

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	47 (1972)
Artikel:	Feuilletages de codimension 1 sur les variétés simplement connexes de dimension 5
Autor:	A'Campo, Norbert
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-36382

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Feuilletages de codimension 1 sur les variétés simplement connexes de dimension 5

par NORBERT A'CAMPO

Introduction

Récemment H. B. Lawson a obtenu un feuilletage de codimension 1 sur les sphères S^{2k+3} , $k \geq 1$, [4], [7]. Ici nous construisons d'une autre manière un feuilletage sur la sphère S^5 . Pour toute variété, compacte, sans bord, et de dimension 3 il existe un feuilletage [13]. Le problème se pose d'en construire sur les variétés de dimension 5. Nous donnons une construction pour les variétés, simplement connexes, compactes, sans bord, et de dimension 5.

Nous analysons au §1 le feuilletage sur S^3 de G. Reeb [6]. En s'inspirant d'une description homotopique de $P^1(\mathbf{C})$ et $P^2(\mathbf{C})$, que nous avons trouvée dans les notes du séminaire Geometric Topology I de D. Sullivan [10], nous expliquons comment obtenir un feuilletage de S^5 d'une manière un peu comparable à celle de G. Reeb pour S^3 . Bien que notre méthode n'ait encore rien donné pour les autres sphères S^{2n+1} , $n \geq 3$, nous la présentons ici en détail. Elle peut avoir un intérêt pour construire des feuilletages sur les sphères S^{2n+1} , $n \geq 3$.¹⁾

Nous montrons au §2 qu'il existe un feuilletage sur toute variété compacte, sans bord, simplement connexe, et de dimension 5 en utilisant les théorèmes de classification de ces variétés de S. Smale [9] et D. Barden [2]. La démonstration s'appuie sur le résultat suivant: dans une telle variété il existe une sphère S^3 plongée, telle que son complémentaire est un espace fibré sur S^1 avec une fibre simplement connexe.

Au §3 nous donnons des exemples de tels plongements de S^3 dans S^5 . On en déduit l'existence de feuilletages sur S^5 ayant des feuilles difféomorphes à ($V - n$ points), où V est une variété simplement connexe, compacte sans bord, pour laquelle $w_2(V) = 0$, et qui admet une décomposition $V = N \# S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2$.

§ 1 Application de Hopf Feuilletage Sur S^5 .

1.1. Une description homotopique de $P^n(\mathbf{C})$

Dans D. Sullivan [10] on trouve la description homotopique suivante des espaces projectifs complexes. L'espace $P^n(\mathbf{C})$, rapporté aux coordonnées homogènes $[z_0, \dots, z_n]$, est recouvert par les cartes affines $A_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in P^n(\mathbf{C}) \mid z_i \neq 0\}$; ce

¹⁾ I. TAMURA, Comment. Math. Helv., 47 (1972), et A. H. DURFEE (préprint) ont construit des feuilletages pour toute sphère de dimension impaire.

recouvrement $\mathcal{A} = \mathcal{A}^n$ est remarquable par les intersections

$$A_{i_1 \dots i_k} = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}, \quad 0 \leq i_1 < i_2 \dots < i_k \leq n,$$

qui sont des espaces d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}^{k-1}, 1)$.

Le nerf de ce recouvrement, au sens de la théorie de l'homotopie étale [1], est la catégorie $E(\mathcal{A})$:

- les objets de $E(\mathcal{A})$, sont les intersections d'éléments de \mathcal{A} ,
- pour deux objets de $E(\mathcal{A})$, A' et A'' , on a $\text{Hom}_{E(\mathcal{A})}(A', A'') = \emptyset$ si $A' \not\subseteq A''$, et si $A' \subset A''$.

$\text{Hom}_{E(\mathcal{A})}(A', A'')$ est l'ensemble des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}' & \longrightarrow & \tilde{A}'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{\text{inclusion}} & A'' \end{array}$$

où $\tilde{A}' \rightarrow A'$ et $\tilde{A}'' \rightarrow A''$ sont les revêtements universels.

Par exemple $\text{Hom}_{E(\mathcal{A})}(A, A)$ s'identifie à $\pi_1(A)$ pour tout objet A de $E(\mathcal{A})$.

La catégorie $E(\mathcal{A})$ décrit l'homotopie de $P^n(\mathbf{C})$: la réalisation géométrique de $E(\mathcal{A})$ est homotopiquement équivalente à $P^n(\mathbf{C})$.

