Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1972)

Artikel: Fibrés vectoriels holomorphes homogènes et J-représentations
Autor: Saillen, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36377

Fibrés vectoriels holomorphes homogènes et J-représentations

par P. SAILLEN[1])

Introduction

On considère un groupe de Lie réel G connexe et un sous-groupe fermé B de G, en sorte que G/B soit muni d'une structure complexe invariante par l'action naturelle de G. On sait dans ce cas que le fibré tangent TG/B est un G-fibré vectoriel holomorphe. On peut le voir en écrivant TG/B sous forme $G\times_B(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$, variété quotient de $G\times(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ ($\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}$ sont les algèbres de Lie réelles des groupes G et B) par la relation d'équivalence $(gb, x)\sim(g, b\cdot x)$, l'opération de B dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ étant induite par la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$. La structure complexe de G/B (donc aussi de TG/B) est caractérisée, comme on le rappelle au paragraphe 1, par l'existence d'une sous-algèbre complexe $\mathfrak{g}^-$ de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ contenant $\mathfrak{b}$, ce que l'on peut encore exprimer en disant que la représentation adjointe de G est telle que la différentielle de la représentation induite de B dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ (qui est un espace vectoriel complexe) se prolonge en une représentation de $\mathfrak{g}^-$.

Sur ce modèle, J. L. Koszul a défini la notion de j-représentation de G ([4] et aussi [5]): c'est une représentation de G dans un espace vectoriel réel V possèdant un sous-espace V_0 stable par B, en sorte que d'une part, V/V_0 ait une structure d'espace vectoriel complexe donnée, et que d'autre part la différentielle de la représentation complexe induite de B dans V/V_0 se prolonge en une représentation complexe de $\mathfrak{g}^-$ (paragraphe 4).

Dans le but d'étudier les j-représentations de G une des premières questions qui se posent est d'en donner une interprétation géométrique, c'est-à-dire

a) $G\times_B(V/V_0)$ est-il un G-fibré holomorphe sur G/B?

b) Quels sont les fibrés vectoriels qui s'obtiennent ainsi?

L'objet de ce travail est de répondre à ces questions. On peut répondre par l'affirmative à la question a) en s'appuyant sur un théorème récent de J. A. Tirao et J. A. Wolf ([6] théorème 3.6) concernant l'existence et la classification des structures holomorphes invariantes sur les G-fibrés vectoriels. Cependant les techniques employées sont peu adaptées au point de vue que nous envisageons et nous avons préféré retraiter complètement la question dans le cadre des G-fibrés principaux de groupe complexe et connexe quelconque obtenant ainsi un résultat un peu plus général (théorème 1).

---

[1]) L'auteur a fait ce travail en partie grâce à une bourse du Fond national de la recherche scientifique suisse.

Quant à la question b), nous montrons (théorème 2) que les G-fibrés vectoriels holomorphes associés à des j-représentations de G sont ceux qui possèdent un sous-espace vectoriel réel de dimension finie de l'espace des sections holomorphes, qui est stable par G et cependant assez gros pour que les sections qui le constituent engendrent la fibre en chaque point. Dans le cas du fibré TG/B, un tel espace est par exemple formé par les projections sur G/B des champs de vecteurs différentiables invariants à droite sur G.

Pour une étude plus détaillée des j-représentations sur la base de cette interprétation géométrique, voir [5].

Nous avons largement bénéficié de l'aide du professeur J. L. Koszul qui nous a également posé ces questions. Nous l'en remercions vivement.

Notations. Si V est un espace vectoriel réel et si $V\otimes\mathbb{C}=V\oplus\sqrt{-1}V$ est son complexifié, $\bar{A}$ est le conjugué par rapport à V du sous-espace complexe A de $V\otimes\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des $v-\sqrt{-1}w$ tels que $v+\sqrt{-1}w\in A$. Nous disons parfois simplement «le conjugué de A». Si f est une application $\mathbb{R}$-linéaire de V dans W, f^c est l'application $\mathbb{C}$-linéaire de $V\otimes\mathbb{C}$ dans $W\otimes\mathbb{C}$ définie par $f^c(v_1+\sqrt{-1}v_2)=$ $=f(v_1)+\sqrt{-1}f(v_2)$.

Nous désignons les groupes de Lie par des majuscules romaines G, etc. et les algèbres de Lie toujours considérées réelles par les minuscules gothiques correspondantes.

Si M et N sont deux variétés dans lesquelles un groupe G opère, une application f de M dans N est G-équivariante ou simplement équivariante si elle commute aux actions de G.

Un G-fibré vectoriel (holomorphe) est un espace fibré vectoriel (holomorphe) dans lequel G opère par des automorphismes de fibrés vectoriels (holomorphes).

Nous désignons par la même lettre une application différentiable (i.e. C^∞) entre variétés et son application tangente.

