

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 47 (1972)  
  
**Artikel:** Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung  
**Autor:** Wissler, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36372>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung

von CH. WISSLER

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit besteht aus drei Teilen:

Den Ausgangspunkt des *ersten Teiles* bildet der Satz von Hilbert [1], der besagt, dass die hyperbolische Ebene keine isometrische Immersion in den dreidimensionalen Euklidischen Raum zulässt, oder anders ausgedrückt, dass es im dreidimensionalen Euklidischen Raum keine vollständigen Flächen mit konstanter negativer Krümmung gibt. Die Flächen mit konstanter negativer Krümmung haben bekanntlich die Eigenschaft, dass das Netz der Asymptotenlinien ein Tschebyscheff-Netz bildet, d.h. ein Netz, bei welchem in jedem Netzeck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Wegen dieser Eigenschaft ist der Satz von Hilbert äquivalent zu der folgenden Aussage: In der hyperbolischen Ebene gibt es keine globalen Tschebyscheff-Netze. Diesen Satz werden wir verallgemeinern durch den folgenden Satz (Abschnitt 3): *Auf einer orientierbaren, zweidimensionalen, vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit der Differenzierbarkeitsklasse  $C^3$ , deren Krümmung  $K$  von Null verschieden ist und auf der es ein globales Tschebyscheff-Netz gibt, gilt:*

$$\inf |K| = 0, \quad \sup \left| \operatorname{grad} \frac{1}{K} \right| = \infty. \quad (*)$$

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung des Beweises, den Holmgren [3] zum Satz von Hilbert gegeben hat (Abschnitt 2.1).

Bei den Mannigfaltigkeiten mit negativer Krümmung sind die Bedingungen (\*) ganz ähnlich den Bedingungen von Efimov, die bei der Frage nach der Existenz einer isometrischen Immersion in den dreidimensionalen Euklidischen Raum auftreten: Wie N. V. Efimov [5, 6] bewiesen hat, ist für die Existenz einer solchen Immersion notwendig

$$\inf |K| = 0 \quad \text{und} \quad \sup \left| \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{-K}} \right| = \infty.$$

Bei positiv gekrümmten Flächen im Raum kann  $\operatorname{grad} 1/\sqrt{K}$  beschränkt sein; ein Beispiel hierfür ist das Paraboloid  $z = x^2 + y^2$ .

Der *Zweite Teil* schliesst an die Arbeit von M. H. Amsler [2] über die Singularitäten der Flächen mit konstanter negativer Krümmung im Raum an. Amsler beweist in dieser Arbeit, dass jede reguläre Fläche mit konstanter negativer Gauss'scher



Krümmung unendlich viele Randpunkte hat. Wenn die Fläche analytisch ist, oder wenn sie nur endlich viele Verzweigungspunkte hat (zur Definition der Verzweigungspunkte vgl. [2]), so enthält der Rand mindestens einen Kurvenbogen, der im Falle der Analytizität unendlich oft differenzierbar ist. Aus der Analytizität der Fläche oder aus dem Vorhandensein von nur endlich vielen Verzweigungspunkten folgt also, dass die Menge der Randpunkte die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Es stellt sich nun die Frage, ob Flächen mit konstanter negativer Krümmung im Raum existieren, deren Rand aus nur abzählbar unendlich vielen Randpunkten besteht. Diese Frage werden wir durch die Konstruktion eines Beispiels in folgendem Sinne beantworten (Abschnitt 4): *Es gibt eine unendlich oft differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  mit folgenden Eigenschaften:*

*$M$  hat konstante negative Krümmung, die Menge der Randpunkte von  $M$  ist abzählbar unendlich, es gibt eine isometrische  $C^\infty$ -Immersion von  $M$  in den dreidimensionalen Euklidischen Raum.*

Dabei ist ein Randpunkt von  $M$  ein Punkt, der zu der vollständigen Hülle von  $M$  bezüglich der inneren Metrik gehört, der aber nicht in  $M$  liegt.

Die Konstruktion des Beispiels beruht auf dem in Abschnitt 2.2 bewiesenen Fortsetzungssatz über die Lösungen der hyperbolischen Differentialgleichung  $\omega_{uv} = f(\omega)$ , die eine Verallgemeinerung der Gleichung  $\omega_{uv} = \sin \omega$  ist. Letztere Gleichung stellt das Theorema egregium für Flächen mit der Krümmung  $K = -1$  dar.  $u, v$  sind dabei Asymptotenlinienparameter,  $\omega$  ist der Winkel zwischen den Asymptotenlinien. Zum Vergleich sei noch auf den allgemeineren Fall der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Flächen im Raum mit negativer, von Null weg beschränkter Krümmung hingewiesen: Wie N. V. Efimov [5] bewiesen hat, gibt es auch unter diesen Flächen keine vollständigen. Es gibt aber solche, die nur endlich viele Randpunkte haben: E. R. Rozendorn [8] hat ein Beispiel mit vier Randpunkten gefunden.

Im *dritten Teil* werden Tschebyscheff-Netze auf Rotationsflächen vom Zylinder- oder Torustyp, also ohne Schnittpunkte mit der Achse untersucht. Das Ergebnis besteht aus den beiden folgenden Sätzen, von denen sich der erste auf rotationssymmetrische Tschebyscheff-Netze bezieht, der zweite auf beliebige Tschebyscheff-Netze (Abschnitt 5):

*Jede durch zwei beliebige Parallelkreise begrenzte Zone lässt sich durch eine Schar rotationssymmetrischer Tschebyscheff-Netze überdecken. Falls das Supremum der Parallelkreisradien endlich ist, lässt sich sogar die ganze Fläche durch eine Schar von rotationssymmetrischen Tschebyscheff-Netzen überdecken.*

*Auf einer vollständigen Rotationsfläche, die die Rotationsachse nicht schneidet und auf der es ein globales Tschebyscheff-Netz gibt, sind die Radien der Parallelkreise beschränkt.*

Es werden zunächst im Abschnitt 1 bekannte Eigenschaften der Tschebyscheff-Netze und der Flächen mit konstanter negativer Krümmung zusammengestellt (Sätze 1–4). Wir beschränken uns auf Netze, die global in zwei Kurvenscharen zerfallen.

Im Abschnitt 2.1 werden die Holmgrenschen Überlegungen auf den Fall der allgemeineren Differentialgleichung (2.1)  $\omega_{uv} = g(u, v) f(\omega)$  mit gewissen Voraussetzungen über  $f, g$  verallgemeinert (Satz 5).

Der Abschnitt 2.2 enthält den Beweis des entscheidenden Fortsetzungssatzes (Satz 6), welcher gestattet, eine Lösung der Differentialgleichung (2.8)  $\omega_{uv} = f(\omega)$ , deren Werte in einem Intervall  $I$  mit  $f(\omega) > 0$  liegen und die in einem Rechteck  $A$  gegeben ist, so in ein benachbartes Rechteck  $A^*$  fortzusetzen, dass die Werte von  $\omega$  in  $I$  bleiben.  $A^*$  hat dabei eine auf die Hälfte verkürzte Seite mit  $A$  gemeinsam und einen festen, nur von  $f$  abhängigen Flächeninhalt. Beim Beweis spielt die „Fortsetzungsbedingung“ eine wichtige Rolle:  $\omega$  wird durch eine Funktion  $\varphi$  ersetzt, die  $\omega$  (aber nicht die Ableitungen von  $\omega$ ) approximiert, wobei die Ableitungen von  $\varphi$  feste Schranken haben.

Die Abschnitte 3 und 4 enthalten als Folgerung die Aussagen über Mannigfaltigkeiten mit globalem Tschebyscheff-Netz (Satz 7) und die Konstruktion der Fläche mit abzählbar vielen Randpunkten (Satz 8). Abschnitt 5 enthält die Ergebnisse über Rotationsflächen mit Tschebyscheff-Netz (Sätze 9 und 10).

## 1. Tschebyscheff-Netze

1.1. Auf einer zweidimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeit betrachten wir Kurvennetze, die durch einen Netztensor definiert sind, d.h. die lokal als Lösung der Gleichung

$$\sum a_{ij} du^i du^j = 0 \quad (1.1)$$

darstellbar sind; dabei sind  $u^1, u^2$  lokale Parameter,  $a_{ij}(u^1, u^2)$  die Komponenten eines symmetrischen, kovarianten Tensors zweiter Stufe mit  $\det(a_{ij}) < 0$ .

**SATZ 1.** *Ein durch einen Netztensor definiertes Kurvennetz zerfällt global in zwei Scharen.*

*Beweis.* Wir betrachten die quadratische Form  $Q = \sum a_{ij} du^i du^j$  in der Tangentialebene eines festen Punktes. Die beiden Geraden, auf welchen  $Q$  den Wert Null annimmt, teilen die Ebene in vier Quadranten: In je zwei gegenüberliegenden nimmt  $Q$  positive, bez. negative Werte an. Durch die Orientierung ist in der Tangentialebene ein positiver Drehsinn definiert. Die beiden Nullgeraden von  $Q$  können nun folgendermassen unterschieden werden: Die eine Nullgerade überstreicht bei einer Drehung im positiven Sinne zuerst die Quadranten, in welchen  $Q$  positiv ist, die andere Nullgerade die Quadranten, in welchen  $Q$  negativ ist. Nach diesem Kriterium können die durch (1.1) definierten Richtungsfelder global unterschieden werden.

*Bemerkung.* Zwei Netztensoren  $a_{ij}, b_{ij}$ , die sich nur um ein Vielfaches vonein-

ander unterscheiden:  $a_{ij} = \lambda b_{ij}$ , wobei  $\lambda$  eine reellwertige, positive oder negative Funktion auf der Mannigfaltigkeit ist, definieren das selbe Netz.

**1.2. DEFINITION.** Ein Netz heisst Tschebyscheff-Netz (T-Netz), wenn in jedem Netzviereck gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

$g_{ij}(u^1, u^2)$  seien die Komponenten des Fundamentaltensors. Die Parameterlinien bilden genau dann ein T-Netz, wenn  $(\partial/\partial u^2)g_{11}(u^1, u^2) = 0$  und  $(\partial/\partial u^1)g_{22}(u^1, u^2) = 0$ . In diesem Fall kann man o.B.d.A. annehmen, dass  $u^1, u^2$  die Bogenlängen der  $u^1, u^2$ -Linien sind, d.h.  $g_{11} = 1, g_{22} = 1$  und  $g_{12} = \cos \omega$ , wobei  $\omega$  der Winkel zwischen den Netzlinien ist. Die erste Fundamentalform hat somit die einfache Gestalt

$$I: (du^1)^2 + 2 \cos \omega du^1 du^2 + (du^2)^2 \quad (1.2)$$

Für die Gauss'sche Krümmung erhält man aus dem Theorema egregium die Beziehung:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^1 \partial u^2} = -K \sin \omega \quad (1.3)$$

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:  $a = \det(a_{ij}), g = \det(g_{ij})$ ,

**SATZ 2.** Ein Netztensor  $a_{ij}$  ist genau dann Netztensor eines T-Netzes, wenn der normierte Tensor  $A_{ij} = \sqrt{|g| - a} a_{ij}$  die Codazzigleichungen erfüllt.