Par exemple la catégorie associée à $P^1(\mathbf{C})$ a trois objets A_0 , A_1 , A_{01} . On peut la noter par le diagramme

$$A_0 \leftarrow A_{01} \rightarrow A_1,$$

ou, si l'on désire souligner que les espaces A_0 , A_1 , et A_{01} sont des espaces d'Eilenberg-MacLane par le diagramme

$$0 \leftarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

La réalisation géométrique de la sous-catégorie pleine $\{A_{01}\}$ de $E(\mathcal{A})$ est homotopiquement équivalente à $S^1 \sim K(\mathbf{Z}, 1)$, les réalisations des sous-catégories pleines $\{A_0 \rightarrow A_{01}\}$ et $\{A_{01} \rightarrow A_1\}$ sont homotopiquement équivalentes au cône CS^1 . Donc, la réalisation de $E(\mathcal{A})$ est homotopiquement équivalente à la suspension $S(S^1) = P^1(\mathbf{C})$. L'application de Hopf $S^{2n+1} \xrightarrow{h} P^n(\mathbf{C})$ est une fibration dont la fibre est l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, 1)$. Ceci explique que l'image réciproque par h du recouvrement \mathcal{A} est un recouvrement \mathcal{B} de S^{2n+1} , dont les intersections sont encore des espaces d'Eilenberg-MacLane. Ainsi à S^3 est associée la catégorie $E(\mathcal{B})$ dont le diagramme est

$$\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}.$$

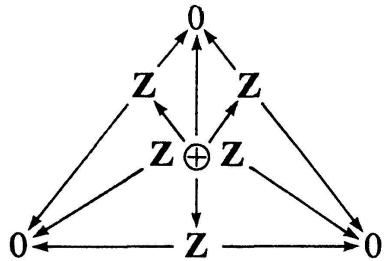
On reconnaît la décomposition de S^3 comme union de deux tores solides dont l'intersection est le bord commun. Cette décomposition a été utilisée par G. Reeb pour feuilleter S^3 .

Mentionnons que l'application de Hopf $S^3 \xrightarrow{h} P^1(\mathbf{C})$ se présente dans ce cadre par le foncteur «évident» [10], désigné par une flèche grasse,

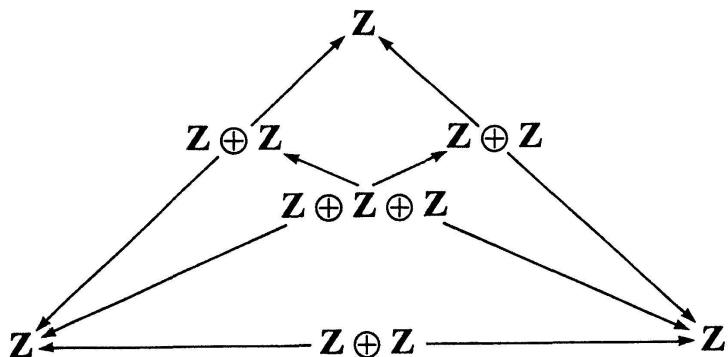
$$\begin{array}{c} (\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}) \\ \downarrow \\ (0 \leftarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0). \end{array}$$

1.2. Un feuilletage sur S^5

Regardons la sphère S^5 . L'espace $P^2(\mathbf{C})$ est recouvert par trois parties affines A_0, A_1, A_2 . Le nerf de ce recouvrement \mathcal{A}^2 est la catégorie $E(\mathcal{A}^2)$ dont le diagramme est



En posant $h: S^5 \rightarrow P^2(\mathbf{C})$ l'application de Hopf et $B_i = h^{-1}(A_i)$, $0 \leq i \leq 2$, on trouve le recouvrement $\mathcal{B}^2 = \{B_0, B_1, B_2\}$ de S^5 dont le nerf est la catégorie $E(\mathcal{B}^2)$ ayant le diagramme



Nous essayons d'opérer comme l'a fait G. Reeb pour S^3 et enlevons à

$$S^5 = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbf{C}^3 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

les trois tores solides $R_i = \{z \in S^5 \mid |z_i|^2 > 2/3\} \simeq S^1 \times D^4$, $0 \leq i \leq 2$. L'âme $\{z \in S^5 \mid |z_i| = 1\}$ de R_i et celle de B_i coïncident; les tores R_i correspondent dans le diagramme

(1) aux facteurs \mathbf{Z} . Ce même diagramme montre que $C = S^5 - R_0 - R_1 - R_2$ est une variété à bord dont l'homotopie est décrite par une catégorie dont le diagramme est

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \\ \swarrow & & \nearrow \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & \\ \downarrow & & \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & \end{array}$$

