Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1972)

Artikel: Über Lie-Ringe von Gruppen und ihre universellen Enveloppen
Autor: Bachmann, F. / Grünenfelder, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36370

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Lie-Ringe von Gruppen und ihre universellen Enveloppen

von F. BACHMANN und L. GRÜNENFELDER

Einleitung

Sei G eine Gruppe und JG das Augmentationsideal des Gruppenrings $\mathbf{Z}G$. Die Potenzen von JG filtrieren $\mathbf{Z}G$; wir schreiben $gr\mathbf{Z}G$ für den zugehörigen graduierten Ring. Die Bestimmung von $gr\mathbf{Z}G$ bei gegebener Gruppe G ist im allgemeinen ein recht schwieriges Problem. Sei $G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots$ die absteigende Zentralreihe von G und ULG die universelle Enveloppe des Lie-Rings

$$LG = \bigoplus_{i \geqslant 1} G_i/G_{i+1}.$$

Auf natürliche Weise lässt sich ein Morphismus von graduierten Ringen,

$$ULG \xrightarrow{\varphi_G} gr\mathbf{Z}G,$$

definieren. In dieser Arbeit suchen wir Gruppen G, für die φ_G ein Isomorphismus ist.

Der erste Abschnitt ist einigen allgemeinen Eigenschaften von φ_G gewidmet. Zum Beispiel ist φ_G für jede Gruppe G surjektiv. Weiter ist φ_G in folgenden beiden Fällen bijektiv:

a) LG ist frei als abelsche Gruppe

b) G/G_2 ist eine teilbare abelsche Gruppe vom Rang $\leqslant 1$.

Im zweiten Abschnitt wenden wir uns einigen endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen zu. Es zeigt sich, dass für eine endliche p-Gruppe φ_G genau dann ein Isomorphismus ist, wenn G zyklisch ist. Dann beschäftigen wir uns mit der Gruppe

$$G = \langle a, b, c \mid ac = ca,\ bc = cb,\ [a, b] = c^2 \rangle.$$

G ist endlich erzeugt, torsionsfrei und nilpotent. Für solche Gruppen wird die Berechnung von $gr\mathbf{Z}G$ ein wenig einfacher, da man eine Methode von S. A. Jennings und Ph. Hall (z. B. [3]) zur Verfügung hat. Damit können wir zeigen, dass φ_G bijektiv ist. Wir hoffen, die Klasse der torsionsfreien, nilpotenten Gruppen in einer späteren Arbeit zu untersuchen.

Schliesslich beweisen wir im dritten Teil den folgenden Satz: Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G von der Form $\mathbf{Z}^{(t)} \oplus \mathbf{Z}(m)$ ist.

Wir danken Robert Sandling und Urs Stammbach für wertvolle Hinweise und dem Forschungsinstitut für Mathematik in Zürich für seine Gastfreundschaft.

1. Der Morphismus $\varphi_G: ULG \to grZG$

1.1. Sei G eine Gruppe und $G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \cdots$ ihre absteigende Zentralreihe. Die abelsche Gruppe $LG = \oplus_{i \geqslant 1} G_i/G_{i+1}$ ist auf natürliche Weise ein graduierter Lie-Ring: Das Klammerprodukt zweier Elemente aus LG wird durch den Kommutator in G induziert. Schreibt man Gr (bzw. Lie) für die Kategorie der Gruppen (bzw. Lie-Ringe), so gibt diese Konstruktion einen Funktor $L: Gr \to Lie$.

Sei nun $\mathbf{Z}G$ der Gruppenring von G über $\mathbf{Z}$, JG das Augmentationsideal in $\mathbf{Z}G$. JG wird bekanntlich als abelsche Gruppe frei erzeugt durch die Elemente $\{(x-1) \mid x \in G\}$. Wir schreiben

$$grZG = \bigoplus_{k \geqslant 0} JG^k/JG^{k+1}.$$

$grZG$ ist ein graduierter Ring.

Die Dimensionsuntergruppen $D_n(G)$ $(n \geqslant 1)$ von G sind wie folgt definiert: $D_n(G) = \{x \in G \mid (x-1) \in JG^n\}$. Dies gibt eine Filtrierung ([4]) auf G; also gilt $G_n \subset D_n(G)$ für alle $n \geqslant 1$. Damit haben wir einen Morphismus abelscher Gruppen $LG \xrightarrow{\psi} grZG$, der die Restklasse $\bar{x}$ $(x \in G_n)$ in $\overline{x-1} \in JG^n/JG^{n+1}$ überführt. Man weist leicht nach, dass $\psi[\bar{x}, \bar{y}] = \psi\bar{x} \cdot \psi\bar{y} - \psi\bar{y} \cdot \psi\bar{x}$ gilt. Also induziert ψ einen Morphismus graduierter Ringe

$$ULG \xrightarrow{\varphi_G} grZG.$$

Hier ist ULG die universelle Enveloppe des Lie-Rings LG.

