Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1972)

Artikel: Konforme und metrische Kreise auf vollständigen Flächen

Autor: Huber, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36375

Konforme und metrische Kreise auf vollständigen Flächen[1])

von ALFRED HUBER, Zürich

1. Einleitung

Sei $\mathfrak{F}$ einer zur Ebene homoeomorphe abstrakte Fläche (zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit) mit folgenden Eigenschaften:

(A) *$\mathfrak{F}$ ist nach der Definition von Hopf und Rinow* [6] *vollständig;*

(B) *die Gausssche Krümmung K ist auf $\mathfrak{F}$ absolut integrierbar, d.h.*

$$\iint_{\mathfrak{F}} |K| \, dA < \infty ,$$

wobei dA das Flächenelement auf $\mathfrak{F}$ bezeichnet;

(C) *die Curvatura integra von $\mathfrak{F}$ ist kleiner als 2π,*

$$C := \iint_{\mathfrak{F}} K \, dA < 2\pi .$$

Nach einem bekannten Satz von Cohn-Vossen [4] folgt aus Voraussetzung (A) bereits, dass $C \leqq 2\pi$; durch Voraussetzung (C) wird der Fall $C = 2\pi$ ausgeschlossen.

Wegen Voraussetzung (B) ist die $\mathfrak{F}$ zugrundeliegende Riemannsche Fläche vom parabolischen Typ (Blanc und Fiala [3]). Also kann $\mathfrak{F}$ erzeugt werden durch ein Linienelement der Form

$$\exp\{u(x, y)\} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \exp\{u(z)\} \, |dz| ,$$

wobei u eine in der ganzen endlichen z-Ebene ($z = x + iy$) definierte Funktion bezeichnet. Dabei berechnet sich die Gausssche Krümmung nach der Formel

$$K = -\frac{\Delta u}{\exp(2u)} \qquad \left(\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

und es ist

$$K \, dA = -\Delta u \, dx \, dy .$$

Die Voraussetzungen (A), (B), (C) über die Fläche $\mathfrak{F}$ sind somit aequivalent mit folgenden Annahmen über die Funktion u:

---

[1]) Zum Teil verfasst während eines von der National Science Foundation unterstützten Aufenthaltes an der University of Washington in Seattle.

(a) *Für jeden lokal rektifizierbaren, ins Unendliche führenden Weg σ gilt*

$$\int_\sigma \exp\{u(z)\}\,|dz| = \infty;$$

(b) *es ist*

$$\iint_{z\text{-Ebene}} |\Delta u|\,dx\,dy < \infty \qquad (z = x + iy);$$

(c) *es ist*

$$\iint_{z\text{-Ebene}} \Delta u\,dx\,dy > -2\pi.$$

Das Linienelement exp $\{u(z)\}$ $|dz|$ erzeugt in der komplexen Ebene die Metrik

$$\varrho(z_1, z_2) := \inf \int_\gamma \exp\{u(z)\}\,|dz|.$$

Dabei ist γ über alle z_1 mit z_2 verbindenden rektifizierbaren Kurven zu variieren. Wir definieren

$$L(r) := \max_{|z|=r} \varrho(0, z), \tag{1}$$

$$l(r) := \min_{|z|=r} \varrho(0, z). \tag{2}$$

Bekanntlich besitzen isotherme Parametersysteme die Eigenschaft, dass infinitesimalen Kreisen in der Parameterebene infinitesimale Kreise auf der Fläche entsprechen, d.h. es ist

$$\lim_{r \to 0} \frac{L(r)}{l(r)} = 1.$$

In der vorliegenden Arbeit beweisen wir, dass unter den hier gemachten Annahmen dasselbe auch für grosse Kreise gültig ist:

SATZ 1. *Sei u eine in der endlichen z-Ebene definierte, zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion, welche die Voraussetzungen* (a), (b) *und* (c) *erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L(r)}{l(r)} = 1. \tag{3}$$

Bemerkungen

1) Mit diesem Satz wird eine von Herrn Finn mündlich gestellte Frage beant-

wortet. Resultate von Finn [5] liessen die Gültigkeit eines solchen Satzes als wahrscheinlich erscheinen.