C'est le nerf du recouvrement $\{B_0 \cap B_1 \cap C, B_1 \cap B_2 \cap C, B_2 \cap B_0 \cap C\}$ de C . Comme pour l'application de Hopf $S^3 \rightarrow P^1(\mathbf{C})$ il y a un foncteur «évident»

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & 0 & 0 \\ \swarrow & & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & \rightarrow & \mathbf{Z} & , \\ \downarrow & & & \downarrow & \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & & & 0 & \end{array} \quad (2)$$

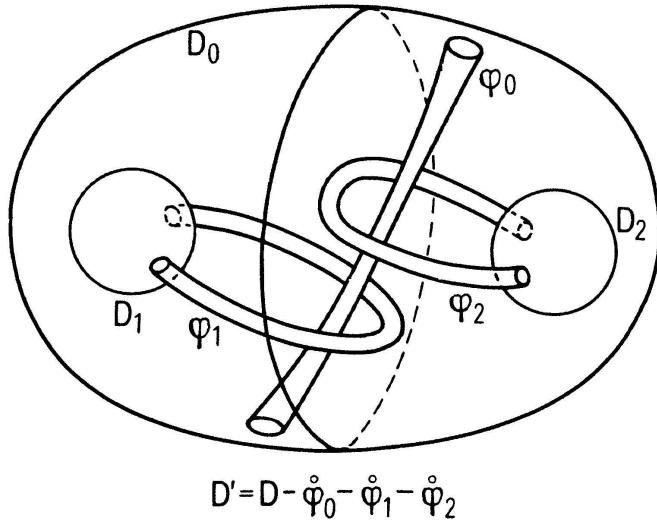
qui indique qu'il existe une action libre de $S^1 \times S^1$ sur C . En effet cette action est $(\alpha, \beta, (z_0, z_1, z_2)) \in S^1 \times S^1 \times C \mapsto (\alpha z_0, \beta z_1, \alpha \beta z_2) \in C$. Le quotient $D = C / S^1 \times S^1$ est donc une variété de dimension 3 dont le bord est l'union de trois composantes

$$\partial \bar{R}_i / S^1 \times S^1 \cong S^1 \times S^3 / S^1 \times S^1 \cong S^2,$$

car l'action sur $\partial R_i \cong S^1 \times S^3$ est le produit des actions habituelles de S^1 sur S^1 et sur S^3 .

L'homotopie de D est décrite par la catégorie (2); D a le type d'homotopie de l'union de trois cônes sur S^1 identifiés le long des bases, donc le type d'homotopie de la sphère $S^2 +$ un plan équatorial. En effet, D est difféomorphe à $(S^3 - 3 \text{ boules})$.

Le théorème de stabilité de G. Reeb [6] montre qu'il n'existe pas de feuilletage de codimension 1 sur D , car ∂D est formé de trois composantes simplement connexes. Pour cela nous enlevons à D des anses de sorte que nous aboutissons à une variété dont le bord n'a plus de composantes simplement connexes et pour laquelle il est facile de construire un feuilletage. Soient D_0, D_1, D_2 les trois composantes du bord de D et soit $N_i \cong D_i \times [0, 1]$ un voisinage collier de D_i , $0 \leq i \leq 2$, dans D tel que $N_0 \cap N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$. Nous attachons dans N_i , $0 \leq i \leq 2$, une anse solide $\varphi_i \cong I \times D^2$ à D_i de sorte que $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ ne soient pas nouées dans D , que φ_1 et φ_2 ne soient pas enlacées, et que φ_1 et φ_2 soient simplement enlacées avec φ_0 . Nous enlevons à D l'intérieur des anses $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$. Il reste $D' = D - \varphi_0 - \varphi_1 - \varphi_2 \cong S^1 \times (S^2 - 3 \text{ disques ouverts})$. La variété D' est un espace fibré sur S^1 , donc on sait la feuilleter de sorte que $\partial D'$ soit une union disjointe de feuilles [13]; on en déduit un feuilletage sur la



variété $C' = p^{-1}(D') \subset C \subset S^5$ par image réciproque de la projection $p: C \rightarrow D$. Pour obtenir un feuilletage sur S^5 il faut étudier $\overline{S^5 - C'}$. La variété à bord $\overline{S^5 - C'}$ est l'union disjointe de trois variétés à bord $\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$; \tilde{R}_i étant obtenue à partir de \bar{R}_i en y collant $p^{-1}(\phi_i) \cong S^1 \times S^1 \times I \times D^2$. Etant donné que

