

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1972)

Artikel: Fibrés vectoriels holomorphes homogènes et J-représentations
Autor: Saillen, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36377>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Fibrés vectoriels holomorphes homogènes et J -représentations

par P. SAILLEN¹⁾

Introduction

On considère un groupe de Lie réel G connexe et un sous-groupe fermé B de G , en sorte que G/B soit muni d'une structure complexe invariante par l'action naturelle de G . On sait dans ce cas que le fibré tangent TG/B est un G -fibré vectoriel holomorphe. On peut le voir en écrivant TG/B sous forme $G \times_B (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$, variété quotient de $G \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ (\mathfrak{g} et \mathfrak{b} sont les algèbres de Lie réelles des groupes G et B) par la relation d'équivalence $(gb, x) \sim (g, b \cdot x)$, l'opération de B dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ étant induite par la représentation adjointe de G dans \mathfrak{g} . La structure complexe de G/B (donc aussi de TG/B) est caractérisée, comme on le rappelle au paragraphe 1, par l'existence d'une sous-algèbre complexe \mathfrak{g}^- de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ contenant \mathfrak{b} , ce que l'on peut encore exprimer en disant que la représentation adjointe de G est telle que la différentielle de la représentation induite de B dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ (qui est un espace vectoriel complexe) se prolonge en une représentation de \mathfrak{g}^- .

Sur ce modèle, J. L. Koszul a défini la notion de j -représentation de G ([4] et aussi [5]): c'est une représentation de G dans un espace vectoriel réel V possédant un sous-espace V_0 stable par B , en sorte que d'une part, V/V_0 ait une structure d'espace vectoriel complexe donnée, et que d'autre part la différentielle de la représentation complexe induite de B dans V/V_0 se prolonge en une représentation complexe de \mathfrak{g}^- (paragraphe 4).

Dans le but d'étudier les j -représentations de G une des premières questions qui se posent est d'en donner une interprétation géométrique, c'est-à-dire

- a) $G \times_B (V/V_0)$ est-il un G -fibré holomorphe sur G/B ?
- b) Quels sont les fibrés vectoriels qui s'obtiennent ainsi?

L'objet de ce travail est de répondre à ces questions. On peut répondre par l'affirmative à la question a) en s'appuyant sur un théorème récent de J. A. Tirao et J. A. Wolf ([6] théorème 3.6) concernant l'existence et la classification des structures holomorphes invariantes sur les G -fibrés vectoriels. Cependant les techniques employées sont peu adaptées au point de vue que nous envisageons et nous avons préféré retraiter complètement la question dans le cadre des G -fibrés principaux de groupe complexe et connexe quelconque obtenant ainsi un résultat un peu plus général (théorème 1).

¹⁾ L'auteur a fait ce travail en partie grâce à une bourse du Fond national de la recherche scientifique suisse.

Quant à la question b), nous montrons (théorème 2) que les G -fibrés vectoriels holomorphes associés à des j -représentations de G sont ceux qui possèdent un sous-espace vectoriel réel de dimension finie de l'espace des sections holomorphes, qui est stable par G et cependant assez gros pour que les sections qui le constituent engendrent la fibre en chaque point. Dans le cas du fibré TG/B , un tel espace est par exemple formé par les projections sur G/B des champs de vecteurs différentiables invariants à droite sur G .

Pour une étude plus détaillée des j -représentations sur la base de cette interprétation géométrique, voir [5].

Nous avons largement bénéficié de l'aide du professeur J. L. Koszul qui nous a également posé ces questions. Nous l'en remercions vivement.

Notations. Si V est un espace vectoriel réel et si $V \otimes \mathbb{C} = V \oplus \sqrt{-1}V$ est son complexifié, \bar{A} est le conjugué par rapport à V du sous-espace complexe A de $V \otimes \mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des $v - \sqrt{-1}w$ tels que $v + \sqrt{-1}w \in A$. Nous disons parfois simplement «le conjugué de A ». Si f est une application \mathbb{R} -linéaire de V dans W , f^c est l'application \mathbb{C} -linéaire de $V \otimes \mathbb{C}$ dans $W \otimes \mathbb{C}$ définie par $f^c(v_1 + \sqrt{-1}v_2) = f(v_1) + \sqrt{-1}f(v_2)$.

Nous désignons les groupes de Lie par des majuscules romaines G , etc. et les algèbres de Lie toujours considérées réelles par les minuscules gothiques correspondantes.

Si M et N sont deux variétés dans lesquelles un groupe G opère, une application f de M dans N est G -équivariante ou simplement équivariante si elle commute aux actions de G .

Un G -fibré vectoriel (holomorphe) est un espace fibré vectoriel (holomorphe) dans lequel G opère par des automorphismes de fibrés vectoriels (holomorphes).