*Beweis.* Wir wählen lokale Parameter so, dass die Parameterlinien die Netzlinien sind; dann ist  $A_{11} = A_{22} = 0$  und die Codazzigleichungen lauten:

$$-\frac{\partial}{\partial u^1} A_{12} + A_{12} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u^2} A_{12} + A_{12} (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) = 0. \quad (1.4)$$

Wir benützen nun, dass  $\det(A_{ij})/g = -1$ , d.h.  $A_{12} = \sqrt{g}$  ist. Setzen wir dies in (1.4) ein, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} 2\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{g} \left[ -g_{12} \frac{\partial}{\partial u^2} g_{11} + g_{11} \frac{\partial}{\partial u^1} g_{22} \right] = 0 \\ 2\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{g} \left[ g_{22} \frac{\partial}{\partial u^2} g_{11} - g_{12} \frac{\partial}{\partial u^1} g_{22} \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

woraus unmittelbar  $(\partial/\partial u^2)g_{11} = 0$  und  $(\partial/\partial u^1)g_{22} = 0$  folgt.

*Bemerkung.*  $u^1, u^2$  seien beliebige, lokale Parameter in der Umgebung des Punktes  $P$ ,  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  seien Parameter in der selben Umgebung, so dass das Parameternetz ein T-Netz ist;  $P$  habe in beiden Parametersystemen die Koordinaten 0/0. Aus den Trans-

formationsformeln der  $\Gamma_{jk}^i$  folgt wegen  $\bar{\Gamma}_{12}^i = 0$  (vgl. (1.5)) einerseits, dass die Parametertransformation  $u^i = f^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ,  $i = 1, 2$ , den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial^2 f^l(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial \bar{u}^1 \partial \bar{u}^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^l(f^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), f^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \times \frac{\partial f^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial f^j(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial \bar{u}^2} = 0,$$

$$l = 1, 2.$$

Dies ist ein quasilineares, hyperbolisches System mit gleichem Hauptteil ([10] S. 323). Hieraus folgt andererseits gemäss dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen des charakteristischen Anfangsproblems: Zu gegebenen Anfangskurven  $(f^1(\bar{u}^1, 0), f^2(\bar{u}^1, 0))$  und  $(f^1(0, \bar{u}^2), f^2(0, \bar{u}^2))$ , die sich in  $P$  unter einem von Null und  $\pi$  verschiedenen Winkel schneiden, gibt es in einer Umgebung von  $P$  genau eine Parametertransformation  $u^1 = f^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ,  $u^2 = f^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ , so dass die  $\bar{u}^i$ -Linien ein T-Netz bilden. Auf Grund dieses Satzes erhält man z.B. alle T-Netze in der Euklidischen Ebene, indem man zwei sich schneidende Kurven gegen einander parallel verschiebt.

**SATZ 3.** *Auf einer orientierbaren, einfach zusammenhängenden, vollständigen, zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist jedes global definierte T-Netz global kartesisch, d.h. es gibt einen Homöomorphismus von der Mannigfaltigkeit auf die Euklidische Ebene, der das T-Netz auf das kartesische Netz der Ebene abbildet.*

*Beweis.* Wir werden zeigen, dass jede Kurve der einen Schar mit jeder Kurve der andern Schar genau einen Schnittpunkt hat. Daraus folgt, dass das Netz global kartesisch ist.

$M$  kann nicht kompakt sein, ist also homöomorph zur Euklidischen Ebene. Nach Sätzen aus der Bendixonschen Theorie (vgl. Kaplan [4]) folgt, dass keine Kurve geschlossen ist und dass sich die Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einmal schneiden. Wir zeigen: Je zwei Kurven aus verschiedenen Scharen schneiden sich mindestens einmal. Es seien nämlich  $c_o$  eine Kurve der ersten Schar,  $k_o$  eine Kurve der zweiten Schar, die sich in  $O$  schneiden.  $P$  sei ein Punkt, der nicht auf  $c_o$  oder  $k_o$  liegt;  $c_p, k_p$  seien die Kurve der ersten, bez. der zweiten Schar durch  $P$ .  $c_p$  schneide  $k_o$  in  $Q$ . Behauptung: Dann schneidet auch  $k_p c_o$  in einem Punkt  $S$ . Man kann nämlich o.B.d.A. annehmen, dass alle Kurven  $k_p$  durch Punkte  $P'$ , die auf  $c_p$  zwischen  $Q$  und  $P$  liegen,  $c_o$  schneiden.  $(P'_n)$  sei eine gegen  $P$  konvergente Folge, so dass die Bogenlängen  $\widehat{QP'_n}$  auf  $c_p$  monoton zunehmen.  $S'_n$  seien die Schnittpunkte von  $k_{P'}$  mit  $c_o$ . Die Längen  $\widehat{QP'_n}$  und  $\widehat{OS'_n}$  sind gleich, also ist  $OS'_n < QP$ . Wegen der Vollständigkeit von  $M$  konvergiert die Folge  $S'_n$  gegen einen Punkt  $S$ , und wegen der Regularität der zweiten Schar schneiden sich  $k_p$  und  $c_p$  in  $S$ .

$A$  sei die Menge der Punkte  $P \in M$ , für welche  $c_p$  und  $k_p k_o$ , bez.  $c_o$  schneiden.  $A$  ist wegen der Regularität der beiden Scharen offen. Es sei  $R$  ein Häufungspunkt von

A. In einer genügend kleinen Umgebung von  $R$  kann man dann ein Netzviereck und einen Punkt  $P \in A$  finden, so dass  $P$  und  $R$  Ecken dieses Netzviereckes sind. Aus dem vorher Bewiesenen folgt, dass  $R \in A$ , d.h.  $A=M$  (vgl. Bieberbach [9] und für einen etwas allgemeineren Fall Efimov [7]).

*Bemerkung.* Auf Grund des bewiesenen Satzes kann man auf  $M$  globale T-Parameter  $u, v$  einführen, indem man die eine Schar isometrisch auf die Parallelen zur  $u$ -Achse und die andere Schar isometrisch auf die Parallelen der  $v$ -Achse abbildet.

1.3. Auf den Flächen (mindestens dreimal stetig differenzierbar) mit negativer Gauss'scher Krümmung  $K$  im dreidimensionalen Euklidischen Raum ist das durch den zweiten Fundamentaltensor  $(L_{ij})$  definierte Netz das Netz der Asymptotenlinien. Wenn  $K=\text{const.}<0$  ist, bilden die Asymptotenlinien nach Satz 2 ein T-Netz, da ja

$$K = \frac{\det(L_{ij})}{\det(g_{ij})} \quad (1.6)$$

und  $1/\sqrt{-K}(L_{ij})$  für konstantes (und nur für konstantes)  $K$  die Codazzigleichungen erfüllt.

Es sei jetzt  $F$  eine Fläche (Differenzierbarkeitsklasse  $C^q$ ,  $q \geq 3$ ) mit  $K=-1$ ;  $u, v$  seien lokale Parameter, so dass die Parameterlinien die Asymptotenlinien sind: es ist also  $L_{11}=L_{22}=0$ . Aus (1.6) folgt unter Berücksichtigung von (1.2):  $L_{12} = \pm \sin \omega$ . Für die zweite Fundamentalform erhält man also:

$$\text{II: } \pm 2 \sin \omega \, du \, dv. \quad (1.7)$$

Sowohl die erste (1.2) als auch die zweite (1.7) Fundamentalform sind also nur von der einen Grösse  $\omega$  abhängig, welche Lösung der aus (1.3) folgenden Gleichung

$$\omega_{uv} = \sin \omega \quad (1.8)$$

ist und der Nebenbedingung

$$0 < \omega < \pi \quad (1.9)$$

genügt. Hierauf beruht der folgende Satz:

**SATZ 4.** *In einem einfach zusammenhängenden, offenen Gebiet  $G$  der  $u, v$ -Ebene sei die Funktion  $\omega: G \rightarrow \mathbb{R}(C^{q-2}$ ,  $q \geq 3$ ) Lösung der Gleichung (1.8) und genüge der Nebenbedingung (1.9). Dann gibt es bis auf Bewegung genau eine Fläche  $F$  ( $C^q$ ) mit der Gauss'schen Krümmung  $K=-1$ , so dass  $\omega(u, v)$  der Winkel zwischen den Asymptotenlinien ist.*

*Beweis.* Man definiere die Fundamentalformen gemäss (1.7) und (1.2). Wegen (1.9) ist  $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$ . Die Behauptung folgt nun aus dem Fundamentalsatz der Flächen-

theorie zusammen mit einer Monodromieüberlegung; die Integrabilitätsbedingungen sind mit (1.8) erfüllt.

## 2. Der Satz von Holmgren und der Fortsetzungssatz

2.1. Die Gleichung (1.3) ist bei gegebener Gauss'scher Krümmung  $K(u, v)$  eine quasilineare hyperbolische Differentialgleichung für  $\omega$ . Die Charakteristiken sind die Geraden  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$

Wir betrachten nun eine etwas allgemeinere Gleichung vom selben Typ:

$$\omega_{uv} = g(u, v) f(\omega) \quad (2.1)$$

und beweisen den folgenden, im Falle der Gleichung (1.8) von Holmgren stammenden Satz über die Lösungen in einem charakteristischen Streifen  $S = [a, b] \times \mathbf{R}$ .

### SATZ 5.

*Voraussetzungen.* –  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sei eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft  $f(t) \neq 0$  für  $t \in (0, \pi)$ ,

–  $g: S \rightarrow \mathbf{R}$  sei eine mindestens einmal stetig differenzierbare Funktion mit  $g(u, v) \geq 1/(c_0 + c_1|v|)$ , wobei  $c_0$  eine positive,  $c_1$  eine nicht negative, reelle Zahl ist,

–  $\omega: S \rightarrow \mathbf{R}$  sei eine Lösung von (2.1) mit  $\omega(u, 0) \in (0, \pi)$  für  $a \leq u \leq b$ .

*Behauptung.* Das Supremum

$$\omega = \sup \{ |v|, \omega(u, v') \in (0, \pi) \text{ für } (u, v') \in [a, b] \times [0, v], v \in \mathbf{R} \}$$

ist endlich, d.h.  $\omega$  hat im Streifen  $S$  mindestens eine 0-oder  $\pi$ -Stelle.