2) Die Voraussetzungen (a) oder (b) können nicht weggelassen werden. Es fehlt uns jedoch ein Gegenbeispiel, welchem entnommen werden könnte, dass auch die Annahme (c) nicht gestrichen werden darf.

Wir beweisen ferner

SATZ 2. *Sei u eine in der endlichen z-Ebene definierte, zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion, welche die Voraussetzungen* (a), (b) *und* (c) *erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{0\leq\varphi<2\pi} \int\limits_0^r \exp\{u(e^{i\varphi})\}\, dt}{\min\limits_{0\leq\varphi<2\pi} \int\limits_0^r \exp\{u(e^{i\varphi})\}\, dt} = 1. \tag{4}$$

Auch für diesen Satz gilt Bemerkung 2 zu Satz 1.

Diese Resultate sind zunächst gültig unter der Annahme, dass die Funktion u zweimal stetig differenzierbar ist. Die im Beweis verwendete potentialtheoretische Methode lässt darüber hinaus folgende Abschwächung der Regularitätsvoraussetzungen zu: Es genügt, dass u sich als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lässt. Der Laplaceoperator ist dann im Sinne der Theorie der Distributionen zu verstehen: Δu ist ein Radonsches Mass, von welchem – in Verallgemeinerung der Bedingung (b) – vorausgesetzt wird, dass seine totale Variation endlich sei. Nach einem Resultat von Reschetnjak [9] bedeutet diese Allgemeinheit, dass die Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung im Sinne von A. D. Alexandrow [1] erfasst werden.

2. Beweis der Sätze 1 und 2

Sei u eine die Voraussetzungen der Sätze 1 und 2 erfüllende Funktion. Es bezeichne μ dasjenige Radonsche Mass in der komplexen Ebene **C**, dessen Flächendichte $(\Delta u)/(2\pi)$ beträgt. (Es ist also $\mu=(\Delta u/2\pi)$ im Sinne der Theorie der Distributionen). Dieses Mass ist von endlicher Variation, und es gilt $\mu(\mathbf{C})>-1$. Nach dem Korollar zu Satz 1 in [8] besitzt u die Darstellung

$$u(z)=\int\limits_{\mathbf{C}} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta)+C,$$

d.h. u ist eine Funktion vom Potentialtypus im Sinne von Arsove [2]. Die Konstante C darf im folgenden ohne Verlust an Allgemeinheit gleich 0 gesetzt werden.

Sei $\mu=\mu_1-\mu_2$ die Jordansche Zerlegung des Masses μ. Längs Kreisen um den

Ursprung projizieren wir das Mass μ_1 auf die negative und das Mass μ_2 auf die positive reelle Achse,

$$\nu_1([-b, -a]) := \mu_1(\{z \mid a \leqq |z| \leqq b\}),$$
$$\nu_2([a, b]) := \mu_2(\{z \mid a \leqq |z| \leqq b\}),$$

für $b > a \geqq 0$. Wir definieren

$$v_k(z) := \int_{\mathbf{C}} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu_k(\zeta) \quad (k = 1, 2), \tag{5}$$

$$v(z) := v_1(z) - v_2(z). \tag{6}$$

Wir stützen uns auf den nachstehenden Hilfssatz, dessen Beweis wir auf den Schluss der Arbeit verschieben.