Nous désignons par la même lettre une application différentiable (i.e. C^∞) entre variétés et son application tangente.

§1. Rappel d'un théorème de Frölicher ([1] p. 91, [2] p. 564)

Soient G un groupe de Lie réel et connexe et B un sousgroupe fermé de G (non nécessairement connexe). Pour qu'il existe sur G/B une structure de variété analytique complexe invariante par l'opération naturelle de G , il faut et il suffit qu'il existe un endomorphisme J de l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de G vérifiant les conditions suivantes:

- (i) $JX\mathfrak{b} = \{0\}$
- (ii) $J^2X \equiv -X \pmod{\mathfrak{b}}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$
- (iii) $J Adb \cdot X \equiv Adb \cdot JX \pmod{\mathfrak{b}}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $b \in B$
- (iv) $[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \in \mathfrak{b}$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

(Si B est connexe, (iii) est conséquence de (iv).) De (i) et (ii) résulte que $J(J^2 + 1) = 0$. On vérifie sans peine que (iv) équivaut à la condition suivante:

(iv) le noyau \mathfrak{g}^- de $J^c(J^c + \sqrt{-1})$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

En outre, les propriétés de J impliquent $\mathfrak{g}^- + \overline{\mathfrak{g}^-} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, $\overline{\mathfrak{g}^-} \cap \mathfrak{g}^- = \mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}$ ou encore $\mathfrak{g}^- \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{b}$, et $Ad_{b^c} \cdot \mathfrak{g}^- \subset \mathfrak{g}^-$ pour tout $b \in B$. Réciproquement, si on donne une sous-algèbre \mathfrak{g}^- de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions qui précèdent, on peut construire un endomorphisme J de \mathfrak{g} vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv) en convenant que la restriction de J à \mathfrak{b} est nulle et que J^c est la multiplication par $-\sqrt{-1}$ sur un supplémentaire de $\mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}$ dans \mathfrak{g}^- . Tous les J que l'on obtient ainsi définissent la même structure complexe sur G/B .

Dans le cas où $B = \{e\}$ (e élément neutre G) et où G est un groupe de Lie complexe, en choisissant J égal à la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de G , on voit que $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^- \oplus \overline{\mathfrak{g}^-}$ et que $\overline{\mathfrak{g}^-}$ est un idéal de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

Pour plus de détails sur ces correspondances voir [5].

§2. Structures holomorphes sur les fibrés principaux homogènes

2.1. Dorénavant, le groupe de Lie réel et connexe G , le sousgroupe fermé B et la structure complexe invariante sur G/B (supposée exister) sont fixés.

Soit ϱ un homomorphisme analytique de B dans un groupe de Lie complexe et connexe S . Le but du présent paragraphe est l'étude des structures holomorphes invariantes sur l'espace fibré principal homogène $P = (G \times S)/H$ de base G/B , H étant le sous-groupe de $G \times S$ formé des couples $(B, \varrho(b))$ tels que $b \in B$. La projection p de P sur G/B est l'application qui rend commutatif le diagramme.

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \xrightarrow{\pi} & P \\ p_{r_1} \downarrow & & p \downarrow \\ G & \xrightarrow{q} & G/B \end{array}$$

où π et q sont les projections canoniques. Contrairement à l'habitude, S opère à gauche dans P .

Supposons qu'il existe une application \mathbb{R} -linéaire h de \mathfrak{g}^- dans \mathfrak{s} telle que

- 1) La restriction de h à \mathfrak{b} coïncide avec la différentielle de ϱ
- 2) $h[X, Y] = [h(X), h(Y)]$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}^-$
- 3) $h(Ad_{b^c} \cdot X) = \varrho(b) h(X) \varrho(b)^{-1}$ pour tout $b \in B, X \in \mathfrak{g}^-$
- 4) $h(\sqrt{-1}X) = Jh(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$

où J est la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans \mathfrak{s} .

Définissons un endomorphisme noté encore J de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}$ en posant

$$J(X, a) = (JX, Ja - Jf(X)) \tag{2.1}$$

$$f(X) = h(1 + \sqrt{-1}J)(X)$$

(on voit facilement que si J est l'endomorphisme de \mathfrak{g} qui représente la structure complexe de G/B alors $1 + \sqrt{-1}J$ envoie \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}^- .)

