

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1972)

**Artikel:** Harmonische Funktionen und Jacobi- Determinanten von Diffeomorphismen  
**Autor:** Reimann, Hans Martin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36374>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Harmonische Funktionen und Jacobi- Determinanten von Diffeomorphismen

HANS MARTIN REIMANN

*Meinem verehrten Lehrer A. Pfluger zum 65. Geburtstag gewidmet*

## Einleitung

Es scheint eine offene Frage zu sein, ob jede stetige positive Funktion  $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Jacobi-Determinante (Funktionaldeterminante) eines Diffeomorphismus  $f$  von  $\mathbb{R}^n$  auf sich ist. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass unter gewissen zusätzlichen Bedingungen über die Stetigkeit von  $J$  immer Diffeomorphismen mit Jacobi-Determinante  $J$  konstruiert werden können (Sätze 1 und 2).

Zur Konstruktion werden Differentialgleichungen und harmonische Funktionen beigezogen. Die Verwendung von Differentialgleichungen in diesem Zusammenhang ist nicht neu; eine entsprechende, allgemeine Konstruktion auf kompakten Mannigfaltigkeiten wurde von J. Moser [1] angegeben. In der vorliegenden Arbeit finden jedoch nur sehr spezielle Differentialgleichungen Verwendung: Die Lösungen der Differentialgleichungen sind Stromlinien von harmonischen, in  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$  definierten Funktionen.

Zur Formulierung der Ergebnisse führen wir den Stetigkeitsmodul

$$s(r) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{S^{n-1}} (J(x + r\xi) - J(x)) d\xi \right| \quad (1)$$

einer stetigen Funktion  $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein. ( $S^{n-1}$  ist die  $(n-1)$ -dimensionale Einheitskugel  $|\xi|=1$ ,  $r>0$ .) Ist  $J$  Hölder-stetig, d.h. ist

$$\|J\|_{C^\alpha} = \sup_{x, x' \in \mathbb{R}^n} \frac{|J(x) - J(x')|}{|x - x'|^\alpha}$$

für ein  $\alpha \in (0, 1]$  endlich, so genügt der Stetigkeitsmodul  $s(r)$  von  $J$  der Ungleichung  $s(r) \leq \text{const. } r^\alpha$ . Für beschränkte  $|J|$  ist auch  $s(r)$  beschränkt.

**SATZ 1.** *Erfüllt die Hölder-stetige Funktion  $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Voraussetzung  $0 < m \leq J \leq M < \infty$  ( $m, M$  konstant) und besitzt  $(J-1)$  kompakten Träger, so existiert ein Diffeomorphismus  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Jacobi-Determinante  $J$ .*

Dieser Satz ist ein Spezialfall des folgenden Satzes. In der allgemeinen Formulierung wird die Hölder-Stetigkeit durch eine Bedingung über den Stetigkeitsmodul  $s$

ersetzt. Anstelle von Funktionen  $J-1$  mit kompaktem Träger können auch stetige Funktionen zugelassen werden, deren Riesz-Potential

$$q_{(J-1)} = R^*(J-1)$$

in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist (siehe Bedingung 3 im Satz 2).  $R$  ist der Riesz-Kern  $(c_n/(n-1))|x|^{1-n}$ . Die Konstante  $c_n$  ist durch  $\int_{\mathbb{R}^n} c_n y (|x|^2 + y^2)^{-(n+1)/2} dx = 1$  definiert (siehe (8)).