*Beweis.*  $u_0$  sei eine beliebige Stelle in  $[a, b]$ . Es sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die erste partielle Ableitung  $\omega_u(u_0, 0) > 0$ ,  $< 0$  oder  $= 0$  ist.

1.  $\omega_u(u_0, 0) > 0$ . Es gibt dann ein  $u_0$  enthaltendes Intervall  $[a', b']$ , in welchem  $\omega_u(u, 0) > 0$  ist. Wir zeigen, dass die Beschränkung von  $\omega$  auf den Streifen  $S' = [a', b'] \times \mathbf{R}$  in  $S'$  eine 0- oder eine  $\pi$ -Stelle hat.  $[a'', b'']$  sei ein in  $[a', b']$  enthaltenes Intervall, so dass  $a' < a'' < b'' < b'$ . Es gilt:

$$0 < \omega(a', 0) < \omega(a'', 0) < \omega(b'', 0) < \omega(b', 0) < \pi. \quad (2.2)$$

$\delta$  sei die kleinere der beiden Zahlen  $\omega(a'', 0) - \omega(a', 0)$  und  $\omega(b', 0) - \omega(b'', 0)$ .

Nach Voraussetzung ist  $f(t) \geq 0$  für  $t \in (0, \pi)$ . Wir nehmen zuerst  $f(t) > 0$  an und bezeichnen

$$\sigma' = \sup \{ v \mid \omega(u, v') \in (0, \pi) \text{ für } (u, v') \in [a', b'] \times [0, v], v > 0 \}.$$

Integriert man (2.1) über das Rechteck mit den Ecken  $(a', 0)$ ,  $(a'', 0)$ ,  $(a'', v)$ ,  $(a', v)$ ,

$0 < v < \sigma'$  so erhält man

$$\omega(a'', v) - \omega(a', v) = \omega(a'', 0) - \omega(a', 0) + \int_{a'}^{a''} \int_0^v g(u, v') f(\omega(u, v')) du dv'$$

woraus folgt:

$$\omega(a'', v) > \delta. \quad (2.3)$$

Entsprechend erhält man durch Integration über das Rechteck mit den Ecken  $(b'', 0)$ ,  $(b', 0)$ ,  $(b', v)$ ,  $(b'', v)$

$$\omega(b'', v) < \pi - \delta. \quad (2.4)$$

A sei die Menge:  $[a'', b''] \times [0, \sigma']$ .

Für  $(u, v) \in A$  folgt aus (2.1):

$$\omega_u(u, v) = \omega_u(u, 0) + \int_0^v g(u, v') f(\omega(u, v')) dv' > \omega_u(u, 0) > 0.$$

Dies ergibt zusammen mit (2.3) und (2.4) für  $(u, v) \in A$

$$\delta < \omega(a'', v) \leq \omega(u, v) \leq \omega(b'', v) < \pi - \delta. \quad (2.5)$$

Es sei  $\mu = \min \{f(t) \mid t \in [\delta, \pi - \delta]\}$ .

Wir integrieren nun (2.1) über das Rechteck mit den Ecken  $(a'', 0)$ ,  $(b'', 0)$ ,  $(b'', v)$ ,  $(a'', v)$ , wobei  $v < \sigma'$  ist und schätzen die rechte Seite nach unten ab:

$$\left. \begin{aligned} & [\omega(b'', v) - \omega(a'', v)] - [\omega(b'', 0) - \omega(a'', 0)] \\ &= \int_{a''}^{b''} \int_0^v g(u, v') f(\omega(u, v')) du dv' \geq \int_{a''}^{b''} \int_0^v \frac{\mu}{c_0 + c_1 v'} du dv'. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Hieraus folgt:

$$\text{für } c_1 > 0: \pi > \mu(b'' - a'') \frac{1}{c_1} \log \left( 1 + \frac{c_1}{c_0} v \right)$$

$$\text{für } c_1 = 0: \pi > \frac{\mu(b'' - a'')}{c_0} v$$

und weiter

$$\left. \begin{aligned} & \text{für } c_1 > 0: v < \frac{c_0}{c_1} \left[ \exp \left( \frac{c_1 \cdot \pi}{\mu(b'' - a'')} \right) - 1 \right] \\ & \text{für } c_1 = 0: v < \frac{\pi c_0}{\mu(b'' - a'')}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$



Falls  $f(t) < 0$ , führen wir die folgende Koordinatentransformation durch:  $u = \bar{u}$ ,  $v = -\bar{v}$ . Wir setzen  $\omega(u, v) = \omega(u, -\bar{v}) = \bar{\omega}(\bar{u}, \bar{v})$ . Es folgt:  $\bar{\omega}_{\bar{u}\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = -\omega_{uv}(\bar{u}, -\bar{v}) = -f(\bar{\omega}(\bar{u}, \bar{v}))g(\bar{u}, -\bar{v})$ .

Die Funktionen  $\bar{f}(\bar{\omega}) = -f(\bar{\omega})$  und  $\bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{u}, -\bar{v})$  erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 8, und es ist  $\bar{\omega}_{\bar{u}}(u_0, 0) > 0$  und  $\bar{f}(\bar{\omega}) > 0$ . Diesen Fall haben wir aber soeben behandelt.

2.  $\omega_u(u_0, 0) < 0$ . Diesen Fall führen wir durch die Koordinatentransformation  $u = -\bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$  auf 1. zurück.

3.  $\omega_u(u_0, 0) = 0$ . Wegen  $(\partial/\partial v) \omega_u(u_0, v) = g(u_0, v) f(\omega(u_0, v)) \neq 0$  ist für eine genügend kleine positive Zahl  $\varepsilon$   $\omega_u(u_0, \varepsilon) \neq 0$ . Durch die Transformation  $\bar{u} = u$ ,  $\bar{v} = v + \varepsilon$  wird auch dieser Fall auf 1. zurückgeführt.

*Bemerkung.* Entsprechend dem Lemma II Amsler [2] folgt auch hier aus dem Bewiesenen die Existenz einer Niveaulinie  $\omega = \pi$  oder  $\omega = 0$ , deren Steigung im Streifen  $[a', b'] \times \mathbf{R}$  von Null verschieden ist.

## 2.2 Der Fortsetzungssatz

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\omega_{uv} = f(\omega). \quad (2.8)$$

Über die Funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  setzen wir jetzt folgendes voraus:  $f$  gehöre zur Differenzierbarkeitsklasse  $C^r$  ( $r = 1, 2, \dots, \infty$ ),  $f$  und die erste Ableitung  $f'$  seien beschränkt und das Supremum  $M$  von  $f$  sei positiv. Wir führen noch einige Bezeichnungen ein:  $\alpha, \beta, \delta$  seien drei reelle Zahlen mit  $\alpha < \beta$ ,  $\delta > 0$ , so dass  $f(\tau) \geq 0$  für  $\tau \in [\alpha - \delta, \beta + \delta]$ ;  $A$  sei das charakteristische Rechteck  $[0, a] \times [0, b]$  in der  $u, v$ -Ebene,  $a, b > 0$ ,  $A^*$  das charakteristische Rechteck  $[0, a^*] \times [b, b + b^*]$ , wobei  $a^* = a/2$ ,  $b^* = (\beta - \alpha)/aM$  (d.h.  $A^*$  hat den Flächeninhalt  $a^*b^* = (\beta - \alpha)/2M$ ).

Nun beweisen wir den folgenden Fortsetzungssatz:

**SATZ 6.** *Voraussetzung:*  $\omega$  sei eine  $C^q$ -Lösung ( $2 \leq q \leq r + 1$ ) von (2.8) in  $A$ , die der folgenden Fortsetzungsbedingung genügt: Es gibt eine Funktion  $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi \in C^1$ , so dass

- (i)  $|\omega(u, v) - \varphi(u, v)| < \delta$ ,      (ii)  $\varphi(u, v) \in [\alpha, \beta]$ ,
- (iii)  $|(\partial/\partial u)\varphi(u, v)| \leq (\beta - \alpha)/a$ ,      (iv)  $|(\partial/\partial v)\varphi(u, v)| \leq (\beta - \alpha)/b$ .

*Behauptung.*  $\omega$  hat eine Fortsetzung  $\tilde{\omega}$  auf  $A \cup A^*$  in folgendem Sinne: In  $A^*$  gibt es eine  $C^q$ -Lösung  $\omega^* \rightarrow \mathbf{R}$  von (2.8), so dass folgendes gilt:

- 1)  $\omega^*|_{A \cap A^*} = \omega|_{A \cap A^*}$ ,
- 2) die Funktion  $\tilde{\omega}$ , definiert durch  $\tilde{\omega}|_A = \omega$ ,  $\tilde{\omega}|_{A^*} = \omega^*$ , gehört zur Klasse  $C^q$ .
- 3)  $\omega^*$  genügt in  $A^*$  der Fortsetzungsbedingung, d.h. es gibt eine Funktion  $\varphi^*: A^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi^* \in C^1$  (i)\*  $|\omega^*(u, v) - \varphi^*(u, v)| < \delta$ ,      (ii)\*  $\varphi^*(u, v) \in [\alpha, \beta]$ ,  
(iii)\*  $|(\partial/\partial u)\varphi^*(u, v)| \leq (\beta - \alpha)/a^*$ ,      (iv)\*  $|(\partial/\partial v)\varphi^*(u, v)| \leq (\beta - \alpha)/b^*$ .



*Folgerung.* Die Funktion  $\tilde{\omega}$  genügt der Gleichung (2.8), und es gilt  $\tilde{\omega}(u, v) \in (\alpha - \delta, \beta + \delta)$ .

*Beweis.* Es sei  $u_0$  eine Stelle, so dass

$$\varphi(u_0, b) = \min \{ \varphi(u, b) \mid u \in [0, a/2] \}, \text{ und es sei}$$

$$\delta^* = \frac{1}{2} \{ \min \delta - |\omega(u, b) - \varphi(u, b)| \mid u \in [0, a/2] \} 0.$$

Da  $f$  und  $f'$  beschränkt sind, lässt sich das charakteristische Anfangswertproblem der Gleichung (2.8) für jedes vorgegebene Rechteck lösen; insbesondere gibt es genau eine in ganz  $A^*$  definierte Lösung  $\omega^*$  der Gleichung (2.8) mit den folgenden Anfangswerten:

$$\left. \begin{aligned} \omega^*(u, b) &= \omega(u, b), \quad u \in [0, a^*] \\ \omega^*(u_0, v) &= \omega(u_0, b) + \frac{v-b}{b^*} [\alpha + Mu_0 b^* - \varphi(u_0, b)] \\ &\quad + \varrho(v), \quad v \in [b, b+b^*]. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Dabei ist  $\varrho: [b, b+b^*] \rightarrow \mathbf{R}$  eine  $C^q$ -Funktion, für welche  $|\varrho(v)| \leq \delta^*$  und die so beschaffen ist, dass  $\varrho(b) = 0$  und  $\partial^n \omega^* / \partial v^n = \partial^n \omega / \partial v^n$  ist für  $(u, v) = (u_0, b)$  und  $1 \leq n \leq q$ . Die Existenz einer derartigen Funktion für  $q = \infty$  folgt aus einem Satz von E. Borel, wonach es zu jeder beliebigen unendlichen Folge von reellen Zahlen  $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$  eine in einer Umgebung von  $b$  definierte  $C^\infty$ -Funktion gibt, deren  $n$ -te Ableitung an der Stelle  $b$  den Wert  $a_n$  annimmt. Unmittelbar aus (2.9) und den Eigenschaften von  $\varrho$  folgen die Punkte 1) und 2) der Behauptung.

