Enden von Räumen mit eigentlichen Transformationsgruppen

HERBERT ABELS

§1

1.1. Man kann sich das folgende Problem vorlegen: Man finde handliche Kriterien dafür, ob auf einem gegebenen lokal kompakten topologischen Raum irgend eine nicht kompakte lokal kompakte topologische Gruppe eigentlich operiert (Alle topologischen Räume seien hausdorffsch). Ein einfaches notwendiges Kriterium liefert der folgende

SATZ A. *Voraussetzungen: X sei ein lokal kompakter topologischer Raum mit der Eigenschaft Z: Jede kompakte Teilmenge von X ist in einer kompakten zusammenhängenden Teilmenge enthalten.*

G sei eine lokal kompakte, nicht kompakte topologische Gruppe.

G operiere eigentlich auf X.

Behauptungen: Dann hat X ein, zwei oder unendlich viele Enden. Falls G zusammenhängend ist, hat X höchstens zwei Enden.

Beweis s. 3.6. Zur Definition der Endenzahl s. 2.1.

Jeder lokal kompakte, lokal zusammenhängende und zusammenhängende Raum hat die Eigenschaft Z.

Man erhält die folgenden Korollare. Für diskrete Gruppen:

KOROLLAR. *Wenn auf einem lokal kompakten Raum X mit der Eigenschaft Z eine unendliche Gruppe eigentlich diskontinuierlich operiert, dann hat X ein, zwei oder unendlich viele Enden.*

Wenn X ein lokal zusammenhängender Überlagerungsraum ist, dann operiert z.B. die Gruppe der Decktransformationen eigentlich diskontinuierlich auf X.

Da die Liegruppe der differenzierbaren Isometrien einer zusammenhängenden Riemannschen C^∞-Mannigfaltigkeit X eigentlich operiert, erhält man das

KOROLLAR. *Die Liegruppe Iso (X) der differenzierbaren Isometrien einer zusammenhängenden Riemannschen C^∞-Mannigfaltigkeit X ist entweder kompakt oder X hat ein, zwei oder unendlich viele Enden. Falls die Zusammenhangskomponente der* 1 *von Iso (X) nicht kompakt ist, hat X ein oder zwei Enden.*

Für Operationen von kompakten Gruppen kann die Endentheorie nichts Satz A entsprechendes leisten. Wenn nämlich X ein beliebiger lokal kompakter topologischer

Raum ist und G eine kompakte zusammenhängende topologische Gruppe ist, dann operiert G auf $X \times G$ und die Endenzahlen von X und $X \times G$ stimmen überein (vgl. [4]).

1.2. Bisher ist anscheinend nur der Spezialfall von Satz A betrachtet worden, daß der Bahnenraum X/G kompakt ist (s. [9, 6, 12 und 13]). Für diesen Spezialfall wurde der Satz A in [13] bewiesen unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Gruppe G diskret ist oder G die Voraussetzung Z erfüllt. Die übrigen erwähnten Arbeiten beschäftigen sich nur mit dem Fall diskreter Gruppen. Allerdings wird in den erwähnten Arbeiten für den Fall, daß X/G kompakt ist, ein genaueres Resultat erhalten: Der Endenraum $\mathfrak{E}(X)$ von X läßt sich mit einem „Endenraum" der topologischen Gruppe G identifizieren. Der Endenraum der topologischen Gruppe G ist dabei i.a. nicht der Endenraum des G zugrundeliegenden topologischen Raumes (s. [13]).

Falls X/G kompakt ist, hat G eine kompakte Menge von erzeugenden Elementen [1; §1 Proposition 8]. Der Fall, daß G nicht kompakt erzeugt ist, wurde also bisher anscheinend nicht behandelt.

1.3. Besondere Aufmerksamkeit ist dem Spezialfall gewidmet worden, daß $G=X$ ist und G vermöge Linkstranslationen auf sich operiert (s. [4, 5 und 13]), also der Endenzahl einer zusammenhängenden lokal kompakten topologischen Gruppe. Für diesen Fall erhält man aus Satz A:

SATZ B. *Eine zusammenhängende, lokal kompakte topologische Gruppe hat höchstens zwei Enden.*

Mit Hilfe der Lösung des 5. Hilbertschen Problems zeigt man nämlich, daß eine solche Gruppe die Bedingung Z erfüllt (s. 3.7). Man kann Satz B auch ohne Zuhilfenahme der hochgradig nichttrivialen Lösung des 5. Hilbertschen Problems beweisen, indem man die Methoden des Paragraphen 3 geeignet abändert. Dasselbe gilt für Paragraph 4. Details hierzu sollen anderswo veröffentlicht werden.

In [13] wurde Satz B unter der explizit gemachten Voraussetzung, daß die Bedingung Z erfüllt ist, bereits bewiesen. In [5] wurde der Satz B für den Fall bewiesen, daß das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt, allerdings wurde die Lokalkompaktheit ersetzt durch die schwächere Voraussetzung, daß G semikompakt ist, d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebungsbasis aus Mengen mit kompaktem Rand.

1.4. Ein mit dem in 1.1 genannten Problem eng zusammenhängendes Problem ist das folgende: Man finde handliche Kriterien dafür, ob auf einem gegebenen Raum X eine gegebene nicht kompakte topologische Gruppe G eigentlich operiert. Für den Fall, daß X/G kompakt ist, liefern die Resultate, die in 1.2 zitiert wurden, gute Kriterien: Wenn G eigentlich auf X operiert und X/G kompakt ist, sind – unter geeigneten Voraussetzungen – $\mathfrak{E}(X)$ und ein „Endenraum" der topologischen Gruppe G homöomorph.

Falls X/G nicht kompakt ist, ist diese Aussage falsch, wie man leicht an Beispielen bestätigt. Allerdings gehört zu jeder eigentlichen Operation von G auf X unter den Voraussetzungen von Satz A eine Kompaktifizierung $\hat{G}$ von G, so daß $\hat{G}-G$ einem abgeschlossenen G-stabilen Unterraum von $\mathfrak{E}(X)$ homöomorph ist (s. 4.2).

Im Falle, daß X genau zwei Enden hat, kann man genauere Aussagen machen:

SATZ C. *Unter den Voraussetzungen von Satz A bestehe $\mathfrak{E}(X)$ aus genau zwei Punkten. Dann besitzt G eine diskrete unendlich zyklische Untergruppe H, so daß X/H kompakt ist.*

Insbesondere ist dann G/H kompakt. Nach [13] (s. 1.2) hat G als topologische Gruppe in der Endentheorie von Specker genau zwei Enden.

Für zusammenhängende lokal kompakte topologische Gruppen kann man noch mehr als Satz C aussagen. Jede solche Gruppe mit zwei Enden ist direktes Produkt der additiven Gruppe **R** mit einer kompakten zusammenhängenden Gruppe, falls G dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt (s. [7 und 10]). Diesen Satz – ohne die Abzählbarkeitsvoraussetzung – erhält man aus Satz C, wenn man der Beweisidee von Freudenthal [7] folgt: Man zeigt nämlich mit Hilfe von Satz C und 3.7 Lemma leicht, daß jede zusammenhängende lokal kompakte topologische Gruppe mit genau zwei Enden maximal fast-periodisch ist, und verwendet dann den Struktursatz für zusammenhängende maximal fast-periodische Gruppen.

Ich danke dem Referenten für den Hinweis auf die Arbeit: „Ends of locally compact groups and their coset spaces" von C. H. Houghton, die demnächst im J. Aust. Math. Soc. erscheinen wird. Dort wird u.a. die Struktur der in Satz C auftretenden Gruppen G genau bestimmt, also der Gruppen, die eine unendlich zyklische Untergruppe H mit kompaktem Faktorraum G/H besitzen.