§1. Rappel d'un théorème de Frölicher ([1] p. 91, [2] p. 564)

Soient G un groupe de Lie réel et connexe et B un sousgroupe fermé de G (non nécessairement connexe). Pour qu'il existe sur G/B une structure de variété analytique complexe invariante par l'opération naturelle de G, il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme J de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de G vérifiant les conditions suivantes:

(i) $JX\mathfrak{b}=\{0\}$

(ii) $J^2X\equiv -X\,(\text{mod.}\,\mathfrak{b})$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$

(iii) $J\,Adb\cdot X\equiv Adb\cdot JX\,(\text{mod.}\,\mathfrak{b})$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$ et tout $b\in B$

(iv) $[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]\in\mathfrak{b}$ pou tout X, $Y\in\mathfrak{g}$.

(Si B est connexe, (iii) est conséquence de (iv).) De (i) et (ii) résulte que $J(J^2+1)=0$. On vérifie sans peine que (iv) équivaut à la condition suivante:

(iv) le noyau $\mathfrak{g}^-$ de $J^c(J^c+\sqrt{-1})$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$.

En outre, les propriétés de J impliquent $\mathfrak{g}^- + \overline{\mathfrak{g}^-} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$, $\overline{\mathfrak{g}^-}\cap\mathfrak{g}^- = \mathfrak{b}\otimes\mathbb{C}$ ou encore $\mathfrak{g}^-\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{b}$, et $Adb^c\cdot\mathfrak{g}^-\subset\mathfrak{g}^-$ pour tout $b\in B$. Réciproquement, si on donne une sous-algèbre $\mathfrak{g}^-$ de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions qui précèdent, on peut construire un endomorphisme J de $\mathfrak{g}$ vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv) en convenant que la restriction de J à $\mathfrak{b}$ est nulle et que J^c est la multiplication par $-\sqrt{-1}$ sur un supplémentaire de $\mathfrak{b}\otimes\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}^-$. Tous les J que l'on obtient ainsi définissent la même structure complexe sur G/B.

Dans le cas où $B=\{e\}$ (e élément neutre G) et où G est un groupe de Lie complexe, en choisissant J égal à la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de G, on voit que $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{g}^-\oplus\overline{\mathfrak{g}^-}$ et que $\overline{\mathfrak{g}^-}$ est un idéal de $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$.

Pour plus de détails sur ces correspondances voir [5].

§2. Structures holomorphes sur les fibrés principaux homogènes

2.1. Dorénavant, le groupe de Lie réel et connexe G, le sousgroupe fermé B et la structure complexe invariante sur G/B (supposée exister) sont fixés.

Soit ϱ un homomorphisme analytique de B dans un groupe de Lie complexe et connexe S. Le but du présent paragraphe est l'étude des structures holomorphes invariantes sur l'espace fibré principal homogène $P=(G\times S)/H$ de base G/B, H étant le sous-groupe de $G\times S$ formé des couples $(B, \varrho(b))$ tels que $b\in B$. La projection p de P sur G/B est l'application qui rend commutatif le diagramme.

$$\begin{array}{ccc} G\times S & \xrightarrow{\pi} & P \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow \\ G & \xrightarrow{q} & G/B \end{array}$$

où π et q sont les projections canoniques. Contrairement à l'habitude, S opère à gauche dans P.

Supposons qu'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire h de $\mathfrak{g}^-$ dans $\mathfrak{s}$ telle que

1) La restriction de h à $\mathfrak{b}$ coïncide avec la différentielle de ϱ
2) $h[X, Y]=[h(X), h(Y)]$ pour tout X, $Y\in\mathfrak{g}^-$
3) $h(Adb^c\cdot X)=\varrho(b)\,h(X)\,\varrho(b)^{-1}$ pour tout $b\in B$, $X\in\mathfrak{g}^-$
4) $h(\sqrt{-1}X)=Jh(X)$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$

où J est la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans $\mathfrak{s}$.

Définissons un endormorphisme noté encore J de $g\times\mathfrak{s}$ en posant

$$J(X, a)=(JX, Ja-Jf(X)) \tag{2.1}$$

$$f(X)=h(1+\sqrt{-1}J)(X)$$

(on voit facilement que si J est l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ qui représente la structure complexe de G/B alors $1+\sqrt{-1}J$ envoie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^-$.)