PROPOSITION 1. *J définit sur P une structure d'espace fibré holomorphe $G \times S$ -invariante.*

Démonstration. Le noyau de $J^c (J^c + \sqrt{-1})$ est

$$(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- = \{(X, a + h(X)) \mid X \in \mathfrak{g}^- \text{ et } a \in \mathfrak{s}^-\}.$$

On vérifie sans peine que $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ est un sous-espace complexe de $(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) \times (\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C})$ grâce à 4). De 1) et 4) résulte que l'intersection de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ avec son conjugué est égale à la complexifiée $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ de l'algèbre de Lie réelle \mathfrak{h} de H . En effet, soient $X, Y \in \mathfrak{g}^-$ et $a, b \in \mathfrak{s}^-$. Si $(X, a + h(X))$ est égal à l'élément $(\bar{Y}, \bar{b} + h(\bar{Y}))$ du conjugué de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$, d'une part $X = \bar{Y}$ appartient à $\mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}$ et on peut écrire $X = \bar{Y} = X_1 + \sqrt{-1}X_2$ où $X_1, X_2 \in \mathfrak{b}$ et d'autre part, $a - \bar{b} = -h(X) + h(Y)$; mais $a = a_1 + \sqrt{-1}Ja_1$ et $b = b_1 + \sqrt{-1}Jb_1$ avec a_1 et b_1 dans \mathfrak{s} , d'où $a - \bar{b} = -2Jh(X_2)$ d'après la condition 4) sur h . On en tire $a_1 = -b_1 = -Jh(X_2)$ d'où $a + h(X) = h(X_1) + \sqrt{-1}h(X_2)$ ce qui montre que l'intersection est contenue dans $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ d'après la condition 1). L'autre inclusion est immédiate.

Sachant que $\mathfrak{g}^- + \bar{\mathfrak{g}}^- = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ et de même pour \mathfrak{s}^- , des raisons évidentes de dimension montrent que la somme de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ et de son conjugué est $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}) \otimes \mathbb{C}$.

Finalement, 2) implique que $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ est une sous-algèbre et 3) montre que

$$\left. \begin{aligned} JAd(b, \varrho(b)) \cdot (X, a) &= J(Adb \cdot X, \varrho(b) a \varrho(b)^{-1}) \\ &\equiv (Adb \cdot JX, \varrho(b) (Ja - Jf(X)) \varrho(b)) \pmod{\mathfrak{h}} \\ \text{pour tout } b \in B, X \in \mathfrak{g}, a \in \mathfrak{s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Ainsi, le théorème de Fröhlicher rappelé au paragraphe 1 permet de conclure que J définit sur $(G \times S)/H$ une structure complexe invariante par $G \times S$.

Reste à voir que les applications analytiques

$$S \xrightarrow{\lambda} P \xrightarrow{p} G/B$$

où $\lambda(s) = \pi(e, s)$, sont compatibles avec les structures complexes dont sont munis S, P et G/B . Mais ceci est conséquence des inclusions $\lambda^c(\mathfrak{s}^-) \subset \pi^c(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ et $pr_1(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- = \mathfrak{g}^-$.

La proposition 1 permet de définir une application Φ de l'ensemble $\mathcal{H}(S)$ des applications \mathbb{R} -linéaires de \mathfrak{g}^- dans \mathfrak{s} vérifiant 1), 2), 3) et 4) dans l'ensemble des structures de fibré holomorphe G -invariantes sur P , via la formule (2.1).

THÉORÈME 1. Φ est bijective.

A) Φ est surjective: la structure complexe de la variété P , étant invariante par l'action de $G \times S$, elle détermine comme on l'a rappelé au paragraphe 1 une sous-algèbre complexe $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}) \otimes \mathbb{C}$. Comme λ et pr_1 sont des applications holomorphes, on a les inclusions

$$\{0\} \times \mathfrak{s}^- \subset (\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- \subset \mathfrak{g}^- \times (\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}). \quad (2.3)$$

L'espace fibré P possède par ailleurs une connexion différentiable dont la forme de connexion γ sur P à valeurs dans \mathfrak{s} est de type $(1, 0)$ (au sens des formes différentielles de type (p, q) sur une variété analytique complexe) (voir [3] pages 111–115). γ induit une scission notée encore $\gamma: \mathfrak{g} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{s} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \times \mathfrak{s} \xrightarrow{pr_1} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

telle que $\gamma(\mathfrak{h}) = \{0\}$ et $\gamma^c(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- \subset \mathfrak{s}^-$. Comme $\lambda\gamma$ est la transformation identique de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}$, on a $\gamma(X, 0) = \gamma(X, b) - b$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $b \in \mathfrak{s}$; ainsi, si k est l'application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{s} définie par $k(X) = \gamma(X, 0)$, on a $\gamma(X, b) = k(X) + b$. Soit t l'homomorphisme \mathbb{R} -linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$ dans \mathfrak{s} défini par $t(a + \sqrt{-1}b) = -a - Jb$, $a, b \in \mathfrak{s}$ et prenons pour h la restriction de tk^c à \mathfrak{g}^- . Il est clair que h vérifie les conditions 1) et 4). On montre ensuite

$$(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- = \{(X, a - k^c(X)) \mid X \in \mathfrak{g}^- \text{ et } a \in \mathfrak{s}^-\}. \quad (2.4)$$