$$p \mid p^{-1}(N_i): S^1 \times S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^2 \times [0, 1] \cong N_i$$

est la projection canonique d'une action équivalente au produit des actions habituelles de S^1 sur S^1 et sur S^3 , l'application d'attachement de $p^{-1}(\phi_i)$ à \tilde{R}_i ,

$$S^1 \times S^1 \times \{0, 1\} \times D^2 \cong \partial(p^{-1}(\phi_i)) \rightarrow R_i \cong S^1 \times D^4$$

est S^1 –équivariante; donc \tilde{R}_i est difféomorphe à une variété de la forme $S^1 \times (Y, \partial Y)$ (la variété $(Y, \partial Y)$ est décrite ci-dessous). Il en résulte que les variétés à bord $\tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ admettent des feuilletages, tels que les bords soient des feuilles. Donc, en collant les variétés feuilletées $C', \tilde{R}_0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ suivant les bords on obtient:

THÉORÈME 1. *Il existe un feuilletage de codimension 1 sur la sphère S^5 .*

Pour feuilleter toutes les variétés simplement connexes de dimension 5 nous aurons besoin du corollaire:

COROLLAIRE 1. [4]. *Il existe un feuilletage sur $S^3 \times D^2$ tel que le bord $\partial(S^3 \times D^2)$ soit une feuille.*

Preuve. On choisit un plongement $\varphi: S^1 \rightarrow S^5$ transverse à un feuilletage de S^5 . Par exemple

$$t \in S^1 \mapsto (t, y) \in S^1 \times (Y - \partial Y) \cong \tilde{R}_0 - \partial \tilde{R}_0 \subset S^5$$

Par tourbillonnement on peut obtenir un feuilletage sur S^5 qui contient une composante de Reeb $S^1 \times D^4$ d'âme φ . Son complémentaire est difféomorphe à $S^3 \times D^2$ et est équipé d'un feuilletage, tel que le bord $\partial(S^3 \times D^2)$ soit une feuille.

Remarque. L'action de T^2 sur S^5 , définie par

$$((\alpha, \beta), (z_0, z_1, z_2)) \in T^2 \times S^5 \mapsto (\alpha z_0, \beta z_1, \alpha \beta z_2) \in S^5$$

ressemble à l'action habituelle de T^1 sur S^3 : en effet, l'espace quotient S^5/T^2 est difféomorphe à S^3 et la projection canonique $p: S^5 \rightarrow S^5/T^2 \simeq S^3$ est le générateur de $\pi_5(S^3) \simeq \mathbf{Z}_2$.

Nous avons utilisé l'application $p: S^5 \rightarrow S^3$ pour trouver un feuilletage sur S^5 , aidé par l'exemple de G. Reeb, qui utilise l'application de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ pour feuilleter S^3 .

§ 2. Construction des 5-variétés 1-connexes. Feuilletages

2.1. Rappel (selon [2], [9], [11])

Les variétés simplement connexes, compactes, sans bord, et de dimension 5 sont classifiées par D. Barden [2]. Une telle variété M est déterminée par l'homomorphisme

$$w_2(M): H_2(M, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}_2,$$

qui correspond à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w^2(M) \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$. Donc deux telles variétés M_1 et M_2 sont difféomorphes, si et seulement si, $w_2(M_1)$ et $w_2(M_2)$ sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme $A: H_2(M_1, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(M_2, \mathbf{Z})$ vérifiant $w_2(M_1) = w_2(M_2) \circ A$.

Si M est une variété simplement connexe de dimension 5, le groupe $H_2(M, \mathbf{Z})$ se décompose suivant

$$H_2(M, \mathbf{Z}) \simeq w \oplus \mathbf{Z}^d \oplus (\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}_{n_k} \oplus \mathbf{Z}_{n_k}),$$

où w est l'un des groupes 0, \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_2 ou $\mathbf{Z}_{2^j} \oplus \mathbf{Z}_{2^j}$ ($j \geq 1$) [2]. En outre on peut choisir cette décomposition de telle sorte que les restrictions de l'homomorphisme $w_2(M)$ aux facteurs différents de w soient nulles et que la restriction de $w_2(M)$ à w soit 0, la surjection canonique $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2$, $1_{\mathbf{Z}_2}$, ou la somme des surjections canoniques $\mathbf{Z}_{2^j} \rightarrow \mathbf{Z}_2$ selon que la valeur de w dans la décomposition de $H_2(M, \mathbf{Z})$ soit 0, \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_2 , ou $\mathbf{Z}_{2^j} \oplus \mathbf{Z}_{2^j}$. Une telle décomposition de $H_2(M, \mathbf{Z})$ est dite adaptée à $w_2(M)$.