PROPOSITION 1. *J définit sur P une structure d'espace fibré holomorphe $G\times S$-invariante.*

Démonstration. Le noyau de $J^c(J^c+\sqrt{-1})$ est

$$(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^- = \{(X, a+h(X)) \mid X\in\mathfrak{g}^- \quad \text{et} \quad a\in\mathfrak{s}^-\}.$$

On vérifie sans peine que $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ est un sous-espace complexe de $(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C})\times(\mathfrak{s}\otimes\mathbb{C})$ grâce à 4). De 1) et 4) résulte que l'intersection de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ avec son conjugué est égale à la complexifiée $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{h}$ de H. En effet, soient X, $Y\in\mathfrak{g}^-$ et a, $b\in\mathfrak{s}^-$. Si $(X, a+h(X))$ est égal à l'élément $(\bar{Y}, \bar{b}+h(\bar{Y}))$ du conjugué de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$, d'une part $X=\bar{Y}$ appartient à $\mathfrak{b}\otimes\mathbb{C}$ et on peut écrire $X=\bar{Y}=X_1+\sqrt{-1}X_2$ où X_1, $X_2\in\mathfrak{b}$ et d'autre part, $a-\bar{b}=-h(X)+h(Y)$; mais $a=a_1+\sqrt{-1}Ja_1$ et $b=b_1+\sqrt{-1}Jb_1$ avec a_1 et b_1 dans $\mathfrak{s}$, d'où $a-\bar{b}=-2Jh(X_2)$ d'après la condition 4) sur h. On en tire $a_1=-b_1=-Jh(X_2)$ d'où $a+h(X)=h(X_1)+\sqrt{-1}\,h(X_2)$ ce qui montre que l'intersection est contenue dans $\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ d'après la condition 1). L'autre inclusion est immédiate.

Sachant que $\mathfrak{g}^-+\overline{\mathfrak{g}^-}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ et de même pour $\mathfrak{s}^-$, des raisons évidentes de dimension montrent que la somme de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ et de son conjugué est $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})\otimes\mathbb{C}$.

Finalement, 2) implique que $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ est une sous-algèbre et 3) montre que

$$\left.\begin{aligned} &JAd(b,\varrho(b))\cdot(X,a)=J(Adb\cdot X, \varrho(b)\,a\varrho(b)^{-1})\\ &\quad\equiv(Adb\cdot JX, \varrho(b)\,(Ja-Jf(X))\,\varrho(b))\ (\text{mod.}\,\mathfrak{h})\\ &\quad\text{pour tout}\quad b\in B,\ X\in\mathfrak{g},\ a\in\mathfrak{s}.\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

Ainsi, le théorème de Fröhlicher rappelé au paragraphe 1 permet de conclure que J définit sur $(G\times S)/H$ une structure complexe invariante par $G\times S$.

Reste à voir que les applications analytiques

$$S\xrightarrow{\lambda}P\xrightarrow{p}G/B$$

où $\lambda(s)=\pi(e,s)$, sont compatibles avec les structures complexes dont sont munis S, P et G/B. Mais ceci est conséquence des inclusions $\lambda^c(\mathfrak{s}^-)\subset\pi^c(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ et $pr_1(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-=\mathfrak{g}^-$.

La proposition 1 permet de définir une application Φ de l'ensemble $\mathscr{H}(S)$ des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathfrak{g}^-$ dans $\mathfrak{s}$ vérifiant 1), 2), 3) et 4) dans l'ensemble des structures de fibré holomorphe G-invariantes sur P, via la formule (2.1).

THÉORÈME 1. *Φ est bijective.*

A) Φ est surjective: la structure complexe de la variété P, étant invariante par l'action de $G\times S$, elle détermine comme on l'a rappelé au paragraphe 1 une sous-algèbre complexe $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})\otimes\mathbb{C}$. Comme λ et pr_1 sont des applications holomorphes, on a les inclusions

$$\{0\}\times\mathfrak{s}^-\subset(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-\subset\mathfrak{g}^-\times(\mathfrak{s}\otimes\mathbb{C}). \tag{2.3}$$

L'espace fibré P possède par ailleurs une connexion différentiable dont la forme de connexion γ sur P à valeurs dans $\mathfrak{s}$ est de type $(1, 0)$ (au sens des formes différentielles de type (p, q) sur une variété analytique complexe) (voir [3] pages 111–115). γ induit une scission notée encore $\gamma:\mathfrak{g}\times\mathfrak{s}\to\mathfrak{s}$ de la suite exacte

$$0\to\mathfrak{s}\xrightarrow{\lambda}\mathfrak{g}\times\mathfrak{s}\xrightarrow{pr_1}\mathfrak{g}\to 0$$

telle que $\gamma(\mathfrak{h})=\{0\}$ et $\gamma^c(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-\subset\mathfrak{s}^-$. Comme $\lambda\gamma$ est la transformation identique de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{s}$, on a $\gamma(X, 0)=\gamma(X, b)-b$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$ et tout $b\in\mathfrak{s}$; ainsi, si k est l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{s}$ définie par $k(X)=\gamma(X, 0)$, on a $\gamma(X, b)=k(X)+b$. Soit t l'homomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}\otimes\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{s}$ défini par $t(a+\sqrt{-1}b) = -a-Jb$, a, $b\in\mathfrak{s}$ et prenons pour h la restriction de tk^c à $\mathfrak{g}^-$. Il est clair que h vérifie les conditions 1) et 4). On montre ensuite

$$(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^- = \{(X, a-k^c(X))\mid X\in\mathfrak{g}^- \quad \text{et} \quad a\in\mathfrak{s}^-\}. \tag{2.4}$$