LEMMA. *Sei F die freie Gruppe über der Menge S. Dann ist φ_F ein Isomorphismus.*

Beweis. ULF lässt sich einfach beschreiben: Es stimmt überein mit der Tensoralgebra $T(F/F_2)$ der freien abelschen Gruppe F/F_2 ([8]). Der bekannte Isomorphismus $F/F_2 \simeq JF/JF^2$ zeigt nun, dass φ_F im Grad n durch die Multiplikation $JF/JF^2 \otimes \cdots \cdots \otimes JF/JF^2 \to JF^n/JF^{n+1}$ gegeben ist. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, weil JF ein freier F-Modul ist.

1.2. *Frage*: Für welche Gruppen G ist φ_G ein Isomorphismus? Quillen bewies in [7] das folgende Resultat:

Für jede Gruppe G ist $\varphi_G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}: ULG \otimes \mathbf{Q} \to grZG \otimes \mathbf{Q}$ ein Isomorphismus graduierter $\mathbf{Q}$-Algebren.

Er benütze dabei den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt für die $\mathbf{Q}$-Lie-Algebra $LG \otimes \mathbf{Q}$. Dieser Satz steht uns über $\mathbf{Z}$ im allgemeinen nicht zur Verfügung, da der Lie-Ring LG nur in Ausnahmefällen ein freier $\mathbf{Z}$-Modul sein wird. Es gibt denn auch viele Gruppen G, für die φ_G kein Isomorphismus ist: Siehe Abschnitte 2 und 3. Immerhin gilt ganz allgemein

SATZ. *Für jede Gruppe G ist φ_G surjektiv*

Beweis. Sei $F \overset{p}{\twoheadrightarrow} G$ eine freie Präsentierung von G. Dies induziert ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} ULG \arrow[r, "\varphi_G"] & grZG \\ ULF \arrow[u] \arrow[r, "\varphi_F"] & grZF \arrow[u, "p_*"'] \end{tikzcd}$$

Wegen 1.1. ist φ_F bijektiv; weiter gibt p eine Surjektion $ZF \twoheadrightarrow ZG$, die JF auf JG abbildet. Also ist auch p_* surjektiv. Daraus folgt die Surjektivität von φ_G.

1.3. Das obige Resultat von Quillen ergibt einen einfachen Beweis für den

SATZ. *Sei LG frei als $\mathbf{Z}$-Modul. Dann ist φ_G ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Poincaré-Birkhoff-Witt ist auch ULG ein freier $\mathbf{Z}$-Modul. Dies bedeutet, dass im kommutativen Diagramm (alle Tensorprodukte über $\mathbf{Z}$)

$$\begin{tikzcd} ULG \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, "\alpha"'] & grZG \arrow[d] \\ ULG \otimes \mathbf{Q} \arrow[r, "\varphi_G \otimes \mathbf{Q}"] & grZG \otimes \mathbf{Q} \end{tikzcd}$$

die Abbildung α injektiv ist. Also ist wegen der Bijektivität von $\varphi_G \otimes \mathbf{Q}$ auch φ_G injektiv.

BEISPIELE. (a) Freie abelsche Gruppen: für jede abelsche Gruppe G ist $LG = G$ mit trivialer Klammerbildung.

(b) Gruppen G mit $H^2(G, M) = 0$ für jeden trivialen G-Modul M: Daraus folgt die Existenz einer freien Gruppe F und einer Injektion $F \rightarrowtail G$, so dass $F/F_k \xrightarrow{\sim} G/G_k$ für alle $k \geqslant 1$ (z.B. [1]). Dies wiederum heisst $LF \simeq LG$. Da LF ein freier $\mathbf{Z}$-Modul ist (z.B. [8]), lässt sich obiger Satz anwenden. Zum Beispiel hat die Gruppe $G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ triviale cohomologische Dimension 1 (z.B. [1]). Also ist φ_G ein Isomorphismus.