**SATZ 2.** *Zu jeder stetigen Funktion  $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die drei Voraussetzungen erfüllt:*

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ 0 < m \leq J \leq M < \infty \quad (m, M \text{ konstant}) \\ 2) \ \int_0^c r^{-1} s(r) dr < \infty \quad \text{für ein } c > 0 \\ 3) \ q_{(J-1)} = R^*(J-1) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \end{array} \right\} \quad (2)$$

*existiert ein Diffeomorphismus  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Jacobi-Determinante  $J$ .*

Im Satz 2 muss nicht vorausgesetzt werden, dass  $J$  stetig ist. Vielmehr ist für messbare  $J$  die Stetigkeit (nach Modifikation auf einer Nullmenge) eine Konsequenz der Bedingungen 1, 2 und 3. Der Stetigkeitsmodul  $s(r)$  muss in diesem Falle durch die  $L^\infty$ -Norm von  $\int_{S^{n-1}} (J(x+r\xi) - J(x)) d\xi$  definiert werden.

Der Beweis von Satz 2 wird im dritten Teil dieser Arbeit gegeben. Bei der Konstruktion der Diffeomorphismen lassen wir uns durch den folgenden Hilfssatz leiten:

**HILFSSATZ 1.**  *$u(x, y)$  sei in einer Umgebung von  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  harmonisch und besitze beschränkte partielle Ableitungen:  $|\text{grad } u| = |(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_y)| \leq M$ . Zudem wird vorausgesetzt, dass  $u_y + 1 \geq m$  für eine positive Konstante  $m$ . Die Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_x}{u_y + 1} = \frac{1}{u_y + 1} (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \quad (3)$$

*mit der Anfangsbedingung  $x(0) = z$  besitzt dann für jedes  $z \in \mathbb{R}^n$  eine im Intervall  $0 \leq y \leq 1$  eindeutige Lösung  $x(z, y)$ , und die Jacobi-Determinante der Abbildung  $f(z) = x(z, 1)$  ist durch*

$$J_f(z) = \frac{u_y(z, 0) + 1}{u_y(f(z), 1) + 1} \quad (4)$$

*gegeben.*

Die Lösungen der Differentialgleichung können als Stromlinien der harmonischen

Funktion  $h(x, y) = u(x, y) + y$  interpretiert werden. Eine einfache Anwendung des Divergenzsatzes führt dann auf die Beziehung (4).

*Beweis.* Wegen der Beschränktheit und Regularität von  $(u_x/u_y + 1)$  besitzt (3) natürlich eindeutige Lösungen  $x(z, y)$ . Für positive  $r$  und festes  $z \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir das Gebiet

$$S = S(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = x(z', y), |z' - z| < r, 0 < y < 1\}$$

dessen Rand  $\partial S$  wir in 3 Teile zerlegen

$$\begin{aligned}\partial S_1 &= \partial S \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = 0\} \\ \partial S_2 &= \partial S \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = 1\} \\ \partial S_3 &= \partial S \setminus (\partial S_1 \cup \partial S_2).\end{aligned}$$

Da  $h$  harmonisch ist, gilt

$$\int_{\partial S} \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

(nach dem Divergenzsatz). Die Normalableitung  $\partial h / \partial n$  verschwindet jedoch auf  $\partial S_3$ , denn die Tangente zur Kurve  $(x(z', y), y)$   $0 \leq y \leq 1$ , ist auf Grund der Differentialgleichung (3) durch  $(u_y + 1)^{-1} \operatorname{grad} (u + y)$  gegeben. Auf  $\partial S_2$  fällt  $\partial h / \partial n$  mit  $u_y + 1$  zusammen, desgleichen auch auf  $\partial S_3$ , jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Aus (5) ergibt sich daher die Beziehung

$$\int_{\{z' \mid |z' - z| < r\}} (u_y(z', 0) + 1) dm_n = \int_{\{f(z') \mid |z' - z| < r\}} (u_y(f(z'), 1) + 1) dm_n$$

und für die Jacobi-Determinante von  $f$  erhält man

$$J_f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_n \{f(z') \mid |z' - z| < r\}}{m_n \{z' \mid |z' - z| < r\}} = \frac{u_y(z, 0) + 1}{u_y(f(z), 1) + 1}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Im dritten Teil dieser Arbeit wird dieser Hilfssatz auf harmonische, in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  definierte Funktionen erweitert. Neben den Bedingungen  $\lim_{y \rightarrow \infty} u_y(x, y) = 0$  und  $\lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = J(x) - 1$  sind zusätzliche Voraussetzungen über das Wachstum der Ableitungen von  $u$  für  $y \rightarrow 0$  und für  $y \rightarrow \infty$  entscheidend. Erfüllt jedoch die harmonische Funktion  $u$  alle diesbezüglichen Forderungen, so kann der Diffeomorphismus  $f$  mit Jacobi-Determinante  $J(x)$  dann wie im Hilfssatz 1 konstruiert werden.