LEMMA. *Für die durch* (5) *und* (6) *definierte Funktion v gilt*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\int_0^r \exp\{v(t)\}\, dt}{\int_{-r}^0 \exp\{v(t)\}\, dt} = 1. \tag{7}$$

Zurückführung der Sätze 1 *und* 2 *auf das Lemma.* Wir definieren

$$u_k(z) := \int_{\mathbf{C}} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_k(\zeta) \quad (k = 1, 2). \tag{8}$$

Aus (5) und (8) folgt

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \int_{\mathbf{C}} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu_1(\zeta) \leqq \int_{\mathbf{C}} \log\left|1 + \left|\frac{z}{\zeta}\right|\right| d\mu_1(\zeta) \\ &= \int_{\mathbf{C}} \log\left|1 - \frac{|z|}{\zeta}\right| d\nu_1(\zeta) = v_1(|z|). \end{aligned}$$

Analog beweist man, dass

$$u_1(z) \geqq v_1(-|z|), \quad u_2(z) \leqq v_2(-|z|), \quad u_2(z) \geqq v_2(|z|).$$

Somit ist

$$u(z) \leqq v_1(|z|) - v_2(|z|) = v(|z|), \tag{9}$$
$$u(z) \geqq v_1(-|z|) - v_2(-|z|) = v(-|z|). \tag{10}$$

Daraus folgt

$$L(r) \leqq \int_0^r \exp\{v(t)\}\, dt, \tag{11}$$

$$l(r) \geqq \int_{-r}^0 \exp\{v(t)\}\, dt. \tag{12}$$

Aus (9), (10) und (7) folgt (4); aus (11), (12) und (7) folgt (3). QED

Beweis des Lemmas. Wir beweisen vorerst die Vollständigkeit der Metrik $\exp\{v(z)\}\,|dz|$, wobei v durch (6) definiert ist. Sei

$$\begin{aligned} M_k(r) &:= \max_{|z|=r} v_k(z) \qquad (k=1,2), \\ m_k(r) &:= \inf_{|z|=r} v_k(z) \qquad (k=1,2), \\ m(r) &:= \inf_{|z|=r} v(z). \end{aligned}$$

Nach den Sätzen 5 und 6, p. 100, in [8] sind für jedes $\eta > 0$ die Ungleichungen

$$[\nu_k(\mathbf{C}) - \eta] \log r < M_k(r) < [\nu_k(\mathbf{C}) + \eta] \log r \qquad (k=1,2) \tag{13}$$

und

$$m_k(r) > (1-\eta)\, M_k(r) \qquad (k=1,2) \tag{14}$$

erfüllt für alle r-Werte bis auf eine (von η abhängige) Ausnahmemenge von endlichem Mass. Aus (13) und (14) folgt

$$m(r) \geqq m_1(r) - M_2(r) \geqq [\nu(\mathbf{C}) - \eta(\nu_1(\mathbf{C}) + 2 - \eta)] \log r.$$

Da nach Voraussetzung $\nu(\mathbf{C}) = \mu(\mathbf{C}) > -1$, und da ferner η beliebig klein gewählt werden kann, folgt: Für jede Wahl von α aus dem Intervall $(-1, \nu(\mathbf{C}))$ gibt es eine (von α abhängige) Menge von endlichem Mass, ausserhalb welcher

$$m(r) > \alpha \log r.$$

Daraus schliessen wir, dass

$$\int_0^\infty \exp\{m(r)\}\, dr = \infty.$$

Somit ist die Metrik $\exp\{v(z)\}\,|dz|$ vollständig.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Auf Grund der Vollständigkeit der Metrik $\exp\{v(z)|dz|$ gilt: Zu jeder vorgegebenen Zahl $q > 0$ gibt es eine Zahl $r_0(q, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{\int_0^r \exp\{v(t)\}\,dt}{\int_{-r}^0 \exp\{v(t)\}\,dt} \leqq (1+\varepsilon)\frac{\int_q^r \exp\{v(t)\}\,dt}{\int_{-r}^{-q} \exp\{v(t)\}\,dt} \tag{15}$$

für alle $r > r_0(q, \varepsilon)$.

