xi\oplus\zeta,\eta\oplus\zeta) & \supset & \Sigma^{i,j}
\end{tikzcd}$$

où I et J sont les inclusions évidentes. Remarquons que la restriction de $(\xi\bigcirc\zeta)_{i,j}$ à $F_{i,j}(\xi')$ s'identifie à $\xi_{i,j}\oplus\zeta'$. On déduit de la première partie de la démonstration que J est transverse à $\Sigma^{i\bigcirc j}((\xi\oplus\zeta)_{i,j},(\eta\oplus\zeta)')$; d'après la proposition (2.2), Ψ_2 et $\bar\Psi_2$ sont transverses respectivement à $\Sigma^{i\bigcirc j}(\xi_{i,j},\eta')$ et $\Sigma^{i\bigcirc j}((\xi\oplus\zeta)_{i,j},(\eta\oplus\zeta)')$. La transversalité de s^2 à $\Sigma^{i,j}$ s'en déduit facilement. ||

Supposons dorénavant que l'on se trouve dans le cas complexe (donc X orienté; mais voir remarque (4.6)). Le cas réel s'en déduit par ([2], th. 6.2) ou se traite de manière analogue en remplaçant partout les entiers par les entiers modulo deux et les classes de Chern par les classes de Stiefel-Whitney.

(4.4) THÉORÈME. *Il existe des polynômes à coefficients entiers* $q_i^r(c)$ *et* $q_{i,j}^r(c)$, *où* $c=(c_1,\ldots,c_k,\ldots)$ *tels que les classes duales à* $\bar\Sigma^i(\xi,\eta)$ *et* $\bar\Sigma^{i,j}(\xi,\eta)$ *soient respec-*

tivement égales à $q_i^r(c(\xi-\eta))$ *et* $q_{i,j}^r(c(\xi-\eta))$,*où* $r=\text{rang}(\eta)-\text{rang}(\xi)$ *et* $c_k(\xi-\eta)$ *désigne la k-ième classe de Chern du fibré différence.*

Démonstration. Soit $G_{n,N}$ la grassmannienne des n-plans dans $\mathbf{C}^{n+N}$; soit γ^n (ou encore γ) le fibré canonique sur $G_{n,N}$ et soit O^p le fibré trivial de rang p. Les classes duales à $\bar{\Sigma}^i(\gamma, O^p)$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}(\gamma, O^p)$, considérées comme éléments de la cohomologie de $G_{n,N}$, sont des polynômes dans les classes de Chern de γ; pour n et N assez grands, ces polynômes ne dépendent que de $r=p-n$ et on peut les noter respectivement $q_i^r(c)$ et $q_{i,j}^r(c)$, où $c=(c_1(\gamma),\ldots, c_k(\gamma),\ldots)$. Soit ζ un fibré sur X tel que $\eta\oplus\zeta\simeq O^p$ et $f:X\to G_{n,N}$ une application classifiante pour $\xi\oplus\zeta$, qu'on peut supposer différentiable; on déduit de ce qui précède et des lemmes (4.2) et (4.3) que les classes duales à $\bar{\Sigma}^i(\xi,\eta)$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}(\xi,\eta)$ sont données respectivement par:

$$f^*(q_i^r(c)) = q_i^r(c(f^*(\gamma))) = q_i^r(c(\xi\oplus\zeta)) = q_i^r(c(\xi-\eta)) \quad \text{et}$$
$$f^*(q_{i,j}^r(c)) = q_{i,j}^r(c(\xi-\eta)). \quad \|$$

Reprenons les constructions des §1 et 2. Soit $P_i:F_i(\xi)\to X$ le fibré en i-plans associé à ξ; soit $P_{i,j}:F_{i,j}(\xi)\to X$ le fibré associé à ξ de fibre les couples formés par un j-plan contenu dans un i-plan de la fibre de ξ. On déduit de ξ un fibré de rang i sur $F_i(\xi)$, noté ξ_i, et un fibré de rang j sur $F_{i,j}(\xi)$, noté ξ_j. On a une fibration $g:F_{i,j}(\xi)\to F_i(\xi)$ de fibre $G_{j,i-j}$. Posons:

$$\xi_{i,j} = (P_{i,j}^*(\xi)/g^*(\xi_i))\oplus(\xi_j \bigcirc g^*(\xi_i)).$$

Remarquons que les fibrés tangents aux fibres de P_i et $P_{i,j}$ sont munis d'une structure complexe et sont donc orientés. Il s'en suit que les homomorphismes de Gysin associés

$$(P_i)_!:H^*(F_i(\xi))\to H^*(X) \quad \text{et} \quad (P_{i,j})_!:H^*(F_{i,j}(\xi))\to H^*(X)$$

sont définis (voir [3], section D). Dans ce qui suit, on notera encore η pour $P_i^*(\eta)$ ou $P_{i,j}^*(\eta)$.