1.5. Wir geben eine Übersicht über den Inhalt der vorliegenden Arbeit. Die Beweismethoden sind Verallgemeinerungen der klassischen Methoden der Endentheorie, insbesondere von [9 und 6]. Im Paragraphen 2 wird die Definition der Endenkompaktifizierung X^+ eines lokal kompakten Raumes X referiert. Ferner wird über den Zusammenhang zwischen der Endenzahl von X und gewissen Kohomologiegruppen von X berichtet (s. 2.4).

Es wird bewiesen (s. 2.3), daß sich jede stetige Transformationsgruppe auf X zu einer stetigen Transformationsgruppe auf X^+ fortsetzen läßt. Daher wird in den weiteren Paragraphen der Arbeit immer die folgende allgemeinere Situation vorausgesetzt: X sei ein lokal kompakter Raum, der dicht in einem kompakten Raum Y liegt, so daß $Y-X$ total unzusammenhängend ist. Ferner setzen wir voraus, daß eine lokal kompakte nicht kompakte topologische Gruppe G stetig auf Y operiert. Die Operation sei so, daß X ein G-stabiler Unterraum ist und die induzierte Operation von G auf X eigentlich ist. Im Paragraphen 3 werden im Wesentlichen die Sätze A und B bewiesen. Über den Inhalt von Paragraph 4 wurde schon in 1.4 einiges gesagt. Am Schluß erhält man in Satz D die vollkommene Entsprechung eines Satzes von Freudenthal [6, Satz 6.16]. Der Satz von Freudenthal wurde für den Endenraum diskreter Gruppen formuliert. Der Satz D in 4.11 gilt für die Menge der Grenzpunkte der Transformationsgruppe (Definition der Grenzpunkte s. 4.7).

§2

2.1. Alle auftretenden topologischen Räume seien hausdorffsch. Eine Kompaktifizierung Y eines topologischen Raumes X ist ein kompakter topologischer Raum Y der X als dichte Teilmenge enthält. Die *Endenkompaktifizierung* (oder *Freudenthalkompaktifizierung*) X^+ eines lokal kompakten topologischen Raumes X ist durch die beiden folgenden äquivalenten Bedingungen definiert:

a) $R := X^+ - X$ ist total unzusammenhängend und für jede Kompaktifizierung Y von X, für die $Y - X$ total unzusammenhängend ist, gibt es (genau) eine Fortsetzung der identischen Abbildung von X zu einer stetigen Abbildung $f: X^+ \to Y$.

b) R ist total unzusammenhängend und R zerlegt X^+ lokal nicht, d.h. zu keiner Umgebung V eines Punktes $y \in R$ in X^+ gibt es eine Zerlegung von $V \cap X$ in zwei disjunkte offene Teilmengen U_1, U_2, so daß $y \in \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$.

Zum Beweis der Äquivalenz sei bemerkt, daß R abgeschlossen in X^+ ist (s. 3.1). Ein kompakter Raum R ist aber dann und nur dann total unzusammenhängend, wenn er 0-dimensional im Sinne von Menger ist (s. etwa [15]). Die Äquivalenz von a) und b) folgt dann aus [11], Theorem 3.3 (vgl. auch [5, 7. Abschnitt]).

Daß zu jedem lokal kompakten Raum X eine Kompaktifizierung X^+ mit der Eigenschaft a) existiert, folgert man leicht aus dem Satz von Tychonov und der Tatsache, daß das Produkt von total unzusammenhängenden Räumen total unzusammenhängend ist.

Der Raum $\mathfrak{E}(X) := X^+ - X$ heißt Endenraum von X, die Anzahl seiner Elemente heißt Endenzahl $e(X)$ von X, falls diese endlich ist, sonst setzt man $e(X) = \infty$. Offenbar ist $e(X)$ genau dann gleich null, wenn X kompakt ist.

2.2. Mit Hilfe der Eigenschaft b) kann man leicht Beispiele von Endenkompaktifizierungen angeben: Aus einer kompakten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit Y mit oder ohne Rand der Dimension $n > 1$ entferne man k Punkte (oder eine konvergente Punktfolge einschließlich Limespunkt); dann erhält man einen lokal kompakten Raum X, dessen Endenkompaktifizierung gleich Y ist. So erhält man:

$$e(\mathbf{R}^n) = e(S^n - 1\ \text{Punkt}) = 1 \qquad \text{für} \quad n > 1$$
$$e(\mathbf{R} \times S^{n-1}) = e(S^n - 2\ \text{Punkte}) = 2 \qquad \text{für} \quad n > 1,$$
$$e(\mathbf{R}) = e(\{x \in \mathbf{R}; 0 < x < 1\}) = 2,$$

weil $\{x \in \mathbf{R};\ 0<x<1\}^+ = \{x \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$; die Eigenschaft b) prüft man nämlich leicht nach.

Für allgemeinere Konstruktionen von diesem Typ s. [11, Proposition 3.12].

2.3. Wegen Bedingung a) setzt sich jeder Homöomorphismus von X zu einem Homöomorphismus von X^+ fort. Jede Operation einer Gruppe auf X induziert daher eine Operation auf X^+.

SATZ. *Wenn die topologische Gruppe G stetig auf dem lokal kompakten Raum X operiert, dann ist die induzierte Operation auf der Endenkompaktifizierung X^+ ebenfalls stetig, falls X zusammenhängend ist.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für $g \in G$, $y \in X^+ - X$, V eine Umgebung von y in X^+ die Menge $\{(h, z) \in G \times X^+;\ h \cdot z \in V\}$ eine Umgebung von $(g, g^{-1}y)$ ist. Da die Linkstranslationen $L_g: G \to G$ mit $L_g(x) = gx$ Homöomorphismen von G sind, dürfen wir $g=1$ annehmen. Es gibt offene Umgebungen V' und V von y in X^+, deren Ränder in X liegen (s. 3.2) und so daß $V' \subset \overline{V'} \subset V$ gilt. Die Menge $M := \{g \in G;\ g\partial V' \subset V,\ g^{-1}\partial V \subset C\overline{V'}\}$ ist eine offene Umgebung von 1 in G, da $\partial V'$, ∂V kompakt $\subset X$ sind und die Operation von G auf X stetig ist. Wir zeigen, daß $MV' \subset V$ ist. Für $g \in M$ ist

$$\partial(gV' \cap CV) \subset (\partial gV' \cap CV) \cup (g\bar{V}' \cap \partial V) = \emptyset.$$

Da X zusammenhängend, ist auch X^+ zusammenhängend. Folglich hat jede Teilmenge von X^+, außer $\emptyset$ und X^+, einen nicht-leeren Rand. Daher ist $gV' \cap CV$ leer, da $\neq X^+$, also $gV' \subset V$ für alle $g \in M$, q.e.d.

2.4. Ein Zusammenhang zwischen der Endenzahl eines topologischen Raumes und Funktoren der algebraischen Topologie wird durch die folgenden Resultate gegeben.

X sei ein lokal kompakter parakompakter topologischer Raum. Es sei A ein kommutativer Ring mit 1, der als Koeffizientenring aller folgenden Kohomologien verwendet wird. $H(X)$ sei die Čech-Kohomologie von X, $H_c(X)$ die Čech-Kohomologie von X mit kompaktem Träger und $H_\infty(X)$ der direkte Limes des induktiven Systems der Kohomologien $H(F)$, wo F das inverse System aller abgeschlossenen Teilmengen von X mit relativ kompaktem Komplement durchläuft.