L'inclusion du membre de gauche dans celui de droite résulte aussitôt de (2.3) et du fait que $\gamma^c(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- \subset \mathfrak{s}^-$. Quant à l'autre inclusion, soit $(X, a - k^c(X))$ tel que $X \in \mathfrak{g}^-$ et $a \in \mathfrak{s}^-$; puisque $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s}) \otimes \mathbb{C}$ est somme de $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ et de son conjugué, il existe des éléments X_1 dans \mathfrak{g}^- , X_2 dans $\overline{\mathfrak{g}^-}$, a_1 dans \mathfrak{s}^- et a_2 dans $\overline{\mathfrak{s}^-}$ tels que $(X_1, a_1 - k^c(X_1))$ appartienne à $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^-$ et $(X_2, a_2 - k^c(X_2))$ au conjugué et dont la somme est $(X, a - k^c(X))$. On en déduit que $X_2 \in \mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}$ et que $a_2 = 0$; comme $Z \in \mathfrak{b}$ implique $-k(Z) = \rho(Z)$, il vient finalement $(X_2, a_2 - k^c(X_2)) = (X_2, \rho^c(X_2)) \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ d'où (2.4).

Si X est un élément de \mathfrak{g}^- , $k^c(X) + h(X) = (1+t)(k^c(X))$ est un élément de \mathfrak{s}^- , en considérant \mathfrak{s} comme un sous-espace de $\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$, car pour tout a, b dans \mathfrak{s} , $(1+t)(a + \sqrt{-1}b) = \sqrt{-1}(b + \sqrt{-1}Jb)$.

Ainsi, en vertu de (2.4),

$$(\mathfrak{g} \times \mathfrak{s})^- = \{(X, a + h(X)) \mid X \in \mathfrak{g}^-, a \in \mathfrak{s}^-\}.$$

De cette dernière égalité et du fait que $\mathfrak{s}^- \cap \mathfrak{s} = \{0\}$ on déduit sans peine que h vérifie 2) et que l'endomorphisme J défini par (2.1) représente la structure complexe de P . La propriété 3) de h résulte alors de la propriété (2.2) que possède J .

B) Φ est injective. Si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathcal{H}(S)$ tels que $\Phi(h_1) = \Phi(h_2)$, donc en particulier tels que pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$ et tout $a \in \mathfrak{s}^-$ il existe $Y \in \mathfrak{g}^-$ et $b \in \mathfrak{s}^-$ tels que $(X, a + h_1(X)) = (Y, b + h_2(Y))$, alors $X = Y$ et $a - b = h_2(X) - h_1(X)$, d'où $h_1 = h_2$.

2.2. Supposons maintenant que $S = GL(F)$ est le groupe linéaire complexe des automorphismes d'un espace vectoriel complexe F de dimension finie. Soit \mathcal{A} l'espace vectoriel complexe des applications $f: GL(F) \rightarrow F$ f -équivariantes de P dans F ($GL(F)$ opérant canoniquement dans F). On définit une représentation linéaire complexe de G dans \mathcal{A} en posant $(gf)(\xi) = f(g^{-1}\xi)$, $g \in G$, $\xi \in P$.

Désignons par Xf ($X \in \mathfrak{g}$) la différentielle de cette représentation et supposons que P est muni de la structure holomorphe associée à $h \in \mathcal{H}(S)$. Si $\xi_0 = \pi(e, 1)$ où 1 est l'élément neutre de $GL(F)$ on a :

PROPOSITION 2. *f est holomorphe au voisinage de ξ_0 si et seulement si*

$$(Xf)(\xi_0) = h(X)f(\xi_0) \quad (2.6)$$

pour tout X dans \mathfrak{g}^- .

Démonstration. Désignons par

$$\mu: G \times GL(F) \times P \rightarrow P$$

la loi d'opération de $G \times GL(F)$ dans P . Les éléments f de \mathcal{A} satisfont la relation $f(\mu(g, a, \xi)) = a(g^{-1}f)(\xi)$ par définition de l'opération de G dans \mathcal{A} . En différentiant cette relation au point $(e, 1, \xi_0)$ et en complexifiant les espaces tangents on trouve

$$a(f(\xi_0)) - (Xf)(\xi_0) = f^c(\mu^c(X, a, \xi_0))$$

où $a \in \mathfrak{gl}(F) \otimes \mathbb{C}$, $X \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Si f est holomorphe au voisinage de ξ_0 , on déduit de cette relation $f^c(\mu^c(X, h(X), \xi_0)) = 0$ pour $X \in \mathfrak{g}^-$ puisque $\mu^c(X, h(X), \xi_0)$ appartient alors à $(T_{\xi_0}P)^- = \pi^c(\mathfrak{g} \times \mathfrak{gl}(F))^-$.

