

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1972)

**Artikel:** Sur quelques applications de la théorie de la descente à l'étude du groupe de Brauer  
**Autor:** Knus, M.-A. / Ojanguren, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36384>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur quelques applications de la théorie de la descente à l'étude du groupe de Brauer

M.-A. KNUS et M. OJANGUREN

### 1. Introduction

Il est bien connu que le groupe de Brauer  $\text{Br}(K)$  d'un corps  $K$  est de torsion. On montre en effet que pour toute algèbre centrale simple  $A$  de dimension  $n^2$  sur  $K$ , la classe  $[A]$  de  $A$  est annulée par  $n$ . Utilisant la cohomologie non-abélienne de Giraud, Grothendieck a généralisé ce résultat au groupe de Brauer d'un schéma (voir [GB] et [G, p. 343]). Dans la première partie de ce travail nous donnons une autre démonstration pour le groupe de Brauer d'un anneau commutatif. Cette démonstration, qui se réduit à un exercice de descente fidèlement plate, donne explicitement un isomorphisme  $A \otimes \cdots \otimes A \simeq \text{End}_R(Q)$ ,  $Q$  un  $R$ -module fidèlement projectif. Même dans le cas d'un corps, elle est différente et peut-être plus simple que les démonstrations classiques.

Dans la deuxième partie, nous généralisons aux anneaux commutatifs les résultats sur la  $p$ -torsion du groupe de Brauer d'un corps de caractéristique  $p \neq 0$ .

Finalement nous montrons que le groupe de Brauer d'un anneau s'injecte dans une limite inductive de groupes de cohomologie d'Amitsur. Utilisant alors des résultats d'Amitsur et Rosenberg-Zelinsky, nous prouvons que pour une extension "radicielle" d'anneaux l'application induite des groupes de Brauer est surjective. Ce résultat est dû à Hochschild [H, p. 144] pour des extensions de corps.

Nous remercions les professeurs A. Frölich et A. Rosenberg de leur aide pendant la préparation de cette note.

### 2. La descente fidèlement plate

Soit  $R$  un anneau commutatif et soit  $S$  une  $R$ -algèbre commutative. Nous noterons toujours  $\otimes$  le produit tensoriel sur  $R$ , sauf évidence contraire. Si  $M$  et  $N$  sont des  $R$ -modules et si  $f: M \rightarrow N$  est un homomorphisme de  $R$ -modules,  $M_S$  désignera le  $S$ -module  $M \otimes S$  et  $f_S$  le  $S$ -homomorphisme  $f \otimes 1_S: M_S \rightarrow N_S$ . Pour tout homomorphisme  $f: M_1 \otimes \cdots \otimes M_k \rightarrow N_1 \otimes \cdots \otimes N_k$ ,  $f_i$  sera l'homomorphisme  $M_1 \otimes \cdots \otimes S \otimes \cdots \otimes M_k \rightarrow N_1 \otimes \cdots \otimes S \otimes \cdots \otimes N_k$  obtenu en tensorisant  $f$  avec l'identité de  $S$  en  $i$ -ième position.

Pour tout  $S$ -module  $M$ , soient  $S \otimes M$  et  $M \otimes S$  les deux  $S \otimes S$ -modules obtenus à partir de  $M$  par extension des scalaires. Tout  $S \otimes S$ -homomorphisme  $g: M \otimes S \rightarrow S \otimes M$

induit

$$\begin{aligned} g_1 &: S \otimes M \otimes S \rightarrow S \otimes S \otimes M \\ g_2 &: M \otimes S \otimes S \rightarrow S \otimes S \otimes M \\ g_3 &: M \otimes S \otimes S \rightarrow S \otimes M \otimes S. \end{aligned}$$

Si  $N$  est le  $R$ -sous-module de  $M$  défini par  $N = \{m \in M \mid 1 \otimes m = g(m \otimes 1)\}$ , notons  $\eta: N \otimes S \rightarrow M$  l'homomorphisme de  $S$ -modules tel que  $\eta(n \otimes s) = ns$ .

**THÉORÈME 2.1.** *Si  $S$  est une  $R$ -algèbre fidèlement plate et si  $g$  est une donnée de descente, c'est-à-dire tel que  $g_2 = g_1 g_3$ , alors  $\eta$  est un isomorphisme et le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} N \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & M \otimes S \\ \tau \downarrow & & \downarrow g \\ S \otimes N \otimes S & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & S \otimes M \end{array}$$

où  $\tau(n \otimes s \otimes t) = s \otimes n \otimes t$ , est commutatif. Cette propriété définit la paire  $(N, \eta)$  à un isomorphisme près. Si, de plus,  $M$  est un  $S$ -module fidèlement projectif (c'est-à-dire projectif, de type fini et fidèle),  $N$  l'est sur  $R$ .

*Remarque 2.2.* Si  $M$  est une  $S$ -algèbre et  $g$  un isomorphisme de  $S \otimes S$ -algèbres, alors  $N$  est une  $R$ -algèbre et  $\eta$  un isomorphisme de  $S$ -algèbres.

Une démonstration du théorème 2.1 peut être trouvée dans [SGA1, Exposé VIII] ou dans [GD].