Dann gelten die folgenden Sätze (s. [8]): Es existiert ein exaktes Dreieck

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H_c \arrow[rr] & & H \arrow[dl, "\alpha"] \\ & H_\infty \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

wo α durch die Inklusionen $F \subset X$ induziert wird. Wenn X zusätzlich zusammenhängend ist (in [8] wird die – überflüssige – zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß X lokal zusammenhängend ist), so ist $\mathrm{H}^0_\infty(X)$ kanonisch isomorph zu $H^0(X^+ - X)$. Es folgt: Für endliches $\mathfrak{E}(X)$ ist $\mathrm{H}^\infty_0(X) \simeq A^{\mathfrak{E}(X)}$. Wenn A ein Körper ist, so gilt $\dim_A H^\infty_0(X) = e(X)$, falls $e(X)$ endlich ist, und $e(X)$ ist dann und nur dann unendlich, wenn $\dim_A H^\infty_0(X)$ unendlich ist. Man erhält als Folgerung, daß $\dim_A H^\infty_0(X)$ unabhängig vom Körper A ist, falls man unendliche Kardinalzahlen nicht unterscheidet.

Ganz analoge Aussagen wie für die Čech-Kohomologie gelten für die singuläre Koholomogie (s. [12, vgl. auch 3]) und für die Alexander-Spanier-Kohomologie (s. [14]) unter geeigneten Voraussetzungen für X.

§3

3.1. Der lokal kompakte Raum X liege dicht in dem Hausdorff-Raum Y. Dann ist $R := Y - X$ abgeschlossen in Y.

Denn X ist als lokal kompakter Raum lokal abgeschlossen in Y, also Durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von Y. Das Komplement R ist daher Vereinigung einer offenen und einer abgeschlossenen Menge. Da aber R nirgends dicht in Y liegt, ist der offene Anteil leer.

3.2. Wenn R außerdem total unzusammenhängend und Y kompakt ist, besitzt jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebungsbasis von Mengen V mit $\partial V \subset X$.

Für Punkte $y \in X$ ist das nach 3.1 trivial. R ist als kompakter total-unzusammenhängender Raum 0-dimensional (s. etwa [15]). Zu jeder offenen Umgebung U (in der Topologie von Y) eines Punktes $y \in R$ gibt es daher offen-abgeschlossene Teilmengen (in der Topologie von R) A, $R - A$ von R, so daß $A \subset U$. Diese Mengen sind nach 3.1. auch in der Topologie von Y abgeschlossen. Da Y als kompakter Raum normal ist, gibt es offene disjunkte Umgebungen V von A und W von $(R - A) \cup CU$. Daher ist $V \subset U$ und $\bar{V} \cap R = A = V \cap R$, also $\partial V \cap R = \emptyset$.

3.3. Nun operiere die nicht kompakte lokal kompakte topologische Gruppe G stetig auf Y, führe X in sich über und operiere eigentlich auf X. Die Transformation $\varphi: G \times X \to X$, $(g, x) \to \varphi(g, x) =: g \cdot x$ heißt dabei eigentlich, wenn für jede kompakte Teilmenge K von X die Menge $\{g \in G; g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ (relativ) kompakt ist. (Näheres über eigentliche Transformationsgruppen s. [2, Chap. 3 §4]).

Wenn $\mathfrak{F}$ ein Filter auf G ist, der keinen Häufungspunkt besitzt und K eine kompakte Teilmenge von X ist, so hat die Filterbasis $\mathfrak{F}(K)=\{A\cdot K;\, A\in\mathfrak{F}\}$ einen Häufungspunkt in dem kompakten Raum Y. Kein Häufungspunkt von $\mathfrak{F}(K)$ liegt in X. Wäre nämlich U eine kompakte Menge in X, so daß $A\cdot K\cap U\neq\emptyset$ für alle $A\in\mathfrak{F}$, so hätte jedes Element $A\in\mathfrak{F}$ Punkte mit der Menge $P=\{g\in G;\, g\cdot K\cap U\neq\emptyset\}$ Punkte gemeinsam. Da P aber kompakt ist, weil G eigentlich auf X operiert, hätte $\mathfrak{F}$ dann einen Häufungspunkt in $P\subset G$.

3.4. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung Z für X:

Z: *Jede kompakte Teilmenge von X ist in einer kompakten zusammenhängenden Teilmenge von X enthalten.*

Ein lokal kompakter topologischer Raum X hat die Eigenschaft Z dann und nur dann, wenn X zusammenhängend ist und jeder Punkt eine kompakte zusammenhängende Umgebung besitzt. Insbesondere ist die Voraussetzung Z erfüllt, wenn X lokal zusammenhängend und zusammenhängend ist. (X ist wegen 3.1 lokal kompakt).

$\mathfrak{F}$ sei wieder ein Filter auf G ohne Häufungspunkt. *Falls $\mathfrak{F}(x)$ für einen Punkt $x\in X$ gegen $y\in R$ konvergiert, so konvergiert $\mathfrak{F}(K)$ für jede kompakte Menge $K\subset X$ gegen y.*

Zum Beweis dürfen wir annehmen, daß K kompakt zusammenhängend ist und x enthält. Sei V eine Umgebung von y mit $\partial V\subset X$; ∂V ist kompakt, weil Y kompakt ist. Es gibt eine Menge $B\in\mathfrak{F}$ mit $B\cdot K\cap\partial V=\emptyset$; denn sonst hätte $\mathfrak{F}(K)$ einen Häufungspunkt in der kompakten Menge ∂V. Da $\mathfrak{F}(x)$ gegen y konvergiert, gibt es eine Menge $A\in\mathfrak{F}$ mit $A\cdot x\subset V$. Für $g\in C:=A\cap B\subset\mathfrak{F}$ gilt dann $g\cdot x\in V$ und $gK\cap\partial V=\emptyset$. Da K zusammenhängend ist und x enthält, folgt daraus $gK\subset V$, also $C\cdot K\subset V$.

3.5. Mit den bisherigen Voraussetzungen und den Bezeichnungen von 3.4 gilt: *Es gibt in Y höchstens einen von y verschiedenen Fixpunkt von G.*

Beweis. Es seien z_1, z_2 zwei verschiedene und von y verschiedene Fixpunkte von G in Y. Ferner seien V_1, V_2 und U disjunkte Umgebungen in Y der Punkte z_1, z_2 und y, deren Ränder in X liegen. Wenn A eine in der Relativtopologie von $Y-U=:Q$ offen-abgeschlossene Menge ist, dann liegt ihr Rand – in der Topologie von Y – in der kompakten Menge $\partial Q=\partial U$ und ist nicht leer, wenn A nicht leer ist, da Y zusammenhängend ist. Vergrößern wir Q um eine kompakte zusammenhängende Menge $K\subset X$, die ∂Q enthält, so ist $Q':=Q\cup K$ zusammenhängend und $U':=Y-Q'\subset U$ eine Umgebung von y mit $\partial U'\subset X$. Wir dürfen also von Anfang an annehmen, daß $Y-U$ zusammenhängend ist.

Nach 3.4 gibt es nun ein Element $g\in G$ mit $g(\partial V_1\cup\partial V_2)\subset U$. Daher hat die zusammenhängende Menge Q mit gV_i den Fixpunkt $gz_i=z_i$ gemeinsam und Q trifft $g\partial V_i$ nicht, also ist $Q\subset g\cdot V_i$, $i=1,2$. Folglich haben $g\cdot V_1$ und $g\cdot V_2$ gemeinsame Punkte und daher auch V_1 und V_2, im Widerspruch zur Voraussetzung.