(4.5) THÉORÈME.

(i) $q_i^r(c(\xi-\eta)) = (P_i)_!(\chi(\text{HOM}(\xi_i,\eta)))$

(ii) $q_{i,j}^r(c(\xi-\eta)) = (P_{i,j})_!(q_{i \bigcirc j}^s(c(\xi_{i,j}-\eta))\cdot\chi(\text{HOM}(g^*(\xi_i),\eta)))$

où $s=r+i-i\bigcirc j$ *et* χ *désigne la classe d'Euler.*

Démonstration. (i) Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} F_i(\xi) & \xrightarrow{p_1} & S^1(\xi,\eta) \\ \downarrow{\scriptstyle F_i(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ F_i(\xi) & \xrightarrow{P_i} & X \end{array}$$

où on reprend les notations du §1; $F_i(\pi)$ se définit de manière naturelle. D'après la proposition (1.1), $\tilde{\Sigma}^i$ est l'ensemble des zéros de la section Ψ_1 du fibré $\mathrm{HOM}(\xi'_i, \eta)$; sa classe duale vaut donc $\chi(\mathrm{HOM}(\xi'_i, \eta))$. Il suit de (1.1) et de ([2], prop. 2.5) que l'image par l'application induite en homologie par $p_1 \mid \tilde{\Sigma}^i$ de la classe fondamentale de $\tilde{\Sigma}^i$ est égale à la classe fondamentale de $\bar{\Sigma}^i$. Il s'en suit que $(p_1)_!$ appliqué à la classe duale à $\tilde{\Sigma}^i$ donne la classe duale à $\bar{\Sigma}^i$. La formule finale résulte du diagramme commutatif précédent.

(ii) Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
F_{i,j}(\xi') & \longrightarrow & F_i(\xi') & \longrightarrow & S^2(\xi, \eta) \\
{\scriptstyle J}\uparrow & & \cup & & \cup \\
g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i) & \dashrightarrow & \tilde{\Sigma}^i & \dashrightarrow & \bar{\Sigma}^i \\
\cup & & & & \cup \\
\tilde{\Sigma}^{i,j} = \tilde{\Sigma}^{i \bigcirc j}(\Psi_2) & & \dashrightarrow & & \bar{\Sigma}^{i,j}
\end{array}$$

où l'on reprend les notations du §2; J désigne l'inclusion. La classe duale à $g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ dans $F_{i,j}(\xi')$ est égale à $g^*(\chi(\mathrm{HOM}(\xi'_i, \eta))) = \chi(\mathrm{HOM}(g^*(\xi'_i), \eta)))$; d'après (i), la classe duale à $\tilde{\Sigma}^{i,j}$ dans $g^{-1}(\tilde{\Sigma}^i)$ est égale à $q^s_{i \bigcirc j}(c(J^*(\xi'_{i,j} - \eta))) = J^*(q^s_{i \bigcirc j}(c(\xi'_{i,j} - \eta)))$. Il en résulte que la classe duale à $\tilde{\Sigma}^{i,j}$ dans $F_{i,j}(\xi')$ est égale à $q^s_{i,j}(c(\xi'_{i,j} - \eta)) \cdot$ $\cdot \chi(\mathrm{HOM}(g^*(\xi'_i), \eta))$. Il suit de (2.2) et de ([2], prop. 2.5) que l'application induite en homologie par $p_2 \mid \tilde{\Sigma}^{i,j}$ envoie la classe fondamentale de $\tilde{\Sigma}^{i,j}$ sur la classe fondamentale de $\bar{\Sigma}^{i,j}$. Il s'en suit que $(p_2)_!$ envoie la classe duale à $\tilde{\Sigma}^{i,j}$ sur la classe duale à $\bar{\Sigma}^{i,j}$. La formule finale résulte du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
F_{i,j}(\gamma) & \xrightarrow{p_2} & S^2(\gamma, O^{n+r}) \\
\downarrow{\scriptstyle F_{i,j}(\pi)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
F_{i,j}(\gamma) & \xrightarrow{P_{i,j}} & G_{n,N}.
\end{array} \qquad \|$$