### 3. Les algèbres d'Azumaya

Soit  $A$  une  $R$ -algèbre. Nous appellerons  *$R$ -algèbre neutralisante* pour  $A$  un triple  $(S, P, \sigma)$  où  $S$  est une  $R$ -algèbre commutative fidèlement plate,  $P$  un  $S$ -module fidèlement projectif et  $\sigma$  un isomorphisme de  $S$ -algèbres  $\sigma: A \otimes S \rightarrow \text{End}_S(P)$ . Nous dirons que  $(S', P', \sigma')$  est une extension de  $(S, P, \sigma)$  si  $S'$  est une extension de  $S$  et  $P' = P \otimes_S S' = P_{S'}$ ,  $\sigma' = \sigma_{S'}$ . Rappelons encore qu'une  $R$ -algèbre  $S$  est *étale* si elle est de présentation finie, plate et  $S \otimes_R S$ -projective pour la structure de  $S \otimes S$ -algèbre induite par la multiplication  $S \otimes S \rightarrow S$ .

Une  *$R$ -algèbre d'Azumaya*  $A$  est une  $R$ -algèbre satisfaisant aux conditions équivalentes suivantes:

- 1)  $A$  est centrale et séparable sur  $R$ .
- 2)  $A$  est un  $R$ -module fidèlement projectif et l'application canonique  $\varrho: A \otimes A^0 \rightarrow \text{End}_R(A)$  ( $A^0$  est l'algèbre opposée) est un isomorphisme.
- 3)  $A$  est un  $R$ -module projectif de type fini et  $A/mA$  est une  $R/m$ -algèbre centrale simple pour tout idéal maximal  $m$  de  $R$ .

4) Tout point  $p$  de  $\text{Spec}(R)$  possède un voisinage ouvert  $U_f = \text{Spec}(R_f)$ ,  $f \in R - p$ , tel que  $A_f$  possède une  $R_f$ -algèbre neutralisante  $(S(f), P(f), \sigma(f))$  où  $S(f)$  est libre de rang fini et séparable sur  $R_f$  et  $P(f)$  est un  $S(f)$ -module libre de rang fini.

5)  $A$  possède une  $R$ -algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$ .

6)  $A$  possède une  $R$ -algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$  où  $S$  est étale sur  $R$ .

Les équivalences 1)  $\Leftrightarrow$  2) et 2)  $\Leftrightarrow$  3) se trouvent dans [AG], [GB] ou encore dans [DI]. Auslander et Goldman montrent également dans [AG] que toute algèbre centrale et séparable sur un anneau local possède une algèbre neutralisante libre de rang fini et séparable. On montre alors facilement que 1)  $\Rightarrow$  4). Pour voir que 4)  $\Rightarrow$  6) on peut prendre un recouvrement fini de  $\text{Spec}(R)$  par des ouverts  $U_i = \text{Spec}(R_{f_i})$   $i = 1, \dots, k$ , donnés par 4) et poser  $S = \prod S(f_i)$ ,  $P = \prod P(f_i)$ ,  $\sigma = \prod \sigma(f_i)$ . L'implication 6)  $\Rightarrow$  5) est triviale. Démontrons finalement que 5)  $\Rightarrow$  2). Par localisation il est facile de vérifier 2) pour l'algèbre des endomorphismes d'un module fidèlement projectif. Par conséquent,  $A_S \otimes_S A_S^0 \rightarrow \text{End}_S(A_S)$  est un isomorphisme. Le  $R$ -module  $A$  est projectif de type fini car  $A_S$  l'est sur  $S$  et  $S$  est fidèlement plate. On a alors  $\text{End}_S(A_S) \simeq \text{End}_R(A) \otimes S$  et  $\varrho: A \otimes A^0 \rightarrow \text{End}_R(A)$  est un isomorphisme.

Il suit de la condition 2) que le produit tensoriel  $A \otimes B$  de deux  $R$ -algèbres d'Azumaya  $A$  et  $B$  est une  $R$ -algèbre d'Azumaya et que, pour toute  $R$ -algèbre commutative  $S$ ,  $A \otimes S$  est une  $S$ -algèbre d'Azumaya. On dit que  $A$  et  $B$  sont *semblables* si les conditions équivalentes [AG, p. 381]

1)  $A \otimes B^0 \simeq \text{End}_R(P)$ ,  $P$  fidèlement projectif sur  $R$ .

2)  $A \otimes \text{End}_R(P) \simeq B \otimes \text{End}_R(Q)$ ,  $P$  et  $Q$  fidèlement projectifs sur  $R$

sont satisfaites. Le groupe de Brauer  $\text{Br}(R)$  de  $R$  est l'ensemble des classes  $[A]$  d'algèbres semblables, muni du produit induit par  $\otimes$ . L'inverse de  $[A]$  est  $[A^0]$  et on démontre que  $[A] = 1$  si et seulement si  $A \simeq \text{End}_R(P)$  pour un  $R$ -module fidèlement projectif  $P$ .

Pour toute  $R$ -algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$  de  $A$ , soit  $\varphi$  l'isomorphisme de  $S \otimes S$ -algèbres défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & \text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 S \otimes A \otimes S & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes P)
 \end{array} \tag{*}$$

où  $\tau(a \otimes s \otimes t) = s \otimes a \otimes t$ .

Nous dirons qu'une  $R$ -algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$  est *bonne* si  $\varphi$  est *intérieur*, c'est-à-dire induit par un isomorphisme de  $S \otimes S$ -modules  $f: P \otimes S \rightarrow S \otimes P: \varphi(x) = f x / f^{-1}$  pour tout  $x \in \text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S)$ .

Pour démontrer l'existence d'une bonne algèbre neutralisante nous nous servirons du résultat suivant de M. Artin.