3.6. SATZ. *Voraussetzungen: Y sei ein kompakter Raum, X sei ein lokal kompakter dichter Unterraum. Der Rest $R:=Y-X$ sei total unzusammenhängend. Auf Y operiere die lokal kompakte nicht kompakte topologische Gruppe G stetig, X sei ein G-stabiler Unterraum auf dem die Operation eigentlich ist. Schließlich erfülle X die Bedingung Z: Jede kompakte Teilmenge von X ist in einer kompakten zusammenhängenden Teilmenge von X enthalten.*

Behauptung: R besteht aus höchstens zwei oder unendlich vielen Punkten. Falls G zusammenhängend ist, besteht R aus höchstens zwei Punkten.

Beweis. Betrachten wir einen Filter $\mathfrak{F}'$ auf G, der keinen Häufungspunkt hat, z.B. bestehe $\mathfrak{F}'$ aus den Komplementen relativ kompakter Mengen. Wegen 3.3 hat $\mathfrak{F}'(x)$ für jedes $x\in X$ einen Häufungspunkt $y\in R$. Es gibt daher einen feineren Filter $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{F}'$, so daß $\mathfrak{F}(x)$ gegen y konvergiert. Damit ist 3.5 anwendbar.

Falls G zusammenhängend ist, operiert G trivial auf dem total unzusammenhängendem Raum R; denn die Bahn eines jeden Punktes $y\in R$ unter G ist eine zusammenhängende Teilmenge von R und daher gleich $\{y\}$. Wegen 3.5 gibt es dann höchstens zwei Punkte in R.

Nun sei G nicht zusammenhängend. Wenn R nur aus endlich vielen Punkten besteht, dann induziert die Operation von G auf R einen stetigen Homomorphismus von G in die endliche diskrete Permutationsgruppe von R. Der Kern dieses Homomorphismus ist ein offen-abgeschlossener Normalteiler G' von G, der alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt. G' läßt alle Punkte $y\in R$ fix. Daher besteht R nach 3.5 aus höchstens zwei Punkten.

Bemerkung. In [9] hat H. Hopf für den Fall, daß X/G kompakt ist und unter weiteren Voraussetzungen bewiesen, daß die Mächtigkeit von $\mathfrak{E}(X)$ entweder kleiner oder gleich zwei oder mindestens gleich der des Kontinuums ist. Das ist im Falle, daß X/G nicht kompakt ist, nicht mehr richtig. Als Beispiel betrachte man $X=$ $=\mathbf{C}-\mathbf{Z}$, $G=\mathbf{Z}$, $Y=X^+=1$ – Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbf{C}$. Die Operation von $\mathbf{Z}$ auf Y sei die Fortsetzung der Translationen $x\to x+n$, $n\in\mathbf{Z}$. Alle Voraussetzungen von 3.6 sind erfüllt, aber $Y-X$ ist abzählbar. Der Grund für diese Abnormität liegt darin, daß die Punkte von $\mathbf{Z}$ „künstlich" aus Y entfernt worden sind. Betrachtet man nur die Menge der Grenzpunkte (s. 4.7) der Transformation, so gilt der Satz von Hopf wieder (s. 4.11, Satz D, Behauptung 4).

3.7. LEMMA. *Jede lokal kompakte zusammenhängende topologische Gruppe erfüllt die Bedingung Z.*

KOROLLAR. *Wenn Y eine Kompaktifizierung der lokal kompakten zusammenhängenden topologischen Gruppe G ist, so daß $R:=Y-G$ total unzusammenhängend ist, dann besteht R aus höchstens zwei Punkten.*

Beweis des Lemmas. Nach der Lösung des 5. Hilbertschen Problems [16] besitzt jede lokal kompakte zusammenhängende topologische Gruppe G einen kompakten Normalteiler K, so daß G/K eine Liegruppe ist. Die Zusammenhangskomponente K_0 der 1 in K ist ein kompakter Normalteiler in G. Wir werden zeigen, daß G/K_0 eine Liegruppe ist. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas offenbar.

Nach Übergang von G zu G/K_0 bleibt also zu zeigen: G sei eine lokal kompakte zusammenhängende topologische Gruppe, K sei ein kompakter total unzusammenhängender Normalteiler von G, so daß G/K eine Liegruppe ist. Dann ist G selbst eine Liegruppe. Zunächst ist K zentral in G; denn das Bild der stetigen Abbildung $G \to K$ mit $g \to g \cdot x \cdot g^{-1}$ ist für jedes $x \in K$ zusammenhängend, also gleich einem Punkt, nämlich x. Nun durchlaufe L die Umgebungsbasis von 1 in K aller offenen kompakten Untergruppen L von K. Dann ist $G/L \to G/K$ ein lokaler Isomorphismus und daher Überlagerungsgruppe. Folglich ist K/L isomorph zu einer endlichen Untergruppe der ersten Homotopiegruppe π der Liegruppe G/K, die bekanntlich eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist. Also ist K/L isomorph zu einer Untergruppe der Torsionsgruppe von π, die endlich ist. Die Ordnung von K/L ist daher beschränkt und folglich ist K diskret.

§4

4.1. $f: W \to X$ sei eine eigentliche stetige und surjektive Abbildung zwischen zwei lokal kompakten topologischen Räumen und X liege dicht in einem kompakten Raum Y. Dann kann man – grob gesprochen – den Restraum $R := Y - X$ an W ankleben, d.h. es gibt einen kompakten topologischen Raum $\hat{W}_f$, in dem W dicht liegt und eine stetige Abbildung $\hat{f}: \hat{W}_f \to Y$, so daß $\hat{f} \mid W = f$ und $\hat{f} \mid \hat{W}_f - W$ ein Homöomorphismus auf R ist. Man definiere einfach $\hat{W}_f := W \cup R$, $\hat{f}$ durch $\hat{f} \mid W = f$, $\hat{f} \mid R = id_R$ und nehme als offene Mengen in $\hat{W}_f$ alle Mengen der Form $U \cup \hat{f}^{-1}(V)$, wo U offen $\subset W$ und V offen $\subset Y$. Mit dieser Topologie ist $\hat{W}_f$ ein kompakter Raum. Sei nämlich $\{U_i \cup \hat{f}^{-1}(V_i);\, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $\hat{W}_f$, dann bilden die Mengen $\{V_i \cap R;\, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von R, der als abgeschlossener (s. 3.1) Unterraum von Y kompakt ist. Also überdecken endlich viele V_j, etwa $V_1, \ldots, V_n$, bereits R. Die Menge $A = \hat{W}_f - \bigcup_{j=1}^{n} \hat{f}^{-1}(V_j) = \hat{f}^{-1}(C \bigcup V_j)$ ist als f-Urbild einer kompakten Teilmenge von X kompakt in W und läßt sich daher von endlich vielen der U_i überdecken. Die übrigen Eigenschaften von $\hat{W}_f$ und $\hat{f}$ prüft man leicht nach.

$\hat{W}_f$ ist durch die angegebenen Bedingungen bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt. Genauer gesagt: Gegeben ein kompakter Raum $\hat{V}$ mit einem dichten Unterraum V und Abbildungen wie in dem folgenden kommutativen Prisma von Abbildungen, dann ist $\hat{V} \to \hat{W}_f$ ein Homöomorphismus. Das Zeichen „ $\xrightarrow{\sim}$ " bedeutet dabei einen Homöomorphismus.

$$\begin{tikzcd}
 & & Y-X \arrow[d, hook] \\
\hat{V}-V \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[urr, "\sim"] & \hat{W}_f-W \arrow[ur, "\sim"'] \arrow[d, hook] & Y \\
\hat{V} \arrow[r] \arrow[ur] & \hat{W}_f \arrow[ur] & X \arrow[u, hook] \\
V \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, hook] \arrow[ur] & W \arrow[ur] \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Denn $\hat{V}-V \to \hat{W}_f - W$ ist ein Homöomorphismus. Die stetige bijektive Abbildung $\hat{V} \to \hat{W}_f$ zwischen kompakten Räumen ist dann ein Homöomorphismus.