(4.6) *Remarque.* Les considérations qui précèdent subsistent même si, dans le cas complexe, on ne suppose pas que X est orienté. En effet, $\bar{\Sigma}^i(\xi, \eta)$ et $\bar{\Sigma}^{i,j}(\xi, \eta)$ possèdent en tous les cas des classes fondamentales à coefficients dans le faisceau des entiers «tordus»; par dualité de Poincaré on obtient des éléments de la cohomologie à coefficients entiers de $S^2(\xi, \eta)$. Leur expression est encore donnée par (4.5); cela se voit soit en modifiant convenablement la proposition 2.5 de [2], soit en se ramenant au cas universel.

II. LE CALCUL DE $q^r_i(c)$ ET $q^r_{i,j}(c)$

1. Une dualité entre certains déterminants

Soit A un anneau commutatif avec unité; soit N un entier positif et i une suite de k entiers de la forme: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant N$. On désignera par i' la suite complémentaire dans l'ensemble des entiers de 1 à N. On notera par $\mathrm{sg}(i, i')$ la signature de la permutation $(1, 2, \ldots, N) \to (i_1, i_2, \ldots, i_k, i'_1, \ldots, i'_{N-k})$.

Soit $M = (m_{s,t})$, $s = 1, \ldots, N$, $t = 1, \ldots, N$ une matrice à coefficients dans A. Si i désigne une suite $1 \leqslant i_1 \cdots i_k \leqslant N$ et j une suite $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant N$, $M_{i,j}$ désigne le mineur correspondant, c'est-à-dire le déterminant de la $k \times k$-matrice $(m_{s,t})$, $s \in i$, $t \in j$. Rappelons que M est inversible si et seulement si $\mathrm{dét}(M)$ est une unité de A.

La proposition suivante est un simple exercice d'algèbre. On trouve une démonstration dans le livre de H. Weber, *Lehrbuch der Algebra* (Strasbourg, 1898), pages 113–114.

(1.1) PROPOSITION. *Supposons que la $N \times N$-matrice M soit inversible; alors on a:*

$$M_{i,j} = (-1)^{\mathrm{sg}(i,i') + \mathrm{sg}(j,j')} \cdot \mathrm{dét}(M) \cdot (M^{-1})_{j',i'} .$$

Soit $A = \mathbf{Z}[c_1, \ldots, c_n]$ l'anneau des polynômes à n variables, notées $c_1, \ldots, c_n$ à coefficients entiers. Posons $c_0 = 1$ et $c_k = 0$ si k est négatif ou supérieur à n. Définissons des polynômes $\bar{c}_k \in A$ par les équations:

$$\sum_{h=0}^{n} c_h \cdot \bar{c}_{k-h} = 0, \quad k = 1, \ldots, N; \quad \bar{c}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \bar{c}_k = 0 \quad \text{si} \quad k < 0.$$

Considérons la $(N+1) \times (N+1)$ matrice triangulaire suivante:

$$M = (m_{s,t}), \quad \text{où} \quad m_{s,t} = c_{s-t}, \quad s, t = 1, \ldots, N+1.$$

On a: $\mathrm{dét}(M) = 1$. On vérifie que:

$$M^{-1} = (\bar{c}_{s-t}), \quad s, t = 1, \ldots, N+1.$$

Soient $u = (u_1, \ldots, u_k)$ et $v = (v_1, \ldots, v_k)$ deux suites d'entiers positifs (non nécessairement croissantes) et soit $N = \sum_h u_h + v_h$. Notons par $Q_{u,v}(c_1, \ldots, c_n)$ (ou simplement $Q_{u,v}(c)$) le mineur $M_{i,j}$ de M correspondant aux suites:

$$i = (\underbrace{u_1 + 1, \ldots, u_1 + v_1}_{v_1}, \underbrace{u_1 + u_2 + v_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2 + v_1 + v_2}_{v_2}, \ldots,$$