L'inclusion du membre de gauche dans celui de droite résulte aussitôt de (2.3) et du fait que $\gamma^c(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-\subset\mathfrak{s}^-$. Quant à l'autre inclusion, soit $(X, a-k^c(X))$ tel que $X\in\mathfrak{g}^-$ et $a\in\mathfrak{s}^-$; puisque $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})\otimes\mathbb{C}$ est somme de $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ et de son conjugué, il existe des éléments X_1 dans $\mathfrak{g}^-$, X_2 dans $\overline{\mathfrak{g}^-}$, a_1 dans $\mathfrak{s}^-$ et a_2 dans $\overline{\mathfrak{s}^-}$ tels que $(X_1, a_1-k^c(X_1))$ appartienne à $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^-$ et $(X_2, a_2-k^c(X_2))$ au conjugué et dont la somme est $(X, a-k^c(X))$. On en déduit que $X_2\in\mathfrak{b}\otimes\mathbb{C}$ et que $a_2=0$; comme $Z\in\mathfrak{b}$ implique $-k(Z)=\varrho(Z)$, il vient finalement $(X_2, a_2-k^c(X_2))=(X_2, \varrho^c(X_2))\in\mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}$ d'où (2.4).

Si X est un élément de $\mathfrak{g}^-$, $k^c(X)+h(X)=(1+t)(k^c(X))$ est un élément de $\mathfrak{s}^-$, en considérant $\mathfrak{s}$ comme un sous-espace de $\mathfrak{s}\otimes\mathbb{C}$, car pour tout a, b dans $\mathfrak{s}$, $(1+t)(a+\sqrt{-1}b)=\sqrt{-1}(b+\sqrt{-1}Jb)$.

Ainsi, en vertu de (2.4),

$$(\mathfrak{g}\times\mathfrak{s})^- = \{(X, a+h(X))\mid X\in\mathfrak{g}^-, a\in\mathfrak{s}^-\}.$$

De cette dernière égalité et du fait que $\mathfrak{s}^-\cap\mathfrak{s}=\{0\}$ on déduit sans peine que h vérifie 2) et que l'endomorphisme J défini par (2.1) représente la structure complexe de P. La propriété 3) de h résulte alors de la propriété (2.2) que possède J.

B) Φ est injective. Si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathscr{H}(S)$ tels que $\Phi(h_1)=\Phi(h_2)$, donc en particulier tels que pour tout $X\in\mathfrak{g}^-$ et tout $a\in\mathfrak{s}^-$ il existe $Y\in\mathfrak{g}^-$ et $b\in\mathfrak{s}^-$ tels que $(X, a+h_1(X))=(Y, b+h_2(Y))$, alors $X=Y$ et $a-b=h_2(X)-h_1(X)$, d'où $h_1=h_2$.

2.2. Supposons maintenant que $S=GL(F)$ est le groupe linéaire complexe des automorphismes d'un espace vectoriel complexe F de dimension finie. Soit $\mathscr{A}$ l'espace vectoriel complexe des applications $f GL(F)$-équivariantes de P dans F ($GL(F)$ opérant canoniquement dans F). On définit une représentation linéaire complexe de G dans $\mathscr{A}$ en posant $(gf)(\xi)=f(g^{-1}\xi)$, $g\in G$, $\xi\in P$.

Désignons par Xf ($X\in\mathfrak{g}$) la différentielle de cette représentation et supposons que P est muni de la structure holomorphe associée à $h\in\mathscr{H}(S)$. Si $\xi_0=\pi(e, 1)$ où 1 est l'élément neutre de $GL(F)$ on a:

PROPOSITION 2. *f est holomorphe au voisinage de ξ_0 si et seulement si*

$$(Xf)(\xi_0) = h(X)f(\xi_0) \tag{2.6}$$

pour tout X dans $\mathfrak{g}^-$.

Démonstration. Désignons par

$$\mu: G \times GL(F) \times P \to P$$

la loi d'opération de $G\times GL(F)$ dans P. Les éléments f de $\mathscr{A}$ satisfont la relation $f(\mu(g, a, \xi))=a(g^{-1}f)(\xi)$ par définition de l'opération de G dans $\mathscr{A}$. En différentiant cette relation au point $(e, 1, \xi_0)$ et en complexifiant les espaces tangents on trouve

$$a(f(\xi_0)) - (Xf)(\xi_0) = f^c(\mu^c(X, a, \xi_0))$$

où $a\in\mathfrak{gl}(F)\otimes\mathbb{C}$, $X\in\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$. Si f est holomorphe au voisinage de ξ_0, on déduit de cette relation $f^c(\mu^c(X, h(X), \xi_0))=0$ pour $X\in\mathfrak{g}^-$ puisque $\mu^c(X, h(X), \xi_0)$ appartient alors à $(T_{\xi_0}P)^-=\pi^c(\mathfrak{g}\times\mathfrak{gl}(F))^-$.