Die Topologie von $\hat{W}_f$ hat die folgenden Eigenschaften: *Wenn $\mathfrak{F}$ ein Filter auf $\hat{W}_f$ ist, so daß $f(\mathfrak{F})$ gegen eine Punkt aus R konvergiert, dann konvergiert $\mathfrak{F}$ gegen den entsprechenden Punkt von $\hat{W}_f - W$.*

4.2. Nun seien die Voraussetzungen von 3.6 erfüllt. Es sei also eine Operation $\varphi_Y: G \times Y \to Y$ gegeben, deren Einschränkung auf X wir mit $\varphi: G \times X \to X$ bezeichnen. *Dann gibt es eine Kompaktifizierung $\hat{G}$ von G und eine Fortsetzung $\hat{\varphi}$ von φ zu einer stetigen Abbildung $\hat{\varphi}: \hat{G} \times X \to Y$, so daß $\hat{\varphi} \mid (\hat{G}-G) \times \{x\}$ ein Homöomorphismus auf $\overline{G \cdot x} - G \cdot x$ ist. Der Querstrich bedeutet dabei die abgeschlossene Hülle in Y. Durch diese Eigenschaften ist $\hat{G}$ bis auf Homöomorphismus eindeutig bestimmt.*

Zum Beweis betrachten wir die stetige eigentliche surjektive Abbildung $\varphi_{x_0}: G \to G \cdot x_0$ für ein $x_0 \in X$ und konstruieren nach 4.1 $\hat{G} := \hat{G}_{\varphi_{x_0}} = G \cup R_0$, wo $R_0 := \overline{G \cdot x_0} - G \cdot x_0$ und definieren $\hat{\varphi} \mid G \times X = \varphi$, $\hat{\varphi} \mid R_0 \times X =$ Projektion auf die erste Komponente.

Wir zeigen die Stetigkeit von $\hat{\varphi}$. Es sei

$$\mathfrak{F} = \{\hat{\varphi}_{x_0}^{-1}(V) \cap G = \varphi_{x_0}^{-1}(V \cap X); \quad V \text{ Umgebung von } y \in R_0 \text{ in } Y\}.$$

Dann konvergiert $\mathfrak{F}(K) = \{F \cdot K; F \in \mathfrak{F}\}$ für jede kompakte Menge $K \subset X$ gegen y (s. 3.4.). Zu jeder Umgebung W von y in Y existiert also eine Umgebung V von y in Y mit $V \cap R_0 \subset W$ und $\varphi_{x_0}^{-1}(V \cap X) \cdot K \subset W$, also

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\hat{\varphi}_{x_0}^{-1}(V) \times K) &= \hat{\varphi}((\varphi_{x_0}^{-1}(V \cap X) \cup (V \cap R_0)) \times K) \\ &= \varphi_{x_0}^{-1}(V \cap X) \cdot K \cup (V \cap R_0) \subset W.\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\varphi}$ stetig. Da $\hat{G}$ kompakt ist und G als dichte Teilmenge erhält, ist $\hat{\varphi}(\hat{G} \times \{x\}) = \overline{G \cdot x}$ für alle $x \in X$. Andererseits ist $\hat{\varphi}(G \times \{x\}) = G \cdot x$ und $R_0 = \hat{\varphi}(R_0 \times \{x\}) = \overline{G \cdot x} - G \cdot x$, also ist $\hat{\varphi} \mid R_0 \times \{x\}$ ein Homöomorphismus auf $\overline{G \cdot x} - G \cdot x$. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 4.1.

Wir identifizieren von nun an

$$\hat{G} - G = R_0 = \overline{G \cdot x} - G \cdot x \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Die Abbildung $\hat{\varphi}_x: \hat{G} \to Y$ mit $\hat{\varphi}_x(g) = \hat{\varphi}(g, x)$ ist für alle $x \in X$ die in 4.1. konstruierte Fortsetzung von $\varphi_x: G \to G \cdot x$ mit $\varphi_x(g) = g \cdot x$.

Aus der Konstruktion der Topologie von $\hat{G}$ folgern wir nun, daß *sich die Rechts- und Linkstranslationen von G auf sich zu stetigen Operationen von G auf* $\hat{G}$ *fortsetzen lassen.* Dazu definieren wir

$$\hat{L}: G \times \hat{G} \to \hat{G} \quad \text{durch}$$
$$\hat{L}(g, h) = g \cdot h \quad \text{für} \quad h \in G, \quad \text{und}$$
$$\hat{L}(g, h) = \varphi_Y(g, h) \quad \text{für} \quad h \in \hat{G} - G = R_0,$$

und weiter

$$\hat{R}: G \times \hat{G} \to \hat{G} \quad \text{durch}$$
$$\hat{R}(g, h) = h \cdot g^{-1} \quad \text{für} \quad h \in G, \quad \text{und}$$
$$\hat{R}(g, h) = h \quad \text{für} \quad h \in \hat{G} - G.$$

Dann gilt

$$\hat{\varphi}_x \circ \hat{L}(g, h) = \varphi_Y(g, \hat{\varphi}_x(h)) \quad \text{und}$$
$$\hat{\varphi}_x \circ \hat{R}(g, h) = \hat{\varphi}(h, \varphi_x(g^{-1})) \quad \text{für} \quad g \in G, h \in G, x \in X.$$

Wir haben die Stetigkeit von $\hat{L}$ und $\hat{R}$ zu zeigen. Sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf G, der gegen $g \in G$ konvergiert, sei $\mathfrak{F}'$ ein Filter auf $\hat{G}$, der gegen $h \in \hat{G}$ konvergiert und sei $x \in X$. Wir müssen zeigen, daß $\hat{L}(F \times F')$, bzw. $\hat{R}(F \times F')$, $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}'$ gegen $\hat{L}(g, h)$ bzw. $\hat{R}(g, h)$ konvergieren. Wir brauchen nur den Fall $h \in \hat{G} - G$ zu betrachten. Da $\hat{\varphi}_x(F')$, $F' \in \mathfrak{F}'$ gegen $\hat{\varphi}_x(h) = h$ konvergiert, konvergiert $\hat{\varphi}_x \circ \hat{L}(F \times F') = \hat{\varphi}(F \times \hat{\varphi}_x(F'))$, $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}'$ gegen $\varphi_Y(g, y)$. Nach Definition der Topologie von $\hat{G}$ konvergiert daher $\hat{L}(F \times F')$, $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}'$ gegen $\hat{L}(g, h)$. Für $\hat{R}$ gelten analoge Überlegungen: $\varphi_x(F^{-1})$, $F \in \mathfrak{F}$ konvergiert gegen $\varphi_x(g^{-1})$, und $\hat{\varphi}_x \circ \hat{R}(F \times F') = \hat{\varphi}(F' \times \varphi_x(F^{-1}))$, $F \in \mathfrak{F}$, $F' \in \mathfrak{F}'$ konvergiert gegen $\hat{\varphi}(h, \varphi_x(g^{-1})) = h$. Also konvergiert $\hat{R}(F \times F')$ gegen $h = \hat{R}(g, h)$.

Statt $\hat{L}(g, h)$ schreiben wir oft einfach $g \cdot h$, ebenso für $\hat{R}(g, h)$ einfacher $h \cdot g^{-1}$.