$$\underbrace{u_1 + \cdots + u_k + v_1 + \cdots + v_{k-1} + 1, \ldots, N)}_{v_k}$$

$$j = \left(1, 2, \ldots, \sum_h v_h\right).$$

(1.2) PROPOSITION (cf. [6], lemme 0.6). *On a l'égalité:*

$Q_{u,v}(c_1 \dots c_n) = (-1)^{\varepsilon} \cdot Q_{v',u'}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N)$, *où*
$\varepsilon = u_1 \cdot v_1 + (u_1 + u_2) \cdot v_2 + \dots + (\sum u_h) \cdot v_k$, $v' = (v_k, v_{k-1}, \dots, v_1)$ *et*
$u' = (u_k, u_{k-1}, \dots, u_1)$.

Démonstration. On vérifie que $Q_{v',u'}(\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N)$ et $(M^{-1})_{j',i'}$ sont les déterminants de matrices qui s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une symétrie par rapport à l'anti-diagonale et donc coïncident; on vérifie encore que $\mathrm{sg}(j, j') = 1$, $\mathrm{sg}(i, i') = \varepsilon$. L'égalité résulte alors de (1.1). ‖

Associons à (u, v) une nouvelle suite s définie ainsi:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1, \dots, s_{v_1} = u_1 \\
&s_{v_1+1} = u_1 + u_2, \dots, s_{v_1+v_2} = u_1 + u_2 \\
&\vdots \\
&s_{v_1+\dots+v_{k-1}+1} = u_1 + \dots + u_k, \dots, s_{v_1+\dots+v_k} = u_1 + \dots + u_k
\end{aligned}
$$

En fait, $Q_{u,v}(c)$ ne dépend que de s, et on le notera dorénavant $Q_s(c)$. Pour toute suite croissante d'entiers positifs ou nuls $Q_s(c)$ est défini; c'est le déterminant:

$$
\begin{vmatrix}
c_{s_1} c_{s_1-1} \cdots & & \\
\vdots & & \\
c_{s_2+1} c_{s_2} \cdots & & \\
\vdots & \ddots & \\
 & & c_{s_{v_1+\dots+v_k}}
\end{vmatrix}
$$

Remarquons que si $s' = (0, \dots, 0, s_1, s_2, \dots)$, alors $Q_{s'} = Q_s$.

(1.3) PROPOSITION. *Les $Q_s(c_1, \dots, c_n)$ forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\mathbf{Z}[c_1, \dots, c_n]$.*

Démonstration. Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ une suite croissante d'entiers strictement positifs et posons: $c_s = c_{s_1} \cdot c_{s_2} \dots c_{s_N}$. Les c_s et 1 forment une base de $\mathbf{Z}[c_1, \dots, c_n]$. Posons:

$$
(s_1, \dots, s_N) < (s'_1, \dots, s'_{N'}) \Leftrightarrow \begin{cases} N < N' \text{ ou } N = N' \text{ et il existe } k < N \text{ tel que} \\ s_1 = s'_1, \dots, s_k = s'_k, \quad s_{k+1} < s'_{k+1} \end{cases}
$$

(ordre lexicographique). Ceci permet d'ordonner l'ensemble des c_s et l'ensemble des $Q_s(c)$. En développant le déterminant, on voit que $Q_s(c) = c_s +$ multiples entiers de monômes strictement inférieurs. Ainsi la matrice infinie qui exprime les $Q_s(c)$ en fonction des c_s est triangulaire avec des «1» dans la diagonale. On en déduit l'assertion. ‖

2. Le calcul de l'homomorphisme de Gysin associé à une fibration en k-plans provenant d'un fibré vectoriel

Soit $\xi=(E\to X)$ un fibré vectoriel complexe de rang n à base paracompacte et soit $p:F_k(\xi)\to X$ le fibré en k-plans associé; soit ξ_k le fibré de rang k sur $F_k(\xi)$ qu'on déduit de ξ.

