Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1972)

Artikel: Über Lie-Ringe von Gruppen und ihre universellen Enveloppen

Autor: Bachmann, F. / Grünenfelder, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36370

Über Lie-Ringe von Gruppen und ihre universellen Enveloppen

von F. BACHMANN und L. GRÜNENFELDER

Einleitung

Sei G eine Gruppe und JG das Augmentationsideal des Gruppenrings $\mathbf{Z}G$. Die Potenzen von JG filtrieren $\mathbf{Z}G$; wir schreiben $gr\mathbf{Z}G$ für den zugehörigen graduierten Ring. Die Bestimmung von $gr\mathbf{Z}G$ bei gegebener Gruppe G ist im allgemeinen ein recht schwieriges Problem. Sei $G=G_1\supset G_2\supset\cdots$ die absteigende Zentralreihe von G und ULG die universelle Enveloppe des Lie-Rings

$$LG = \bigoplus_{i\geqslant 1} G_i/G_{i+1}.$$

Auf natürliche Weise lässt sich ein Morphismus von graduierten Ringen,

$$ULG \overset{\varphi_G}{\to} gr\mathbf{Z}G,$$

definieren. In dieser Arbeit suchen wir Gruppen G, für die φ_G ein Isomorphismus ist.

Der erste Abschnitt ist einigen allgemeinen Eigenschaften von φ_G gewidmet. Zum Beispiel ist φ_G für jede Gruppe G surjektiv. Weiter ist φ_G in folgenden beiden Fällen bijektiv:

a) LG ist frei als abelsche Gruppe

b) G/G_2 ist eine teilbare abelsche Gruppe vom Rang $\leqslant 1$.

Im zweiten Abschnitt wenden wir uns einigen endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen zu. Es zeigt sich, dass für eine endliche p-Gruppe φ_G genau dann ein Isomorphismus ist, wenn G zyklisch ist. Dann beschäftigen wir uns mit der Gruppe

$$G = \langle a, b, c \mid ac = ca, bc = cb, [a, b] = c^2\rangle.$$

G ist endlich erzeugt, torsionsfrei und nilpotent. Für solche Gruppen wird die Berechnung von $gr\mathbf{Z}G$ ein wenig einfacher, da man eine Methode von S. A. Jennings und Ph. Hall (z. B. [3]) zur Verfügung hat. Damit können wir zeigen, dass φ_G bijektiv ist. Wir hoffen, die Klasse der torsionsfreien, nilpotenten Gruppen in einer späteren Arbeit zu untersuchen.

Schliesslich beweisen wir im dritten Teil den folgenden Satz: Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G von der Form $\mathbf{Z}^{(t)}\oplus\mathbf{Z}(m)$ ist.

Wir danken Robert Sandling und Urs Stammbach für wertvolle Hinweise und dem Forschungsinstitut für Mathematik in Zürich für seine Gastfreundschaft.

1. Der Morphismus $\varphi_G: ULG \to gr\mathbf{Z}G$

1.1. Sei G eine Gruppe und $G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots$ ihre absteigende Zentralreihe. Die abelsche Gruppe $LG = \oplus_{i \geq 1} G_i/G_{i+1}$ ist auf natürliche Weise ein graduierter Lie-Ring: Das Klammerprodukt zweier Elemente aus LG wird durch den Kommutator in G induziert. Schreibt man Gr (bzw. Lie) für die Kategorie der Gruppen (bzw. Lie-Ringe), so gibt diese Konstruktion einen Funktor $L: Gr \to Lie$.

Sei nun $\mathbf{Z}G$ der Gruppenring von G über $\mathbf{Z}$, JG das Augmentationsideal in $\mathbf{Z}G$. JG wird bekanntlich als abelsche Gruppe frei erzeugt durch die Elemente $\{(x-1) \mid x \in G\}$. Wir schreiben

$$gr\mathbf{Z}G = \bigoplus_{k \geq 0} JG^k/JG^{k+1}.$$

$gr\mathbf{Z}G$ ist ein graduierter Ring.