**THÉORÈME 3.1 (Artin).** *Soient  $R$  un anneau noethérien,  $R \rightarrow S$  une  $R$ -algèbre étale fidèlement plate,  $S^{(n)} = S \otimes_R \cdots \otimes_R S$  ( $n$  facteurs) et  $S^{(n)} \rightarrow T$  une  $S^{(n)}$ -algèbre étale fidèlement plate. Il existe une  $S$ -algèbre étale fidèlement plate  $S \rightarrow S'$  telle que l'application canonique  $S^{(n)} \rightarrow S'^{(n)}$  se factorise à travers  $T: S^{(n)} \rightarrow T \rightarrow S'^{(n)}$ .*

*Démonstration.* C'est un cas particulier du théorème 4.1 de [A].

**PROPOSITION 3.2.** *Toute  $R$ -algèbre d'Azumaya possède une bonne algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$ . Si l'isomorphisme  $f: P \otimes S \rightarrow S \otimes P$  qui induit  $\varphi$  est une donnée de descente, c'est-à-dire si  $f_2 = f_1 f_3$ , on a  $[A] = 1$ . Inversément, si  $[A] = 1$  et si  $(S, P, \sigma)$  est une algèbre neutralisante pour  $A$ , il existe une bonne algèbre neutralisante pour  $A$   $(S', P', \sigma')$ , extension de  $(S, P, \sigma)$ , telle que  $\varphi' = \varphi_{S' \otimes S'}$  soit induit par une donnée de descente  $g: P' \otimes S' \rightarrow S' \otimes P'$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord  $R$  noethérien. Soit  $(S, P, \sigma)$  une algèbre neutralisante étale pour  $A$ . L'isomorphisme  $\varphi$  est induit par un isomorphisme  $f: P \otimes S \rightarrow (S \otimes P) \otimes_{S^{(2)}} I$  de  $S^{(2)}$ -modules, où  $I$  est un  $S^{(2)}$ -module inversible; de plus  $\varphi$  est intérieur si et seulement si  $I$  est libre [RZ1, Lemma 9]. Soit  $T$  une  $S^{(2)}$ -algèbre étale fidèlement plate telle que  $I \otimes_{S^{(2)}} T \simeq T$ . On peut par exemple choisir pour  $T$  un produit fini de localisés  $\prod_{i=1}^m S_{f_i}^{(2)}$  tels que  $I_{f_i}$  soit  $S_{f_i}^{(2)}$ -libre pour tout  $i$  et que les éléments  $f_1, \dots, f_m$  de  $S^{(2)}$  engendrent  $S^{(2)}$ . Si  $S'$  est la  $S^{(2)}$ -algèbre du théorème 3.1,  $I \otimes_{S^{(2)}} S'^{(2)} \simeq S'^{(2)}$  et  $(S', S' \otimes_S P, 1_{S'} \otimes_S \sigma)$  est une bonne algèbre neutralisante. Pour  $R$  arbitraire, il suffit d'observer que  $A$  est de la forme  $A_0 \otimes_{R_0} R$  où  $R_0$  est un sous-anneau noethérien (en fait de type fini sur  $\mathbf{Z}$ ) de  $R$  et  $A_0$  une  $R_0$ -algèbre d'Azumaya. On construit alors une bonne algèbre neutralisante pour  $A_0$  et en tensorisant avec  $R$ , on obtient la bonne algèbre neutralisante pour  $A$ .

Supposons que  $\varphi$  soit induit par un isomorphisme  $f$  tel que  $f_2 = f_1 f_3$ . D'après le théorème 2.1, il existe un  $R$ -module fidèlement projectif  $Q$  et un isomorphisme de  $S$ -modules  $\eta: Q \otimes S \rightarrow P$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & P \otimes S \\ \tau \downarrow & & \downarrow f \\ S \otimes Q \otimes S & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & S \otimes P \end{array}$$

commute. Il s'ensuit que le diagramme correspondant

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_R(Q) \otimes S \otimes S & \xrightarrow{\varrho \otimes 1} & \text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varphi \\ S \otimes \text{End}(Q) \otimes S & \xrightarrow{1 \otimes \varrho} & \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes P) \end{array}$$

où  $\varrho$  est la conjugaison par  $\eta$ , commute aussi. L'unicité de la descente appliquée aux paires  $(A, \sigma)$  et  $(\text{End}_R(Q), \varrho)$  entraîne que  $A \simeq \text{End}_R(Q)$ .

Soient maintenant  $A = \text{End}_R(Q)$ ,  $Q$  fidèlement projectif, et  $(S, P, \sigma)$  une algèbre neutralisante pour  $A$ . Comme dans la première partie de la démonstration, on construit une extension fidèlement plate  $S'$  de  $S$  telle que  $\sigma' = \sigma \otimes_S 1_{S'} : \text{End}_R(Q) \otimes S' \rightarrow \text{End}_{S'}(P \otimes_S S')$  soit induit par un  $S'$ -isomorphisme  $h : Q \otimes S' \rightarrow P' = P \otimes_S S'$ . Définissons  $f$  par la condition que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes S' \otimes S' & \xrightarrow{h \otimes 1} & P' \otimes S' \\ \tau \downarrow & & \downarrow f \\ S' \otimes Q \otimes S' & \xrightarrow{1 \otimes h} & S' \otimes P' \end{array}$$

commute. On a évidemment  $f_2 = f_1 f_3$  et  $f$  induit  $\varphi'$ .

*Remarque 3.3.* Si  $\varphi$  est induit par une donnée de descente  $f$  et qu'on pose  $Q = \{x \in P \mid 1 \otimes x = f(x \otimes 1)\}$ , alors l'isomorphisme  $A \rightarrow \text{End}_R(Q)$  est la restriction à  $A$  de l'isomorphisme  $\sigma : A \otimes S \rightarrow \text{End}_S(P)$ .