(2.1) PROPOSITION. *En cohomologie à coefficients entiers l'homorphisme de $H^*(X)$-algebras $\varphi:H^*(X)\,[y_1,\ldots,y_k]\to H^*(F_k(\xi))$ défini par $\varphi(a\cdot y_n)=p^*(a)\cup \cup\, c_h(\xi_k)$ induit un isomorphisme:*

$$H^*(X)\,[y_1,\ldots,y_k]/J_k\simeq H^*(F_k(\xi)),$$

où J_k est l'idéal engendré par les polynômes $Y_{n-k+1},\ldots,Y_n$, qui sont solutions du système d'équations:

$$\sum_{h=0}^{j} y_h\cdot Y_{j-h}=c_j(\xi),\quad j=1,\ldots,n.$$

Dans le cas où X est un point, on trouve une démonstration de cette proposition dans ([9], prop. page 69); cette démonstration se généralise sans autre au cas où X n'est plus un point.

L'isomorphisme de (2.1) permet d'identifier $c_h(\xi_k)$ et la classe modulo J_k de y_h, que l'on notera encore par y_h.

Posons encore $Y_h=c_h(p^*(\xi)/\xi_k)$.

Supposons que ξ soit différentiable. La fibre du fibré en k-plans associé $p:F_k(\xi)\to X$ est la variété complexe $G_{k,n-k}$. Le fibré tangent aux fibres de p est donc orienté et l'homomorphisme de Gysin $p_!:H^i(F_k(\xi))\to H^{i-2k(n-k)}(X)$ en cohomologie à coefficients entiers est bien défini (voir [3], section D).

(2.2) PROPOSITION (cf. [6], Prop. (0, 3)).

$$p_!(Y_{s_1}\ldots Y_{s_k})=\begin{cases}1, & si\quad s_1=s_2=\cdots=s_k=n-k\\ 0, & sinon.\end{cases}$$

Démonstration. Soit $a\in G_{k,n-k}$ et soit a' un sous-espace de $\mathbf{C}^n$ complémentaire à a. Définissons une section $\varphi_a:G_{k,n-k}\to\mathrm{HOM}(a,\gamma_k')$, où γ_k' est l'orthogonal à γ^k dans $\mathbf{C}^n$, en associant à $b\in G_{k,n-k}$ la restriction à a de la projection de $\mathbf{C}^n$ sur b' parallèle à b. φ_a s'annule exactement au point a et on vérifie qu'elle est transverse à la section nulle. La classe d'Euler de $\mathrm{HOM}(a,\gamma_k')$ est la classe duale aux zéros de φ_a; puisque cet ensemble se réduit à un point, sa classe duale sera la classe fondamentale en cohomologie de $G_{k,n-k}$. Elle vaut $\bar{c}_{n-k}^{k}$.

Dans le cas où $s_1=\cdots=s_k=n-k$, ce qui précède montre que la restriction de

Y^k_{n-k} à chaque fibre donne la classe fondamentale en cohomologie, et donc $p_!(Y^k_{n-k})=1$.

S'il existe un h tel que $s_h>n-k$, $Y_{s_h}=0$.

Si, pour tout h, $s_h\leqslant n-k$, et si on n'est pas dans le cas où $s_k=n-k$ pour tout h, le degré de $Y_{s_1}\ldots Y_{s_k}$ est strictement inférieur à $2k(n-k)$ et le résultat suit du fait que $p_!$ abaisse les degrés de $2k(n-k)$ unités. $\|$

Posons $x_h=c_h(\xi)$.

(2.3) PROPOSITION.

$p_!(\bar{y}_{s_1}\ldots\bar{y}_{s_k})=\bar{x}_{s'_1}\ldots\bar{x}_{s'_k}$, *où* $s'_h=s_h-n+k$

Démonstration. On déduit de la suite exacte de fibrés:

$$0\to\xi_k\to p^*(\xi)\to p^*(\xi)/\xi_k\to 0$$

les identités:

$$\bar{y}_h=\sum_{g=0}^{h}p^*(\bar{x}_g)\cdot Y_{h-g},\quad h=1,\ldots,n-k;$$

de là on déduit que $\bar{y}_{s_1}\ldots\bar{y}_{s_h}=(p^*(\bar{x}_{s'_1}\cdots\bar{x}_{s'_k}))\cdot Y^k_{n-k}+$termes ne contenant pas Y^k_{n-k} résultat suit alors de (2.2) et de la formula $p_!(p^*(x)\cdot y)=x\cdot p_!(y)$ (voir [3], section D). $\|$