Réciproquement, si (2.6) a lieu, il suffit de vérifier que $f^c(\mu^c(0, a, \xi_0)) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{gl}(F)^-$ pour conclure. Or $f^c(\mu^c(0, a, \xi_0)) = af(\xi_0)$ et le membre de droite est nul puisque a est de la forme $a_1 + \sqrt{-1}Ja_1$, $a_1 \in \mathfrak{gl}(F)$.

§3. G -fibrés vectoriels holomorphes

3.1 Soit E un G -fibré vectoriel complexe sur G/B , c'est-à-dire un fibré vectoriel sur G/B associé à une représentation linéaire ρ de B dans un espace vectoriel complexe F de dimension finie. E est associé à $P = (G \times GL(F))/H$ au moyen de la fibration $t: P \times F \rightarrow E$ définie par $t(\pi(g, a), v) = g \cdot a^{-1}v$ pour tout $g \in G$, $a \in GL(F)$, $v \in F$; (voir

[3] page 36). Ainsi le théorème 1 permet de conclure que, par transport au moyen de t , les structures de G -fibré holomorphe sur E correspondent biunivoquement aux éléments h de $\mathcal{H}(GL(F))$. Supposons donc que E est muni de la structure holomorphe associée à h . Désignons par \mathcal{S} l'espace des sections différentiables de E . On définit une application bijective ω de \mathcal{S} dans \mathcal{A} en convenant que si $\sigma \in \mathcal{S}$, $\omega(\sigma)$ est l'application telle que $t(\xi, \omega(\sigma)(\xi)) = \sigma(p(\xi))$ pour tout $\xi \in P$ ([3] pages 90–91). L'opération naturelle de G dans G/B et l'opération de G dans E induisent une représentation \mathbb{C} -linéaire de G dans \mathcal{S} : $g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$ pour tout $g \in G$. On voit facilement que ω est équivariante. Ainsi, en appliquant la proposition 2, on obtient:

PROPOSITION 3. *Une section différentiable σ de E est holomorphe si et seulement si*

$$(X\omega(\sigma))(\xi_0) = h(X)\omega(\sigma)(\xi_0) \tag{3.1}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$.

3.2. Soient ϱ_1 et ϱ_2 deux représentations linéaires de B dans les espaces vectoriels complexes de dimension finie F_1 et F_2 , dont les différentielles se prolongent respectivement en les représentations h_1 et h_2 de \mathfrak{g}^- ; si χ est un homomorphisme complexe de F_1 dans F_2 tel que $\chi\varrho_1(b) = \varrho_2(b)\chi$ pour tout $b \in B$, on définit un morphisme G -équivariant $\theta(\chi)$ du fibré E_1 associé à ϱ_1 dans le fibré E_2 associé à ϱ_2 en posant

$$\theta(\chi)\pi'_1(g, v) = \pi'_2(g, \chi(v))$$

pour tout $g \in G$, $v \in F_1$, π'_i désignant la projection canonique de $G \times F_i$ sur E_i ($i=1, 2$). Supposons que E_i est muni de la structure holomorphe associée à h_i ($i=1, 2$).

PROPOSITION 4. *Pour que $\theta(\chi)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que*

$$\chi h_1(X) = h_2(X)\chi \tag{3.2}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$.

Démonstration. Soit σ une section de E_1 et soit $\tau(\chi)\omega_1(\sigma) = \omega_2(\theta(\chi)\sigma)$. Comme ω_1 , ω_2 et $\theta(\chi)$ sont équivariantes, il en est de même de $\tau(\chi)$, et de plus on a pour tout $f \in \mathcal{A}_1$

$$(\tau(\chi)f)(\xi_0^2) = \chi(f(\xi_0^1))$$

si $\xi_0^i = \pi_i(e, 1)$ ($i=1, 2$). Si (3.2) a lieu, la proposition 3 montre que si σ est holomorphe, il en est de même de la section $\theta(\chi)\sigma$ de E_2 et que par conséquent $\theta(\chi)$ est holomorphe.

Réciproquement, si φ est un homomorphisme holomorphe équivariant de E_1

dans E_2 , on voit de même que la restriction φ' de φ à la fibre de E_1 en x_0 est une application linéaire complexe qui commute à l'action de B , qui vérifie (3.7) et qui est telle que $\theta(\varphi') = \varphi$.

§4. Fibrés vectoriels associés à des J -représentations

4.1 Soit λ une représentation de G dans un espace vectoriel V de dimension finie. On dit que λ est une j -représentation de G s'il existe un sous-espace complexe V^- de $V \otimes \mathbb{C}$ tel que $V^- + \overline{V^-} = V \otimes \mathbb{C}$, stable par la restriction de la complexifiée de λ à B et par la restriction de la complexifiée de la différentielle de λ à \mathfrak{g}^- . (La première condition de stabilité est conséquence de la seconde si B est connexe.)