Wir haben jetzt zwei stetige Fortsetzungen von $\varphi: G \times X \to X$, nämlich $\varphi_Y: G \times Y \to Y$. Eine stetige Fortsetzung auf $\hat{G} \times Y \to Y$ ist im allgemeinen nicht möglich. Man nehme zu Beispiel $G = X = \mathbf{R}$, $Y =$ Kompaktifizierung von $\mathbf{R}$ durch die zwei Punkte $+\infty$, $-\infty$. G operiere auf Y durch $\varphi_Y(g, y) = g + y$, wobei $g + \infty = +\infty$, $g + (-\infty) = -\infty$. In diesem Fall ist $\hat{G} = Y$. Eine stetige Fortsetzung von φ auf $Y \times Y$ kann es nicht geben, denn $\varphi(n, -n) = 0$ und $\varphi(n, -2n) = -n \to -\infty$, aber $n \to \infty$, $-cn \to -\infty$ für $c > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Wir werden indessen zeigen, daß abgesehen von diesem Sonderfall, daß die Randpunkte zueinander invers sind, eine stetige Fortsetzung möglich ist.

4.3. Zwei Punkte y_1, y_2 aus R_0 heißen *invers*, wenn es einen Filter $\mathfrak{F}$ auf G gibt, der gegen y_1 konvergiert und so daß der Filter $\mathfrak{F}^{-1} := \{F^{-1}; F \in \mathfrak{F}\}$ gegen y_2 konvergiert. Daher ist y_2 genau dann zu y_1 invers, wenn y_2 Häufungspunkt von $(\mathfrak{U}(y_1) \mid G)^{-1}$ ist, wo $\mathfrak{U}(y_1) \mid G = \{U \cap G;\ U$ Umgebung von y_1 in $\hat{G}\}$ ist.

Die Menge $I = \{(y_1, y_2) \in R_0 \times R_0; y_1, y_2$ sind invers$\}$ ist daher abgeschlossen in $R_0 \times R_0$; denn für $(y_1, y_2) \notin I$ gibt es offene Umgebungen U_i von y_i in $\hat{G}$, so daß $(U_1 \cap G)^{-1} \cap U_2 = \emptyset$ ist und jedes Element von $U_1 \times U_2$ liegt folglich nicht in I. Wenn y_1, y_2 invers sind, dann sind auch $g \cdot y_1$ und $y_2 \cdot g^{-1} = y_2$ invers. Die Menge der zu einem Punkt $y \in R_0$ inversen Punkte bezeichnen wir mit y^{-1}. Diese Menge ist abgeschlossen und G-stabil gegenüber Linkstranslationen.

Wenn $(y_1, y_2) \in I$ ist, dann gilt für jedes Paar von Umgebungen U_1 von y_1 in $\hat{G}$ und U_2 von y_2 in y, daß $\varphi((U_1 \cap G) \times (U_2 \cap X)) = X$ ist. Es existiert also sicher keine stetige Fortsetzung von φ auf I. Zum Beweis betrachte man die stetige Abbildung $\hat{\varphi}_x : \hat{G} \to Y$. Dann gibt es zu jedem Paar von Umgebungen U_1 von y_1 in $\hat{G}$ und $V_2 := \hat{\varphi}_x^{-1}(U_2)$ von y_2 in G zueinander inverse Elemente g und g^{-1} aus G, so daß $\varphi(g, \hat{\varphi}_x(g^{-1})) = g \cdot g^{-1} \cdot x = x$ in $\varphi((U_1 \cap G) \times (U_2 \cap X))$ liegt.

4.4. Wir machen die Voraussetzungen von 3.6 und übernehmen die bisherigen Bezeichnungen. *Wenn V_1 eine Umgebung eines Punktes $y \in R_0$ in Y ist, dann gibt* es zu *jeder Menge $A \subset Y$ mit $\partial A \subset X$ eine Umgebung V_2 von y in $\hat{G}$, so daß für alle $g \in V_2 \cap G$ gilt*:

$$gA \subset V_1 \quad \text{oder} \quad gA \supset CV_1 .$$

Zunächst dürfen wir nämlich annehmen, daß CV_1 zusammenhängend ist (vgl. Beweis von 3.5.). Wegen der Stetigkeit von $\hat{\varphi} : \hat{G} \times X \to Y$ und weil $\partial A \subset X$ kompakt ist, gibt es dann eine Umgebung V_2 von y in $\hat{G}$, so daß $\hat{\varphi}(V_2 \times \partial A) \subset V_1$. Für jedes Element $g \in G \cap V_2$ golt daher $g . \partial A \subset V_1$ und hieraus folgt die Behauptung, weil CV_1 zusammenhängend ist.

4.5. $\mathfrak{F}$ sei ein Filter auf G, der gegen $y_1 \in R_0$ konvergiert. Falls y_2 ein Punkt von Y ist, so konvergiert die Filterbasis $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{U}(y_2) = \{\varphi_y(F \times U);\ F \in \mathfrak{F},\ U$ Umgebung von y_2 in $Y\}$ gegen y_1 oder y_2 ist Häufungspunkt von $\mathfrak{F}^{-1}$.

Falls nämlich die erste Behauptung nicht gilt, gibt es zu jeder Umgebung V_1 von y_1 in Y und zu jeder Umgebung A von y_2 in Y mit $\partial A \subset X$ (diese bilden nach 3.2 eine Umgebungsbasis von y_2) und in jedem $F \in \mathfrak{F}$ ein $g \in F$, so daß $g \cdot A \not\subset V_1$. Falls F in einer Umgebung V_2 von y in G gemäß 4.4 enthalten ist, folgt daraus $g\,A \supset CV_1$ oder äquivalent $A \supset g^{-1} \cdot CV_1$. Betrachten wir zu einem Punkt $x \in X \cap CV_1$ die Abbildung $\hat{\varphi}_x : \hat{G} \to Y$. Dann gibt es zu jeder Umgebung A von y_2 in Y ein Element $g^{-1} \notin G$ mit $\varphi_x(g^{-1}) \in A$ und das zu einem Element $g \in F \in \mathfrak{F}$ invers ist. Nach Konstruktion der Topologie von G ist dann y_2 Häufungspunkt von $\mathfrak{F}^{-1}$.

4.6. Wir erhalten als Folgerung die angekündigte Aussage: *Die Abbildung* $\varphi' : (\hat{G} \times Y) - I \to Y$ *mit*

$$\varphi' \mid G \times Y = \varphi_Y$$

und

$$\varphi' \mid ((\hat{G} - G) \times Y) - I = \textit{Projektion auf die erste Komponente}$$

ist stetig. Die Abbildung φ' *ist eine Fortsetzung von* φ.

4.7. G operiert eigentlich auf $Y - R_0$. $R - R_0$ *ist dicht in R, falls* $R \neq R_0$. $Y - R_0$ *erfüllt die Voraussetzung Z. Insbesondere erfüllt* Y, $Y - R_0$ *die Voraussetzungen von* 3.6 *an Stelle von* Y, X.

Beweis. Um die Eigentlichkeit der Operation zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß es zu je zwei (nicht notwendig verschiedenen) Punkten aus $Y - R_0$ kompakte Umgebungen K und L in $Y - R_0$ gibt, so daß $P := \{g \in G; g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ relativ kompakt in G ist. Wir wählen K so daß $\partial K \subset X$. Wäre P nicht relativ kompakt in G, so gäbe es einen Häufungspunkt $y \in R_0$ von P. Da $\varphi'(y, x) = y$ für alle $x \in Y - R_0$ gilt, und φ' stetig ist, gibt es eine Umgebung U von y, so daß $\varphi'(U \times K) \subset CL$, da CL eine Umgebung von y ist. Für jedes Element $g \in U \cap P$ erhalten wir also $g \cdot K \cap L = \emptyset$ im Widerspruch zur Konstruktion von P.