Nos constructions utilisent le théorème de Wall [11]:

THÉORÈME. Soit une variété simplement connexe compacte sans bord de dimension 4 telle que la forme intersection sur $H_2(N)$ soit non définie. Alors tout automorphisme de $H_2(N \# S^2 \times S^2)$ qui conserve la forme des intersections sur $H_2(N \# S^2 \times S^2)$ est induit par un difféomorphisme orienté de $N \# S^2 \times S^2$.

Soient $F = (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$ et $G = P^2(\mathbf{C}) \# (-P^2(\mathbf{C})) \# P^2(\mathbf{C}) \# (-P^2(\mathbf{C}))$; soient $\{a, b, c, d\}$ une base de $H_2(F, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^4$ et $\{p, q, r, s\}$ une base de $H_2(G, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^4$ telles que les seuls nombres d'intersection non nuls soient $a \cdot b = c \cdot d = 1$ et $p \cdot p = -q \cdot q = r \cdot r = -s \cdot s = 1$. D'après le théorème de Wall il existe pour tout $k \geq 1$ un difféomorphisme orienté $\alpha(k): F \rightarrow F$ tel que la matrice de $\alpha(k)_*: H_2(F, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(F, \mathbf{Z})$ sur la base $\{a, b, c, d\}$ soit

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

de même pour tout $l \geq 1$ il existe un difféomorphisme orienté $\beta(l): G \rightarrow G$ tel que la matrice de $\beta(l)_*: H_2(G, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(G, \mathbf{Z})$ sur la base $\{p, q, r, s\}$ soit

$$B(l) = \begin{pmatrix} -l+1 & 0 & -1 & -l+1 \\ 0 & -l+1 & l-1 & 1 \\ 1 & l-1 & -l+1 & 0 \\ -l+1 & -1 & 0 & -l+1 \end{pmatrix}$$

On peut appliquer le théorème de Wall pour G , car G est difféomorphe à $P^2(\mathbf{C}) \# (-P^2(\mathbf{C})) \# S^2 \times S^2$.

Soit $\beta(-1): P^2(\mathbf{C}) \rightarrow P^2(\mathbf{C})$ le difféomorphisme orienté $z \rightarrow \bar{z}$. L'homomorphisme $\beta(-1)_*: H_2(P^2(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(P^2(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est la multiplication par -1 .

2.2. Un feuilletage pour les variétés simplement connexes de dimension 5.

THÉORÈME 2. Soit M une variété simplement connexe, compacte, sans bord et de dimension 5. Alors il existe un plongement $\varphi: S^3 \times D^2 \rightarrow M$ telle que $M - \varphi(S^3 \times D^2)$ soit un espace fibré sur S^1 .

Démonstration. Le groupe $H_2(M, \mathbf{Z})$ a une décomposition adaptée

$$H_2(M, \mathbf{Z}) = w \oplus \mathbf{Z}^d \oplus (\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}_{n_k} \oplus \mathbf{Z}_{n_k}).$$

On considère la variété $\Sigma = \Sigma(w, d, k)$, $\Sigma = W \neq S^2 \times S^2 \# \cdots \# S^2 \times S^2 \# F \# \cdots \# F$, d termes $S^2 \times S^2$, k termes F , où W est la variété S^4 , $P^2(\mathbf{C})$, $P^2(\mathbf{C})$, ou G selon que la valeur de w dans la décomposition adaptée de $H_2(M, \mathbf{Z})$ est 0, \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_2 , ou $\mathbf{Z}_{2^j} \oplus \mathbf{Z}_{2^j}$. Il résulte de ce qui précède qu'il existe un difféomorphisme orienté $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ respectant la décomposition en somme connexe de Σ tel que

- la restriction de f au terme W soit isotope à 1_{S^4} , $1_{P^2(\mathbf{C})}$, $\beta(-1)$ ou $\beta(2^{j-1})$ selon que la valeur de w est 0, \mathbf{Z} , \mathbf{Z}_2 ou $\mathbf{Z}_{2^j} \oplus \mathbf{Z}_{2^j}$,
- les restrictions de f aux d termes $S^2 \times S^2$ soient isotopes au difféomorphisme $(x, y) \in S^2 \times S^2 \mapsto (y, x) \in S^2 \times S^2$,

– la restriction de f au i -ième terme F , $1 \leq i \leq k$, soit isotope au difféomorphisme $\alpha(n_i)$.