Zu 3).  $\psi: A^* \rightarrow \mathbf{R}$  sei die durch  $\psi(u, v) = \int_b^v \int_{u_0}^u f(\omega^*(u', v')) du' dv'$  definierte Funktion. Für die gemischte Ableitung gilt:

$$\psi_{uv} = \omega_{uv}^*.$$

Hieraus folgt:

$$\omega^*(u, v) = \omega^*(u, b) + \omega^*(u_0, v) - \omega^*(u_0, b) + \psi(u, v).$$

Nach Einsetzen der Anfangswerte (2.9) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \omega^*(u, v) &= \omega(u, b) + \varrho(v) - (v-b) \frac{aM}{\beta-\alpha} \varphi(u_0, b) \\ &\quad + (v-b) \left( \frac{\alpha}{\beta-\alpha} aM + Mu_0 \right) + \psi(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Die Funktion  $\varphi^*$  definieren wir nun folgendermassen:

$$\varphi^*(u, v) = \omega^*(u, v) - \omega(u, b) - \varrho(v) + \varphi(u, b). \quad (2.11)$$

Hieraus folgt, dass  $\varphi^*$  die Eigenschaft (i)\* hat, denn:

$$\begin{aligned} |\omega^*(u, v) - \varphi^*(u, v)| &\leq |\omega(u, b) - \varphi(u, b)| + |\varrho(v)| \\ &\leq |\delta - 2\delta^*| + \delta^* = \delta - \delta^* < \delta. \end{aligned}$$

Um die Eigenschaft (ii)\* nachzuweisen, zeigen wir, dass die Mengen

$$V = \{v_0 \in [b, b + b^*] \mid \varphi^*(u, v) \in [\alpha, \beta] \text{ für } (u, v) \in [0, a/2] \times [b, v_0]\}$$

und

$$W = \{v_0 \in [b, b + b^*] \mid \omega^*(u, v) \in (\alpha - \delta, \beta + \delta) \text{ für } (u, v) \in [0, a/2] \times [b, v_0]\}$$

gleich sind. Hieraus folgt nämlich, dass  $V = [b, b + b^*]$ , weil offensichtlich  $W$  offen in  $[b, b + b^*]$  und  $V$  abgeschlossen und nicht leer ist.  $V \subset W$  folgt unmittelbar aus (i)\*. Um zu zeigen, dass  $W \subset V$ , setzen wir zunächst (2.10) in (2.11) ein. Nach einer einfachen Umformung erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(u, v) &= \varphi(u, b) \left[ 1 - (v - b) \frac{aM}{\beta - \alpha} \right] + (v - b) \frac{aM}{\beta - \alpha} \\ &\quad \times [\varphi(u, b) - \varphi(u_0, b)] + M(v - b) \left( \frac{\alpha a}{\beta - \alpha} + u_0 \right) + \psi(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Es sei nun  $v_0 \in W$ ; wir schätzen  $\varphi^*(u, v)$  für alle  $(u, v)$  mit  $v \in [b, v_0]$  nach unten und nach oben ab, indem wir in (2.12) jeden Summanden einzeln wie folgt abschätzen:

Für den ersten Summanden erhalten wir, da nach Voraussetzung (ii)  $\varphi(u, v) \in [\alpha, \beta]$ , und da  $(v - b) \leq b^* = (\beta - \alpha)/aM$ , die eckige Klammer also  $\geq 0$  ist, die Abschätzung:

$$\alpha - (v - b) \frac{\alpha a M}{\beta - \alpha} \leq \varphi(u, b) \left[ 1 - (v - b) \frac{aM}{\beta - \alpha} \right] \leq \beta - (v - b) \frac{\beta a M}{\beta - \alpha}. \quad (2.13)$$

Zweiter Summand: Einerseits ist  $[\varphi(u, b) - \varphi(u_0, b)] \geq 0$  gemäss der Definition von  $u_0$ ; andererseits gilt nach dem Mittelwertsatz und der Voraussetzung (iii):

$$[\varphi(u, b) - \varphi(u_0, b)] \leq |u - u_0| \frac{\beta - \alpha}{a}.$$

Es seien  $u_1 = \min(u, u_0)$ ,  $u_2 = \max(u, u_0)$  für  $u \in [0, a/2]$ .

Dann ist  $|u_0 \rightarrow u| = u_2 - u_1$ . Für den zweiten Summanden folgt:

$$0 \leq (v - b) \frac{aM}{\beta - \alpha} [\varphi(u, b) - \varphi(u_0, b)] \leq M(v - b)(u_2 - u_1). \quad (2.14)$$

Vierter Summand: Da  $0 \leq f(\omega^*) \leq M$  für  $\omega^* \in (\alpha - \delta, \beta + \delta)$ , gilt:

$$M(u_1 - u_0) \leq \int_{u_0}^u f(\omega^*(u', v)) du' \leq M(u_2 - u_0) \quad (2.15)$$

und folglich auch

$$\left. \begin{aligned} M(v - b)(u_1 - u_0) &\leq \int_b^v \int_{u_0}^u f(\omega^*(u', v')) du' dv' \\ &= \psi(u, v) \leq M(v - b)(u_2 - u_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Setzen wir (2.13), (2.14) und (2.16) in (2.12) ein, so erhalten wir einerseits  $\varphi^*(u, v) \geq \alpha + M(v - b)u_1 \geq \alpha$  und andererseits  $\varphi^*(u, v) \leq \beta + M(v - b)[-a + 2u_2 - u_1] \leq \beta - 2M(v - b)[a/2 - u_2] \leq \beta$  für  $v \leq v_0$ .

Damit ist gezeigt, dass auch  $W \subset V$ , also  $V = W$ .

Um (iii)\* und (iv)\* nachzuweisen, differenzieren wir (2.12) nach  $u$ , bez. nach  $v$ :

$$\varphi_u^*(u, v) = \varphi_u(u, b) + \int_b^v f(\omega^*(u, v')) dv'.$$

Unter Berücksichtigung von (iii) folgt:

$$|\varphi_u^*(u, v)| \leq |\varphi_u(u, b)| + \int_b^v f(\omega^*(u, v')) dv' \leq \frac{\beta - \alpha}{a} + Mb^* = \frac{\beta - \alpha}{a^*}.$$

Für die Ableitung nach  $v$  erhält man aus (2.12):

$$\varphi_v^*(u, v) = -\frac{aM}{\beta - \alpha} \varphi(u_0, b) + M\left(\frac{a\alpha}{\beta - \alpha} + u_0\right) + \int_{u_0}^u f(\omega^*(u', v)) du'.$$

Mit Hilfe von (2.15) und der Voraussetzung (ii) erhalten wir:

$$-Ma + Mu_1 \leq \varphi_v^*(u, v) \leq Mu_2 \leq Ma = \frac{\beta - \alpha}{b^*}$$

folglich  $|\varphi^*(u, v)| \leq (\beta - \alpha)/b^*$ . Damit ist der Fortsetzungssatz bewiesen.

Bei der Konstruktion und beim Nachweis der Fortsetzungseigenschaft von  $\omega^*$  haben wir nur Eigenschaften der Restriktionen von  $\omega$  und  $\varphi$  auf die linke Hälfte von  $A$  benutzt. Durch analoge Überlegungen für die rechte Hälfte von  $A$  erhält man eine der Fortsetzung  $\omega^*$  entsprechende Fortsetzung  $\omega^{**}$  von  $\omega$  auf das Rechteck  $A^{**} = [a/2, a] \times [b, b+b^*]$ .

*Bemerkungen:*

1. Wir geben nun noch eine Lösung von (2.8) an, die den Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes genügt.

$A_0$  sei das Quadrat  $[-a/2, a/2] \times [-a/2, a/2]$  mit der Seitenlänge

$$a = \sqrt{2 \frac{\beta - \alpha}{M}}. \quad (2.17)$$

*Behauptung.* Die Lösung  $\omega$ , die auf den Koordinatenachsen  $v=0$ ,  $u=0$  den Wert  $(\alpha + \beta)/2$  annimmt, erfüllt in  $A_0$  die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes.

*Beweis.*  $A'_0$  sei die obere Hälfte des Quadrates  $A_0$ :

$$A'_0 = [-a/2, a/2] \times [0, a/2].$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie beim Beweis des Fortsetzungssatzes beweisen wir, dass  $\omega(u, v) \in [\alpha, \beta]$  für  $(u, v) \in A'_0$ , indem wir zeigen, dass die Mengen

$$V = \{v \in [0, a/2] \mid \omega(u, v') \in [\alpha, \beta] \text{ für } (u, v') \in [-a/2, a/2] \times [0, v]\}$$

und

$$W = \{v \in [0, a/2] \mid \omega(u, v') \in (\alpha - \delta, \beta + \delta) \text{ für } (u, v') \in [-a/2, a/2] \times [0, r]\}$$

gleich sind. Hieraus folgt, dass  $V = [0, a/2]$  ist.

Offensichtlich ist  $V \subset W$ . Es sei jetzt  $v \in W$ . Für alle  $u \in [-a/2, a/2]$  gilt dann die folgende Ungleichung:

$$-M \frac{a^2}{4} \leq -M |u| v \leq \int_0^u \int_0^v f(\omega(u', v')) du' dv' \leq M |u| v \leq M \frac{a^2}{4}.$$

Aus (2.8) erhält man unter Berücksichtigung der Anfangswerte:

$$\omega(u, v) - \frac{\alpha + \beta}{2} = \int_0^u \int_0^v f(\omega(u', v')) du' dv'.$$

Setzen wir dies oben ein, so folgt:

$$-M \frac{a^2}{4} \leq \omega(u, v) - \frac{\alpha + \beta}{2} \leq M \frac{a^2}{4}.$$

Nach Einsetzen von (2.17) erhalten wir:  $\omega(u, v) \in [\alpha, \beta]$ , d.h. es ist  $v \in V$  also folgt  $W = V$ .