*Remarque 3.4.* Si  $A$  est une algèbre centrale simple de dimension finie sur un corps  $K$ ,  $\varphi$  est intérieur pour toute extension finie  $S$  de  $K$  qui neutralise  $A$ , par exemple pour un sous-anneau commutatif maximal de  $A$ . En effet  $S \otimes S$  est semi-local.

#### 4. La torsion du groupe de Brauer

**THÉORÈME 4.1.** *Pour toute  $R$ -algèbre d'Azumaya de rang constant  $n^2$ , on a  $[A]^n = 1$ .*

*Démonstration.* Puisque  $A$  est de rang constant  $n^2$ , il existe une bonne algèbre neutralisante  $(S, P, \sigma)$  telle que  $P = S^n$ , et donc que  $\varphi$  dans le diagramme (\*) soit induit par un automorphisme  $f : (S \otimes S)^n \rightarrow (S \otimes S)^n$ . On a évidemment  $\varphi_2 = \varphi_1 \varphi_3$ . D'autre part  $\varphi_i$  est induit par  $f_i, i = 1, 2, 3$ . L'automorphisme  $f_2^{-1} f_1 f_3$  appartient donc au centre de  $M_n(S \otimes S \otimes S)$  et on peut écrire  $u f_2 = f_1 f_3$  où  $u$  est une unité de  $S \otimes S \otimes S$ . Notons  $A^{(n)} = A \otimes \dots \otimes A$  et  $f^{(n)} = f \otimes \dots \otimes f$  ( $n$  facteurs). Soit  $\det(f)$  le déterminant de  $f$  et soit  $h = f^{(n)} (\det f)^{-1} : P^{(n)} \otimes S \rightarrow S \otimes P^{(n)}$ . Le déterminant commute avec l'extension des scalaires, par conséquent  $h_i = f_i^{(n)} (\det f_i)^{-1}$ . Puisque  $(u f_2)^{(n)} = u^n f_2^{(n)}$  et  $\det(u f_2) = u^n \det(f_2)$ , on a  $h_2 = h_1 h_3$ , d'où le résultat d'après la proposition 3.2, car  $h$  induit aussi  $\varphi^{(n)}$ .

**COROLLAIRE 4.2.** *Pour tout anneau commutatif  $R$ ,  $\text{Br}(R)$  est un groupe de torsion.*

*Démonstration.* Soit  $[A] \in \text{Br}(R)$ . Il suffit de décomposer  $R$  en un produit  $\prod_{i=1}^k R_i$  fini tel que  $A \otimes R_i$  soit de rang constant sur  $R_i$ . Ceci est possible car  $A$  est un  $R$ -module projectif de type fini.

*Remarque 4.3.* Si l'on tient compte de la remarque 3.3, la démonstration du théorème 4.1 donne explicitement un isomorphisme  $A \otimes \dots \otimes A \rightarrow \text{End}_R(Q)$ .

*Remarque 4.4.* Si on veut éviter l'emploi du théorème d'Artin et donner ainsi une démonstration tout à fait élémentaire de ce résultat, il suffit d'observer que, même si  $\varphi$  n'est pas intérieur, il existe toujours un monomorphisme  $f: (S \otimes S)^n \rightarrow (S \otimes S)^n$  tel que  $\varphi(\alpha) f = f \alpha$  pour tout  $\alpha \in M_n(S \otimes S)$  et que  $\det(f)$  ne divise pas zéro dans  $S \otimes S$ . On vérifie alors aisément par localisation que  $h = f^{(n)} (\det f)^{-1}$  induit un isomorphisme  $P^{(n)} \otimes S \rightarrow S \otimes P^{(n)}$  et satisfait à la condition de descente.

**5. Sur la  $p$ -torsion**

**THÉORÈME 5.1.** *Soit  $p$  un nombre premier,  $m$  un entier positif,  $R$  un anneau commutatif de caractéristique  $p$  et  $K$  une  $R$ -algèbre fidèlement plate, telle que  $K^{p^m} \subset R$ . Si  $[A \otimes K] = 1$  dans  $\text{Br}(K)$ , alors  $[A]^{p^m} = 1$  dans  $\text{Br}(R)$ .*

*Démonstration.* Si  $[A \otimes K] = 1$  il existe une algèbre neutralisante de la forme  $(K, P, \sigma)$ . Elle est nécessairement bonne: en effet, l'isomorphisme  $\varphi$  défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes K \otimes K & \xrightarrow{\sigma \otimes 1} & \text{End}_{K \otimes K}(P \otimes K) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varphi \\ K \otimes A \otimes K & \xrightarrow{1 \otimes \sigma} & \text{End}_{K \otimes K}(K \otimes P) \end{array}$$

est induit par  $f: P \otimes K \simeq (K \otimes P) \otimes_{K^{(2)}} I$  [RZ1, Lemma 9],  $I$  un  $K^{(2)}$ -module inversible. On voit, en tensorisant le diagramme par la  $K^{(2)}$ -algèbre  $\mu: K^{(2)} \rightarrow K$ ,  $\mu(a \otimes b) = ab$ , que  $\varphi \otimes_{K^{(2)}} 1_K$  est l'identité. Comme le noyau de  $\mu$  est nilpotent,  $\mu$  induit un monomorphisme  $\text{Pic}(K^{(2)}) \rightarrow \text{Pic}(K)$ . Par conséquent  $I \simeq K^{(2)}$  et  $\varphi$  est induit par un isomorphisme  $P \otimes K \rightarrow K \otimes P$  que nous noterons encore  $f$ . En tensorisant  $p^m$  fois sur  $K^{(2)}$  le diagramme ci-dessus, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^{(p^m)} \otimes K \otimes K & \xrightarrow{\sigma^{(p^m)} \otimes 1} & \text{End}_{K \otimes K}(P^{(p^m)} \otimes K) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \varphi^{(p)} \\ K \otimes A^{(p^m)} \otimes K & \xrightarrow{1 \otimes \sigma^{(p^m)}} & \text{End}_{K \otimes K}(K \otimes P^{(p^m)}) \end{array}$$