Il revient au même (voir [5]) de dire qu'il existe un endomorphisme J de V tel que, si l'on pose $V_0 = V^- \cap V$:

- (i) $J|_{V_0} = 0$
- (ii) $J^2 v \equiv -v \pmod{V_0}$ pour tout $v \in V$
- (iii) $J\lambda(b)v \equiv \lambda(b)Jv \pmod{V_0}$ pour tout $v \in V$ et tout $b \in B$
- (iv) $\lambda(X)v + J\lambda(X)Jv + J\lambda(JX)v - \lambda(JX)Jv \in V_0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et tout $v \in V$.

Une j -représentation λ de G dans V induit une représentation complexe ρ de B dans $A = (V \otimes \mathbb{C})/V^-$ dont la différentielle se prolonge en une application h de \mathfrak{g}^- dans $\mathfrak{gl}(A)$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}(GL(A))$ (paragraphe 2).

Le G -fibré vectoriel $E = G \times_B A$ associé à ρ , muni de la structure holomorphe G -invariante associée à h est appelé le fibré associé à la j -représentation λ de G et noté $E(\lambda)$.

Soit E un fibré vectoriel complexe différentiable sur G/B . Désignons par ε_x , $x \in G/B$, l'application de \mathcal{S} dans E qui fait correspondre à toute section $\sigma \in \mathcal{S}$ sa valeur $\sigma(x)$ au point x .

DÉFINITION. On dit que E est un fibré homogène représentable si E est un G -fibré holomorphe et s'il existe un sous-espace vectoriel réel W de \mathcal{S} , tel que

- 1) W est de dimension finie
- 2) W est stable par l'opération naturelle de G dans \mathcal{S}
- 3) Pour tout $x \in G/B$, l'image de W par ε_x est égale à la fibre de E en x .
- 4) Les éléments de W sont des sections holomorphes.

On remarque que si W vérifie 2) et s'il vérifie 3) au point x_0 , il vérifie 3): en effet, si $x \in G/B$, il existe $g \in G$ tel que $x = gx_0$; soit ξ un élément de la fibre de E au point x : il existe $\sigma \in W$ tel que $\sigma(x_0) = \sigma(g^{-1}x) = g^{-1}\xi$, donc $(g \cdot \sigma)(x) = \xi$ et $g \cdot \sigma$ est dans W d'après 2).

THÉORÈME 2. E est un fibré homogène représentable si et seulement si E est (G -)isomorphe à $E(\lambda)$ pour une j -représentation λ de G .

Démonstration.

A) $E(\lambda)$ est représentable: on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times A & \xrightarrow{\pi'} & E(\lambda) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & p' \downarrow \\ G & \xrightarrow{q} & G/B \end{array}$$

où π' et q sont les projections canoniques. Soit alors W l'ensemble des sections $\hat{v} \in \mathcal{S}$, où v appartient à l'espace V de la j -représentation λ de G , définies par

$$\hat{v}(q(g)) = \pi'(g, \alpha'(\lambda(g^{-1})v))$$

α' étant la restriction à V de la projection canonique α de $V \otimes \mathbb{C}$ sur A . On a

$$\hat{v}(q(gb)) = \pi'(gb, \alpha'(\lambda(b)^{-1} \lambda(g)^{-1} v)) = \pi'(gb, \varrho(b)^{-1} \alpha'(\lambda(g)^{-1} v)) = \hat{v}(q(g))$$

donc \hat{v} est bien définie.

W est un sous-espace vectoriel réel de \mathcal{S} de dimension finie puisque l'application qui associe \hat{v} à tout élément v de V est \mathbb{R} -linéaire. W a la propriété 2) car si $g \in G$, $v \in V$, $(g \cdot \hat{v})(q(g_1)) = g \hat{v}(q(g^{-1}g_1)) = \pi'(g_1, \alpha'(\lambda(g_1)^{-1} \lambda(g)v)) = (\lambda(g)v) \hat{v}(q(g_1))$ pour tout $g_1 \in G$.