Wegen  $\omega(-u, -v) = \omega(u, v)$  ist  $\omega(u, v) \in [\alpha, \beta]$  für alle  $(u, v) \in A_0$ . Wir setzen nun  $\varphi(u, v) = \omega(u, v)$ . Die Bedingungen (i) und (ii) des Fortsetzungssatzes sind dann sicher erfüllt. (iii) folgt aus der Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\varphi_u(u, v)| &= |\omega_u(u, v)| = \left| \int_0^v f(\omega(u, v')) dv' \right| \\ &\leq M |v| \leq \frac{1}{2} M \sqrt{2 \frac{\beta - \alpha}{M}} = \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{2 \frac{\beta - \alpha}{M}}}. \end{aligned}$$

Entsprechend weist man (iv) nach. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei noch bemerkt, dass die Restriktion von  $\omega$  auf ein kleineres in  $A_0$  enthaltenes, charakteristisches Rechteck die Fortsetzungsbedingungen ebenfalls erfüllt.

2. Im Abschnitt 4 werden wir den Fortsetzungssatz auf den folgenden Spezialfall anwenden:  $f(\omega) = \sin \omega$ ,  $[\alpha, \beta] = [\pi/4, 3\pi/4]$ ,  $\delta$  ist eine beliebige Zahl aus dem Intervall  $(0, \pi/4)$ .

In diesem Fall ist  $M = 1$  und der Inhalt des Rechteckes  $A^*$  ist  $\pi/4$ .

### 3. T-Netze auf Mannigfaltigkeiten, deren Krümmung von 0 verschieden ist

**SATZ 7.** *M sei eine mindestens dreimal stetig differenzierbare, orientierbare, zweidimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Krümmung festes Vorzeichen habe:  $K > 0$  oder  $K < 0$ . Wenn es auf M ein globales T-Netz gibt, dann ist*

$$\inf |K| = 0 \quad \text{und} \quad \sup |\text{grad } 1/K| = \infty.$$

Wir beweisen den Satz 7 indirekt, d.h. wir nehmen an, es gebe ein globales T-Netz und es sei 1) entweder  $\inf |K| > 0$  oder 2)  $\sup |\text{grad } 1/K| = q < \infty$  und zeigen, dass beide Fälle zu einem Widerspruch mit Satz 5 führen.

$\tilde{M}$  sei die universelle Ueberlagerung von  $M$ . Dem T-Netz auf  $M$  entspricht ein T-Netz auf  $\tilde{M}$ , das nach Satz 3 global kartesisch ist. Wir führen entsprechend der Bemerkung zu Satz 3 globale T-Parameter  $(u, v)$  ein. Zwischen der Krümmung und dem Winkel  $\omega$  zwischen den Parameterlinien besteht die Beziehung (1.3), wobei  $\omega$  noch die Nebenbedingung (1.9) erfüllt.

Wir betrachten, wie in 2.1 einen charakteristischen Streifen  $S = [a, b] \times \mathbf{R}$ . Im Fall 1) genügen die Funktionen  $g(u, v) = |K(u, v)|$  und  $f(\omega) = -\operatorname{sig}(K)\sin\omega$  der Voraussetzung des Satzes 5.  $\omega$  hat folglich in  $S$  eine 0- oder  $\pi$ -Stelle. Dies widerspricht aber (1.9).

2) Wir setzen  $k = 1/K$ . Für den Gradienten von  $k$  erhalten wir:

$$(\operatorname{grad} k)^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega} [k_u^2 - 2 \cos \omega k_u k_v + k_v^2].$$

Zusammen mit der Voraussetzung erhalten wir hieraus

$$k_u^2 - 2 \cos \omega k_u k_v + k_v^2 \leq q^2 \sin^2 \omega. \quad (3.1)$$

Wir bezeichnen mit  $S''$  den Streifen  $[a'', b''] \times \mathbf{R}$ , wobei  $a'', b''$  die gleiche Bedeutung haben wie im Beweis des Satzes 5. Es folgt wie in jenem Beweis, dass im oberen oder unteren Halbstreifen von  $S''$  die Ungleichungen (2.5) gelten. Im Halbstreifen, in dem dies zutrifft, gilt für den kleineren Eigenwert  $1 - |\cos \omega|$  der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \omega \\ -\cos \omega & 1 \end{pmatrix} \text{ die Ungleichung}$$

$$1 - |\cos \omega| > 1 - \cos \delta.$$

Aus (3.1) folgt nun

$$1 - \cos \delta \leq \frac{k_u^2 - 2k_u k_v \cos \omega + k_v^2}{k_u^2 + k_v^2} \leq \frac{q^2}{k_u^2 + k_v^2};$$

weiter folgt:

$$k_u^2 + k_v^2 \leq \frac{q^2}{1 - \cos \delta}$$

und somit

$$|k_v| \leq \frac{q}{\sqrt{1 - \cos \delta}}. \quad (3.2)$$

Wir bezeichnen:

$$c_1 = \frac{q}{\sqrt{1 - \cos \delta}} \quad \text{und} \quad c_0 = \max \{|k(u, 0)|, a'' \leq u \leq b''\}.$$

Durch Integration von (3.2) folgt für den betrachteten Halbstreifen:

$$|k| \leq c_0 + c_1 |v| \quad \text{d.h.} \quad |K| \geq \frac{1}{c_0 + c_1 |v|}.$$

Hieraus folgt wie im Beweis des Satzes 5, dass  $\omega$  im betrachteten Halbstreifen von  $S''$  eine 0- oder  $\pi$ -Stelle hat; dies steht aber im Widerspruch zur Ungleichung (1.9). Damit ist Satz 7 bewiesen.

**Bemerkungen:**

1. Der Satz von Hilbert über die Nichtexistenz vollständiger Flächen mit konstanter negativer Gauss'scher Krümmung folgt aus Satz 7, denn der Satz von Hilbert ist ja äquivalent zu der Aussage, dass es in der hyperbolischen Ebene keine globalen T-Netze gibt.

2. Beispiele für vollständige Flächen im Raum mit einem globalen T-Netz und mit  $K \neq 0$  sind das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2$  mit  $K > 0$  und das hyperbolische Paraboloid  $z = x^2 - y^2$  mit  $K < 0$ . Diese beiden Flächen sind Spezialfälle der Schiebflächen:  $\vec{x}(u, v) = \vec{a}(u) + \vec{b}(v)$ ;  $\vec{x}(u, v)$  ist der Ortsvektor der Fläche,  $\vec{a}(u)$ ,  $\vec{b}(v)$  sind die Ortsvektoren zweier glatter, sich schneidender Raumkurven. Auf allen Schiebflächen bilden die Parameterlinien ein T-Netz.

#### 4. Existenz einer Fläche mit konstanter, negativer Gauss'scher Krümmung und abzählbar unendlich vielen Randpunkten

**SATZ 8.** *Es existiert eine zweidimensionale Riemannsche  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$  mit folgenden Eigenschaften:*

- 1)  *$M$  hat konstante, negative Krümmung  $K = -1$*
- 2)  *$M$  hat abzählbar unendlich viele Randpunkte<sup>1)</sup>*
- 3) *Es gibt eine isometrische  $C^\infty$ -Immersion von  $M$  in den dreidimensionalen Euklidischen Raum.*

Wir beweisen diesen Satz, indem wir die Mannigfaltigkeit  $M$  konstruieren. Die der Mannigfaltigkeit  $M$  zugrunde liegende topologische Mannigfaltigkeit, die wir ebenfalls mit  $M$  bezeichnen, definieren wir rekursiv:  $\bar{M}_0$  sei das Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  in der  $x, y$ -Ebene; die Seiten von  $\bar{M}_0$  seien die acht abgeschlossenen Hälften der Quadratseiten.  $\bar{M}_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und die Seiten von  $\bar{M}_{n-1}$  seien schon definiert.

Mit  $\bar{M}_n$  bezeichnen wir dann die Vereinigung von  $\bar{M}_{n-1}$  mit den gleichschenkligen Trapezen, die eine Seite von  $\bar{M}_{n-1}$  als längere Grundlinie haben, deren Schenkel mit dieser Seite den Winkel  $\pi/2^{n+2}$  bilden, deren kürzere Grundlinie gleich lang wie die Schenkel ist und deren Inneres ausserhalb von  $\bar{M}_{n-1}$  liegt.

Als Seiten von  $\bar{M}_n$  definieren wir die abgeschlossenen Hälften der Schenkel und der kürzeren Grundlinie.

Nun definieren wir  $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ , wobei  $M_n$  das Innere von  $\bar{M}_n$  bedeutet. Wir bezeichnen noch  $\bar{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{M}_n$  und  $W = \bar{M} - M$ .  $W$  besteht aus den Eck- bzw. Seitenmittelpunkten der Trapeze, enthält also abzählbar unendlich viele Punkte; wir nennen

---

<sup>1)</sup> Zur Definition der Randpunkte siehe Einleitung Seite 349.

sie Windungspunkte. Der Mannigfaltigkeit  $M$  geben wir auf folgende Weise eine differenzierbare Struktur:  $\overline{\mathfrak{U}}$  sei das System der Teilmengen  $\bar{A} \subset \bar{M}$ , die Vereinigung zweier längs einer ganzen, bzw. halben Seite aneinandergrenzender Trapeze sind. Dabei betrachten wir auch  $\bar{M}_0$  als Trapez.  $A$  bezeichne das Innere der Menge  $\bar{A}$ ; das System  $\mathfrak{U}$  der Mengen  $A$  ist eine offene Überdeckung von  $M$ .  $\bar{\phi}$  sei eine Abbildung von  $\bar{M}$  in die Euklidische  $u, v$ -Ebene mit folgenden Eigenschaften:

1) Jede Menge  $\bar{A} \in \overline{\mathfrak{U}}$  wird homöomorph auf zwei aneinandergrenzende Rechtecke je mit dem Flächeninhalt  $\pi/4$  abgebildet, so dass die Seiten, bzw. Halbseiten der Trapeze von  $\bar{A}$  in die Seiten, bzw. Halbseiten der Rechtecke übergehen (siehe Bemerkung 2 im Abschnitt 2.2).

2)  $\bar{\phi}(\bar{M}_0)$  ist das Quadrat mit achsenparallelen Seiten, Inhalt  $\pi/4$  und dem Nullpunkt als Mittelpunkt.

*Bemerkungen:*

1. Eine solche Abbildung kann man leicht konstruieren, indem man z.B. die Trapeze geeignet in Dreiecke zerlegt und simplizial auf die entsprechend unterteilten Rechtecke abbildet. Vgl. Fig. 1.