(c) Sei $n \geqslant 2$ und sei G die Gruppe aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbf{Z}$, die in der Hauptdiagonale nur Einsen und darunter nur Nullen haben. Bekanntlich ([5]) sind dann die Matrizen in G_k von der Form $E + A$, wo E die Einheitsmatrix ist und A in den ersten k oberen Diagonalen nur Nullen hat. G ist also nilpotent: es gilt $G_n = 1$.

LEMMA. *G_k/G_{k+1} ist torsionsfrei für alle $k \geqslant 1$*

Beweis. Sei C eine Matrix in G_k mit Elementen $\{c_{ij}\}$. Die erste nichttriviale Diagonale in C ist $c_{1,k+1}, c_{2,k+2}, \ldots, c_{n-k,n}$. Ist s eine Zahl >0, so hat C^s in derselben Diagonale die Elemente $s \cdot c_{1,k+1}, s \cdot c_{2,k+2}, \cdots, s \cdot c_{n-k,n}$. Wäre $C^s \in G_{k+1}$, so müssten alle diese Elemente verschwinden. Also wäre C schon in G_{k+1}. Da G endlich

erzeugbar ist, ist jedes G_k/G_{k+1} eine endlich erzeugte, torsionsfreie abelsche Gruppe, also frei.

1.4. Wir untersuchen nun Gruppen G, für die G/G_2 vom Rang $\leqslant 1$ und teilbar ist; eine abelsche Gruppe A heisst teilbar, falls zu jedem $a \in A$ und zu jeder Zahl $n \neq 0$ ein $x \in A$ existiert mit $nx = a$.

LEMMA. *Sei A eine teilbare abelsche Gruppe vom Rang $\leqslant 1$ und seinen x und y Elemente von A. Dann gilt $x \otimes y = y \otimes x$ in $A \otimes A$.*

Beweis. Sei tA die Torsionsuntergruppe von A. Wir haben eine exakte Folge

$$0 \to tA \to A \to A/tA \to 0,$$

wobei A/tA teilbar und torsionsfrei ist. Daraus folgt

$$A \otimes A \simeq A/tA \otimes A \simeq A/tA \otimes A/tA.$$

Wir benützen $tA \otimes A = 0$ (dies ist eine einfache Folgerung aus den Voraussetzungen).

Nun ist A/tA isomorph zu $\mathbf{Q}$ oder 0, und das Lemma ist bewiesen.

SATZ. *Sei G eine Gruppe, für die G/G_2 vom Rang $\leqslant 1$ und teilbar ist. Dann ist φ_G ein Isomorphismus.*

Beweis. (a) Sei TLG die Tensoralgebra (über $\mathbf{Z}$) von LG. Wir setzen $\bar{G} = G/G_2$ und schreiben T_n für die n-te Komponente in der durch LG induzierten Graduierung von TLG. Zum Beispiel ist

$$T_0 = \mathbf{Z}, \quad T_1 = \bar{G}, \quad T_2 = (\bar{G} \otimes \bar{G}) \oplus G_2/G_3,$$
$$T_3 = (\bar{G} \otimes \bar{G} \otimes \bar{G}) \oplus (\bar{G} \otimes G_2/G_3) \oplus (G_2/G_3 \otimes \bar{G}) \oplus G_3/G_4.$$

Sei J das von den Elementen $\{\bar{x} \otimes \bar{y} - \bar{y} \otimes \bar{x} - [\bar{x}, \bar{y}]\}$, $(\bar{x}, \bar{y} \in LG)$ erzeugte zweiseitige Ideal in TLG. Dann gilt $ULG = TLG/J$. Aus dem obigen Lemma folgt $G_2/G_3 \subset J$. Wir zeigen mit Induktion, dass $G_k/G_{k+1} \subset J$, $k > 2$. Ein Erzeugendes von G_k/G_{k+1} ist von der Form $\overline{[\bar{x}, y]}$, $x \in G_{k-1}$, $y \in G$. Die kanonische Injektion $LG \xrightarrow{j} TLG$ bewirkt $\overline{[x, y]} = j[x, \bar{y}] \equiv \bar{x} \otimes \bar{y} - \bar{y} \otimes \bar{x} \bmod J$; wegen der Induktionsvoraussetzung liegt also $\overline{[x, y]}$ in J.

Damit haben wir (auf Grund der Ideal-Eigenschaft von J) gezeigt: $ULG \simeq T(\bar{G})$.