Aus der Stetigkeit von φ' folgt, daß für jeden Filter von Teilmengen von G, der gegen einen Punkt $y \in R_0$ konvergiert und für jeden Punkt $x \in Y - R_0$ die Filterbasis der Bildmengen bei der Abbildung $G \to Y$ mit $g \to \varphi(g, x)$ gegen $y \in R_0$ konvergiert. Wenn speziell $x \in R - R_0$, folgt daraus, daß y Häufungspunkt der Bahn $Gx \subset R - R_0$ ist. Daraus folgt die zweite Behauptung.

Zur dritten Behauptung: Jeder Punkt $y \in R - R_0$ besitzt eine Basis aus Umgebungen $U \subset Y - R_0$ mit kompaktem $\partial U \subset X$. Wenn K eine kompakte zusammenhängende Teilmenge von X ist, die ∂U enthält, dann ist $U \cup K \subset Y - R_0$ eine kompakte zusammenhängende Menge. Hieraus folgt die dritte Behauptung leicht (s. 3.4.)

4.8. Bezeichnen wir für $y_0 \in R_0$ mit $V(y_0) = \{y \in R_0; y_0$ ist der einzige zu y inverse Punkt$\}$. Dann gilt

$$R_0 = V(y_0) \cup \overline{G \cdot y_0}. \tag{4.8.1}$$

Wenn nämlich $y \in R_0$ nicht in $V(y_0)$ liegt, dann existiert ein Filter $\mathfrak{F}$ auf G, der gegen y konvergiert, aber y_0 nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{F}^{-1}$ ist. Dann konvergiert $\mathfrak{F} \cdot y_0$ gegen y nach 4.5 und damit ist $y \in \overline{G \cdot y_0}$.

Nun treten die beiden folgenden Fälle auf:

1. $V(y_0) = \emptyset$ für alle $y_0 \in R_0$. Dann ist $\overline{G \cdot y} = R_0$ für alle $y \in R_0$ und damit $y^{-1} = R_0$ für alle $y \in R_0$; denn y^{-1} ist eine nicht leere abgeschlossene G-stabile Teilmenge von R_0.

2. $V(y_0) \neq \emptyset$ für ein $y_0 \in R_0$. Sei $y_0 = y^{-1}$ für ein $y \in R_0$. Dann ist $g \cdot y_0 = (y \cdot g^{-1})^{-1} = = y^{-1} = y_0$, also ist y_0 Fixpunkt. Wenn umgekehrt y_0 Fixpunkt ist, ist nach der obigen Formel $V(y_0) \supset R_0 - \{y_0\}$, also $y^{-1} = y_0$ für $y \in R_0$, $y \neq y_0$.

4.9. *SATZ. Unter den Voraussetzungen von* 3.6 *bestehe* $Y - X$ *aus genau zwei Punkten. Dann besitzt* G *eine diskrete unendliche zyklische Untergruppe* H, *so daß* X/H *kompakt ist. Insbesondere ist dann* G/H *kompakt.*

Beweis. Es gilt $R_0 = R$. Wäre $R_0 \neq R$, dann läge $R - R_0$ dicht in R, besäße also unendlich viele Punkte.

Die Untergruppe G_1 von G, die R_0 punktweise fix läßt, hat einen Index $\leqslant 2$ in G. Wenn $y_1 \in R_0$ Häufungspunkt von G_1 ist, dann ist auch $g \cdot y_1$ Häufungspunkt von $g \cdot G_1 \cdot g^{-1} = G_1$ für $g \in G$. In jedem Fall ist $R_0 \subset G_1$. Wir dürfen daher annehmen, daß G alle Punkte von R_0 fix läßt.

Wir befinden uns also im zweiten der in 4.8 unterschiedenen Fälle: Jeder Punkt von R_0 ist zum anderen Punkt von R_0 invers, aber nicht zu sich selbst.

Es seien nun V_1, W_1 offene Umgebungen von $y_1 \in R_0$ in Y, die y_2 nicht enthalten, deren Rand in X liegt und für die gilt: $V_1 \subset \overline{V_1} \subset W_1$. Wegen der Stetigkeit von φ' gilt für Elemente $g \in G$ nahe bei y_1:

$$g \cdot \overline{V_1} \subset W_1, \qquad \text{denn} \qquad \varphi'(y, V_1) = y.$$

H sei die von g erzeugte zyklische Untergruppe von G. Wir definieren $W_2 := C\,\overline{V_1}$, $V_2 := C\overline{W_1}$. Die offenen Mengen V_2 und W_2 enthalten y_2, ihr Rand liegt in X und es gelten die Inklusionen: $V_2 \subset \overline{V_2} \subset W_2$ und $g^{-1}\overline{V_2} \subset W_2$.

H ist diskret, denn für alle $g^n \in H$, $n > 0$ gilt $g^n \cdot \overline{V_1} \subset W_1$ und für alle $g^n \in H$, $n < 0$ gilt $g^n \cdot \overline{V_2} \subset W_2$ und daher hat H mit der folgenden Umgebung von 1 in G nur das Element 1 gemeinsam:

$$\{g \in G;\, g\partial V_1 \cap C\,W_1 \neq \varnothing\} \cup \{g \in G;\, g\partial V_2 \cap C\,W_2 \neq \varnothing\}.$$

Die Folge g^n, $n > 0$, konvergiert gegen y_1. Denn sonst gäbe es einen Teilfilter von g^n, der gegen einen Punkt $\neq y_1$ aus G konvergiert. Da H diskret ist, kann dieser Punkt nur y_2 sein. Dann würde aber für jeden Punkt $y \in V_1$ und genügend großes n gelten: $g^n \cdot y \in CW_1$, im Widerspruch zur Konstruktion. Ebenso erhält man, daß g^{-n}, $n \in \mathbf{N}$, gegen y_2 konvergiert. Für jeden Punkt $x \in X$ konvergiert daher $g^n x$ gegen y_1 und $g^{-n} x$ gegen y_2 für $n \in \mathbf{N}$. Es gibt also einen kleinsten Exponenten $n \in \mathbf{Z}$ mit $g^n x \in V_1$. Dann ist $g^n x \in V_1 - g \cdot V_1$. Diese Menge hat keinen Häufungspunkt in R_0, ist also relativ kompakt in X. Daher ist X/H als stetiges Bild von $\overline{V_1 - g \cdot V_1}$ kompakt. Dann ist auch G/H als stetiges Bild der kompakten Menge $\varphi_x^{-1}(\overline{V_1 - g \cdot V_1})$ kompakt. Die beiden Räume

X/H und G/H sind nach einem Satz über eigentliche Transformationsgruppen hausdorffsch (s. [2] Chap. 3, §4, n° 2 Proposition 3).

4.10. In der Situation des Satzes von 4.9 ist X/G kompakt. Daher haben X und G in der Endentheorie von Specker [13] isomorphe Endenräume. Ferner sieht man aus den Definitionen von Specker leicht, daß G und H isomorphe Endenräume haben. H hat aber – als diskrete Gruppe – genau zwei Enden. Es folgt, daß Y die Endenkompaktifizierung von X ist und G die Endenkompaktifizierung der topologischen Gruppe G ist.

Falls in 3.6 $Y-X$ aus einem oder unendlich vielen Punkten besteht, kann die Endenzahl von G in beiden Fällen gleich 1, 2 oder ∞ sein, wie man an Beispielen leicht sieht.

4.11. Wir fassen die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen in einem Satz zusammen.

SATZ D. Voraussetzungen: Y sei ein kompakter Raum, X sei ein dichter lokal kompakter Unterraum. $R := Y-X$ sei total unzusammenhängend. G sei eine lokal kompakte, nicht kompakte topologische Gruppe. G operiere stetig auf Y; X sei ein G-stabiler Unterraum, auf dem G eigentlich operiert. X hat die Eigenschaft Z: Jede kompakte Teilmenge von X ist in einer kompakten zusammenhängenden Menge enthalten.