Soit M' la variété obtenue en identifiant dans $\Sigma \times I$ les points $(x, 0)$ et $(f(x), 1)$ pour $x \in \Sigma$. Soit $p: M' \rightarrow S^1$ l'application fibrée induite par la projection $\Sigma \times I \rightarrow I$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(\Sigma, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{f_* - Id} & H_2(\Sigma, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{incl}*} & H_2(M', \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_1(\Sigma, \mathbf{Z}) \\ & & \searrow w_2(\Sigma) & & \downarrow w_2(M') & & \parallel \\ & & & & \mathbf{Z}_2 & & 0 \end{array}$$

dont la ligne horizontale est un morceau de la suite exacte de Wang de la fibration $p: M' \rightarrow S^1$. Le triangle est commutatif parce que l'inclusion $\Sigma \subset M'$ a un fibré normal trivial. Il en résulte que

$$H_2(M', \mathbf{Z}) \simeq w \oplus \mathbf{Z}^d \oplus (\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}_{n_k} \oplus \mathbf{Z}_{n_k})$$

car: – $\text{coker } (f_* - Id: H_2(W, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(W, \mathbf{Z})) \simeq w$,
– $\text{coker } (f_* - Id: H_2(S^2 \times S^2, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(S^2 \times S^2, \mathbf{Z})) \simeq \mathbf{Z}$,
– $\text{coker } (\alpha(n_i)_* - Id: H_2(F, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(F, \mathbf{Z})) \simeq \mathbf{Z}_{n_i} \oplus \mathbf{Z}_{n_i}$.

La commutativité du triangle permet de calculer $w_2(M')$. On déduit que $w_2(M')$ et $w_2(M)$ sont isomorphes.

Soit $x_0 \in \Sigma$ un point fixe de f et soit $\Psi: S^1 \times D^4 \rightarrow M'$ un plongement dont l'âme $\Psi|S^1 \times \{0\}$ est induite par $t \in I \mapsto (x_0, t) \in \Sigma \times I$ et qui envoie $t \times D^4$ dans $p^{-1}(t)$ pour $t \in S^1$. Le plongement représente en homotopie libre un générateur de $\pi_1(M') \simeq \mathbf{Z}$. Donc la chirurgisée $M'' = \chi(M', \Psi)$ est une variété simplement connexe, telle que $w_2(M'')$ soit isomorphe à $w_2(M)$. Donc, d'après le théorème de classification de D. Barden les variétés M et M'' sont difféomorphes.

Soit $\varphi: S^3 \times D^2 \rightarrow M'' \simeq M$ le plongement dual à Ψ . On a les difféomorphismes

$$\overline{M - \varphi(S^3 \times D^2)} \simeq \overline{M'' - \varphi(S^3 \times D^2)} = \overline{M' - \psi(S^1 \times D^4)}$$

et la restriction de p à $M' - \varphi(S^1 \times D^4)$ est une application fibrée différentiable de fibre $(\Sigma - D^4)$, ce qui prouve le théorème.

THÉORÈME 3. *Toute variété M , simplement connexe, compacte, sans bord, et de dimension 5, admet un feuilletage de codimension 1.*

Démonstration. Soit $\varphi: S^3 \times D^2 \rightarrow M$ le plongement fourni par le théorème précédent. Alors $M - \varphi(S^3 \times D^2)$ est un espace fibré sur S^1 , donc possède un feuilletage tel que son bord soit une feuille. En collant la variété $M - \varphi(S^3 \times D^2)$ ainsi feuilletée

et la variété $S^3 \times D^2$, feuilletée d'après le corollaire du théorème 1, nous obtenons un feuilletage sur la variété M .

Un feuilletage de codimension 1 sur une variété M de dimension n définit un champ de $(n-1)$ -plans intégrable sur M . On ne connaît pas d'exemple de champ de $(n-1)$ -plans sur une variété de dimension n qui ne soit pas homotope à un champ intégrable. Le théorème 9.3 de [13] et le théorème 3 montrent le

COROLLAIRE. *Tout champ de 4-plans sur une variété simplement connexe, compacte, sans bord et de dimension 5 est homotope à un champ intégrable.*

2.3. Sur les feuilles

Soit $(Y, \partial Y)$ la variété à bord obtenue par le diagramme d'identification

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \{0, 1\} \times (D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{\lambda} & (D^4, \partial D^4) \\ \downarrow \text{incl.} & & \downarrow \\ S^1 \times [0, 1] \times (D^2, \partial D^2) & \rightarrow & (Y, \partial Y) \end{array}$$

où λ est donnée par deux plongements disjoints, d'orientations opposées, non noués et simplement enlacés du tore solide $S^1 \times D^2$ dans ∂D^4 . Cette variété a des coins que l'on lisse.