Im zweiten Teil dieser Arbeit sind die Sätze über die Beziehung zwischen den Randwerten einer in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  harmonischen Funktion  $u$  und dem Wachstum der partiellen



Ableitungen von  $u$  zusammengestellt und bewiesen. Die Ergebnisse sind in den Sätzen 3 und 4 enthalten. Da ein enger Zusammenhang zwischen dem Randverhalten harmonischer Funktionen und der Theorie der singulären Integraltransformationen besteht – der Übergang zwischen den partiellen Ableitungen  $u_y$  und  $u_{x_i}$  von  $u$  kann durch die Riesz-Transformation beschrieben werden – kommt diesen Ergebnissen hier eine besondere Bedeutung zu. Für eine ausführliche Darstellung der Beziehungen zwischen harmonischen Funktionen und singulären Integraltransformationen sei auf das Buch von E. Stein [2] verwiesen.

### Harmonische Funktionen im Halbraum

Mit  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  wird der  $(n+1)$ -dimensionale obere Halbraum  $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n, y > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnet. Zu einer Funktion  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  betrachten wir die beschränkte harmonische Funktion  $u$  in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ , deren Randwerte  $\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y)$  fast überall durch  $f(x)$  gegeben sind.  $u(x, y)$  lässt sich als Konvolution von  $f$  mit dem Poissonkern

$$P(x, y) = \frac{c_n y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \quad (6)$$

darstellen:

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_n y}{(|x - t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} f(t) dt \quad (7)$$

$c_n$  ist eine Normierungskonstante:

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x, y) dx = 1. \quad (8)$$

Zu  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  bilden wir das Riesz-Potential  $q_f = R * f$  mit  $R = (c_n / (n-1)) |x|^{1-n}$ . Wir setzen voraus, dass  $|q_f|$  beschränkt ist.  $u = P * q_f$  ist dann die beschränkte, harmonische Funktion in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$ , die fast überall die Randwerte  $q_f$  annimmt, und die partielle Ableitung von  $u$  nach  $y$  besitzt die Darstellung

$$u_y = P * f. \quad (9)$$

Zum Beweis von (9) bemerken wir, dass für  $y > 0$

$$\begin{aligned} P * R(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} P(t, y) \frac{c_n}{n-1} |x - t|^{1-n} dt \\ &= \frac{c_n}{n-1} (|x|^2 + y^2)^{-(n-1)/2} \end{aligned}$$

und

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c_n}{n-1} (|x|^2 + y^2)^{-(n-1)/2} \right);$$

die Gleichung (9) folgt dann aus

$$u_y = P_y * q_f = P_y * R * f = (P * R)_y * f.$$

Da  $|u|$  beschränkt ist und da für die partiellen Ableitungen von  $P$  die Abschätzungen

$$\|P_{yx_k}\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x_k} \right| dx = O(y^{-2})$$

und

$$\|P_{x_i x_k}\|_1 = O(y^{-2})$$

gelten, folgt aus den Darstellungen

$$u_{yx_k} = P_{yx_k} * u \quad \text{und} \quad u_{x_i x_k} = P_{x_i x_k} * u$$

dass

$$u_{yx_k} = O(y^{-2}) \quad \text{und} \quad u_{x_i x_k} = O(y^{-2}) \quad (10)$$

für  $y \rightarrow \infty$ , gleichmässig auf  $\mathbb{R}^n$ .