Die Dimensionsuntergruppen $D_n(G)$ $(n \geq 1)$ von G sind wie folgt definiert: $D_n(G) = \{x \in G \mid (x-1) \in JG^n\}$. Dies gibt eine Filtrierung ([4]) auf G; also gilt $G_n \subset D_n(G)$ für alle $n \geq 1$. Damit haben wir einen Morphismus abelscher Gruppen $LG \xrightarrow{\psi} gr\mathbf{Z}G$, der die Restklasse $\bar{x}$ $(x \in G_n)$ in $\overline{x-1} \in JG^n/JG^{n+1}$ überführt. Man weist leicht nach, dass $\psi[\bar{x}, \bar{y}] = \psi\bar{x} \cdot \psi\bar{y} - \psi\bar{y} \cdot \psi\bar{x}$ gilt. Also induziert ψ einen Morphismus graduierter Ringe

$$ULG \xrightarrow{\varphi_G} gr\mathbf{Z}G.$$

Hier ist ULG die universelle Enveloppe des Lie-Rings LG.

LEMMA. *Sei F die freie Gruppe über der Menge S. Dann ist φ_F ein Isomorphismus.*

Beweis. ULF lässt sich einfach beschreiben: Es stimmt überein mit der Tensoralgebra $T(F/F_2)$ der freien abelschen Gruppe F/F_2 ([8]). Der bekannte Isomorphismus $F/F_2 \simeq JF/JF^2$ zeigt nun, dass φ_F im Grad n durch die Multiplikation $JF/JF^2 \otimes \cdots \otimes JF/JF^2 \to JF^n/JF^{n+1}$ gegeben ist. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, weil JF ein freier F-Modul ist.

1.2. *Frage*: Für welche Gruppen G ist φ_G ein Isomorphismus? Quillen bewies in [7] das folgende Resultat:

Für jede Gruppe G ist $\varphi_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}: ULG \otimes \mathbf{Q} \to gr\mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Q}$ ein Isomorphismus graduierter $\mathbf{Q}$-Algebren.

Er benütze dabei den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt für die $\mathbf{Q}$-Lie-Algebra $LG \otimes \mathbf{Q}$. Dieser Satz steht uns über $\mathbf{Z}$ im allgemeinen nicht zur Verfügung, da der Lie-Ring LG nur in Ausnahmefällen ein freier $\mathbf{Z}$-Modul sein wird. Es gibt denn auch viele Gruppen G, für die φ_G kein Isomorphismus ist: Siehe Abschnitte 2 und 3. Immerhin gilt ganz allgemein

SATZ. *Für jede Gruppe G ist φ_G surjektiv*

Beweis. Sei $F \overset{p}{\twoheadrightarrow} G$ eine freie Präsentierung von G. Dies induziert ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} ULG & \xrightarrow{\varphi_G} & gr\mathbf{Z}G \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle p_*} \\ ULF & \xrightarrow{\varphi_F} & gr\mathbf{Z}F \end{array}$$

Wegen 1.1. ist φ_F bijektiv; weiter gibt p eine Surjektion $\mathbf{Z}F \twoheadrightarrow \mathbf{Z}G$, die JF auf JG abbildet. Also ist auch p_* surjektiv. Daraus folgt die Surjektivität von φ_G.

1.3. Das obige Resultat von Quillen ergibt einen einfachen Beweis für den

SATZ. *Sei LG frei als $\mathbf{Z}$-Modul. Dann ist φ_G ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Poincaré-Birkhoff-Witt ist auch ULG ein freier $\mathbf{Z}$-Modul. Dies bedeutet, dass im kommutativen Diagramm (alle Tensorprodukte über $\mathbf{Z}$)

$$\begin{array}{ccc} ULG & \xrightarrow{\varphi_G} & gr\mathbf{Z}G \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow \\ ULG \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\varphi_G \otimes \mathbf{Q}} & gr\mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Q} \end{array}$$

die Abbildung α injektiv ist. Also ist wegen der Bijektivität von $\varphi_G \otimes \mathbf{Q}$ auch φ_G injektiv.

BEISPIELE. (a) Freie abelsche Gruppen: für jede abelsche Gruppe G ist $LG = G$ mit trivialer Klammerbildung.