(b) Analog wie im obigen Lemma schliesst man $U_n LG \simeq T_n(\bar{G}/t\bar{G})$, $n > 1$. $U_n LG$, die n-te Komponente von ULG, ist also isomorph zu $\mathbf{Q}$ oder 0, falls $n > 1$. Sei $gr_n \mathbf{Z}G = JG^n/JG^{n+1}$. Dann ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_n LG & \xrightarrow{\varphi_G} & gr_n \mathbf{Z}G \\ {\scriptstyle \alpha_n}\downarrow & & \downarrow \\ U_n LG \otimes \mathbf{Q} & \xrightarrow{\varphi_G \otimes \mathbf{Q}} & gr_n \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Q} \end{array}$$

α_n für alle $n>1$ ein Monomorphismus. Für $n=1$ ist φ_G immer bijektiv. Also ist φ_G in allen Graden ein Isomorphismus.

Bemerkung. Sei $G=H\times K$; falls H und K die Voraussetzung des obigen Satzes erfüllen, so ist φ_G ein Isomorphismus.

BEISPIELE: (a) Teilbare abelsche Gruppen von endlichem Rang. (b) Mal'cev-Gruppen G mit G/G_2 vom Rang 1. Die Mal'cev-vervollständigung ([7]) der Gruppe $\langle a, b \mid [a, b]=b^2\rangle$ hat diese Eigenschaft.

2. Einige nilpotente Gruppen

2.1. *Endliche p-Gruppen.* Sie G eine endliche p-Gruppe mit absteigender Zentralreihe $G=G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_c\supset G_{c+1}=1$. Als abelsche Gruppe ist dann $LG=\oplus_{i=1}^{c} G_i/G_{i+1}$ auch eine endliche p-Gruppe.

SATZ. *φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G zyklisch ist.*

Beweis. U_mLG und damit $gr_m\mathbf{Z}G$ sind für $m>0$ abelsche p-Gruppen von endlichem p-Rang. Der Beweis erfolgt durch Abzählen der zyklischen direkten Summanden. Nach Poincaré-Birkhoff-Witt gilt

$$ULG\otimes\mathbf{Z}_p = U(LG\otimes\mathbf{Z}_p) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathbf{Z}_p^{(s_m)}.$$

Dabei ist $s_m\leqslant s_{m+1}$ für jedes $m\geqslant 0$. Gilt das Gleichheitszeichen für ein $m>0$, so gilt es für alle. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn G zyklisch ist. Da U_mLG $(m>0)$ eine endliche p-Gruppe ist, folgt

$$U_mLG = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{falls} \quad m=0 \\ \text{direkte Summe von } s_m \text{ zyklischen } p\text{-Gruppen falls } m>0 \end{cases}$$

Also gelten folgende Ungleichungen für $m>0$:

$$s_m = p\text{-Rang } U_mLG \leqslant p\text{-Rang } U_{m+1}LG = s_{m+1}$$

Nach Lemma 3.1. genügt es nun zu zeigen, dass der p-Rang von JG^m/JG^{m+1} $(m>0)$ eine beschränkte Funktion von m ist. JG^m $(m>0)$ ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang r_m. Es existieren also ([2], p.78) eine $\mathbf{Z}$-Basis $e_1,\ldots, e_{r_m}$ von JG^m und eine $\mathbf{Z}$-Basis $g_1,\ldots, g_{r_m}$ von JG^{m+1} mit

a) $g_i = m_i\cdot e_i$, wobei $m_i\in\mathbf{Z}$ $(i=1,\ldots,r_m)$

b) $m_{i-1} \mid m_i$ $(i=2,\ldots,r_m)$.

Da JG^m/JG^{m+1} eine endliche p-Gruppe ist, muss $m_i=p^{k_i}$ $(i=1,\dots,r_m)$ sein mit $0<k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_{r_m}$. Daraus folgt $r_m=|G|-1$ und p-Rang $JG^m/JG^{m+1}\leqslant|G|-1$.