Réciproquement, si (2.6) a lieu, il suffit de vérifier que $f^c(\mu^c(0, a, \xi_0))=0$ pour tout $a\in\mathfrak{gl}(F)^-$ pour conclure. Or $f^c(\mu^c(0, a, \xi_0))=af(\xi_0)$ et le membre de droite est nul puisque a est de la forme $a_1+\sqrt{-1}\,Ja_1$, $a_1\in\mathfrak{gl}(F)$.

§3. *G*-fibrés vectoriels holomorphes

3.1 Soit E un G-fibré vectoriel complexe sur G/B, c'est-à-dire un fibré vectoriel sur G/B associé à une représentation linéaire ϱ de B dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie. E est associé à $P=(G\times GL(F))/H$ au moyen de la fibration $t: P\times F\to E$ définie par $t(\pi(g, a), v)=g\cdot a^{-1}v$ pour tout $g\in G$, $a\in GL(F)$, $v\in F$; (voir

[3] page 36). Ainsi le théorème 1 permet de conclure que, par transport au moyen de t, les structures de G-fibré holomorphe sur E correspondent biunivoquement aux éléments h de $\mathscr{H}(GL(F))$. Supposons donc que E est muni de la structure holomorphe associée à h. Désignons par $\mathscr{S}$ l'espace des sections différentiables de E. On définit une application bijective ω de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{A}$ en convenant que si $\sigma \in \mathscr{S}$, $\omega(\sigma)$ est l'application telle que $t(\xi, \omega(\sigma)(\xi)) = \sigma(p(\xi))$ pour tout $\xi \in P$ ([3] pages 90–91). L'opération naturelle de G dans G/B et l'opération de G dans E induisent une représentation $\mathbb{C}$-linéaire de G dans $\mathscr{S}$: $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$ pour tout $g \in G$. On voit facilement que ω est équivariante. Ainsi, en appliquant la proposition 2, on obtient:

PROPOSITION 3. *Une section différentiable σ de E est holomorphe si et seulement si*

$$(X\omega(\sigma))(\xi_0) = h(X)\,\omega(\sigma)(\xi_0) \tag{3.1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$.

3.2. Soient ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations linéaires de B dans les espaces vectoriels complexes de dimension finie F_1 et F_2, dont les différentielles se prolongent respectivement en les représentations h_1 et h_2 de $\mathfrak{g}^-$; si χ est un homomorphisme complexe de F_1 dans F_2 tel que $\chi\varrho_1(b) = \varrho_2(b)\chi$ pour tout $b \in B$, on définit un morphisme G-équivariant $\theta(\chi)$ du fibré E_1 associé à ϱ_1 dans le fibré E_2 associé à ϱ_2 en posant

$$\theta(\chi)\,\pi'_1(g, v) = \pi'_2(g, \chi(v))$$

pour tout $g \in G$, $v \in F_1$, π'_i désignant la projection canonique de $G \times F_i$ sur E_i ($i = 1, 2$). Supposons que E_i est muni de la structure holomorphe associée à h_i ($i = 1, 2$).

PROPOSITION 4. *Pour que $\theta(\chi)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que*

$$\chi h_1(X) = h_2(X)\,\chi \tag{3.2}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$.

Démonstration. Soit σ une section de E_1 et soit $\tau(\chi)\omega_1(\sigma) = \omega_2(\theta(\chi)\sigma)$. Comme ω_1, ω_2 et $\theta(\chi)$ sont équivariantes, il en est de même de $\tau(\chi)$, et de plus on a pour tout $f \in \mathscr{A}_1$

$$(\tau(\chi)f)(\xi_0^2) = \chi(f(\xi_0^1))$$

si $\xi_0^i = \pi_i(e, 1)$ ($i = 1, 2$). Si (3.2) a lieu, la proposition 3 montre que si σ est holomorphe, il en est de même de la section $\theta(\chi)\sigma$ de E_2 et que par conséquent $\theta(\chi)$ est holomorphe.

Réciproquement, si φ est un homomorphisme holomorphe équivariant de E_1

dans E_2, on voit de même que la restriction φ' de φ à la fibre de E_1 en x_0 est une application linéaire complexe qui commute à l'action de B, qui vérifie (3.7) et qui est telle que $\theta(\varphi')=\varphi$.