où  $\varphi^{(p^m)}$  est induit par  $f^{(p^m)}$ . Comme  $f_1 f_2^{-1} f_3 = u \in (K^{(3)})^*$ ,  $f_1^{(p^m)} (f_2^{(p^m)})^{-1} f_3^{(p^m)} = u^{p^m} \in R^*$ . Mais  $\varphi^{(p^m)}$  est aussi induit par  $g = u^{-p^m} f^{(p^m)}$  et  $g_1 g_2^{-1} g_3 = 1$ . Il suit alors de la proposition 3.2 que  $A^{(p^m)}$  est une  $R$ -algèbre triviale.

Supposons maintenant que  $R$  soit un anneau intègre de corps de fractions  $\Omega$ . Soit  $R^{1/p^m}$  le sous-anneau de  $\Omega^{1/p^m}$  formé des racines  $p^m$ -ièmes des éléments de  $R$ .

**LEMME 5.2.** *Pour toute  $R$ -algèbre étale  $S$ , l'application  $\pi: S \otimes R^{1/p^m} \rightarrow S$  définie par  $\pi(a \otimes b) = a^{p^m} b^{p^m}$  est un isomorphisme d'anneaux.*

*Démonstration.* Si  $T$  est l'image de  $\pi$  on a  $S^{p^m} \subset T \subset S$ . On sait d'autre part que  $S$  est séparable sur  $T$  car  $S$  est séparable sur  $R$  et  $T \supset R$ .  $S$  est donc un  $S \otimes_T S$ -module

projectif et l'égalité  $T=S$  suit du corollaire 21.1.6 de [EGA]. Pour démontrer l'injectivité, il suffit de démontrer que  $S \otimes R^{1/p^m}$  ne contient pas d'éléments  $p$ -nilpotents. Mais  $S \otimes R^{1/p^m}$  est une  $R^{1/p^m}$ -algèbre étale et on sait qu'une algèbre étale sur un anneau réduit est aussi un anneau réduit. [R, VII, 2, Prop. 1].

**LEMME 5.3.** *Soit  $S$  une  $R$ -algèbre étale et soient  $f$  et  $g: M \rightarrow N$  deux isomorphismes de  $S \otimes R^{1/p^m}$ -modules projectifs de type fini, tels que  $f^{(p^m)} = g^{(p^m)}$ . Alors  $f = g$ .*

*Démonstration.* Par localisation, on peut supposer que  $M$  et  $N$  sont libres de type fini. Un calcul explicite montre alors que  $f = e \cdot g$  où  $e \in S \otimes R^{1/p^m}$  est tel que  $\pi(e) = 1$ . Il faut que  $e = 1$  d'après le lemme 5.2.

**THÉORÈME 5.4.** *Si  $[A]^{p^m} = 1$ , alors  $[A \otimes R^{1/p^m}] = 1$ .*

*Démonstration.* Soit  $(S, P, \sigma)$  une bonne algèbre neutralisante pour  $A$ , telle que  $S$  soit étale sur  $R$ . L'isomorphisme dans le diagramme (\*) est donc induit par un isomorphisme  $f: P \otimes S \rightarrow S \otimes P$ . Quitte à remplacer  $S$  par une extension  $S'$ , on peut supposer, d'après la proposition 3.2, que  $\varphi^{(p^m)}$  est induit par un isomorphisme de descente  $g: P^{(p^m)} \otimes S \rightarrow S \otimes P^{(p^m)}$ , car  $[A]^{p^m} = 1$ . On peut écrire  $g = u f^{(p^m)}$  où  $u$  est une unité de  $S \otimes S$ . D'après le lemme 5.2 appliqué à  $S \otimes S$  il existe  $v \in S \otimes S \otimes R^{1/p^m}$  tel que  $v^{p^m} = u$ . L'isomorphisme  $h = v f: P \otimes S \otimes R^{1/p^m} \rightarrow S \otimes P \otimes R^{1/p^m}$  induit  $\varphi_{R^{1/p^m}}$  et  $h^{(p^m)} = g$  est une donnée de descente. Il suit du lemme 5.3, appliqué à  $h_2$  et  $h_1 h_3$ , que  $h$  est aussi une donnée de descente.

**COROLLAIRE 5.5.** *Le groupe de Brauer d'un anneau intègre parfait de caractéristique  $p$  est sans  $p$ -torsion.*

**COROLLAIRE 5.6.** *Si  $[A]^{p^m} = 1$ ,  $A$  possède une algèbre neutralisante libre et finie sur  $R$ .*

*Démonstration.* Si  $A \otimes R^{1/p^m}$  est une  $R^{1/p^m}$ -algèbre triviale, il existe une sous- $R$ -algèbre de type fini  $S = R[a_1, \dots, a_n] \subset R^{1/p^m}$  telle que la  $S$ -algèbre  $A \otimes S$  soit triviale. Soient  $t_1, \dots, t_n$  des indéterminées et  $S'$  la  $R$ -algèbre libre  $R[t_1, \dots, t_n]/I$  où  $I$  est l'idéal engendré par les éléments  $t_i^{p^m} - a_i^{p^m}$ . Puisque le noyau de l'homomorphisme  $S' \rightarrow S$  défini par  $t_i \mapsto a_i$  est nilpotent, l'application correspondante  $\text{Br}(S') \rightarrow \text{Br}(S)$  est injective [RS] et  $A \otimes S'$  est une  $S'$ -algèbre triviale.