(b) Gruppen G mit $H^2(G, M) = 0$ für jeden trivialen G-Modul M: Daraus folgt die Existenz einer freien Gruppe F und einer Injektion $F \rightarrowtail G$, so dass $F/F_k \xrightarrow{\sim} G/G_k$ für alle $k \geqslant 1$ (z.*B.* [1]). Dies wiederum heisst $LF \simeq LG$. Da LF ein freier $\mathbf{Z}$-Modul ist (z.B. [8]), lässt sich obiger Satz anwenden. Zum Beispiel hat die Gruppe $G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ triviale cohomologische Dimension 1 (z.B. [1]). Also ist φ_G ein Isomorphismus.

(c) Sei $n \geqslant 2$ und sei G die Gruppe aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbf{Z}$, die in der Hauptdiagonale nur Einsen und darunter nur Nullen haben. Bekanntlich ([5]) sind dann die Matrizen in G_k von der Form $E + A$, wo E die Einheitsmatrix ist und A in den ersten k oberen Diagonalen nur Nullen hat. G ist also nilpotent: es gilt $G_n = 1$.

LEMMA. *G_k/G_{k+1} ist torsionsfrei für alle $k \geqslant 1$*

Beweis. Sei C eine Matrix in G_k mit Elementen $\{c_{ij}\}$. Die erste nichttriviale Diagonale in C ist $c_{1,k+1}, c_{2,k+2}, \ldots, c_{n-k,n}$. Ist s eine Zahl >0, so hat C^s in derselben Diagonale die Elemente $s \cdot c_{1,k+1}, s \cdot c_{2,k+2}, \cdots, s \cdot c_{n-k,n}$. Wäre $C^s \in G_{k+1}$, so müssten alle diese Elemente verschwinden. Also wäre C schon in G_{k+1}. Da G endlich erzeugbar ist, ist jedes G_k/G_{k+1} eine endlich erzeugte, torsionsfreie abelsche Gruppe, also frei.

1.4. Wir untersuchen nun Gruppen G, für die G/G_2 vom Rang $\leqslant 1$ und teilbar ist; eine abelsche Gruppe A heisst teilbar, falls zu jedem $a \in A$ und zu jeder Zahl $n \neq 0$ ein $x \in A$ existiert mit $nx = a$.

LEMMA. *Sei A eine teilbare abelsche Gruppe vom Rang $\leqslant 1$ und seinen x und y Elemente von A. Dann gilt $x \otimes y = y \otimes x$ in $A \otimes A$.*

Beweis. Sei tA die Torsionsuntergruppe von A. Wir haben eine exakte Folge

$$0 \to tA \to A \to A/tA \to 0,$$

wobei A/tA teilbar und torsionsfrei ist. Daraus folgt

$$A \otimes A \simeq A/tA \otimes A \simeq A/tA \otimes A/tA.$$

Wir benützen $tA \otimes A = 0$ (dies ist eine einfache Folgerung aus den Voraussetzungen).

Nun ist A/tA isomorph zu $\mathbf{Q}$ oder 0, und das Lemma ist bewiesen.

SATZ. *Sei G eine Gruppe, für die G/G_2 vom Rang $\leqslant 1$ und teilbar ist. Dann ist φ_G ein Isomorphismus.*

Beweis. (a) Sei TLG die Tensoralgebra (über $\mathbf{Z}$) von LG. Wir setzen $\bar{G} = G/G_2$ und schreiben T_n für die n-te Komponente in der durch LG induzierten Graduierung von TLG. Zum Beispiel ist

$$T_0 = \mathbf{Z}, \quad T_1 = \bar{G}, \quad T_2 = (\bar{G} \otimes \bar{G}) \oplus G_2/G_3,$$
$$T_3 = (\bar{G} \otimes \bar{G} \otimes \bar{G}) \oplus (\bar{G} \otimes G_2/G_3) \oplus (G_2/G_3 \otimes \bar{G}) \oplus G_3/G_4.$$