Über das Verhalten von

$$\|u_{yx_k}\|_\infty(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_{yx_k}(x, y)|$$

und  $\|u_{x_i x_k}\|_\infty$  für kleine  $y$  geben die folgenden beiden Sätze Auskunft, wenn  $v = u_y = P * f$  (und  $f = J - 1$ ) gesetzt wird. Es stellt sich heraus, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2 sowohl  $\int_0 \|u_{yx_k}\|_\infty dy$  wie auch  $\int_0 \|u_{x_i x_k}\|_\infty dy$  konvergieren (d.h.  $\|u_{yx_k}\|_\infty$  und  $\|u_{x_i x_k}\|_\infty$  sind über ein Intervall  $(0, c)$  mit  $c > 0$  integrierbar).

**SATZ 3.**  $v$  sei harmonisch in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  und  $|v|$  sei beschränkt. Aus

$$\int_0 \|v_y\|_\infty dy < \infty \quad (11)$$

folgt dann

$$\int_0 \|v_{x_i}\|_\infty dy < \infty \quad (12)$$

und  $f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y)$  ist unter diesen Voraussetzungen stetig.

Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt unmittelbar, dass  $f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} v(x, y)$  für alle  $x$  existiert und beschränkt ist. Es gilt dann  $v = P * f$  und somit  $v_{x_i} = P_{x_i} * f$  für  $y > 0$ . Wegen  $\int_{\mathbb{R}^n} |P_{x_i}| dx = O(y^{-1})$  für  $y \rightarrow \infty$  ist  $\lim_{y \rightarrow \infty} v_{x_i}(x, y) = 0$  und daher

$$v_{x_i}(x, y) = - \int_y^\infty v_{yx_i}(x, t) dt$$

Mit der Darstellung von  $v_{yx_i}(x, t)$  als Konvolution von  $v_y(x, t/2)$  und  $P_{x_i}(x, t/2)$  erhält man die Abschätzungen

$$|v_{yx_i}(x, t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_{x_i}(z, t/2) v_y(x - z, t/2) dz \right| \leq \text{const.} \frac{2}{t} \|v_y\|_\infty(t/2)$$

und

$$|v_{x_i}(x, y)| \leq \text{const.} \int_{y/2}^\infty \|v_y\|_\infty(t) \frac{dt}{t}.$$

Setzt man  $a(t) = \|v_y\|_\infty(t)$  und  $b(y) = \int_{y/2}^\infty a(t) dt/t$ , so bleibt zu zeigen, dass  $\int_0^c b(y) dy$  für ein  $c > 0$  konvergiert. Da aber  $a$  und  $b$  positiv sind, folgt dies unmittelbar durch partielle Integration:

$$\int_r^c b(t) dt = cb(c) - rb(r) + \int_r^c a(t/2) dt \leq cb(c) + \int_0^c a(t/2) dt.$$

Nach Voraussetzung (11) ist die rechte Seite dieser Ungleichung endlich.

Um die Stetigkeit von  $f$  zu beweisen braucht man eine Abschätzung für

$$|f(x + t) - f(x)| \quad \text{mit} \quad t = r\xi, |\xi| = 1, r > 0.$$

Aus den Ungleichungen

$$|f(x) - v(x, r)| \leq \int_0^r \|v_y\|_\infty dy = \int_0^r a(t) dt$$

und

$$|v(x + t, r) - v(x, r)| \leq \int_0^r \left( \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}(x + s\xi, r)\|_\infty \right) ds$$

folgt

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leq 2 \int_0^r a(s) ds + \text{const. } r b(r) \\ &\leq 2 \int_0^r a(s) ds + \text{const. } \int_0^r b(s) ds. \end{aligned}$$

$f$  ist also stetig.

Wir erinnern daran, dass der Stetigkeitsmodul  $s(r)$  einer Funktion  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$s(r) = \left\| \int_{S^{n-1}} (f(x + r\xi) - f(x)) d\xi \right\|_\infty \quad (13)$$

(mit  $t = r\xi$ ,  $r = |t|$  und  $|\xi| = 1$ ) definiert wurde.