## 6. La cohomologie d'Amitsur

Pour toute  $R$ -algèbre commutative  $S$ , soit  $S^*$  le groupe des unités de  $S$ . Rappelons que le complexe multiplicatif d'Amitsur  $C(S/R)$  est la suite de groupes

$$1 \rightarrow S^* \xrightarrow{A_1} (S \otimes S)^* \xrightarrow{A_2} (S \otimes S \otimes S)^* \xrightarrow{A_3} \dots$$

où  $\Delta_n(x) = \prod x_i^{(-1)^{i+1}}$  et  $x_i$  s'obtient à partir de  $x$  en introduisant 1 en  $i$ -ième position. On vérifie immédiatement que  $\Delta_{n+1}\Delta_n = 0$ . La cohomologie d'Amitsur est alors définie par  $H^n(S/R) = \ker \Delta_{n+1} / \text{Im } \Delta_n$ . Posons  $H^n(R) = \lim H^n(S/R)$ , la limite étant prise sur les  $R$ -algèbres fidèlement plates  $S$ . Une construction précise de telles limites inductives se trouve dans [CR, p. 68] ou dans [D].

A toute  $R$ -algèbre d'Azumaya  $A$ , on peut associer un 2-cocycle. En effet, soit  $(S, P, \sigma)$  une bonne algèbre neutralisante pour  $A$ . L'isomorphisme  $\varphi: \text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \rightarrow \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes P)$  construit à l'aide de  $\sigma: A \otimes S \rightarrow \text{End}_S(P)$  est donc induit par un  $S \otimes S$ -isomorphisme  $f: P \otimes S \rightarrow S \otimes P$ . Puisque  $\varphi_2 = \varphi_1 \varphi_3$ , l'élément  $u(\sigma, f) = f_2^{-1} f_1 f_3$  appartient au centre de  $\text{End}_{S \otimes S \otimes S}(P \otimes S \otimes S)$ , donc à  $(S \otimes S \otimes S)^*$ . A l'aide des relations  $(f_i)_j = (f_{j-1})_i$  pour  $i < j$  et  $(f_i)_i = (f_i)_{i+1}$ , on vérifie que  $\Delta_3(u(\sigma, f)) = 1$ , c'est-à-dire que  $u(\sigma, f)$  est un 2-cocycle de  $C(S/R)$ . La classe de  $u(\sigma, f)$  dans  $H^2(S/R)$  ne dépend pas du choix de l'isomorphisme  $f$  qui induit  $\varphi$ , car si  $g$  est un deuxième isomorphisme induisant  $\varphi$  on a  $g = vf$  pour un  $v \in (S \otimes S)^*$  et par conséquent  $u(\sigma, g) = u(\sigma, f) \Delta_2(v)$ . Notons  $\theta(\sigma)$  l'image de  $u(\sigma, f)$  dans  $H^2(R)$ .

LEMME 6.1. Si  $[A] = 1$ , alors  $\theta(\sigma) = 1$ .

*Démonstration.* Il est clair que si  $S'$  est une extension de  $S$  et  $\sigma' = \sigma \otimes_S 1_{S'}$ , on a  $\theta(\sigma) = \theta(\sigma')$ . Si  $[A] = 1$ , d'après la proposition 3.2 il existe une extension  $S'$  de  $S$  telle que  $\varphi' = \varphi \otimes_S 1_{S'}$  est induit par une donnée de descente  $g$ . En ce cas, on a  $u(\sigma', g) = 1$  et partant  $\theta(\sigma) = \theta(\sigma') = 1$ .

LEMME 6.2. Soient  $(S, P, \sigma)$  une bonne algèbre neutralisante pour  $A$  et  $\tilde{P} = \text{Hom}_S(P, S)$  le dual de  $P$ . Notons par  $\tilde{\alpha}$  le dual de tout homomorphisme  $\alpha$  de modules. Soit  $\sigma^0: A^0 \otimes S \rightarrow \text{End}_S(\tilde{P})$  l'isomorphisme défini par  $\sigma^0(x) = \overline{\sigma(x)}$ . Alors  $(S, \tilde{P}, \sigma^0)$  est une bonne algèbre neutralisante pour  $A^0$  et  $\theta(\sigma^0) = \theta(\sigma)^{-1}$ .

*Démonstration.* On vérifie facilement que si l'isomorphisme  $\varphi: \text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \rightarrow \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes P)$ , défini par  $\sigma$  est induit par  $f: P \otimes S \rightarrow S \otimes P$ , l'isomorphisme  $\varphi^0: \text{End}_{S \otimes S}(\tilde{P} \otimes S) \rightarrow \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes \tilde{P})$  défini par  $\sigma^0$  est induit par  $\tilde{f}^{-1}: \tilde{P} \otimes S \rightarrow S \otimes \tilde{P}$ . On trouve  $u(\sigma^0, \tilde{f}^{-1}) = u(\sigma, f)^{-1}$ , d'où le résultat énoncé.