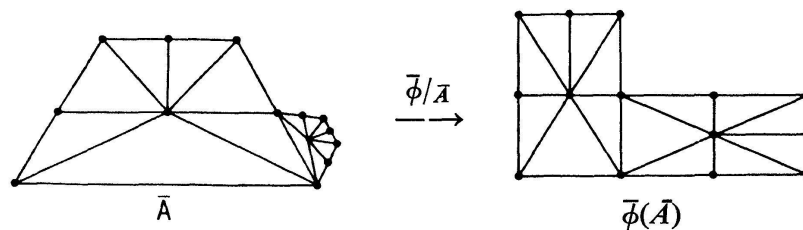


Fig. 1

2. Die Restriktionen  $\bar{\phi}_n$  von  $\bar{\phi}$  auf  $\bar{M}_n$  sind stetig, ebenfalls die Restriktion  $\phi$  von  $\bar{\phi}$  auf  $M$ .  $\bar{\phi}$  ist stetig bezüglich der auf  $\bar{M}$  durch das Aneinandersetzen der Trapeze definierten Identifizierungstopologie. Diese Topologie ist feiner als die durch die Topologie der Euklidischen Ebene induzierte. Beide Topologien induzieren jedoch auf  $M$  und auf den Mengen  $\bar{M}_n$  dieselbe Topologie. Bei den folgenden Überlegungen beziehen wir uns auf die Identifizierungstopologie.

Wir übertragen nun mittels  $\phi$  die Riemannsche Metrik der Euklidischen  $u, v$ -Ebene auf  $M$ . Die zugehörige innere Metrik bezeichnen wir mit  $\varrho$ . Nun erweitern wir  $\varrho$  zu einer Metrik  $\bar{\varrho}$  auf  $\bar{M}$  (Zu dieser Erweiterung vgl. man H.-J. Kowalsky, Top. Räume, Seite 195, Satz 32.3).

**LEMMA 1.**  $\bar{M}$  ist als metrischer Raum vollständig.

*Folgerung.* Die Windungspunkte sind die einzigen Randpunkte von  $M$ .

Bevor wir dieses Lemma beweisen, stellen wir zwei Hilfsbetrachtungen an.

1. Die Gesamtheit der Trapeze, die in einem Windungspunkt  $w$  zusammenstossen,



besteht aus einem Trapez  $T_0$  und zwei Folgen  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(T'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Trapezen, die längs einer Seite bzw. Halbseite aneinandergrenzen. Dabei bilden die Halbseiten von  $T_0$ , die in  $w$  zusammenstossen, die längere Grundseite von  $T_1$  bzw.  $T'_1$ . Die Rechtecke  $\bar{\phi}(T_{2i})$  und  $\bar{\phi}(T'_{2i})$ ,  $i \geq 1$ , sind kongruent zu  $\bar{\phi}(T_0)$ ; die Rechtecke  $\bar{\phi}(T_{2i+1})$ ,  $i \geq 1$ , sind unter sich kongruent, ebenso die Rechtecke  $\bar{\phi}(T'_{2i+1})$ . Hieraus folgt, dass die Windungspunkte isoliert sind.

2. Es sei  $a$  die Seitenlänge des Quadrates  $\bar{\phi}(\bar{M}_0)$ . Ist das Trapez  $T$  in  $\bar{M}_n$  enthalten, so hat das Rechteck  $\bar{\phi}(T)$  Seitenlängen  $\geq a/2^n$ . Nun sei  $T$  ein Trapez, so dass die Länge einer Seite des Rechteckes  $\bar{\phi}(T)$  kleiner als  $a/2^{n+1}$  ist.

*Behauptung.* Dann gilt für den Abstand zwischen  $T$  und  $\bar{M}_n$ :  $\bar{q}(T, \bar{M}_n) > a2^n$ .

*Beweis.* Wir betrachten die eindeutig bestimmte Folge  $T_0, T_1, \dots, T_N = T$  aneinandergrenzender Trapeze, die  $\bar{M}_n$  mit  $T$  verbindet, d.h.  $T_i \subset \bar{M}_{n+i} - \bar{M}_{n+i-1}$ ,  $0 \leq i \leq N$ .

Die kürzere Seitenlänge des Rechteckes  $\bar{\phi}(T_i) = R_i$  sei  $a_i$ ;  $s_i, s'_i$  seien parallele Seiten von  $R_i$  mit der Länge  $a_i$ . Da alle Rechtecke flächengleich sind, ist  $a_i \leq a$  und die andere Seitenlänge von  $R_i$  ist  $b_i = a^2/a_i$ . Dabei ist  $a_0 \geq a/2^n$  und  $a_N < a/2^{n+2}$  nach Voraussetzung über  $T$ .  $k$  sei der kleinste Index, so dass  $a_k \leq a_N$ ;  $k$  ist  $\geq 2$ . Wir zeigen, dass die Rechtecke  $R_k$  und  $R_{k-2}$  mit  $R_{k-1}$  an den kürzeren parallelen Seiten  $s_{k-1}, s'_{k-1}$  zusammenstossen; daraus folgt dann  $a_k = \frac{1}{2}a_{k-1}$  und

$$\bar{q}(T, \bar{M}_n) \geq \bar{q}(T_{k-2}, T_k) = b_{k-1} = \frac{a^2}{a_{k-1}} = \frac{a^2}{2a_k} \geq \frac{a^2}{2a_N} > a2^n.$$

Zunächst ergibt sich, dass  $R_{k-1}$  und  $R_k$  an der kürzeren Seite  $s_{k-1}$  zusammenstossen: anderfalls hätte nämlich  $R_k$  die Seitenlängen  $\frac{1}{2}b_{k-1} = a^2/2a_{k-1}$  und  $2a_{k-1}$ ; wegen  $a_{k-1} > a_k$  müsste  $a_k = a^2/2a_{k-1}$  sein; daraus würde wegen  $a_{k-1} \leq a$  folgen  $a_k \geq a/2$  im Widerspruch zu  $a_k \leq a_N < a/2$ . Somit ist  $a_{k-1} = 2a_k$  und  $b_{k-1} = a^2/a_{k-1}$ . Dann ist aber  $R_{k-1} \cap R_{k-2} = s'_{k-1}$ , die zu  $s_k$  parallele Seite, denn sonst wären  $R_{k-2}$  und  $R_k$  kongruent, also  $a_{k-2} = a_k$  im Widerspruch zur Definition von  $k$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

*Beweis* des Lemmas 1:  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sei eine Cauchyfolge in  $\bar{M}$ ; man kann o.B.d.A. annehmen, dass jeder Punkt  $p_i$  im Innern eines Trapezes  $T_i$  liegt (Falls ein Punkt  $p_i$  nicht im Innern eines Trapezes liegt, kann man ihn durch einen im Innern eines Trapezes liegenden Punkt  $p'_i$  ersetzen, so dass  $\bar{q}(p_i, p'_i) < 1/i$  ist).

Wie oben bezeichne  $a_i$  die Länge der kürzeren Seite des Rechteckes  $\bar{\phi}(T_i)$ . Für das Infimum  $\delta = \inf\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$  gilt:  $\delta > 0$ . Anderfalls gäbe es nämlich eine Teilfolge  $\{p_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $a_{i_k+1} < a/2^{n_k+1}$ , wobei  $n_k = \min\{n, p_{i_k} \in \bar{M}_n\}$ . Eine Folge mit dieser Eigenschaft ist aber nach der Hilfsbetrachtung 2 keine Cauchyfolge, denn es wäre  $\bar{q}(p_{i_k}, p_{i_{k+1}}) > a2^{n_k}$ .

$N$  sei ein Index, so dass  $\bar{q}(p_i, p_k) < \delta/8$  für  $i, k \geq N$ .

In der abgeschlossenen  $\delta/8$ -Umgebung  $\bar{U}$  von  $p_N$  gibt es wegen der Hilfsbetrachtung 1 höchstens einen Windungspunkt  $w$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

a)  $\bar{U}$  enthält keinen Windungspunkt. Die Restriktion  $\bar{\phi}|_{\bar{U}}$  ist dann eineindeutig;  $\bar{\phi}(\bar{U})$  ist eine abgeschlossene Kreisscheibe, die in einem oder in zwei benachbarten Rechtecken enthalten ist.

b)  $\bar{U}$  enthält einen Windungspunkt  $w$  und die Folge konvergiert gegen  $w$ .

c)  $\bar{U}$  enthält einen Windungspunkt  $w$ , aber die Folge konvergiert nicht gegen  $w$ . Wir führen diesen Fall auf a) zurück, indem wir mit  $\delta'$  den Abstand zwischen  $w$  und der Folge  $(p_i)$  bezeichnen, mit  $N'$  einen Index, so dass  $\bar{q}(p_j, p_k) < \delta'/2$  für  $j, k \geq N'$ . Auf die abgeschlossene  $\delta'/2$ -Umgebung von  $p_{N'}$ , können wir die Überlegung a) anwenden. Damit ist gezeigt, dass die Cauchyfolge  $(p_i)$  konvergiert, und das Lemma 1 ist bewiesen.

Auf  $\bar{M}$  definieren wir nun mit Hilfe des Fortsetzungssatzes rekursiv eine stetige Funktion  $\omega: \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den beiden Eigenschaften:

(I)  $\pi/4 - \delta < \omega(p) < 3\pi/4 + \delta$ , wobei  $p \in \bar{M}$ ,  $\delta \in (0, \pi/4)$ .

(II)  $\omega|_M$  ist eine  $C^k$ -Funktion ( $k=2, 3, \dots, \infty$ ), so dass für jedes  $A \in \mathfrak{A}$  gilt:  $\partial^2/\partial u \partial v (\omega \circ \phi|_A^{-1})(u, v) = \sin(\omega \circ \phi|_A^{-1}(u, v))$ .

$\omega': \bar{\phi}(\bar{M}_0) \rightarrow \mathbb{R}$  sei die Lösung der Gleichung

$$\omega'_{uv} = \sin \omega' \quad (*)$$

mit den Anfangswerten  $\omega'(u, 0) = \pi/2$  und  $\omega'(0, v) = \pi/2$ .

Für  $p \in \bar{M}_0$  definieren wir nun  $\omega(p) = \omega' \circ \phi(p)$ .

Aus der Bemerkung 1 zum Fortsetzungssatz (Seite 17) folgt, dass  $\omega'$  in  $\bar{\phi}(\bar{M}_0)$  die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes erfüllt.  $\omega$  kann daher auf  $\bar{M}_1$  erweitert werden so dass für jedes Trapez  $T \subset \bar{M}_1 - M_0$  die Funktion  $\omega \circ \bar{\phi}|_T^{-1}: \bar{\phi}(T) \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung (\*) genügt und die Fortsetzungseigenschaft hat. Entsprechend erweitert man  $\omega$  rekursiv auf ganz  $\bar{M}$ . Dass  $\omega$  (I) und (II) erfüllt, folgt aus dieser Definition.