§4. Fibrés vectoriels associés à des J-représentations

4.1 Soit λ une représentation de G dans un espace vectoriel V de dimension finie. On dit que λ est une j-représentation de G s'il existe un sous-espace complexe V^- de $V\otimes\mathbb{C}$ tel que $V^-+\overline{V^-}=V\otimes\mathbb{C}$, stable par la restriction de la complexifiée de λ à B et par la restriction de la complexifiée de la différentielle de λ à $\mathfrak{g}^-$. (La première condition de stabilité est conséquence de la seconde si B est connexe.)

Il revient au même (voir [5]) de dire qu'il existe un endomorphisme J de V tel que, si l'on pose $V_0=V^-\cap V$:

(i) $J\,|\,V_0=0$

(ii) $J^2v\equiv -v$ (mod. V_0) pour tout $v\in V$

(iii) $J\lambda(b)v\equiv\lambda(b)Jv$ (mod. V_0) pour tout $v\in V$ et tout $b\in B$

(iv) $\lambda(X)v+J\lambda(X)Jv+J\lambda(JX)v-\lambda(JX)Jv\in V_0$ pour tout $X\in\mathfrak{g}$ et tout $v\in V$.

Une j-représentation λ de G dans V induit une représentation complexe ϱ de B dans $A=(V\otimes\mathbb{C})/V^-$ dont la différentielle se prolonge en une application h de $\mathfrak{g}^-$ dans $\mathfrak{gl}(A)$ appartenant à l'ensemble $\mathscr{H}(GL(A))$ (paragraphe 2).

Le G-fibré vectoriel $E=G\times_B A$ associé à ϱ, muni de la structure holomorphe G-invariante associée à h est appelé le fibré associé à la j-représentation λ de G et noté $E(\lambda)$.

Soit E un fibré vectoriel complexe différentiable sur G/B. Désignons par ε_x, $x\in G/B$, l'application de $\mathscr{S}$ dans E qui fait correspondre à toute section $\sigma\in\mathscr{S}$ sa valeur $\sigma(x)$ au point x.

DÉFINITION. On dit que E est un fibré homogène représentable si E est un G-fibré holomorphe et s'il existe un sous-espace vectoriel réel W de $\mathscr{S}$, tel que

1) W est de dimension finie
2) W est stable par l'opération naturelle de G dans $\mathscr{S}$
3) Pour tout $x\in G/B$, l'image de W par ε_x est égale à la fibre de E en x.
4) Les éléments de W sont des sections holomorphes.

On remarque que si W vérifie 2) et s'il vérifie 3) au point x_0, il vérifie 3): en effet, si $x\in G/B$, il existe $g\in G$ tel que $x=gx_0$; soit ξ un élément de la fibre de E au point x: il existe $\sigma\in W$ tel que $\sigma(x_0)=\sigma(g^{-1}x)=g^{-1}\xi$, donc $(g\cdot\sigma)\ (x)=\xi$ et $g\cdot\sigma$ est dans W d'après 2).

THÉORÈME 2. *E est un fibré homogène représentable si et seulement si E est (G-) isomorphe à $E(\lambda)$ pour une j-représentation λ de G.*

Démonstration.

A) $E(\lambda)$ est représentable: on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \xrightarrow{\pi'} & E(\lambda) \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & {\scriptstyle p'}\downarrow \\ G & \xrightarrow{q} & G/B \end{array}$$

où π' et q sont les projections canoniques. Soit alors W l'ensemble des sections $\hat{v} \in \mathcal{S}$, où v appartient à l'espace V de la j-représentation λ de G, définies par

$$\hat{v}(q(g)) = \pi'(g, \alpha'(\lambda(g^{-1})\, v))$$

α' étant la restriction à V de la projection canonique α de $V \otimes \mathbb{C}$ sur A. On a

$$\hat{v}(q(gb)) = \pi'(gb, \alpha'(\lambda(b)^{-1}\, \lambda(g)^{-1}\, v)) = \pi'(gb, \varrho(b)^{-1}\, \alpha'\, (\lambda(g)^{-1}\, v)) = \hat{v}(q(g))$$

donc $\hat{v}$ est bien définie.

W est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{S}$ de dimension finie puisque l'application qui associe $\hat{v}$ à tout élément v de V est $\mathbb{R}$-linéaire. W a la propriété 2) car si $g \in G$, $v \in V$, $(g \cdot \hat{v})\,(q(g_1)) = g\hat{v}(q(g^{-1}g_1)) = \pi'(g_1, \alpha'(\lambda(g_1)^{-1}\lambda(g)v)) = \widehat{(\lambda(g)v)}(q(g_1))$ pour tout $g_1 \in G$.