LEMME 6.3. Soient  $(S, P, \sigma)$  et  $(T, Q, \tau)$  des bonnes algèbres neutralisantes pour  $A$  et  $B$  respectivement. Alors  $(S \otimes T, P \otimes Q, \sigma \otimes \tau)$  est une bonne algèbre neutralisante pour  $A \otimes B$  et  $\theta(\sigma \otimes \tau) = \theta(\sigma) \theta(\tau)$ .

*Démonstration.* Si l'isomorphisme  $\text{End}_{S \otimes S}(P \otimes S) \rightarrow \text{End}_{S \otimes S}(S \otimes P)$  défini par  $\sigma$  est induit par  $f$  et l'isomorphisme  $\text{End}_{T \otimes T}(Q \otimes T) \rightarrow \text{End}_{T \otimes T}(T \otimes Q)$  défini par  $\tau$  est induit par  $g$ , l'isomorphisme défini par  $\sigma \otimes \tau$  est induit par  $f \otimes g$  et  $u(\sigma \otimes \tau, f \otimes g) = u(\sigma, f) \otimes u(\tau, g) = u(\sigma \otimes 1_T, f \otimes 1_T) u(1_S \otimes \tau, 1_S \otimes g)$ . Il en suit que  $\theta(\sigma \otimes \tau) = \theta(\sigma \otimes 1_T) \theta(1_S \otimes \tau) = \theta(\sigma) \theta(\tau)$ .

**COROLLAIRE 6.4.** *Pour toute algèbre  $A$ ,  $\theta(\sigma)$  est indépendant du choix de la bonne algèbre neutralisante.*

*Démonstration.* Soient  $(S, P, \sigma)$  et  $(T, Q, \tau)$  deux bonnes algèbres neutralisantes pour  $A$ . D'après les lemmes 6.3 et 6.2,  $\theta(\sigma \otimes \tau^0) = \theta(\sigma) \theta(\tau)^{-1}$  et d'après le lemme 6.1, en tenant compte de  $[A \otimes A^0] = 1$ ,  $\theta(\sigma \otimes \tau^0) = 1$ , d'où le résultat.

**THÉORÈME 6.5.** *La correspondance  $A \mapsto \theta(\sigma)$  induit un monomorphisme naturel  $\theta: \text{Br}(R) \rightarrow H^2(R)$ .*

*Démonstration.* Le lemme 6.3, le corollaire 6.4 et le lemme 6.1 montrent que l'application  $\theta$  est bien définie et qu'elle est un homomorphisme de groupes. Il reste à démontrer qu'elle est injective. Si  $\theta(\sigma) = 1$ , il existe une extension fidèlement plate  $S'$  de  $S$  telle que  $u(\sigma_{S'}, f_{S'}) = \Delta_2(v)$  pour une unité  $v$  de  $S' \otimes S'$ . On vérifie immédiatement que  $f_{S'}, v^{-1}$  satisfait à la condition de descente et il suit alors de la proposition 3.2 que  $[A] = 1$ .

## 7. Extensions radicielles

Dans tout ce paragraphe,  $R$  dénotera un anneau commutatif de caractéristique  $p$ ,  $p$  étant un nombre premier.

Le lemme qui suit est implicite dans la démonstration du théorème 2.1 de [RS].

**LEMME 7.1.** *Soit  $A$  une  $K$ -algèbre d'Azumaya,  $\mu: S' \rightarrow S$  un homomorphisme surjectif de  $K$ -algèbres à noyau nilpotent et  $(S, P, \sigma)$  une algèbre neutralisante pour  $A$ . Alors, si  $S'$  est fidèlement plate sur  $K$ , il existe une algèbre neutralisante  $(S', P', \sigma')$  qui relève  $(S, P, \sigma)$ , c'est-à-dire telle que  $P = P' \otimes_{S'} S$  et  $\sigma = \sigma' \otimes_{S'} 1_S$ . Si, de plus,  $(S, P, \sigma)$  est bonne,  $(S', P', \sigma')$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Posons, pour simplifier,  $B = A \otimes_K S$  et  $B' = A \otimes_K S'$ . L'isomorphisme  $\sigma$  définit une structure de  $B$ -module sur  $P$  et d'après la dualité de Morita [B, II 3.5],  $P$  est même un  $B$ -module fidèlement projectif. Or, le noyau de  $\mu$  étant nilpotent et  $B'$  finie sur  $S'$ , le noyau de  $1_A \otimes \mu: B' \rightarrow B$  est aussi nilpotent. Il existe donc [B, II 2.12] un  $B'$ -module fidèlement projectif  $P'$  tel que  $P = B \otimes_{B'} P' = P \otimes_S S'$ . Si  $\sigma': B' \rightarrow \text{End}_{S'}(P')$  est l'homomorphisme de  $S'$ -algèbres défini par la structure de  $B'$ -module sur  $P'$ ,  $\sigma'$  relève  $\sigma$  et est par conséquent un isomorphisme [B, II 2.12]. Puisque  $B'$  est fidèlement projectif sur  $S'$ ,  $P'$  est un  $S'$ -module fidèlement projectif et  $(S', P', \sigma')$  est une algèbre neutralisante.

On vérifie comme dans la démonstration du théorème 5.1 que  $(S', P', \sigma')$  est bonne si  $(S, P, \sigma)$  est bonne.