Mit  $\omega$  ist nun auf  $M$  eine Riemannsche Metrik mit konstanter, negativer Krümmung  $K = -1$  gegeben, nämlich durch den metrischen Tensor mit den Komponenten

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \\ \cos \omega & 1 \end{pmatrix} \text{ bezüglich des Atlas } (\mathfrak{A}, \phi).$$

Wir bezeichnen die durch  $(\hat{g}_{ij})$  induzierte Metrik mit  $\hat{q}$ .

**LEMMA 2.** *Eine Punktfolge in  $M$  ist genau dann eine Cauchyfolge bez. der Metrik  $\hat{q}$ , wenn sie bezüglich der Metrik  $q$  eine Cauchyfolge ist.*

*Folgerung: Die Windungspunkte sind auch bezüglich der Metrik  $\hat{q}$  die einzigen Randpunkte von  $M$ .*

*Beweis.* Die Eigenwerte der Matrix  $(\hat{g}_{ij})$  sind  $1 - |\cos \omega|$  und  $1 + |\cos \omega|$ .

Da wegen (I)  $|\cos \omega| < k < 1$ , wobei  $k = \cos(\pi/4 - \delta)$ , gilt:

$$1 - k < 1 - |\cos \omega| \leq \frac{du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2}{du^2 + dv^2} \leq 1 + |\cos \omega| < 1 + k.$$

Für die Abstände  $\varrho(p_1, p_2)$ ,  $\hat{\varrho}(p_1, p_2)$  zweier Punkte  $p_1, p_2 \in M$  erhalten wir deshalb:

$$\sqrt{1-k} \varrho(p_1, p_2) < \hat{\varrho}(p_1, p_2) < \sqrt{1+k} \varrho(p_1, p_2).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die Existenz einer isometrischen  $C^\infty$ -Immersion:  $I: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  folgt aus Satz 4. Danach gibt es nämlich zu jedem  $A \in \mathfrak{U}$  eine bis auf Bewegung eindeutig bestimmte, isometrische Immersion  $I_A: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; das heisst aber, dass es erstens eine Immersion  $I_0: \bar{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt und dass es zweitens zu einer auf  $M_n$  definierten Immersion eine eindeutig bestimmte Erweiterung auf  $M_{n+1}$  gibt.

*Bemerkung.* Das Flächenstück  $I(M_0)$  ist ein Stück der von Amsler in [2] dargestellten Fläche.

Damit ist Satz 8 bewiesen.

## 5. T-Netze auf Rotationsflächen

5.1.  $F$  sei eine Rotationsfläche, die ihre Rotationsachse nicht schneidet. Wir wählen das Koordinatensystem  $(x, y, z)$  so, dass die  $z$ -Achse die Rotationsachse ist.  $\varphi$  sei der Drehwinkel,  $s$  die Bogenlänge der Meridiankurve. Die Punkte der Fläche sind dann gegeben durch:

$$F = (r(s) \cos \varphi, r(s) \sin \varphi, z(s)).$$

Dabei sind  $r(s)$  und  $z(s)$  mindestens dreimal differenzierbare Funktionen, die auf einem offenen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  definiert sind;  $r(s)$  ist positiv.

5.2. SATZ 9. *Jede durch zwei beliebige Parallelkreise begrenzte Zone lässt sich durch eine Schar von rotationssymmetrischen T-Netzen überdecken. Falls das Supremum  $\sup\{r(s), s \in (a, b)\}$  endlich ist, lässt sich sogar die ganze Fläche durch eine Schar von rotationssymmetrischen T-Netzen überdecken.*

Wir beweisen den Satz mit Hilfe des Satzes 2, indem wir die Codazzigleichungen für den Spezialfall der rotationssymmetrischen Netze lösen.

$E, F, G$  seien die ersten Fundamentalgrössen:

$$E = r^2, F = 0, G = 1. \lambda, \mu, \nu \text{ seien die Komponenten des Netztensors.}$$

Die Gleichung des Netzes in der  $\varphi, s$ -Ebene lautet somit:

$$\lambda d\varphi^2 + 2\mu d\varphi ds + \nu ds^2 = 0. \quad (5.1)$$

Der Tensor sei gemäss Satz 2 normiert:

$$\frac{\lambda\nu - \mu^2}{EG - F^2} = -1, \quad \text{also} \quad \mu^2 - \lambda\nu = r^2. \quad (5.2)$$

Die Codazzigleichungen lauten:

$$r(\lambda_s - \mu_\varphi) = \dot{r}(r^2 v + \lambda) \quad (5.3)$$

$$r(\mu_s - v_\varphi) = -\mu \dot{r} \quad (5.4)$$

( $\cdot$  bedeutet  $d/ds$ ).

Wir machen den Ansatz  $\lambda_\varphi = 0$ ,  $\mu_\varphi = 0$ ,  $v_\varphi = 0$ .

Aus 5.4 folgt dann:  $r\mu_s + \mu \dot{r} = 0$ , also  $r\mu = c$ ,  $c = \text{konst.}$  und somit

$$\mu = \frac{c}{r}. \quad (5.5)$$

Setzen wir (5.5) in (5.2) ein, so erhalten wir für  $v$ :

$$v = \frac{c^2 - r^4}{\lambda r^2} \quad (5.6)$$

(Im Fall  $\lambda \equiv 0$  folgt aus (5.2) und (5.4)  $r = \text{const.}$ ; man erhält die T-Netze auf der Zylinderfläche, deren eine Schar die Parallelkreise sind). Einsetzen von (5.6) in (5.3) ergibt nach einer kurzen Umformung:

$$\frac{d}{ds}(\lambda^2) = \frac{2\dot{r}}{r} \lambda^2 + \frac{2\dot{r}}{r^3} (c^2 - r^4).$$

Dies ist eine lineare Gleichung für  $\lambda^2$ . Die Lösung lautet:

$$\lambda = \sqrt{-(r^2 - k)^2 + k^2 - c^2}, \quad (5.7)$$

wobei  $k$  eine positive Integrationskonstante ist mit  $k^2 > c^2$ .

Setzen wir (5.7), (5.6) und (5.5) in (5.1) ein, so erhalten wir die Gleichung für das T-Netz:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{-(r^2 - k)^2 + k^2 - c^2} d\varphi^2 + 2 \frac{c}{r} d\varphi ds \\ & + \frac{c^2 - r^4}{r^2 \sqrt{-(r^2 - k)^2 + k^2 - c^2}} ds^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Bei gegebenen Konstanten  $k$ ,  $c$  ist das Netz auf dem Teil der Fläche definiert, wo der Radikand in (5.8) positiv ist, d.h. dort, wo

$$k - \sqrt{k^2 - c^2} < r^2 < k + \sqrt{k^2 - c^2}. \quad (5.9)$$

Die Lösungen von (3.8) sind die beiden Kurvenscharen:

$$d\varphi = \frac{-c \pm r^2(s)}{r(s) \sqrt{-(r^2(s) - k)^2 + k^2 - c^2}} ds. \quad (5.10)$$

$[a', b'] \subset (a, b)$  sei ein abgeschlossenes Intervall im Definitionsbereich der Funktion  $r(s)$ .  $R$  sei der grösste Parallelkreisradius in der Zone zwischen den Parallelkreisen mit den Radien  $r(a')$  und  $r(b')$ :  $R = \max\{r(s), s \in [a', b']\}$ . Setzen wir in (5.9)  $c=0$ , so folgt, dass es zu jeder Konstanten  $k > R^2/2$  ein in der ganzen Zone definiertes T-Netz gibt. (Wie weiter unten gezeigt wird, bedeutet  $c=0$ , dass die Meridiane die Netzwinkel halbieren). Falls das Supremum der Parallelkreisradien der ganzen Fläche,  $R_s$ , endlich ist, so gibt es entsprechend zu jedem  $k > R_s^2/2$  ein auf der ganzen Fläche definiertes T-Netz. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Wir zeigen nun noch, dass man von einem rotationssymmetrischen T-Netz statt der Konstanten  $c$  und  $k$  die Winkel vorgeben kann, die die beiden Scharen mit einem Parallelkreis bilden.

Die erste Schar des Netzes sei die Schar mit dem Pluszeichen in (5.10), die zweite Schar die Schar mit dem Minuszeichen.  $\psi_1(s)$  sei der Winkel zwischen der ersten Schar und dem Parallelkreis an der Stelle  $s$ ; die Richtungen seien so festgelegt, dass für die erste Schar  $ds > 0$  und für den Parallelkreis  $d\varphi > 0$  ist. Entsprechend sei  $\psi_2(s)$  der Winkel zwischen der zweiten Schar und demselben Parallelkreis. Berechnet man die Cosinus von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nach der üblichen Formel, so erhält man:

$$\cos \psi_1(s) = \frac{-c + r^2(s)}{r(s) \sqrt{2(k - c)}}, \quad \cos \psi_2(s) = \frac{-c - r^2(s)}{r(s) \sqrt{2(k + c)}}. \quad (5.11)$$

Für  $c=0$  folgt hieraus  $\cos \psi_1 = -\cos \psi_2$ , also  $\psi_1 = \pi - \psi_2$ ; d.h. die Winkel zwischen den beiden Scharen werden durch die Meridiane halbiert. (5.11) stellt für jeden Parameterwert  $s$  ein Gleichungssystem für  $c$  und  $k$  dar, dessen Lösung folgendermassen lautet:

$$c = -r^2 \frac{\sin(\psi_2 + \psi_1)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}, \quad k = r^2 \frac{\sin^2 \psi_2 + \sin^2 \psi_1}{\sin^2(\psi_2 - \psi_1)}.$$

Dies ist leicht nachzuprüfen, wenn man beachtet, dass

$$\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2 = 1 - \cos(\psi_2 + \psi_1) \cos(\psi_2 - \psi_1).$$

Damit ist die obige Behauptung bewiesen. Es sei noch bemerkt, dass es zu  $\psi_1=0, \pi$  oder  $\psi_2=0, \pi$  ausser beim Zylinder kein T-Netz gibt.

5.3. Aus der Ungleichung (5.9) folgt, dass die Radien der Parallelkreise einer

Fläche, auf der es ein globales T-Netz gibt, das Lösung von (5.8) ist, beschränkt sind:

$$\sup \{r(s), s \in (a, b)\} < \infty.$$

Allgemeiner gilt der

**SATZ 10.** *Auf einer vollständigen Rotationsfläche  $F$ , die die Rotationsachse nicht schneidet und auf der es ein globales T-Netz gibt, sind die Radien der Parallelkreise beschränkt.*

*Bemerkung.* Der Satz ist falsch, wenn die Fläche die Rotationsachse schneidet, oder wenn sie nicht vollständig ist. Ein Beispiel für den ersten Fall ist das Rotationsparaboloid  $z = x^2 + y^2$ , auf dem die Kurven  $x = \text{const.}$ ,  $y = \text{const.}$  ein T-Netz bilden; ein Beispiel für den zweiten Fall ist dieselbe Fläche, wenn der Punkt  $z = 0$  herausgenommen wird.