(2.4) COROLLAIRE. *Soit $s=(s_1,\ldots,s_k)$ une suite croissante d'entiers positifs. On a: $p_!(Q_s(\bar{y}))=Q_{s'}(\bar{x})$, où $s'_h=s_h-n+k$.* $\|$

Les propositions des §1 et 2 permettent de calculer $p_!$. En effet, il suffit de savoir calculer $p_!$ sur les expressions de la forme $y_{r_1}\ldots y_{r_N}$, où $r_h\leqslant k$. La proposition (1.3) permet d'exprimer ce monôme comme combinaison linéaire de déterminants de la forme $Q_s(y)$, où $s=(s_1,\ldots,s_N)$ est une suite croissante d'entiers au plus égaux à k, sans quoi $Q_s(y)=0$. D'après (1.2), ce déterminant est égal à $Q_t(\bar{y})$, où $t=(t_1,\ldots,t_k)$ s'obtient d'une manière bien déterminée à partir de s; on vérifie qu'en passant de s à t, $s_h\leqslant k$ entraîne que t est bien une suite d'au plus k éléments.

Par exemple, calculons $q^r_i(c)$ (cf. [6], prop. 1.3). Soit $P_i: F_i(\gamma)\to G_{n,N}$ le fibré en i-plans associé à γ et γ_i le fibré de rang i sur $F_i(\gamma)$ qu'on déduit de γ.

$$\chi(\mathrm{HOM}(\gamma_i,O^{n+r}))=(-1)^{i(n+r)}\cdot c_i(\gamma_i)^{n+r}=(-1)^{n+r}\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}c_i(\gamma_i) & \cdot & c_{i-1}(\gamma_i) & \cdots \\ c_{i+1}(\gamma_i) & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & & c_i(\gamma_i)\end{vmatrix}}^{n+r}$$

D'après (1.2), ceci est égal à

$$\left|\begin{vmatrix} \bar{c}_{n+r}(\gamma_i) & \bar{c}_{n+r-1}(\gamma_i) & \cdots \\ \bar{c}_{n+r+1}(\gamma_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \bar{c}_{n+r}(\gamma_i) \end{vmatrix}\right\} i.$$

En utilisant (4.4) et (4.5) du chapitre I et (2.4) du chapitre II il vient:

$$q_i^r(c) = (P_i^*)_!\,(\chi(\mathrm{HOM}(\gamma_i, O^{n+r}))) = \left|\begin{vmatrix} \bar{c}_{r+i}(\gamma) & \bar{c}_{r+i-1}(\gamma) & \cdots \\ \bar{c}_{r+i+1}(\gamma) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \bar{c}_{r+i}(\gamma) \end{vmatrix}\right\} i.$$

D'après 1.2, ceci est encore égal à .

$$(-1)^{i(r+i)} \overbrace{\begin{vmatrix} c_i(\gamma) & c_{i-1}(\gamma) & \cdots \\ c_{i-1}(\gamma) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & c_i(\gamma) \end{vmatrix}}^{r+i}.$$

3. Les classes de Chern du produit symétrique

Pour calculer $q_{i,j}^r(c)$, on doit calculer en cours de route les classes de Chern du produit symétrique d'un fibré ξ par un sous-fibré η.

(3.1) PROPOSITION. *Supposons que $\xi = \eta \oplus \eta'$; posons formellement:*

$$c(\eta) = \prod_{i=1,\ldots,k} (1+t_i); \quad c(\eta') = \prod_{j=k+1,\ldots,n} (1+t_j). \quad \textit{Alors:}$$

$$c(\eta \bigcirc \xi) = \Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} (1+t_i+t_j)\Big) \cdot \Big(\prod_{\substack{g=1,\ldots,k \\ h=k+1,\ldots n}} (1+t_g+t_h)\Big).$$