**THÉORÈME 7.2.** *Pour toute extension  $R \subset K$  telle que  $K^{p^m} \subset R$  et que  $K$  soit projectif de type fini comme  $R$ -module, l'homomorphisme  $\text{Br}(R) \rightarrow \text{Br}(K)$  est surjectif.*

*Démonstration.* Soit  $A$  une  $K$ -algèbre d'Azumaya et soit  $(S, \sigma, P)$  une bonne  $K$ -algèbre neutralisante pour  $A$ . Notons  $S'$  la  $K$ -algèbre  $K \otimes_R S$  où  $K$  opère sur le premier facteur et soit  $\mu: S' \rightarrow S$  l'homomorphisme de  $K$ -algèbres défini par la multiplication dans  $S$ . Le noyau de  $\mu$  est nilpotent car le noyau de la multiplication  $K \otimes K \rightarrow K$  est nilpotent et est de type fini en tant que  $1 \otimes K$ -module. D'après le lemme 7.1, il existe une bonne algèbre neutralisante  $(S', P', \sigma')$  qui relève  $(S, P, \sigma)$ . Soit  $f: P' \otimes_K S' \rightarrow S' \otimes_K P'$  un isomorphisme qui induit le  $\varphi$  défini par  $\sigma'$  et  $u = f_2^{-1} f_1 f_3$  le cocycle associé. D'après Rosenberg et Zelinski [RZ2, Prop. 4.1 et Lemma 4.2] on a une suite exacte

$$H^2(S/R) \xrightarrow{\alpha} H^2(S'/K) \rightarrow H^3(K/R)$$

où  $\alpha$  est induit par  $S \rightarrow S' = K \otimes S$ ,  $s \rightarrow 1 \otimes s$ . D'après Amitsur [AM, Lemma 8],  $H^3(K/R) = 0$  et  $\alpha$  est donc surjectif. On peut alors écrire  $u = (1 \otimes u_0) \Delta_2(v)$  où  $v \in (S' \otimes_K S')^*$  et où  $u_0$  est un 2-cocycle de  $S/R$ . A l'application  $g = f v^{-1}: P' \otimes_K S' \rightarrow S' \otimes_K P'$  est associé le 2-cocycle  $g_2^{-1} g_1 g_3 = 1 \otimes u_0 \in (K \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R S)^* = (S' \otimes_K S' \otimes_K S')^*$ . Notons  $Q$  le module  $P'$  considéré comme  $S$ -module seulement et  $h: Q \otimes_R S \rightarrow S \otimes_R Q$  le  $S \otimes_R S$ -isomorphisme donné par  $g$  (on oublie l'action de  $K$ !). Le  $S$ -module  $Q$  est fidèlement projectif car  $K$  est fidèlement projectif sur  $R$ . Si  $\psi$  est la conjugaison par  $h$ , on a  $\psi_2^{-1} \psi_1 \psi_3 = 1$  car  $h_2^{-1} h_1 h_3 = u_0$  est un élément du centre de  $\text{End}_{S \otimes S \otimes S}(Q \otimes S \otimes S)$ . C'est donc une donnée de descente qui définit une  $R$ -algèbre d'Azumaya  $A_0 = \{x \in \text{End}_S(Q) \mid \psi(x \otimes 1) = 1 \otimes x\}$ . Puisqu'à  $K \otimes A_0$  est associé le 2-cocycle  $1 \otimes u_0$ , on a  $[K \otimes A_0] = [A]$  d'après le théorème 6.5. D'où le résultat.

1) Le lemme d'Amitsur ne concerne que le cas  $m = 1$ , mais il n'est pas difficile de s'y ramener.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] ARTIN, M., *On the Joins of Hensel Rings*, *Advances in Math.* 7 (1971), 282–296.
- [AG] AUSLANDER, M. et GOLDMAN, O., *The Brauer group of a commutative ring*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 97 (1960), 367–409.
- [AM] AMITSUR, S. A., *Complexes of rings*, *Israel J. Math.* 2 (1964), 143–154.
- [B] BASS, H., *Algebraic K-theory* (Benjamin, 1968).
- [CR] CHASE, S. et ROSENBERG, A., *Amitsur cohomology and the Brauer group*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 52 (1965), 34–79.
- [D] DOBBS, D. E., *Cech cohomological dimensions for commutative rings*, *Springer Lecture Notes* 147, 1970.
- [DI] DE MEYER, F. et INGRAHAM, E., *Separable algebras over commutative rings*, *Springer Lecture Notes* 181, 1971.
- [EGA] GROTHENDIECK, A., *Eléments de Géométrie Algébrique, IV*, Chap. 0, IHES Publ. Math. No 20.
- [G] GIRAUD, J., *Cohomologie non-abélienne*, *Grundlehren* 179, (Springer, 1971).
- [GB] GROTHENDIECK, A., *Le groupe de Brauer I*, *Séminaire Bourbaki*, Exposé 290 (1965).
- [GD] —, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique I*, *Séminaire Bourbaki*, Exposé 190 (1959–1960).

- [H] HOCHSCHILD, G., *Restricted Lie algebras and simple associative algebras of characteristic  $p$* , Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), 135–147.
- [R] RAYNAUD, M., *Anneaux Locaux Henséliens* (Springer Lecture Notes 169, Berlin 1970).
- [RS] ROY, A. et SRIDHARAN, R., *Derivations in Azumaya algebras*, J. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), 161–167.
- [RZ1] ROSENBERG, A. et ZELINSKY, D., *Automorphisms of separable algebras*, Pac. J. of Math. 2 (1961), 1107–1117.
- [RZ2] ———, *Amitsur's complex for inseparable fields*, Osaka Math. J. 14 (1962), 219–240.
- [SGA 1] *Séminaire de géométrie algébrique 1* (1960/61), dirigé par A. Grothendieck, Springer Lecture Notes 224, 1971.

M.A.K.  
ETH  
Zürich

M.O.  
Institut Battelle  
Genève

Reçu le 21 avril/21 novembre 1972