Behauptungen: $R:_0$ sei die Menge der Grenzpunkte (s. 4.7.)

1. *R_0 ist eine kompakte, G-stabile Untermenge von R.*
2. *Es gibt genau eine Kompaktifizierung $\hat{G}$ von G, so daß die Abbildungen $\varphi_x : G \to X$ mit $\varphi_x(g) = g \cdot x$ sich für jedes $x \in X$ zu einer stetigen Abbildung $\hat{\varphi}_x : \hat{G} \to Y$ fortsetzen lassen und $\hat{\varphi}_x : \hat{G} - G \to R_0$ Homöomorphismen sind.*
3. *G operiert stetig auf $\hat{G}$ vermöge Links- und Rechtstranslationen. Die Rechtstranslationen lassen $\hat{G} - G$ punktweise fix. Für die Linkstranslationen ist $\hat{\varphi}_x$ mit den Operationen von G verträglich.*
4. *R_0 besteht aus einem oder zwei Punkten oder ist perfekt.*
5. *Wenn R_0 aus genau zwei Punkten besteht, dann besitzt G eine unendlich zyklische diskrete Untergruppe H, so daß G/H kompakt ist.*
6. *Jeder Punkt aus Y ist entweder Fixpunkt für G oder die abgeschlossene Hülle seiner G-Bahn umfaßt R_0.*
7. *Es kann* 0, 1 *oder* 2 *Fixpunkte in Y geben. Die Fixpunkte liegen in R_0. Die Operation heißt entsprechend elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.*
8. *Operationen mit einem Grenzpunkt sind parabolisch.*
9. *Operationen mit zwei Grenzpunkten sind elliptisch oder hyperbolisch.*
10. *Operationen mit unendlich vielen Grenzpunkten sind elliptisch oder parabolisch. Ob*

es parabolische Operationen mit unendlich vielen Grenzpunkten gibt, ist ein offenes Problem.

11. *Bei elliptischen Operationen ist* $y^{-1}=R_0$ *für jedes* $y\in R_0$.
12. *Bei parabolischen Operationen mit dem Fixpunkt* y_0 *ist* $y^{-1}=y_0$ *für alle* $y\in R_0-\{y_0\}$ *und* $y_0^{-1}=R_0$.
13. *Bei hyperbolischen Operationen sind die beiden (invarianten) Grenzpunkte zueinander invers, aber keiner zu sich selbst.*
14. *Falls* X/G *kompakt ist, ist* $R_0=R$*; insbesondere ist dann* $\hat{\varphi}_x\colon \hat{G}-G\to R$ *ein Homöomorphismus für alle* $x\in X$.

Beweis. Nur 4. ist noch nicht bewiesen. Für die anderen Behauptungen geben wir nur die Stellen an, wo sie bewiesen sind oder aus denen sie leicht gefolgert werden können. Definition von R_0: 4.7 und 4.2; 1., 2., 3. in 4.2; 5. in 4.9 angewandt auf Y, $Y-R_0$, was nach 4.7 möglich ist; 6. in 4.2 angewandt auf Y, $Y-R_0$ für Punkte $y\notin R_0$, für $y\in R_0$ in 4.8; 7. in 3.5 und nach Definition der Grenzpunkte; 8. ist trivial; 9. ist trivial, da jedes Element aus G die Grenzpunkte permutiert; 10. gäbe es zwei Fixpunkte, so wäre nach dem 2. Fall von 4.8 für jeden Punkt y der nicht Fixpunkt ist: $y^{-1}=$jedem der beiden Fixpunkte; 11. 4.8 1. Fall; 12. 4.8 2. Fall und y^{-1} enthält, falls $y_0\neq R_0$, einen Punkt $y\neq y_0$ und ist, da y_0 eine abgeschlossene G-stabile Menge ist, nach 6. gleich R_0; 13. wurde im Beweis von 4.9 festgestellt; 14. da es eine kompakte Menge $K\subset X$ mit $GK=X$ gibt, falls X/G kompakt ist, folgt aus 3.4: $R_0=\overline{G\cdot x}\cap R\supset\overline{G\cdot K}\cap R=$ $=\bar{X}\cap R=R$.

Zu 4.: y_1, y_2, y_3 seien drei Grenzpunkte $\in R_0=\hat{G}-G$. Wenn der Filter $\mathfrak{F}$ auf G gegen y_1 konvergiert, so hat der Filter $\mathfrak{F}^{-1}$ evtl. mehrere Häufungspunkte. Durch Verfeinerung können wir erreichen, daß er nur gegen einen Punkt, etwa $y'\in R_0$ konvergiert. Zwei andere Grenzpunkte seien $y''\neq y'''$. Dann konvergieren die beiden Filter $\mathfrak{F}y''$ und $\mathfrak{F}y'''$ auf R_0 gegen y_1 nach 4.5. Insbesondere gibt es in jeder Umgebung von y_1 noch zwei Punkte $g\cdot y''\neq g\cdot y'''$. Also ist R_0 perfekt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ABELS, H., *Über die Erzeugung von eigentlichen Transformationsgruppen*, Math. Z. *103* (1968) 333–357.

[2] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Topologie générale. Chap. 3/4 (Groupes topologiques ...) 3. Auflage, Paris 1960.

[3] EPSTEIN, D, B. A., *Ends*, S. 110–119 in: *Topology of 3-manifolds*, Proc. of the University of Georgia Institute 1961. Ed. by M. K. Fort Jr. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1962.

[4] FREUDENTHAL, H., *Enden topologischer Räume und Gruppen*. Math. Z. *33* (1931) 692–713.

[5] ——, *Neuaufbau der Endentheorie*, Ann. of Math. (2) *43* (1942) 261–279. Berichtigungen und Verbesserungen dazu in Ann. of Math. (2) *47* (1946) 829–830.

[6] ——, *Über die Enden diskreter Räume und Gruppen*, Comment. Math. Helv. *17* (1944) 1–38.

[7] —— *La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54 = Indagationes Math. *13* (1951) 288–294.

[8] GODBILLON, C., *Cohomologie à l'infini des espaces localement compacts, Applications.* C. R. Acad. Sci. Paris *264A* (1967) 394–396.
[9] HOPF, H., *Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen,* Comment. Math. Helv. *16* (1943/44) 81–100.
[10] IWASAWA, K., *Topological groups with invariant compact neighbourhoods of the identity,* Ann. of Math. (2) *54* (1951) 345–348.
[11] MCCARTNEY, J. R., *Maximum zero-dimensional compactifications,* Proc. Cambridge Phil. Soc. *68* (1970) 653–661.
[12] SPECKER, E., *Die erste Cohomologiegruppe von Überlagerungen und Homotopie-Eigenschaften dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten,* Comment. Math. Helv. *23* (1949) 303–333.
[13] ——, *Endenverbände von Räumen und Gruppen,* Math. Ann. *122* (1950) 167–174.
[14] WANG, HSIEN-CHUNG, *One-dimensional cohomology groups of locally compact metrically homogeneous spaces,* Duke Math. J. *19* (1952) 305–310.
[15] WILLARD, ST., *General Topology,* Addison-Wesely Publ. Co. Reading Mass. 1970.
[16] YAMABE, H., *A generalization of a theorem of Gleason,* Ann. of Math. (2) *58* (1953) 351–365

Fakultät für Mathematik der Universität,
D 48 Bielefeld, Kurt-Schumacher-Str.

Eingegangen den 5. April 1972.