**SATZ 4.** *Ist  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und erfüllt der Stetigkeitsmodul  $s$  von  $f$  die Bedingung*

$$\int_0^\infty r^{-1} s(r) dr < \infty \quad (14)$$

*so ist  $f$  nach Modifikation auf einer Lebesgue-Nullmenge stetig, und für die partielle Ableitung  $v_y$  von  $v = P * f$  gilt:*

$$\int_0^\infty \|v_y\|_\infty dy < \infty. \quad (11)$$

Wegen  $\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x, y) dy = 0$  ist

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t, y) (f(x+t) - f(x)) dt \\ &= \int_0^\infty P_y(r, y) r^{n-1} \int_{S^{n-1}} (f(x + r\xi) - f(x)) d\xi dr. \end{aligned}$$

Nach Definition des Stetigkeitsmoduls folgt daraus die Ungleichung

$$|v_y(x, y)| \leq \int_0^\infty |r^2 - ny^2| (r^2 + y^2)^{-(n+3)/2} r^{n-1} s(r) dr.$$

Mit Hilfe der Substitution  $r=zy$  und der Abschätzung

$$|z^2 - n| (z^2 + 1)^{-(n+3)/2} z^{n-1} \leq c (1 + z)^{-2} \quad (c \text{ konstant})$$

erhält man dann

$$\|v_y\|_\infty = y^{-1} \int_0^\infty c (1 + z)^{-2} s(zy) dz.$$

Eine Integration bezüglich  $y$  und eine Substitution  $x=zy$  führen auf die Ungleichung

$$\int_0^1 \|v_y\|_\infty dy \leq c \int_0^\infty (1 + z)^{-2} \left( \int_0^z x^{-1} s(x) dx \right) dz$$

und, nach Vertauschen der Integrationen, zu

$$\int_0^1 \|v_y\|_\infty dy \leq c \int_0^\infty x^{-1} (1 + x)^{-1} s(x) dx.$$

$s$  ist beschränkt, denn  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Zusammen mit der Voraussetzung (14) folgt daher, dass die rechte Seite dieser Ungleichung endlich ist. Die Stetigkeit von  $f$  ist nun eine Konsequenz von Satz 3.

## Beweis von Satz 2

Wir setzen voraus, dass  $J$  messbar ist und den Voraussetzungen von Satz 2 genügt:

$$0 < m \leq J(x) \leq M < \infty,$$

der Stetigkeitsmodul  $s(r)$  von  $J$  (siehe (13)) erfüllt

$$\int_0^\infty r^{-1} s(r) dr < \infty,$$

$$q_{(J-1)} = R * (J-1) \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Die partielle Ableitung  $u_y = P * (J-1)$  von  $u = P * q_{(J-1)}$  erfüllt dann die Voraussetzungen von Satz 4 mit  $u_y = v$  (vgl. (6), (7) und (9)). Es gilt also  $\int_0^\infty \|u_{yy}\|_\infty dy < \infty$  und

$J(x)$  ist nach Modifikation auf einer Nullmenge stetig. Nach Satz 3 und (10) folgt

$$\int_0^{\infty} \|u_{yx_i}\|_{\infty} dy < \infty. \quad (15)$$

Wir schliessen daraus, dass  $|u_{x_i}|$  in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  beschränkt ist und – nach Satz 3 – stetig auf den abgeschlossenen Halbraum  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  erweitert werden kann. Wird in den Sätzen 3 und 4 für  $v$  die Funktion  $u_{x_i}$  eingesetzt, so zeigt dieselbe Überlegung, dass

$$\int_0^{\infty} \|u_{x_k x_i}\|_{\infty} dy < \infty. \quad (16)$$

**HILFSSATZ 2.** Die in  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  harmonische Funktion  $u$  erfülle die Bedingungen