Comme α' est surjective, W vérifie également 3). Pour constater que les sections $\hat{v}$ sont holomorphes sur G/B, il suffit de le voir au voisinage de x_0 pour tout $v \in V$; en effet, si c'est le cas et si $x \in G/B$, on a

$$\hat{v}(x) = \hat{v}(gx_0) = g(g^{-1} \cdot \hat{v})\,(x_0)$$

pour un $g \in G$; or G opère dans $E(\lambda)$ par des automorphismes holomorphes, et $g^{-1} \cdot \hat{v}$ est un élément de W d'après 2). En utilisant la proposition 3, avec les notations qui s'y trouvent, il suffit en définitive de montrer que les applications $GL(A)$-équivariantes $\omega(\hat{v})$ vérifient la relation (3.1) pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$. On a $\omega(\hat{v})\ (\pi(g, a)) = a\, \alpha'(\lambda(g)^{-1}v)$ où $v \in V$, $g \in G$, $a \in GL(A)$, par définition de $\hat{v}$ et de ω. Par conséquent,

$$(g \cdot \omega(\hat{v}))\,(\xi \cdot) = \omega(\hat{v})\,(\pi(g^{-1}, 1)) = \alpha'(\lambda(g)\, v).$$

En différentiant il vient

$$\begin{aligned}(X \cdot \omega(\hat{v}))\,(\xi_0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega(\hat{v})\,(\exp - tX \cdot \xi_0) \\ &= \alpha'(\lambda(X)\, v)\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, d'où $(X \cdot \omega(\hat{v}))(\xi_0) = \alpha(\lambda^c(X)v)$ pour tout $X \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, ce qui permet de conclure par définition de h.

B) Réciproque: on suppose que E est représentable et on désigne par $h \in \mathscr{H}(GL(E_0))$ l'application de $\mathfrak{g}^-$ dans $\mathfrak{gl}(E_0)$ définissant la structure holomorphe de E, E_0 étant la fibre de E en x_0. Désignons encore par W^- le sous-espace complexe de $W \otimes \mathbb{C}$ égal au noyau de l'application ε^c de $W \otimes \mathbb{C}$ sur E_0 définie par

$$\varepsilon^c(\sigma_1 + \sqrt{-1}\sigma_2) = \varepsilon_{x_0}(\sigma_1) + i\varepsilon_{x_0}(\sigma_2)$$

$\sigma_1, \sigma_2 \in W$, où i est la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans E_0. Si λ est la représentation linéaire de G dans W induite par l'opération de G dans $\mathscr{S}$, il est clair que W^- est stable par la restriction à B de la complexifiée de λ.

LEMME. *λ est une j-représentation de G.*

Démonstration. La représentation λ est équivalente à la représentation μ de G dans le sous-espace $V = \omega(W)$ de $\mathscr{A}$. Soit β l'application de $V \otimes \mathbb{C}$ sur E_0 telle que

$$\beta(\omega(\sigma_1) + \sqrt{-1}\omega(\sigma_2)) = (\sigma_1)(\xi_0) + i\omega(\sigma_2)(\xi_0)$$

et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\omega^c} & V \otimes \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A = (W \otimes \mathbb{C})/W^- & \xrightarrow{\chi} & E_0 \end{array}$$

où α est la projection canonique et où χ est définie par $\chi\alpha = \beta\omega^c (= \varepsilon^c)$.

Comme les sections $\sigma \in W$ sont holomorphes, on a

$$\beta(\mu^c(X)\,\omega^c(\sigma)) = h(X)\,\beta(\omega^c(\sigma))$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$ et tout $\sigma \in W \otimes \mathbb{C}$ d'après la proposition 3, c'est-à-dire

$$\varepsilon^c(\lambda^c(X)\,\sigma) = h(\chi)\,\varepsilon^c(\sigma). \tag{4.1}$$

On en tire aussitôt que W^- est stable par $\mathfrak{g}^-$. Indiquons comment on finit de démontrer B): si k est la représentation de $\mathfrak{g}^-$ dans A induite par λ, i.e. telle que $k(X)\alpha(\sigma) = \alpha(\lambda^c(X)\sigma)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$, $\sigma \in W \otimes \mathbb{C}$, on a d'après (4.1)

$$\chi k(X) = h(X)\,\chi$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$. Par ailleurs, il est clair que par définition, χ commute avec les actions de B induites dans A par λ et dans E_0 par l'action de G dans E. D'après la proposition 4, χ induit donc un unique isomorphisme holomorphe G-équivariant φ de $E(\lambda)$ sur E défini par

$$\varphi\pi'(g, \alpha(\sigma)) = g\chi\alpha(\sigma)$$

pour tout $g\in G$, $\sigma\in W\otimes\mathbb{C}$.

4.2. Indiquons pour terminer le comportement fonctoriel de la correspondance $\lambda\mapsto E(\lambda)$.

A) Si f est un homomorphisme d'une j-représentation λ_1 de G dans V_1 dans une j-représentation λ_2 de G dans V_2, c'est-à-dire une application équivariante f de V_1 dans V_2 telle que $f^c(V_1^-)$ soit contenu dans V_2^-, il est clair par construction de $E(\lambda)$ que f induit un morphisme holomorphe équivariant noté $E(f)$ de $E(\lambda_1)$ dans $E(\lambda_2)$.