On déduit des constructions précédentes les

THÉORÈME 4. *Il existe un feuilletage de $S^3 \times D^2$ ayant pour feuilles*

- a) *Une feuille $\partial(S^3 \times D^2) = S^3 \times S^1$,*
- b) *Trois feuilles difféomorphes à $S^1 \times \partial Y$,*
- c) *Des feuilles difféomorphes à $Y - \partial Y$,*
- d) *Des feuilles difféomorphes à $((Y - \partial Y) - 1 \text{ point})$,*
- e) *Des feuilles difféomorphes à $S^1 \times S^1 \times (S^2 - 3 \text{ points})$.*

THÉORÈME 5. *Soient M une variété simplement connexe, compacte, sans bord, et de dimension 5, et $H_2(M, \mathbf{Z}) = w \oplus Z^d \oplus (\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}_{n_k} \oplus \mathbf{Z}_{n_k})$ une décomposition adaptée à $w_2(M)$.*

Alors M possède un feuilletage ayant pour feuilles

- (i) *le nombre et type de feuilles décrites dans a, b, c, d, e du théorème 4,*
- (ii) *des feuilles difféomorphes à $(\Sigma(w, d, k) - 1 \text{ point})$.*

Il n'y a pas unicité de la décomposition adaptée. En ajoutant des facteurs $\mathbf{Z}_{n_1} \oplus \mathbf{Z}_{n_1}$, avec $n_1 = 1$, on voit que l'on peut choisir l'entier k aussi grand que l'on veut, et que M possède un feuilletage contenant des feuilles $(\Sigma(w, d, k') - 1 \text{ point})$, k' grand.

Nous étudions les feuilles non compactes simplement connexes plus en détail pour la variété $M=S^5$ au §3.

§ 3. Exemples de nœud simple $S^3 \subset S^5$ dont le complémentaire est un espace fibré sur S^1

1) Soit V une variété à bord de dimension 4, telle que $\pi_1(V)=0$ et $\partial V=S^3$. Soit $\alpha: V \rightarrow V$ un difféomorphisme vérifiant

$$N_1: \alpha \mid \partial V = 1_{\partial V},$$

$$N_2: \alpha_* - I: H_2(V, \partial V) \rightarrow H_2(V, \partial V)$$

est inversible.

La variété $X(\alpha, V)$, obtenue en identifiant dans $V \times I$ les points $(x, 0)$ et $(\alpha(x), 1)$ pour $x \in V$, puis en collant $V \times I/\alpha$ et $S^3 \times D^2$ suivant leurs bords, est homotopiquement équivalente à S^5 , donc difféomorphe à S^5 [9]. L'inclusion $S^3 \times D^2 \subset X(\alpha, V) \cong S^5$ est un voisinage tubulaire du nœud $S^3 \times \{0\} \subset X(\alpha, V) \cong S^5$. On note $n(\alpha, V)$ ce nœud et $N(\alpha, V)$ le voisinage tubulaire ouvert $S^3 \times D^2 \subset S^5$.

Les nœuds $n(\alpha, V)$ ainsi obtenus sont simples [5], c'est-à-dire que $\pi_1(S^5 - n(\alpha, V)) \cong \mathbb{Z}$. Le complémentaire du voisinage tubulaire $S^5 - N(\alpha, V)$ est une variété à bord qui est un espace fibré sur S^1 de fibre $(V, \partial V)$. Donc, si $\pi_2(V) \neq 0$, le nœud $n(\alpha, V)$ n'est pas trivial. On obtient alors des exemples de tels nœuds non triviaux en prenant pour V la variété

$$F^*(k) = (S^2 \times S^2 \# \cdots \# S^2 \times S^2 - \text{boule } \mathring{D}^4), k \text{ termes } S^2 \times S^2, \quad k \geq 2,$$

et pour α un difféomorphisme de $F^*(k)$ qui vérifie N_1 et N_2 . Par exemple pour $k=2$ il existe d'après le théorème de Wall un difféomorphisme α de $F^*(2)$, tel que la matrice de $\alpha_*: H_2(F^*(2)) \rightarrow H_2(F^*(2))$, exprimée sur la base canonique de $F^*(2)$, soit la matrice $A(1)$. (cf. §2).