$$\int_0^{\infty} \|u_{yx_i}\|_{\infty} dy < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \|u_{x_k x_i}\|_{\infty} dy < \infty$$

$$u_y + 1 \geq m > 0, |u| \leq M, |\text{grad } u| \leq M$$

( $m, M$  konstant) und die partiellen Ableitungen  $u_y$  und  $u_{x_i}$   $i=1, \dots, n$  seien stetig auf  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  fortsetzbar. Dann besitzt die Differentialgleichung (3)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_x}{u_y + 1}$$

zu jedem Anfangswert  $x(0)=z$  eine eindeutige Lösung  $x(z, y)$  im Intervall  $[0, \infty)$ . Zudem ist die Abbildung  $z \rightarrow x(z, y)$  für jedes positive  $y$  ein Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  auf sich.

Die Aussagen des Hilfssatzes werden für  $y=1$  bewiesen. Es wird also gezeigt, dass die Gleichung (3) eine im Intervall  $[0, 1]$  eindeutige Lösung  $x(z, y)$  mit Anfangsbedingung  $x(0)=z$  besitzt und dass die Abbildung  $f(z)=x(z, 1)$  ein Diffeomorphismus ist. Für ein beliebiges positives  $y$  ist der Beweis genau derselbe.

Zunächst bezeichne  $x(w, y)$  die nach Hilfssatz 1 eindeutige Lösung von (3) auf  $(0, \infty)$ , für die  $x(w, 1)=w$  ist. Aus (3) folgt, dass

$$x(w, y) = w + \int_1^y h(x, t) dt \quad \text{mit} \quad h(x, y) = \frac{u_x(x, y)}{u_y(x, y) + 1}.$$

Da  $h(x, y)$  auf  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  stetig ist, kann die Abbildung  $(w, y) \rightarrow x(w, y)$  stetig auf  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  fortgesetzt werden. Wir zeigen, dass sich die Funktionalmatrix  $X(w, y) = ((\partial x_i / \partial w_k)(w, y))$  ebenfalls stetig auf  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  fortsetzen lässt:

$X(w, y)$  genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dy} X = HX, \quad H = \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \right) \quad (17)$$

und der Bedingung  $X(w, 1) = I$  (Identität); in integrierter Form:

$$X(w, y) = I + \int_1^y H(x(w, t), t) X(w, t) dt \quad (18)$$

Für die Ableitung der Norm  $|X| = \sup_{a \in \mathbb{R}^n, |a|=1} |Xa|$  ergibt sich daher

$$\left| \frac{d}{dy} |X| \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \int_y^{y+h} |HX| dt \leq |H| |X|$$

und sodann

$$\left| \frac{d}{dy} \ln |X(w, y)| \right| \leq |H(x(w, y), y)|.$$

Unter Berücksichtigung von  $\ln |X(w, 1)| = 0$  erhält man aus der letzten Ungleichung durch Integration eine Abschätzung von  $|X(w, y)|$ :

$$\ln |X(w, y)| \leq \int_y^1 |H(x(w, t), t)| dt \quad (y \leq 1) \quad (19)$$

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 und die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right| &= \left| \left( \frac{u_{x_k}}{u_y + 1} \right)_{x_i} \right| = |(u_y + 1)^{-1} u_{x_k x_i} - (u_y + 1)^{-2} u_{x_k} u_{y x_i}| \\ &\leq C |u_{x_i x_k}| + C |u_{y x_i}| \quad (C \text{ konstant}) \end{aligned}$$

dienen zur Abschätzung von  $|H|$

$$|H(x(w, y), y)| \leq C \sum_{i, k=1}^n \|u_{x_i x_k}\|_\infty + C \sum_{i=1}^n \|u_{y x_i}\|_\infty. \quad (20)$$

Nach Voraussetzung sind nun aber  $\|u_{x_k x_i}\|_\infty$  und  $\|u_{y x_i}\|_\infty$  in  $(0, 1)$  integrierbar. Aus