*Beweis.* Auf  $F$  sei ein globales T-Netz gegeben; nach Satz 1 zerfällt das Netz also global in zwei Kurvenscharen. Dem Netz auf  $F$  entspricht in der  $\varphi, s$ -Ebene, der universellen Überlagerung von  $F$ , ein gemäss Satz 3 global kartesisches T-Netz, das unter den Decktransformationen  $D_i$ , nämlich den Translationen  $(\varphi, s) \rightarrow (\varphi + i2\pi, s)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , in sich übergeht. Wir nennen die eine Schar des Netzes in der  $\varphi, s$ -Ebene die erste Schar, die andere die zweite.

$c_0$  sei Kurve der ersten Schar, die durch den Punkt  $(0, 0)$  geht.

*Behauptung.* *Entweder sind die Kurven  $c_i = D_i c_0$  der ersten Schar, die durch die Punkte  $(i2\pi, 0)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , gehen, alle voneinander verschieden, oder sie fallen alle mit  $c_0$  zusammen.*

Zum Beweis nehmen wir an, es gebe eine Zahl  $m \geq 1$  so, dass  $c_m = c_0$  ist. Wir beweisen, dass dann  $c_1 = c_0$  ist, also alle  $c_i$  zusammenfallen. Da  $c'_0$  bei der Translation  $D_m$  in sich übergeht, besteht  $c_0$  aus dem Teilbogen  $c'_0$  von  $(0, 0)$  bis  $(m2\pi, 0)$  und den aus  $c'_0$  durch Translation in  $\varphi$ -Richtung entstehenden Bögen  $D_{mn}c'_0$  für  $n \in \mathbb{Z}$  ( $c_0$  ist also in der  $\varphi, s$ -Ebene periodisch). Daraus folgt, dass  $\varphi$  auf  $c_0$  das Intervall  $(-\infty, +\infty)$  durchläuft und  $s$  ein abgeschlossenes Intervall  $[s_1, s_2]$ .  $c_0$  liegt also ganz in dem Streifen  $S: s_1 \leq s \leq s_2$  der  $\varphi, s$ -Ebene und enthält einen Teilbogen  $c''_0$ , der zwei Punkte  $(\varphi_1, s_1), (\varphi_2, s_2)$  verbindet. Auf der Kurve  $c_1 = D_1 c_0$  durchläuft  $\varphi$  ebenfalls alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$ ; da  $c''_0$  den Streifen  $S$  zerlegt, haben  $c_0$  und  $c_1$  einen Punkt gemeinsam, und da beide Kurven zu derselben Schar gehören, ist  $c_0 = c_1$ .

Wir bezeichnen nun entsprechend den  $c_i$  mit  $k_i$  die Kurven der zweiten Schar durch die Punkte  $(i2\pi, 0)$ . Nach obigem genügt es, den Satz 11 für folgende zwei Fälle zu beweisen:

- (a) alle  $c_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , und alle  $k_i$  sind verschieden
- (b) die  $c_i$  sind verschieden, die  $k_i$  fallen alle zusammen.

Der Fall  $c_0 = c_1$  und  $k_0 = k_1$  kann nicht auftreten, da dann  $c_0, k_0$  wegen der Translationsinvarianz mehr als einen Schnittpunkt hätten.

*Fall (a).*  $P_{ij}$  sei der Schnittpunkt von  $c_i$  und  $k_j$ . Wir führen noch die folgende Bezeichnung ein: Liegen zwei Punkte  $P, Q$  auf einer Netzlinie, so bezeichnen wir die Länge des Bogens zwischen  $P$  und  $Q$  mit  $\widehat{PQ}$ . Die Längen  $\widehat{P_{ii}P_{i+1}}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , sind alle gleich lang, da die Bögen durch die Decktransformationen ineinander übergehen; hieraus folgt, dass für alle  $j \in \mathbb{Z}$   $\widehat{P_{0j}P_{0j+1}} = \widehat{P_{00}P_{01}}$  ist, denn wegen der Tschebyscheff-eigenschaft des Netzes ist  $\widehat{P_{0j}P_{0j+1}} = \widehat{P_{jj}P_{jj+1}}$ . Entsprechend ist  $\widehat{P_{i0}P_{i+10}} = \widehat{P_{00}P_{10}}$ . Zwei aufeinanderfolgende Kurven  $k_j, k_{j+1}$  schneiden also auf  $c_0$  für alle  $j$  Bögen gleicher Länge aus; entsprechend schneiden  $c_i, c_{i+1}$  auf  $k_0$  gleiche Längen aus. Hieraus folgt, dass das Gitter, das durch die Kurven  $c_i, k_j$  gebildet wird, die ganze  $\varphi, s$ -Ebene überdeckt (man beachte, dass die Kurven  $c_0, k_0$  isometrisch den Koordinatenachsen der Tschebyscheff-Parameterebene entsprechen). Für jede Masche des Gitters gilt:

- die Längen gegenüberliegender Seiten sind gleich lang und zwar sind sie entweder gleich  $l_1 = \widehat{P_{00}P_{01}}$  oder gleich  $l_2 = \widehat{P_{00}P_{10}}$ ;
- die beiden Eckpunkte  $P_{ij}, P_{i+1j+1}$  liegen auf einer Parallelen zur  $\varphi$ -Achse. Die beiden Punkte überlagern denselben Punkt von  $F$ .

Wir betrachten das Bild  $A$  einer beliebigen Masche – gebildet von  $c_i, c_{i+1}, k_j, k_{j+1}$  – unter der Überlagerungsabbildung. Die Bilder der Eckpunkte  $P_{ij}, P_{i+1j}, P_{i+1j+1}, P_{ij+1}$  seien der Reihe nach  $T, U, V, W$ . Es ist  $T=V$ . Die Bögen  $TUV$  und  $VWT$  sind also geschlossen; sie haben die Länge  $l = l_1 + l_2$ .  $r_A$  sei das Minimum der Radien der Parallelkreise, die mit  $A$  Punkte gemeinsam haben,  $r'_A$  das Maximum. Die normale Projektion  $p$  des Bogens  $TUVW$  in die  $x, y$ -Ebene liegt innerhalb des Kreises, dessen innerer Randkreis den Radius  $r_A$  und dessen äusserer Randkreis den Radius  $r'_A$  hat. Beide Randkreise haben mit  $p$  mindestens einen Punkt gemeinsam. Die Differenz der Radien ist folglich kleiner als die Länge von  $p$ , die nicht grösser als die Länge des Bogens  $TUVW$  ist, d.h.  $r'_A - r_A < 2l$ , also

$$r'_A < r_A + 2l. \quad (5.12)$$

Nun ist aber der Umfang des innern Randkreises nicht grösser als die Länge der Projektion des geschlossenen Bogens  $TUV$ , wie man leicht sieht, wenn man das Bogenelement in der  $x, y$ -Ebene in Polarkoordinaten darstellt. Es folgt:  $2\pi r_A \leq l$ . Zusammen mit (5.12) erhalten wir:

$$r'_A < \frac{l}{2\pi} + 2l. \quad (5.13)$$

Da  $l$  für alle Maschen gleich ist und da jeder Punkt der Fläche  $F$  in einer Masche liegt, ist mit (5.13) der Satz 10 für den Fall (a) bewiesen.



Fall (b). Die Kurven  $c_i$  sind verschieden und die Kurven  $k_j$  fallen mit der Kurve  $k_0$  zusammen.

Die Schnittpunkte  $P_{i0}$  der Kurven  $c_i$  mit  $k_0$  sind die Punkte  $(i2\pi, 0)$ .  $P_{01}$  sei ein beliebiger Punkt auf  $c_0$ ,  $k_1$  die Kurve der zweiten Schar durch  $P_{01} \cdot P_{i1}$  seien die Schnittpunkte der  $c_i$  mit  $k_1$ . Wegen der Tschebyscheff-Eigenschaft sind die Bögen  $P_{00}P_{01}$  und  $P_{i0}P_{i1}$  gleich lang; da die  $c_i$  durch Translation in  $\varphi$ -Richtung auseinander hervorgehen, liegen die Punkte  $P_{i1}$  folglich auf der Parallelen zur  $\varphi$ -Achse durch  $P_{01}$ , überlagern also denselben Punkt von  $F$ .  $k_1$  überlagert also wie  $k_0$  eine geschlossene Kurve. Da  $P_{01}$  beliebig war, folgt: Die Kurven der zweiten Schar auf  $F$  sind alle geschlossen und haben wegen der Tschebyscheff-Eigenschaft des Netzes die gleiche Länge.

Für eine beliebige Kurve  $k$  der zweiten Schar auf  $F$  bezeichnen wir entsprechend zum Fall (a) mit  $r_k$  das Minimum der Radien derjenigen Parallelkreise, die mit  $k$  mindestens einen Punkt gemeinsam haben, mit  $r'_k$  das Maximum dieser Radien. Wie in (a) erhält man die Ungleichungen  $r'_k - r_k < l$ ,  $2\pi r_k \leq l$  und hieraus  $r'_k < l + l/2\pi$  wobei  $l$  die Länge von  $k$  ist.

Damit ist der Satz auch für den Fall (b) bewiesen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] HILBERT D., *Grundlagen der Geometrie*, 9. Auflage. Stuttgart 1962.
- [2] AMSLER M. H., *Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leur singularités*, Math. Ann. 130 (1955), 234–256.
- [3] HOLMGREN E., *Sur les surfaces à courbure constante négative*, C. R. Acad. Sci. Paris 134 (1902), 740–743.
- [4] KAPLAN W., *Regular curve families filling the plane, I*, Duke Mathematical J., 7 (1940), 154–185.
- [5] EFIMOV N. V., *Appearance of singularities on surfaces of negative curvature*, Mat. Sb. 64 (106) (1964), 286–320; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 66 (1968), 154–190.
- [6] —, *Differential criteria for homeomorphism of certain mappings with applications to the theory of surfaces*, Mat. Sbornik 76 (118) 1968, No. 4, 499–512; English transl., Math. USSR Sbornik 5 (1968) No. 4, 475–488.
- [7] —, *Surfaces with slowly changing negative curvature*, Usp. Mat. Nauk 21 (1966), No. 5, 3–58; English transl., Russian Math. Surveys 21 (1966), No. 5, 1–56.
- [8] ROZENDORN E. R., *Weakly irregular surfaces of negative curvature*, Usp. Mat. Nauk 21, No. 5 (1966), 59–116; English transl., Russian Math. Surveys 21, No. 5 (1966), 57–112.
- [9] BIEBERBACH L., *Hilberts Satz über Flächen konstanter Krümmung*, Acta Math. 48 (1926), 319–327.
- [10] COURANT R. und HILBERT D., *Methoden der mathematischen Physik II*, Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, 1968.

Eingegangen den 20. Mai 1972.