Sei J das von den Elementen $\{\bar{x} \otimes \bar{y} - \bar{y} \otimes \bar{x} - [\bar{x}, \bar{y}]\}$, $(\bar{x}, \bar{y} \in LG)$ erzeugte zweiseitige Ideal in TLG. Dann gilt $ULG = TLG/J$. Aus dem obigen Lemma folgt $G_2/G_3 \subset J$. Wir zeigen mit Induktion, dass $G_k/G_{k+1} \subset J$, $k > 2$. Ein Erzeugendes von G_k/G_{k+1} ist von der Form $\overline{[\bar{x}, y]}$, $x \in G_{k-1}$, $y \in G$. Die kanonische Injektion $LG \xrightarrow{j} TLG$ bewirkt $\overline{[x, y]} = j[x, \bar{y}] \equiv \bar{x} \otimes \bar{y} - \bar{y} \otimes \bar{x} \mod J$; wegen der Induktionsvoraussetzung liegt also $\overline{[x, y]}$ in J.

Damit haben wir (auf Grund der Ideal-Eigenschaft von J) gezeigt: $ULG \simeq T(\bar{G})$.

(b) Analog wie im obigen Lemma schliesst man $U_n LG \simeq T_n(\bar{G}/t\bar{G})$, $n > 1$. $U_n LG$, die n-te Komponente von ULG, ist also isomorph zu $\mathbf{Q}$ oder 0, falls $n > 1$. Sei $gr_n \mathbf{Z}G = JG^n/JG^{n+1}$. Dann ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_n LG \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & gr_n \mathbf{Z}G \arrow[d] \\ U_n LG \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\varphi_G \otimes \mathbf{Q}"] & gr_n \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Q} \end{tikzcd}$$

α_n für alle $n>1$ ein Monomorphismus. Für $n=1$ ist φ_G immer bijektiv. Also ist φ_G in allen Graden ein Isomorphismus.

Bemerkung. Sei $G=H\times K$; falls H und K die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllen, so ist φ_G ein Isomorphismus.

BEISPIELE: (a) Teilbare abelsche Gruppen von endlichem Rang. (b) Mal'cev-Gruppen G mit G/G_2 vom Rang 1. Die Mal'cev-vervollständigung ([7]) der Gruppe $\langle a, b \mid [a, b]=b^2\rangle$ hat diese Eigenschaft.

2. Einige nilpotente Gruppen

2.1. *Endliche p-Gruppen.* Sie G eine endliche p-Gruppe mit absteigender Zentralreihe $G=G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_c\supset G_{c+1}=1$. Als abelsche Gruppe ist dann $LG=\oplus_{i=1}^{c} G_i/G_{i+1}$ auch eine endliche p-Gruppe.

SATZ. *φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G zyklisch ist.*

Beweis. U_mLG und damit gr_mZG sind für $m>0$ abelsche p-Gruppen von endlichem p-Rang. Der Beweis erfolgt durch Abzählen der zyklischen direkten Summanden. Nach Poincaré-Birkhoff-Witt gilt

$$ULG\otimes \mathbf{Z}_p = U(LG\otimes \mathbf{Z}_p) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbf{Z}_p^{(s_m)}.$$

Dabei ist $s_m\leqslant s_{m+1}$ für jedes $m\geqslant 0$. Gilt das Gleichheitszeichen für ein $m>0$, so gilt es für alle. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn G zyklisch ist. Da U_mLG $(m>0)$ eine endliche p-Gruppe ist, folgt

$$U_mLG = \begin{cases} \mathbf{Z} \quad \text{falls} \quad m=0 \\ \text{direkte Summe von } s_m \text{ zyklischen } p\text{-Gruppen falls } m>0 \end{cases}$$

Also gelten folgende Ungleichungen für $m>0$:

$$s_m = p\text{-Rang } U_mLG \leqslant p\text{-Rang } U_{m+1}LG = s_{m+1}$$

Nach Lemma 3.1. genügt es nun zu zeigen, dass der p-Rang von JG^m/JG^{m+1} $(m>0)$ eine beschränkte Funktion von m ist. JG^m $(m>0)$ ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang r_m. Es existieren also ([2], p.78) eine $\mathbf{Z}$-Basis $e_1,\ldots, e_{r_m}$ von JG^m und eine $\mathbf{Z}$-Basis $g_1,\ldots, g_{r_m}$ von JG^{m+1} mit

a) $g_i = m_i\cdot e_i$, wobei $m_i\in \mathbf{Z}$ $(i=1,\ldots, r_m)$

b) $m_{i-1} \mid m_i$ $(i=2,\ldots, r_m)$.