Für $|z| \leqq r$ und $|\zeta| \geqq R$, $r < R$, gilt die Ungleichung

$$\frac{R-r}{R+r} \leqq \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| \leqq \frac{R+r}{R-r}.$$

Daraus schliessen wir: es gibt eine Zahl $R_0(r, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\int_q^r \exp\{v(t)\}\,dt}{\int_{-r}^{-q} \exp\{v(t)\}\,dt} &= \frac{\int_q^r \exp\left\{\int_{\mathbf{C}} \log\left|1-\frac{t}{\zeta}\right| dv(\zeta)\right\} dt}{\int_{-r}^{-q} \exp\left\{\int_{\mathbf{C}} \log\left|1-\frac{t}{\zeta}\right| dv(\zeta)\right\} dt} \\
&\leqq (1+\varepsilon)\frac{\int_q^r \exp\left\{\int_{|\zeta|<R} \log\left|1-\frac{t}{\zeta}\right| dv(\zeta)\right\} dt}{\int_{-r}^{-q} \exp\left\{\int_{|\zeta|<R} \log\left|1-\frac{t}{\zeta}\right| dv(\zeta)\right\} dt} \\
&= (1+\varepsilon)\frac{\int_q^r \exp\left\{\int_{|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, dv(\zeta)\right\} dt}{\int_{-r}^{-q} \exp\left\{\int_{|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, dv(\zeta)\right\} dt}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

für alle $R > R_0(r, \varepsilon)$.

Seien nun p, q, r, R positive Zahlen derart, dass $0 < p < q < r < 2r < R$. Im übrigen werden wir über die Wahl dieser Grössen später verfügen. Wir definieren

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &:= \nu_k(\{\zeta \mid |\zeta| \leqq p\}),\\ \beta_k &:= \nu_k(\{\zeta \mid p < |\zeta| < 2r\}),\\ \gamma_k &:= \nu_k(\{\zeta \mid 2r \leqq |\zeta| < R\}), \end{aligned}\right\} k = 1, 2$$

$$\alpha := \alpha_1 - \alpha_2, \qquad \beta := \beta_1 - \beta_2, \qquad \gamma := \gamma_1 - \gamma_2 .$$

Die Wahl von p wird so erfolgen, dass $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ genügend klein sind. Wie klein, ergibt sich im Laufe der nachstehenden Abschätzungen.

Wir betrachten nun der Reihe nach Zähler und Nenner des auf der rechten Seite von (16) stehenden Quotienten. *Abschätzung nach oben des Zählers des auf der rechten Seite von* (16) *stehenden Quotienten:*

Zu vorgegebenem $p>0$ gibt es ein $q_0(p, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\exp\left\{\int\limits_{|\zeta|\leqq p} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} \leqq (1+\varepsilon)\, t^{\alpha} \tag{17}$$

für alle $t \geqq q_0(p, \varepsilon)$.

Ist $t\in[q, r]$ und $|\zeta| \geqq 2r$, so gilt $|(t-\zeta)/\zeta| \leqq 2$, und somit

$$\log|t-\zeta| \leqq \log|\zeta| + \log 2 . \tag{18}$$

Daraus schliessen wir, dass

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\int\limits_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\}\\ &\leqq \exp\left\{(\gamma_1+\gamma_2)\log 2 + \int\limits_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\}. \end{aligned}$$

Infolgedessen gibt es ein $p_0(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\exp\left\{\int\limits_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} \leqq (1+\varepsilon)\exp\left\{\int\limits_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\}, \tag{19}$$

falls $t\in[q, r]$ und $p>p_0(\varepsilon)$. Für $p>p_0(\varepsilon)$ und $q>q_0(p, \varepsilon)$ gilt also

$$\left.\begin{aligned} &\int_q^r \exp\left\{\int\limits_{|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} dt\\ &\quad\leqq (1+\varepsilon)^2 \exp\left\{\int\limits_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\}\\ &\quad\times \int_q^r t^{\alpha} \exp\left\{\int\limits_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} dt . \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nun werden wir zeigen, dass es ein $p_1(\varepsilon)$ gibt mit der Eigenschaft, dass für $p > \max[p_0(\varepsilon), p_1(\varepsilon)]$ und $q > q_0(p, \varepsilon)$