Démonstration. Soit $p_1: F_1 \to X$ le fibré en drapeau associé à η; soit $p_2: F_2 \to F_1$ le fibré en drapeau associé à $p_1^*(\eta)$ et soit $p = p_2 \cdot p_1 : F_2 \to X$. On a des isomorphismes:

$$p^*(\eta) \simeq \zeta_1 \oplus \zeta_2 \oplus \cdots \oplus \zeta_k$$
$$p^*(\eta') \simeq \zeta_{k+1} \oplus \cdots \oplus \zeta_n$$

où les ζ_i sont des fibrés de rang 1. Posons $c(\zeta_i) = 1 + t_i$; la formule énoncée résulte alors aussitôt de l'isomorphisme naturel suivant:

$$p^*(\eta \bigcirc \xi) \simeq \Big(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k} (\zeta_i \otimes \zeta_j)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{g=1,\ldots,k \\ h=k+1,\ldots,n}} (\zeta_g \otimes \zeta_h)\Big). \quad \|$$

Par exemple, si ξ est de rang 2, $c(\xi \bigcirc \xi) = 1 + 3c_1(\xi) + 4c_2(\xi) + 2c_1(\xi)^2 + 4c_1(\xi) \cdot c_2(\xi)$.

4. Quelques calculs

Considérons la fibration:

$$P_{i,j}: F_{i,j}(\gamma) \xrightarrow{g} F_i(\gamma) \xrightarrow{p_i} G_{n,N}$$

On pose $x_h = c_h(\gamma)$, $X_h = \bar{x}_h$; $y_h = c_h(\gamma_i) \in H^{2h}(F_i(\gamma))$; $z_h = c_h(\gamma_j) \in H^{2h}(F_{i,j}(\gamma))$. On écrira encore γ pour $P_i^*(\gamma)$ ou $P_{i,j}^*(\gamma)$, x_h pour $P_i^*(x_h)$ ou $P_{i,j}^*(x_h)$ et y_h pour $g^*(y_h)$.

(i) $q_{1,1}^r$

Dans ce cas, $P_1 = P_{1,1}$; $g = \text{id.}$; $s = r$; $\gamma_1 \bigcirc \gamma_1 = \gamma_1 \otimes \gamma_1$;

$$\chi(\mathrm{HOM}(\gamma_1, O^{n+r})) = (-1)^{n+r} \cdot y_1^{n+r}$$

$$q_1^s(c(\gamma_{1,1})) = \bar{c}_{r+1}(\gamma_{1,1}) = \bar{c}_{r+1}((\gamma/\gamma_1) \oplus (\gamma_1 \otimes \gamma_1))$$

$$\bar{c}_h(\gamma/\gamma_1) = X_h + X_{h-1} \cdot y_1; \qquad \bar{c}_h(\gamma_1 \otimes \gamma_1) = (-2)^h \cdot y_1^h$$

$$q_1^s = \sum_{h=0}^{r+1} (-2)^h \cdot X_{r+1-h} \cdot y_1^h + \sum_{h=0}^{r} (-2)^h \cdot X_{r-h} \cdot y_1^{h+1}.$$

Dans ce cas, les résultats du §2 s'appliquent trivialement et donnent: $(P_1)_!(y_1^h) = (-1)^h \cdot X_{h-n+1}$. Ainsi il vient:

$$q_{1,1}^r = X_{r+1}^2 + \sum_{h=0}^{r} 2^h \cdot X_{r-h} \cdot X_{r+h+2}$$

(ii) $q_{2,1}^0$

$$\begin{aligned} c(\gamma_{2,1}) &= 1 + x_1 + 2z_1 + x_2 - y_2 + 2z_1 x_1 \\ &\quad + 2z_1(x_2 - y_2) + y_1 y_2 + x_3 - x_1 y_2 \\ q_2^0(c(\gamma_{2,1})) &= c_2(\gamma_{2,1})^2 - c_1(\gamma_{2,1}) \cdot c_3(\gamma_{2,1}) \\ &= 4z_1^2(x_1^2 - x_2 + y_2) + 2z_1(x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_3) + K, \end{aligned}$$

où K est une expression ne contenant pas z_1, sur laquelle donc $(P_{2,1})_!$ s'annule. Rappelons que $(P_{2,1})_! = (P_1)_! \cdot g_!$ (voir [3], section D).