Da JG^m/JG^{m+1} eine endliche p-Gruppe ist, muss $m_i = p^{k_i}$ $(i=1,\ldots,r_m)$ sein mit $0<k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_{r_m}$. Daraus folgt $r_m=|G|-1$ und p-Rang $JG^m/JG^{m+1}\leqslant|G|-1$.

2.2. Die folgende Gruppe ist endlich erzeugt, torsionsfrei und nilpotent von der Klasse 2:

$$G = \langle a, b, c \mid ac = ca, bc = cb, [a, b] = c^2\rangle .$$

Der zugehörige Lie-Ring $LG = G/G_2 \oplus G_2$ hat die Gestalt $(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2)\oplus\mathbf{Z}$. Die Erzeugenden von $G/G_2=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2$ sind die Restklassen von a, b und c; das Erzeugende von $G_2=\mathbf{Z}$ ist c^2. LG ist demnach ein direktes Produkt von Lie-Ringen: $LG=L_1\oplus L_2=[(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z})\oplus\mathbf{Z}]\oplus\mathbf{Z}_2$. L_1 ist frei als abelsche Gruppe und L_2 hat triviale Klammer. ULG lässt sich also wie folgt schreiben: $ULG=UL_1\otimes UL_2$, wobei $UL_2=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\cdots$ und UL_1 eine freie abelsche Gruppe ist, deren Komponenten man nach Poincaré-Birkhoff-Witt berechnen kann. Man erhält $U_nLG=\mathbf{Z}^{d(n)}\oplus\mathbf{Z}_2^{s(n)}$. Dabei sind $d(n)$ und $s(n)$ gegeben durch die Formeln

$$d(n) = d(n-2) + (n+1), \quad d(0) = 1, \quad d(1) = 2, \quad s(n) = \sum_{i=1}^{n} d(n-i).$$

2.3. Zur Berechnung von $gr\mathbf{Z}G$ verwenden wir eine Methode von S. A. Jennings und Ph. Hall ([3]): Sei S die Menge aller Tripel $r=(r_1, r_2, r_3)$ von ganzen Zahlen. Ist M eine feste, positive ganze Zahl, so ordnen wir $r\in S$ das Element $u(r)=v_1\cdot v_2\cdot v_3$ aus $\mathbf{Z}G$ zu, wobei $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$ und

$$v_k = \begin{cases} (1-x_k)^{r_k} & \text{falls } r_k \geqslant 0 \\ (1-x_k)^M \cdot x_k^{r_k} & \text{falls } r_k < 0 . \end{cases}$$

Die Menge $\{u(r) \mid r\in S\}$ bildet eine $\mathbf{Z}$-Basis für $\mathbf{Z}G$ und die Menge $\{u(r) \mid 0\neq r\in S\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis für JG. Es ist vorteilhaft, diese Basiselemente mit einem Gewicht zu versehen. Wir definieren

$$\mu(1-x_1) = \mu(1-x_2) = 1 , \quad \mu(1-x_3) = 2$$

und

$$\mu(u(r)) = \begin{cases} r_1 + r_2 + 2r_3 & \text{falls } r \geqslant 0 \\ M & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei schreiben wir $r>0$ falls $r_k>0$ $(k=1, 2, 3)$. Natürlich gilt $\mu(u(r))>r_1+r_2+r_3$ falls $r>0$.

Sei nun $n\geqslant 1$ und $M>2n$.

LEMMA. *Definiert man*

$$n_r = \begin{cases} 0 \quad \textit{falls} \quad r > 0 \quad \textit{und} \quad \mu(u(r)) < n \\ 2^{n-\Sigma r_i} \quad \textit{falls} \quad r > 0 \quad \textit{und} \quad \mu(u(r)) \geqslant n > \sum_{i=1}^{3} r_i \\ 1 \ \textit{sonst} \end{cases}$$

so bildet die Menge $B_n = \{n_r \cdot u(r) \mid 0 \neq r \in S\}$ *eine* $\mathbf{Z}$*-Basis von* JG^n

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $n_r \cdot u(r) \in JG^n$.