(19) und (20) folgt daher die Beschränktheit von  $|X(w, y)|$  für  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in (0, 1]$ , und aus der nach (18) hergeleiteten Ungleichung

$$\begin{aligned} |X(w, y) - X(w, y')| &\leq \text{const.} \int_y^{y'} |H| dt \\ &\leq \text{const.} \int_y^{y'} \left( \sum_{i,k=1}^n \|u_{x_k x_i}\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|u_{y x_i}\|_\infty \right) dt \end{aligned}$$

folgt die gleichmässige Konvergenz von  $X(w, y)$  für  $y \rightarrow 0$ .

$X$  lässt sich also stetig auf  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  fortsetzen und die Abbildung  $g: w \rightarrow x(w, 0)$  ist stetig differenzierbar. Gemäss Hilfssatz 1 ist

$$\frac{u_y(w, 1) + 1}{u_y(x(w, y), y) + 1}$$

die Jacobi-Determinante der Abbildung  $w \rightarrow x(w, y)$ . Wegen  $u_y(x, y) + 1 \geq m > 0$  ist die Jacobi-Determinante

$$J_g(w) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u_y(w, 1) + 1}{u_y(x(w, y), y) + 1} = \frac{u_y(w, 1) + 1}{u_y(g(w), 0) + 1} \quad (21)$$

von  $g$  positiv;  $g$  ist also lokal umkehrbar. Da aber für jedes  $y_0 > 0$  die Funktion  $x(w, y)$  auf  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  bereits durch  $x(w, y_0)$  eindeutig bestimmt ist, so folgt, dass  $g$  auch im Grossen eineindeutig ist.

Die Differentialgleichung (3) besitzt für jedes  $z \in \mathbb{R}^n$  eine Lösung  $x(z, y)$  mit  $x(z, 0) = z$ , denn  $u_x/(u_y + 1)$  ist in  $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$  stetig. Wir schliessen daraus, dass der Diffeomorphismus  $g: \mathbb{R}^n$  auf sich abbildet. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Gleichung (21) entnehmen wir, dass die Jacobi-Determinante  $J_y$  der Abbildung  $z \rightarrow x(z, y)$  durch

$$J_y(z) = \frac{u_y(z, 0) + 1}{u_y(x(z, y), y) + 1}$$

gegeben ist.

Wir vervollständigen nun den Beweis von Satz 2. Die harmonische Funktion  $u$  sei durch  $J$  bestimmt:

$$u = P * q_{(J-1)}, \quad u_y = P * (J - 1)$$

und  $x(z, y)$  seien die Lösungen von (3) mit  $x(z, 0) = z$ .



$$f(z) = \lim_{y \rightarrow \infty} (x(z, y) - x(0, y))$$

existiert dann für alle  $z \in \mathbb{R}^n$ . Wegen (15) und (16) kann nämlich für  $y \rightarrow \infty$  wie im Beweis zum Hilfssatz 2 auf die gleichmässige Konvergenz der Funktionalmatrizen  $((\partial x_i / \partial z_k)(z, y))$  der Abbildungen  $z \rightarrow x(z, y) - x(0, y)$  geschlossen werden.  $f(z)$  ist dann stetig differenzierbar und für die Jacobi-Determinante erhält man

$$J_f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_y(z, 0) + 1}{u_y(x(z, t), t) + 1} = u_y(z, 0) + 1 = J(z)$$

$f$  ist also lokal umkehrbar, und da die Abbildungen  $z \rightarrow x(z, y)$  für all  $y \geq 0$  Diffeomorphismen von  $\mathbb{R}^n$  auf sich sind, ist auch  $f$  ein Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}^n$  auf sich.

#### LITERATUR

- [1] MOSER, J., *On the volume elements on a manifold*, Trans. AMS 120 (1965), 286–294.
- [2] STEIN, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* (Princeton University Press, Princeton 1970).

*Universität Bern*

*Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich*

Eingegangen den 12. April 1972