$$\left.\begin{aligned}&\int_q^r \exp\left\{\int_{|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} dt\\ &\quad\leqq (1+\varepsilon)^4 \frac{r^{\alpha+\beta+1}}{1+\alpha} \exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Zu diesem Zweck ist das in (20) ganz rechts stehende Integral nach oben abzuschätzen. Wir vergrössern dieses Integral zunächst, indem wir die ganze Masse β_1 in den (ungünstigsten) Punkt $-2r$ verlegen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_q^r t^\alpha \exp\left\{\int_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta|\, d\nu(\zeta)\right\} dt\\ &\quad\leqq (3r)^{\beta_1} \int_q^r t^\alpha \exp\left\{-\int_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta|\, d\nu_2(\zeta)\right\} dt.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Auf dem Intervall $[q, r]$ gibt es einen Punkt a mit der Eigenschaft, dass

$$\int_q^r t^\alpha |t-\zeta|^{-\beta_2}\, dt \leqq \int_q^r t^\alpha |t-a|^{-\beta_2}\, dt \tag{23}$$

für alle ζ aus dem Ringgebiet $\{\zeta \mid p<|\zeta|<2r\}$. Wir beschränken uns vorerst auf den Spezialfall, da die Masse $-\beta_2$ in diesem Punkt a konzentriert ist, und behaupten für diesen Fall, dass für genügend grosses p

$$\int_q^r t^\alpha \exp\left\{-\int_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta|\, d\nu_2(\zeta)\right\}_\zeta dt \leqq \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha} r^{\alpha-\beta_2+1}. \tag{24}$$

Der Beweis dieser Abschätzung beruht auf einer Anwendung der Hölderschen Ungleichung, wobei zwischen den Fällen $\alpha>0$, $\alpha=0$ und $-1<\alpha<0$ unterschieden wird.

Erster Fall: $\alpha > 0$.[2])

[2]) Die Betrachtung des Falles $\alpha+\beta_2=1$ ist nur dann unvermeidlich, wenn $\alpha=1$ und (für genügend grosse p) $\beta_2=0$ ist. In diesem Falle ist aber die Behauptung trivialerweise richtig.

$$\int_q^r t^\alpha |t-a|^{-\beta_2}\,dt = \int_q^r (t^{\alpha+\beta_2})^{\alpha/(\alpha+\beta_2)} \left(\frac{1}{|t-a|^{\alpha+\beta_2}}\right)^{\beta_2/(\alpha+\beta_2)} dt$$

$$\leqq \left(\int_q^r t^{\alpha+\beta_2}\,dt\right)^{\alpha/(\alpha+\beta_2)} \left(\int_q^r \frac{dt}{|t-a|^{\alpha+\beta_2}}\right)^{\beta_2/(\alpha+\beta_2)}$$

$$\leqq \frac{1}{(\alpha+\beta_2+1)^{\alpha/(\alpha+\beta_2)}}\, r^{(\alpha+\beta_2+1)\alpha/(\alpha+\beta_2)} \cdot \left(2\int_0^{r/2} t^{-(\alpha+\beta_2)}\,dt\right)^{\beta_2/(\alpha+\beta_2)}$$

$$\leqq \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha}\, r^{\alpha-\beta_2+1}$$

für genügend grosse p.
Zweiter Fall: $\alpha=0$.

$$\int_q^r |t-a|^{-\beta_2}\,dt \leqq 2\int_0^{r/2} t^{-\beta_2}\,dt \leqq (1+\varepsilon)\, r^{1-\beta_2}$$

für genügend grosse p.
Dritter Fall: $-1<\alpha<0$.