(a) Für $n_r = 1$ ist dies klar.

Sei $r > 0$ und $\mu(u(r)) < n$. Jedes Element von JG^n ist als Linearkombination von Basiselementen aus JG mit Gewicht $\geqslant n$ darstellbar ([3]). Aus unseren Voraussetzungen und $n_r \cdot u(r) \in JG^n$ folgt also $n_r = 0$.

(c) Sei $\mu(u(r)) \geqslant n > \sum r_i$. Dann ist $\mu(u(r)) - \sum r_i = r_3 > 0$. $\mu(u(r))$ kann also folgende Werte annehmen:

$$\mu(u(r)) = n + r_3 - i \quad (i = 1, \ldots, r_3)$$

Also liegt $u(r)$ in JG^{n-i}. Wegen $2(1-c) \in JG^2$ folgt $2^i \cdot u(r) \in JG^n$ mit $i = n - \sum r_i$.

Man kann nun nachweisen, dass B_n die abelsche Gruppe JG^n erzeugt. Dies sieht man durch Induktion über n. Es genügt dabei, alle Produkte von Elementen aus B_{n-1} und B_1 zu betrachten. Wir verzichten auf diese Rechnungen und erwähnen nur die Formeln

$$\begin{aligned} (1-b)(1-a) &= -(1-a)(1-b)(1-c^{-2}) + (1-a)(1-c^{-2}) \\ &\quad + (1-b)(1-c^{-2}) + (1-a)(1-b) - (1-c^{-2}) \\ (1-c^{-2}) &= (1-c)^2 \cdot c^{-2} - 2(1-c)\,c^{-2} \\ (1-c)^{t-1} \cdot c^{-s} &= (1-c)^{t-1} \cdot c^{-s+1} + (1-c)^t \cdot c^{-s} \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 1). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir behaupten nun, dass für unsere Gruppe G, φ_G ein Isomorphismus ist.

(a) Die Anzahl der unendlich zyklischen direkten Summanden in JG^n/JG^{n+1} ist gleich der Anzahl der Basiselemente von JG mit dem Gewicht n, also gleich $d(n)$.

(b) Die Anzahl der $\mathbf{Z}_2$-Komponenten in JG^n/JG^{n+1} ist gleich der Anzahl der Basiselemente $u(r)$ von JG mit $\mu(u(r)) \geqslant n+1 > \sum r_i$. Sei $z(n)$ diese Anzahl. Unsere Behauptung folgt nun aus dem

LEMMA. $z(n) = \sum_{i=1}^{n} d(n-i) = s(n)$.

Beweis. Ist $u(r)$ ein Basiselement aus JG, das den obigen Ungleichungen genügt, so kann $u(r)$ folgende Gewichte annehmen: $\mu(u(r)) = n+1, \ n+2, \ldots, 2n$. Man zählt nun ab, dass es genau $(n-i+1) + (n-i-1) + (n-i-3) + \cdots = d(n-i)$ Basiselemente $u(r)$ mit $\mu(u(r)) = n+i$ gibt. Also ist $z(n) = \sum_2^{s(n)} d(n-i) = s(n)$.

3. Abelsche Gruppen

3.1. Ist G eine abelsche Gruppe, so wird das Problem einfacher: Erstens ist $LG=G$ und zweitens hat man die bekannten Struktursätze für abelsche Gruppen zur Verfügung. Wir können denn auch diejenigen endlich erzeugten, abelschen Gruppen, für die φ_G bijektiv ist, charakterisieren (3.2.). Von grossem Nutzen ist uns dabei eine Arbeit von I. B. S. Passi ([6]); mit grossem Rechenaufwand werden dort verschiedene Resultate über Potenzen von Augmentationsidealen hergeleitet.