De même, pour $k=3$ on peut prendre un difféomorphisme β de $F^*(3)$ tel que la matrice de β_* soit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En prenant des sommes connexes de nœuds de termes $n(\alpha, F^*(2))$ et $n(\beta, F^*(3))$ on voit qu'il existe des nœuds simples $S^3 \rightarrow S^5$ tel que $S^5 - S^3$ est un espace fibré sur S^1 de fibre $F^*(k)$, $k \geq 2$. Il est facile de voir qu'il n'existe pas de tels nœuds tels que la fibre soit $F^*(1)$. En effet il n'existe pas d'automorphisme A de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ vérifiant

${}^tAUA = U$ et $A - I$ est inversible, où $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice des intersections de $S^2 \times S^2$.

Soit N une variété compacte simplement connexe telle que sa forme intersection Q_N soit du type II. D'après le théorème de Eichler [3, 8] la forme intersection Q_V de

$$V = N \# S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2 = N \# F(2)$$

est isomorphe à $aE_8 \oplus bU$, avec $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b \geq 2$. Le théorème de Wall nous fournit des difféomorphismes α de $V^* = V - D^4$ vérifiant N_1 et N_2 , car E_8 admet des automorphismes A tel que $A - I$ est inversible. Donc il y a des nœuds de la forme $n(\alpha, V^*)$ avec $V^* = N \# F^*(2)$.

2) Toute surface trouée de genre $g \geq 0$ peut-être feuille d'un feuilletage de S^3 [4]. Le théorème suivant est un analogue (faible) pour les feuilletages sur S^5 .

THÉORÈME 6. *Soit N une variété simplement connexe compacte de dimension 4, telle que sa forme intersection soit de type II. Alors il existe un feuilletage sur S^5 , contenant des feuilles difféomorphes à*

$$N \# S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2 - n \text{ points}, \quad n \geq 1.$$

Preuve. Soit $n: S^3 \rightarrow S^5$ un nœud de la forme $n(V^*, \alpha)$, avec $V = N \# S^2 \times S^2 \neq S^2 \times S^2$.

En utilisant la démonstration du théorème 3 on voit qu'il existe un feuilletage sur S^5 contenant des feuilles difféomorphes à V^* . Il suffit d'introduire $(n-1)$ composante de Reeb pour obtenir un feuilletage contenant $V - n$ points.

COROLLAIRE. *Toute variété compacte simplement connexe à bord $(V, \partial V)$ telle que $\dim V = 4$, $\partial V \neq \emptyset$, $w_2(V) = 0$ se plonge dans S^5 .*

Preuve. $[(V, \partial V) \cup_{\partial V} (V, \partial V)] \# S^2 \times S^2 \# S^2 \times S^2 - 1$ point se plonge comme feuille d'un feuilletage dans S^5 .

PROBLÈME. Quelles sont les variétés compactes qui peuvent être feuille d'un feuilletage de S^5 ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN, M. et MAZUR, B., *Etale Homotopy*, Springer Lectures Notes, no 100 Heidelberg. (1969).
- [2] BARDEN, D., *Simply connected five manifolds*, Ann. of Math., 82 (1965), 365–385.
- [3] EICHLER, M., *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer, Berlin 1952.
- [4] LAWSON, H. B., *Codimension one foliations on spheres*, Ann. of Math., à paraître.
- [5] LEVINE, J., *An Algebraic classification of some knots of codimension two*, Comment. Math. Helv., Vol. 45, 185–198.

- [6] REEB, G., *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Hermann, Paris 1952.
- [7] ROSENBERG, H., *Feuilletages sur des sphères (d'après Lawson)*, Séminaire Bourbaki, exposé no 393, février 1971.
- [8] SERRE, J. P., *Formes bilinéaires symétriques entières à discriminant ± 1* , Séminaire H. Cartan, 14ème année 1961/1962, no 14–15.
- [9] SMALE, S., *On the structure of 5-manifolds*, Ann. of Math., 75 (1972), 38–46.
- [10] SULLIVAN, D., *Geometric Topology I*, Seminaire Notes, Mass. Inst. Techn., 1970.
- [11] WALL, C. T. C., *Difféomorphismes de 4-manifolds*, J. London Math. Soc., 39 (1964), 131–140.
- [12] ——, *On simply connected 4-manifolds*, J. London Math. Soc., 39 (1964), 141–149.
- [13] WOOD, J., *Foliations on 3-manifolds*, Ann. of Math. 89 (1969), 336–358.

*Université de Poitiers
Département de Mathématiques*

*Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bat. 425
91405 – Orsay*

Reçu le 10 décembre 1971.