Comme α' est surjective, W vérifie également 3). Pour constater que les sections \hat{v} sont holomorphes sur G/B , il suffit de le voir au voisinage de x_0 pour tout $v \in V$; en effet, si c'est le cas et si $x \in G/B$, on a

$$\hat{v}(x) = \hat{v}(gx_0) = g(g^{-1} \cdot \hat{v})(x_0)$$

pour un $g \in G$; or G opère dans $E(\lambda)$ par des automorphismes holomorphes, et $g^{-1} \cdot \hat{v}$ est un élément de W d'après 2). En utilisant la proposition 3, avec les notations qui s'y trouvent, il suffit en définitive de montrer que les applications $GL(A)$ -équivariantes $\omega(\hat{v})$ vérifient la relation (3.1) pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$. On a $\omega(\hat{v})(\pi(g, a)) = a \alpha'(\lambda(g)^{-1}v)$ où $v \in V$, $g \in G$, $a \in GL(A)$, par définition de \hat{v} et de ω . Par conséquent,

$$(g \cdot \omega(\hat{v}))(\xi \cdot) = \omega(\hat{v})(\pi(g^{-1}, 1)) = \alpha'(\lambda(g)v).$$

En différentiant il vient

$$\begin{aligned} (X \cdot \omega(\hat{v}))(\xi_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(\hat{v})(\exp - tX \cdot \xi_0) \\ &= \alpha'(\lambda(X)v) \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, d'où $(X \cdot \omega(\hat{v}))(\xi_0) = \alpha(\lambda^c(X)v)$ pour tout $X \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, ce qui permet de conclure par définition de h .

B) Réciproque: on suppose que E est représentable et on désigne par $h \in \mathcal{H}(GL(E_0))$ l'application de \mathfrak{g}^- dans $\mathfrak{gl}(E_0)$ définissant la structure holomorphe de E , E_0 étant la fibre de E en x_0 . Désignons encore par W^- le sous-espace complexe de $W \otimes \mathbb{C}$ égal au noyau de l'application ε^c de $W \otimes \mathbb{C}$ sur E_0 définie par

$$\varepsilon^c(\sigma_1 + \sqrt{-1}\sigma_2) = \varepsilon_{x_0}(\sigma_1) + i\varepsilon_{x_0}(\sigma_2)$$

$\sigma_1, \sigma_2 \in W$, où i est la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans E_0 . Si λ est la représentation linéaire de G dans W induite par l'opération de G dans \mathcal{S} , il est clair que W^- est stable par la restriction à B de la complexifiée de λ .

LEMME. λ est une j -représentation de G .

Démonstration. La représentation λ est équivalente à la représentation μ de G dans le sous-espace $V = \omega(W)$ de \mathcal{A} . Soit β l'application de $V \otimes \mathbb{C}$ sur E_0 telle que

$$\beta(\omega(\sigma_1) + \sqrt{-1}\omega(\sigma_2)) = (\sigma_1)(\xi_0) + i\omega(\sigma_2)(\xi_0)$$

et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\omega^c} & V \otimes \mathbb{C} \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow \\ A = (W \otimes \mathbb{C})/W^- & \xrightarrow{\chi} & E_0 \end{array}$$

où α est la projection canonique et où χ est définie par $\chi\alpha = \beta\omega^c (= \varepsilon^c)$.

Comme les sections $\sigma \in W$ sont holomorphes, on a

$$\beta(\mu^c(X)\omega^c(\sigma)) = h(X)\beta(\omega^c(\sigma))$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$ et tout $\sigma \in W \otimes \mathbb{C}$ d'après la proposition 3, c'est-à-dire

$$\varepsilon^c(\lambda^c(X)\sigma) = h(\chi)\varepsilon^c(\sigma). \quad (4.1)$$

On en tire aussitôt que W^- est stable par \mathfrak{g}^- . Indiquons comment on finit de démontrer B): si k est la représentation de \mathfrak{g}^- dans A induite par λ , i.e. telle que $k(X)\alpha(\sigma) = \alpha(\lambda^c(X)\sigma)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$, $\sigma \in W \otimes \mathbb{C}$, on a d'après (4.1)

$$\chi k(X) = h(X)\chi$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}^-$. Par ailleurs, il est clair que par définition, χ commute avec les actions de B induites dans A par λ et dans E_0 par l'action de G dans E . D'après la

proposition 4, χ induit donc un unique isomorphisme holomorphe G -équivariant φ de $E(\lambda)$ sur E défini par

$$\varphi\pi'(g, \alpha(\sigma)) = g\chi\alpha(\sigma)$$

pour tout $g \in G, \sigma \in W \otimes \mathbb{C}$.

4.2. Indiquons pour terminer le comportement fonctoriel de la correspondance $\lambda \mapsto E(\lambda)$.

A) Si f est un homomorphisme d'une j -représentation λ_1 de G dans V_1 dans une j -représentation λ_2 de G dans V_2 , c'est-à-dire une application équivariante f de V_1 dans V_2 telle que $f^c(V_1^-)$ soit contenu dans V_2^- , il est clair par construction de $E(\lambda)$ que f induit un morphisme holomorphe équivariant noté $E(f)$ de $E(\lambda_1)$ dans $E(\lambda_2)$.