$$\int_q^r t^\alpha |t-a|^{-\beta_2}\,dt = \int_q^r \left(\frac{1}{t^{|\alpha|+\beta_2}}\right)^{|\alpha|/(|\alpha|+\beta_2)} \left(\frac{1}{|t-a|^{|\alpha|+\beta_2}}\right)^{\beta_2/(|\alpha|+\beta_2)} dt$$

$$\leqq \left(\int_q^r \frac{dt}{t^{|\alpha|+\beta_2}}\right)^{|\alpha|/(|\alpha|+\beta_2)} \left(\int_q^r \frac{dt}{|t-a|^{|\alpha|+\beta_2}}\right)^{\beta_2/(|\alpha|+\beta_2)} \leqq \left[\frac{r^{1-(|\alpha|+\beta_2)}}{1-(|\alpha|+\beta_2)}\right]^{|\alpha|/(|\alpha|+\beta_2)}$$

$$\cdot \left(2\int_0^{r/2} \frac{dt}{t^{|\alpha|+\beta_2}}\right)^{\beta_2/(|\alpha|+\beta_2)} \leqq \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha}\, r^{1+\alpha-\beta_2}$$

für genügend grosse p.

Im nächsten Schritt beweisen wir die Gültigkeit von (24) für den Fall, dass das Mass ν_2 in $\{\zeta \mid p<|\zeta|<2r\}$ aus endlich vielen Massenpunkten besteht: $\lambda_1\beta_2$ in ζ_2, $\lambda_2\beta_2$ in $\zeta_2, \dots, \lambda_m\beta_2$ in $\zeta_m (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$, alle $\lambda_k>0)$. In diesem Falle schliessen wir unter Anwendung von (23) und des eben behandelten Spezialfalles, dass

$$\int_q^r t^\alpha \exp\left\{-\int_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta|\, dv_2(\zeta)\right\} dt = \int_q^r \prod_{k=1}^m (t^\alpha |t-\zeta_k|^{-\beta_2})^{\lambda_m}\, dt$$

$$\leqq \prod_{k=1}^m \left(\int_q^r t^\alpha |t-a|^{-\beta_2}\, dt\right)^{\lambda_m} \leqq \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha} r^{\alpha-\beta_2+1}$$

für genügend grosse p.

Durch einen Grenzübergang – auf dessen Wiedergabe wir hier verzichten – lässt sich die Masse v_2 weiter verschmieren. Ungleichung (24) ist für beliebige Massenbelegungen v_2 gültig.

Aus (20), (22) und (24) folgt die Existenz einer Zahl $p_1(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass aus

$$p > \max[p_0(\varepsilon), p_1(\varepsilon)] \quad \text{und} \quad q > q_0(p, \varepsilon)$$

die Gültigkeit der Abschätzung (21) folgt.

Abschätzung nach unten des Nenners des auf der rechten Seiten von (16) *stehenden Quotienten:*

Zu vorgegebenem $p > 0$ gibt es ein $q_1(p, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\exp\left\{\int_{|\zeta|\leqq p} \log|t-\zeta|\, dv(\zeta)\right\} \geqq (1-\varepsilon)\, |t|^\alpha, \tag{25}$$

falls $|t| \geqq q_1(p, \varepsilon)$.

Liegt t im Intervall $[-r, -q]$ und ist $|\zeta| \geqq 2r$, so gilt $|(t-\zeta)/\zeta| \geqq \frac{1}{2}$, und somit

$$\log|t-\zeta| \geqq \log|\zeta| - \log 2. \tag{26}$$

Daraus schliessen wir, dass

$$\exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, dv(\zeta)\right\} dt$$

$$\geqq \exp\left\{-(\gamma_1+\gamma_2)\log 2 + \int_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, dv(\zeta)\right\}.$$

Infolgedessen gibt es ein $p_2(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|t-\zeta|\, dv(\zeta)\right\} \geqq (1-\varepsilon) \exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R} \log|\zeta|\, dv(\zeta)\right\}, \tag{27}$$

falls $p>p_2(\varepsilon)$. Für $p>p_2(\varepsilon)$ und $q>q_1(p,\varepsilon)$ gilt also