2.2. Die folgende Gruppe ist endlich erzeugt, torsionsfrei und nilpotent von der Klasse 2:

$$G=\langle a,b,c \mid ac=ca,\ bc=cb,\ [a,b]=c^2\rangle.$$

Der zugehörige Lie-Ring $LG=G/G_2\oplus G_2$ hat die Gestalt $(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2)\oplus\mathbf{Z}$. Die Erzeugenden von $G/G_2=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2$ sind die Restklassen von a, b und c; das Erzeugende von $G_2=\mathbf{Z}$ ist c^2. LG ist demnach ein direktes Produkt von Lie-Ringen: $LG=L_1\oplus L_2=[(\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z})\oplus\mathbf{Z}]\oplus\mathbf{Z}_2$. L_1 ist frei als abelsche Gruppe und L_2 hat triviale Klammer. ULG lässt sich also wie folgt schreiben: $ULG=UL_1\otimes UL_2$, wobei $UL_2=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\cdots$ und UL_1 eine freie abelsche Gruppe ist, deren Komponenten man nach Poincaré-Birkhoff-Witt berechnen kann. Man erhält $U_nLG=\mathbf{Z}^{d(n)}\oplus\mathbf{Z}_2^{s(n)}$. Dabei sind $d(n)$ und $s(n)$ gegeben durch die Formeln

$$d(n)=d(n-2)+(n+1),\quad d(0)=1,\quad d(1)=2,\quad s(n)=\sum_{i=1}^{n}d(n-i).$$

2.3. Zur Berechnung von $gr\mathbf{Z}G$ verwenden wir eine Methode von S. A. Jennings und Ph. Hall ([3]): Sei S die Menge aller Tripel $r=(r_1,r_2,r_3)$ von ganzen Zahlen. Ist M eine feste, positive ganze Zahl, so ordnen wir $r\in S$ das Element $u(r)=v_1\cdot v_2\cdot v_3$ aus $\mathbf{Z}G$ zu, wobei $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$ und

$$v_k=\begin{cases}(1-x_k)^{r_k} & \text{falls } r_k\geqslant 0\\ (1-x_k)^M\cdot x_k^{r_k} & \text{falls } r_k<0.\end{cases}$$

Die Menge $\{u(r)\mid r\in S\}$ bildet eine $\mathbf{Z}$-Basis für $\mathbf{Z}G$ und die Menge $\{u(r)\mid 0\neq r\in S\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis für JG. Es ist vorteilhaft, diese Basiselemente mit einem Gewicht zu versehen. Wir definieren

$$\mu(1-x_1)=\mu(1-x_2)=1,\quad \mu(1-x_3)=2$$

und

$$\mu(u(r))=\begin{cases}r_1+r_2+2r_3 & \text{falls } r\geqslant 0\\ M & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dabei schreiben wir $r>0$ falls $r_k>0$ $(k=1,2,3)$. Natürlich gilt $\mu(u(r))>r_1+r_2+r_3$ falls $r>0$.

Sei nun $n\geqslant 1$ und $M>2n$.

LEMMA. *Definiert man*

$$n_r = \begin{cases} 0 \quad \textit{falls} \quad r > 0 \quad \textit{und} \quad \mu(u(r)) < n \\ 2^{n-\Sigma r_i} \quad \textit{falls} \quad r > 0 \quad \textit{und} \quad \mu(u(r)) \geqslant n > \sum_{i=1}^{3} r_i \\ 1 \ \textit{sonst} \end{cases}$$

so bildet die Menge $B_n = \{n_r \cdot u(r) \mid 0 \neq r \in S\}$ *eine* $\mathbf{Z}$*-Basis von* JG^n

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $n_r \cdot u(r) \in JG^n$.

(a) Für $n_r = 1$ ist dies klar.

Sei $r > 0$ und $\mu(u(r)) < n$. Jedes Element von JG^n ist als Linearkombination von Basiselementen aus JG mit Gewicht $\geqslant n$ darstellbar ([3]). Aus unseren Voraussetzungen und $n_r \cdot u(r) \in JG^n$ folgt also $n_r = 0$.

(c) Sei $\mu(u(r)) \geqslant n > \sum r_i$. Dann ist $\mu(u(r)) - \sum r_i = r_3 > 0$. $\mu(u(r))$ kann also folgende Werte annehmen:

$$\mu(u(r)) = n + r_3 - i \quad (i = 1, \ldots, r_3)$$

Also liegt $u(r)$ in JG^{n-i}. Wegen $2(1-c) \in JG^2$ folgt $2^i \cdot u(r) \in JG^n$ mit $i = n - \sum r_i$.