LEMMA. *Sei G eine zyklische Gruppe. Dann ist φ_G ein Isomorphismus*

Beweis. Für $G=\mathbf{Z}$ siehe 1.1. oder 1.3. Sei also $G=\mathbf{Z}(m)$. Für abelsche Lie-Algebren stimmt die universelle Enveloppe mit der symmetrischen Algebra überein. In unserem Fall ist $LG=\mathbf{Z}(m)$, also $ULG=S(\mathbf{Z}(m))=T(\mathbf{Z}(m))$. Die zweite Gleichheit gilt, weil $\mathbf{Z}(m)$ ein zyklischer $\mathbf{Z}$-Modul ist. Es folgt

$$U_0\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}, \quad U_n\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}(m) \qquad n\geqslant 1.$$

Für $gr\mathbf{Z}G$ erhält man ([6]) dieselben Werte. Damit ist das Lemma bewiesen.

3.2. Wir benötigen einen einfachen Hilfssatz:

LEMMA. *Sei G eine abelsche Gruppe, so dass φ_G ein Isomorphismus ist. Dann gilt*

(i) $\varphi_{\mathbf{Z}\oplus G}$ ist ein Isomorphismus

(ii) Ist H ein direkter Summand in G, so ist φ_H ein Isomorphismus

Beweis. (i) Wir schreiben wieder S für die symmetrische Algebra. Es gilt

$$U(\mathbf{Z}\oplus G)=S(\mathbf{Z}\oplus G)=S(\mathbf{Z})\otimes S(G)\simeq S(\mathbf{Z})\otimes gr\mathbf{Z}G.$$

Setzt man $gr_n\mathbf{Z}G=Q_nG$, so folgt $U_n(\mathbf{Z}\oplus G)=\mathbf{Z}\oplus Q_n(G)\oplus\cdots\oplus Q_1(G)$. Dies stimmt mit $Q_n(\mathbf{Z}\oplus G)$ überein ([6]).

(ii) Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} ULG \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, shift left, "\beta"] & gr\mathbf{Z}G \arrow[d, shift left] \\ ULH \arrow[r, "\varphi_H"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & gr\mathbf{Z}H \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

α ist ein Monomorphismus wegen $\beta\cdot\alpha=1_{ULH}$.

SATZ. *Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G von der Form*

$$\mathbf{Z}^{(t)}\oplus\mathbf{Z}(m) \qquad t, m\geqslant 0$$

ist.

Beweis. Ist G von obiger Form, so ist φ_G bijektiv wegen 3.1. und 3.2.

Umgekehrt sei nun G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. G lässt sich darstellen als

$$G = \mathbf{Z}^{(t)} \oplus \mathbf{Z}(p_1^{s_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}(p_n^{s_n}),$$

wo die p_i Primzahlen, $t \geqslant 0$ und die $s_i > 0$ sind. Wir behaupten, dass alle p_i verschieden sind, falls φ_G bijektiv ist: Wäre zum Beispiel $p_1 = p_2 = p$, so enthielte G eine nichtzyklische endliche p-Gruppe H als direkten Summanden, für die φ_H ebenfalls bijektiv sein müsste (3.2.). Dies ist nicht möglich (2.1.). Also folgt

$$G = \mathbf{Z}^{(t)} \oplus \mathbf{Z}(m), \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i^{s_i}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] Baumslag, G. and Gruenberg, K., *Some Reflections on Cohomological Dimension and Freeness*, J. of Algebra *6* (1967).

[2] Fuchs, L., *Infinite Abelian Groups*, vol. 1 (New York, 1970).

[3] Hartley, B., *The Residual Nilpotence of Wreath Products*, Proc. London Math. Soc. (3) *20* (1970).

[4] Lazard, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Annales ENS *71* (1954).

[5] Magnus, W., Karrass, A., and Solitar, D. *Combinatorial Group Theory* (New York, 1966).

[6] Passi, I. B. S., *Polynomial Maps on Groups*, J. of Algebra *9* (1968).

[7] Quillen, D. G., *On the Associated Graded Ring of a Group Ring*, J. of Algebra *10* (1968).

[8] Serre, J. P., *Lie Algebras and Lie Groups* (New York, 1965).

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH
8006 Zürich

Eingegangen den 25. April