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-r}^{-q}\exp\left\{\int_{|\zeta|<R}\log|t-\zeta|\,dv(\zeta)\right\}dt\\&\quad\geqq(1-\varepsilon)^2\cdot\exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R}\log|\zeta|\,dv(\zeta)\right\}\\&\quad\cdot\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv(\zeta)\right\}dt.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Nun werden wir zeigen, dass es Zahlen $p_3(\varepsilon)$ und $r_1(q,\varepsilon)$ gibt mit der Eigenschaft, dass für $p>\max[p_2(\varepsilon),p_3(\varepsilon)]$, $q>q_1(p,\varepsilon)$ und $r>r_1(q,\varepsilon)$

$$\int_{-r}^{-q}\exp\left\{\int_{|\zeta|<R}\log|t-\zeta|\,dv(\zeta)\right\}dt\geqq(1-\varepsilon)^4\frac{r^{\alpha+\beta+1}}{1+\alpha}\exp\left\{\int_{2r\leqq|\zeta|<R}\log|\zeta|\,dv(\zeta)\right\}.\tag{29}$$

Zu diesem Zweck ist das in (28) ganz rechts stehende Integral nach unten abzuschätzen. Wir verkleinern dieses Integral zunächst, indem wir die ganze Masse $-\beta_2$ in den (ungünstigsten) Punkt $+2r$ verlegen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv(\zeta)\right\}dt\\&\quad\geqq(3r)^{-\beta_2}\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv_1(\zeta)\right\}dt.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

Unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung schliessen wir

$$\left.\begin{aligned}&\left(\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\,dt\right)^2=\left(\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{\tfrac12\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv_1(\zeta)\right\}\right.\\&\quad\left.\cdot\exp\left\{-\tfrac12\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv_1(\zeta)\right\}dt\right)^2\\&\quad\leqq\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv_1(\zeta)\right\}dt\\&\quad\cdot\int_{-r}^{-q}|t|^\alpha\exp\left\{-\int_{p<|\zeta|<2r}\log|t-\zeta|\,dv_1(\zeta)\right\}dt.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

Das letzte Integral schätzen wir wie in (24) ab und erhalten

$$\int_{-r}^{-q} |t|^{\alpha} \exp\left\{- \int_{p<|\zeta|<2r} \log|t-\zeta| \, dv_1(\zeta)\right\} dt \leqq \frac{1+\varepsilon}{1+\alpha} r^{\alpha-\beta_1+1} \tag{32}$$

für genügend grosse p.

Aus (28), (30), (31) und (32) ergibt sich die Existenz von Zahlen $p_3(\varepsilon)$ und $r_1(q, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft, dass für $p > \max[p_2(\varepsilon), p_3(\varepsilon)]$, $q > q_1(p, \varepsilon)$ und $r > r_1(q, \varepsilon)$ die Ungleichung (29) gültig ist.

Aus (15), (16), (21) und (29) folgt, dass

$$\frac{\int_0^r \exp\{v(t)\} \, dt}{\int_{-r}^0 \exp\{v(t)\} \, dt} \leqq \frac{(1+\varepsilon)^6}{(1-\varepsilon)^4}$$

für genügend grosse r. Damit ist das Lemma bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Alexandrow, A. D., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen* (Akademie-Verlag, Berlin 1955)

[2] Arsove, M., *Functions of potential type*, Trans. Amer. Math. Soc. *75* (1953), 526–551.

[3] Blanc, Ch. und Fiala, F., *Le type d'une surface et sa courbure totale*, Comment. Math. Helv. *14* (1941/42), 230–233.

[4] Cohn-Vossen, S., *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. *2* (1935), 69–133.

[5] Finn, R., *On a class of conformal metrics, with applications to differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. *40* (1965), 1–30.

[6] Hopf, H. und Rinow, W., *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. *3* (1931), 209–225.

[7] Huber, A., *Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen*, Comment. Math. Helv. *26* (1952), 81–116'

[8] ——, *Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen*, Comment. Math. Helv. *41* (1966/67), 105–136.

[9] Reschetnjak, I. G., *Isotherme Koordinaten auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* [Russisch], Sibirskii Mat. J. *1* (1960), 88–116, 248–276.

Eingegangen den 15. August 1972.