$$q_{2,1}^0 = (P_1)_!(y_2^n(g_!(4z_1^2(x_1^2 - x_2 + y_2) + 2z_1(x_1 x_2 - y_1 y_2 - x_3))));$$

ici g est une fibration en droites et $g_!$ se calcule comme sous (i). Il vient:

$$q_{2,1}^0 = (P_1)_!(-2y_1 y_2^{n+1} - 4y_1 y_2^n(x_1^2 - x_2) - 2y_2^n(x_2 x_1 - x_3))$$

or $y_1 y_2^h = Q_s(y_1, y_2)$, avec $s = (\underbrace{1, 2, \ldots, 2}_{h+1})$; d'après (1, 2), $Q_s(y_1, y_2) = Q_t(\bar{y})$ $t = (h, h+1)$. Ainsi, d'après (2, 4):

$$(P_1)_! \, (y_1 \cdot y_2^h) = \begin{vmatrix} X_{h-n+2} & X_{h-n+1} \\ X_{h-n+4} & X_{h-n+3} \end{vmatrix};$$

il suit encore de (1.2) que

$$x_1^2 - x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & X_1 \end{vmatrix}$$

$$x_1 x_2 - x_3 = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_1 & 1 \\ X_3 & X_2 \end{vmatrix};$$

d'où finalement

$$q_{2,1}^0 = 2 \cdot \begin{vmatrix} X_3 & X_2 \\ X_5 & X_4 \end{vmatrix} + 4X_2 \cdot \begin{vmatrix} X_2 & X_1 \\ X_4 & X_3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} X_1 & 1 \\ X_3 & X_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_2 & 1 \\ X_3 & X_2 \end{vmatrix}$$
$$= 2X_1 \cdot X_2^3 + 2X_1 \cdot X_3^2 - 4X_1 \cdot X_2 \cdot X_4 - 2 \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3 + 2 \cdot X_2^2 X_3 - 2X_2 \cdot X_5 + 2 \cdot X_3 \cdot X_4 .$$

(iii) $q_{2,2}^{-1}$

Dans ce cas, $P_{2,2} = P_2$; $g = \mathrm{id.}$; $i \bigcirc j = 3$, $s = -2$

$\chi(\mathrm{HOM}(g^*(\gamma_2), O^{n+r})) = y_2^{n-1}$

$q_3^{-2}(c(\gamma_{2,2})) = -c_3(\gamma_2 \bigcirc \gamma_2 \oplus \gamma/\gamma_2) = -2x_2 y_1 - 3x_1 y_2 + y_1 y_2 + x_3$

$q_{2,2}^{-1} = (P_2)_! \, (-2x_2 y_1 \cdot y_2^{n-1} - 3x_1 y_2^n + y_1 y_2^n + x_3 y_2^{n-1})$;

en procédant comme sous (ii), il vient:

$$q_{2,2}^{-1} = X_1^5 - X_1^3 \cdot X_2 - 4X_1^2 \cdot X_2 + 3X_1 \cdot X_2^2 + X_1 \cdot X_4 .$$

(iv) $q_{2,1}^{-1}$

Dans ce cas, on trouve $q_{2,1}^{-1} = 2X_1 \cdot (X_1^2 - X_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Boardman, J. M., *Singularities of differentiable maps*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S. *33* (1967), 383-419.

[2] Borel, A. et Haefliger, A., *La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique*, Bull. Soc. Math. de France *89* (1961), 461–513.

[3] Dyer, E., *Cohomology theories* (W. A. Benjamin Inc., 1969).

[4] HAEFLIGER, A. et KOSINSKI, A., *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire H. Cartan, ENS 1956–1957, exposé no 8.
[5] LANG, S., *Introduction aux variétés différentiables* (Dunod Paris, 1967).
[6] PORTEOUS, I. R., *Simple singularities of maps*, Notes, Columbia University (1962). Voir aussi: *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I*, Springer Lecture Notes, Vol. 192.
[7] PORTEOUS, I. R., *On the Chern classes of algebraic varieties related by a regular algebraic correspondence*, Notes de l'Université de Cambridge (1959).
[8] RONGA, F., *Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux*, C.R. Acad. Sc. Paris, tome 270 (1970), 582–584.
[9] STONG, R. E., *Notes on cobordism theory* (Princeton University Press, 1968).
[10] THOM, R., *Les singularités des applications différentiables*, – Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *6* (1955–1956), 43–87.
[11] WHITNEY, H., *Local properties of analytic varieties. – Differential and Combinational topology* (Princeton University Press, 1965), 205–244.

Reçu le 4 décembre 1970/23 juin 1971