B) Réciproquement, si φ est un morphisme holomorphe équivariant du fibré représentable E_1 dans le fibré représentable E_2 et si ψ_i est l'isomorphisme de $E(\lambda_i)$ sur E_i $(i=1,2)$ obtenu dans le théorème 2, il existe un homomorphisme f de la j-représentation λ_1 dans la j-représentation λ_2 tel que

$$E(f)\cdot\psi_1 = \psi_2\cdot\varphi. \tag{4.2}$$

En effet, soit V_i un sous-espace vectoriel réel de l'espace de sections $\mathscr{S}_i$ de E_i $(i=1,2)$ vérifiant les conditions 1) à 4) du paragraphe 4.1. φ induit une application équivariante φ^* de $\mathscr{S}_1$ dans $\mathscr{S}_2$ définie par $\varphi^*(\sigma)=\varphi\sigma$ pour tout $\sigma\in\mathscr{S}_1$. Le sous-espace $W=\varphi^*V_1+V_2$ de $\mathscr{S}_2$ vérifie encore les conditions 1) à 4). On voit aussitôt que la restriction f de φ^* à V_1 est une application équivariante de V_1 dans W dont la complexifiée envoie V_1^- dans W^-, et que (4.2.) est satisfaite.

Remarque. On peut poursuivre l'analogie avec le cas du fibré tangent mentionnée dans l'introduction: s'il existe un volume invariant sur G/B, J. L. Koszul a calculé la forme hermitienne qu'on peut lui associer canoniquement sur G/B au moyen de la représentation adjointe de G ([2], théorème 1), et il a montré qu'elle est définie positive si et seulement si G/B est isomorphe à un domaine borné d'un $\mathbb{C}^N$. L'interprétation des j-représentations en termes de fibrés permet comme il se doit un calcul analogue: soit E un G-fibré vectoriel holomorphe de rang (complexe) n. Soient E' le G-fibré dual réel de E et $\Lambda^{2n}E'$ le G-fibré puissance extérieure $2n$-ième de E'. Supposons qu'il existe une section G-invariant Ω non nulle de $\Lambda^{2n}E'$ sur G/B et soit U un ouvert de G/B dans lequel sont définies n sections holomorphes $s_1, \ldots, s_n$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ du fibré E^* dual complexe de E canoniquement plongé dans $E'\otimes\mathbb{C}$. Il existe alors une fonction différentiable K à valeurs réelles ou imaginaires pures suivant la parité de n telle que

$$\Omega = Ks_1\wedge\cdots\wedge s_n\wedge\bar{s}_1\wedge\cdots\wedge\bar{s}_n.$$

Supposons que U est le domaine d'une carte de G/B et $z_1, \ldots, z_m$ des coordonnées holomorphes dans U. L'expression

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

est l'expression locale d'un tenseur H sur G/B qui est par définition la forme hermitienne canonique associée à E. La restriction de H aux champs de vecteurs réels est une forme bilinéaire symétrique telle que $H(IS, T)+H(S, IT)=0$, où I est le tenseur de la structure holomorphe sur G/B. Soit ψ la 1-forme invariante à gauche sur G définie pour tout $X \in \mathfrak{g}$ par $\psi(X) = -Tr_F\, Jf(X)$, F étant la fibre réelle de E en x_0 et f l'application définie dans (2.1). On peut alors démontrer (cf [5]) que l'image inverse sur G de la 2-forme alternée $H(S, IT)$ est la différentielle extérieure de ψ. Dans le cas où $E=E(\lambda)$ est associé à une j-représentation λ de G dans V on a

$$\psi(X) = Tr_{V/V_0}(\lambda(JX) - J\lambda(X)).$$

Si l'on pose $\beta(Jq(X), q(Y)) = \psi[JX, Y]$, on trouve ainsi une interprétation géométrique de la forme β sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ définie directement comme ci-dessus par Koszul dans [4] comme étant la forme hermitienne canonique de λ. Il reste à trouver des conditions géométriques de non dégénérescence de H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FRÖLICHER, A., *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen*, Math. Annalen *129* (1955), 50–95.

[2] KOSZUL, J. L., *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes*, Can. J. of Math. 7 (1955) 562–576.

[3] KOSZUL, J. L., *Lectures on fibre bundles and differential geometry* (Tata Institute, Bombay, 1960).

[4] KOSZUL, J. L., *Sur les j-algèbres propres, notes minéographiées* (Grenoble, 1968).

[5] SAILLEN, P., *Fibrés vectoriels homogènes et j-représentations, notes minéographiées* (Lausanne, 1971).

[6] TIRAO J. A., et WOLF, J. A., *Homogeneous holomorphic vector bundles*, Indiana Univ. Math. J., *20* (1970), 15–31.

Département de mathématiques EPF Lausanne, Suisse

Reçu le 4 juillet 1972