B) Réciproquement, si φ est un morphisme holomorphe équivariant du fibré représentable E_1 dans le fibré représentable E_2 et si ψ_i est l'isomorphisme de $E(\lambda_i)$ sur E_i ($i=1, 2$) obtenu dans le théorème 2, il existe un homomorphisme f de la j -représentation λ_1 dans la j -représentation λ_2 tel que

$$E(f) \cdot \psi_1 = \psi_2 \cdot \varphi. \quad (4.2)$$

En effet, soit V_i un sous-espace vectoriel réel de l'espace de sections \mathcal{S}_i de E_i ($i=1, 2$) vérifiant les conditions 1) à 4) du paragraphe 4.1. φ induit une application équivariante φ^* de \mathcal{S}_1 dans \mathcal{S}_2 définie par $\varphi^*(\sigma) = \varphi\sigma$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_1$. Le sous-espace $W = \varphi^*V_1 + V_2$ de \mathcal{S}_2 vérifie encore les conditions 1) à 4). On voit aussitôt que la restriction f de φ^* à V_1 est une application équivariante de V_1 dans W dont la complexifiée envoie V_1^- dans W^- , et que (4.2.) est satisfaite.

Remarque. On peut poursuivre l'analogie avec le cas du fibré tangent mentionnée dans l'introduction: s'il existe un volume invariant sur G/B , J. L. Koszul a calculé la forme hermitienne qu'on peut lui associer canoniquement sur G/B au moyen de la représentation adjointe de G ([2], théorème 1), et il a montré qu'elle est définie positive si et seulement si G/B est isomorphe à un domaine borné d'un \mathbb{C}^N . L'interprétation des j -représentations en termes de fibrés permet comme il se doit un calcul analogue: soit E un G -fibré vectoriel holomorphe de rang (complexe) n . Soient E' le G -fibré dual réel de E et $\Lambda^{2n}E'$ le G -fibré puissance extérieure $2n$ -ième de E' . Supposons qu'il existe une section G -invariant Ω non nulle de $\Lambda^{2n}E'$ sur G/B et soit U un ouvert de G/B dans lequel sont définies n sections holomorphes s_1, \dots, s_n linéairement indépendantes sur \mathbb{C} du fibré E^* dual complexe de E canoniquement plongé dans $E' \otimes \mathbb{C}$. Il existe alors une fonction différentiable K à valeurs réelles ou imaginaires pures suivant la parité de n telle que

$$\Omega = Ks_1 \wedge \dots \wedge s_n \wedge \bar{s}_1 \wedge \dots \wedge \bar{s}_n.$$

Supposons que U est le domaine d'une carte de G/B et z_1, \dots, z_m des coordonnées holomorphes dans U . L'expression

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \log K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

est l'expression locale d'un tenseur H sur G/B qui est par définition la forme hermitienne canonique associée à E . La restriction de H aux champs de vecteurs réels est une forme bilinéaire symétrique telle que $H(IS, T) + H(S, IT) = 0$, où I est le tenseur de la structure holomorphe sur G/B . Soit ψ la 1-forme invariante à gauche sur G définie pour tout $X \in \mathfrak{g}$ par $\psi(X) = -\text{Tr}_F Jf(X)$, F étant la fibre réelle de E en x_0 et f l'application définie dans (2.1). On peut alors démontrer (cf [5]) que l'image inverse sur G de la 2-forme alternée $H(S, IT)$ est la différentielle extérieure de ψ . Dans le cas où $E = E(\lambda)$ est associé à une j -représentation λ de G dans V on a

$$\psi(X) = \text{Tr}_{V/V_0}(\lambda(JX) - J\lambda(X)).$$

Si l'on pose $\beta(Jq(X), q(Y)) = \psi[JX, Y]$, on trouve ainsi une interprétation géométrique de la forme β sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ définie directement comme ci-dessus par Koszul dans [4] comme étant la forme hermitienne canonique de λ . Il reste à trouver des conditions géométriques de non dégénérescence de H .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FRÖLICHER, A., *Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen*, Math. Annalen 129 (1955), 50-95.
- [2] KOSZUL, J. L., *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes*, Can. J. of Math. 7 (1955) 562-576.
- [3] KOSZUL, J. L., *Lectures on fibre bundles and differential geometry* (Tata Institute, Bombay, 1960).
- [4] KOSZUL, J. L., *Sur les j -algèbres propres, notes minéographiées* (Grenoble, 1968).
- [5] SAILLEN, P., *Fibrés vectoriels homogènes et j -représentations, notes minéographiées* (Lausanne, 1971).
- [6] TIRAO J. A., et WOLF, J. A., *Homogeneous holomorphic vector bundles*, Indiana Univ. Math. J., 20 (1970), 15-31.

Département de mathématiques EPF Lausanne, Suisse

Reçu le 4 juillet 1972