Man kann nun nachweisen, dass B_n die abelsche Gruppe JG^n erzeugt. Dies sieht man durch Induktion über n. Es genügt dabei, alle Produkte von Elementen aus B_{n-1} und B_1 zu betrachten. Wir verzichten auf diese Rechnungen und erwähnen nur die Formeln

$$\begin{aligned} (1-b)(1-a) &= -(1-a)(1-b)(1-c^{-2}) + (1-a)(1-c^{-2}) \\ &\quad + (1-b)(1-c^{-2}) + (1-a)(1-b) - (1-c^{-2}) \\ (1-c^{-2}) &= (1-c)^2 \cdot c^{-2} - 2(1-c)\,c^{-2} \\ (1-c)^{t-1} \cdot c^{-s} &= (1-c)^{t-1} \cdot c^{-s+1} + (1-c)^t \cdot c^{-s} \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 1). \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir behaupten nun, dass für unsere Gruppe G, φ_G ein Isomorphismus ist.

(a) Die Anzahl der unendlich zyklischen direkten Summanden in JG^n/JG^{n+1} ist gleich der Anzahl der Basiselemente von JG mit dem Gewicht n, also gleich $d(n)$.

(b) Die Anzahl der $\mathbf{Z}_2$-Komponenten in JG^n/JG^{n+1} ist gleich der Anzahl der Basiselemente $u(r)$ von JG mit $\mu(u(r)) \geqslant n+1 > \sum r_i$. Sei $z(n)$ diese Anzahl. Unsere Behauptung folgt nun aus dem

LEMMA. $z(n) = \sum_{i=1}^{n} d(n-i) = s(n)$.

Beweis. Ist $u(r)$ ein Basiselement aus JG, das den obigen Ungleichungen genügt, so kann $u(r)$ folgende Gewichte annehmen: $\mu(u(r)) = n+1, n+2, \ldots, 2n$. Man zählt nun ab, dass es genau $(n-i+1) + (n-i-1) + (n-i-3) + \cdots = d(n-i)$ Basiselemente $u(r)$ mit $\mu(u(r)) = n+i$ gibt. Also ist $z(n) = \sum_2^{s(n)} d(n-i) = s(n)$.

3. Abelsche Gruppen

3.1. Ist G eine abelsche Gruppe, so wird das Problem einfacher: Erstens ist $LG=G$ und zweitens hat man die bekannten Struktursätze für abelsche Gruppen zur Verfügung. Wir können denn auch diejenigen endlich erzeugten, abelschen Gruppen, für die φ_G bijektiv ist, charakterisieren (3.2.). Von grossem Nutzen ist uns dabei eine Arbeit von I. B. S. Passi ([6]); mit grossem Rechenaufwand werden dort verschiedene Resultate über Potenzen von Augmentationsidealen hergeleitet.

LEMMA. *Sei G eine zyklische Gruppe. Dann ist φ_G ein Isomorphismus*

Beweis. Für $G=\mathbf{Z}$ siehe 1.1. oder 1.3. Sei also $G=\mathbf{Z}(m)$. Für abelsche Lie-Algebren stimmt die universelle Enveloppe mit der symmetrischen Algebra überein. In unserem Fall ist $LG=\mathbf{Z}(m)$, also $ULG=S(\mathbf{Z}(m))=T(\mathbf{Z}(m))$. Die zweite Gleichheit gilt, weil $\mathbf{Z}(m)$ ein zyklischer $\mathbf{Z}$-Modul ist. Es folgt

$$U_0\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}, \quad U_n\mathbf{Z}(m)=\mathbf{Z}(m) \qquad n\geqslant 1.$$

Für $gr\mathbf{Z}G$ erhält man ([6]) dieselben Werte. Damit ist das Lemma bewiesen.

3.2. Wir benötigen einen einfachen Hilfssatz:

LEMMA. *Sei G eine abelsche Gruppe, so dass φ_G ein Isomorphismus ist. Dann gilt*

(i) $\varphi_{\mathbf{Z}\oplus G}$ ist ein Isomorphismus

(ii) Ist H ein direkter Summand in G, so ist φ_H ein Isomorphismus

Beweis. (i) Wir schreiben wieder S für die symmetrische Algebra. Es gilt

$$U(\mathbf{Z}\oplus G)=S(\mathbf{Z}\oplus G)=S(\mathbf{Z})\otimes S(G)\simeq S(\mathbf{Z})\otimes gr\mathbf{Z}G.$$

Setzt man $gr_n\mathbf{Z}G=Q_nG$, so folgt $U_n(\mathbf{Z}\oplus G)=\mathbf{Z}\oplus Q_n(G)\oplus\cdots\oplus Q_1(G)$. Dies stimmt mit $Q_n(\mathbf{Z}\oplus G)$ überein ([6]).

(ii) Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} ULG \arrow[r, "\varphi_G"] \arrow[d, shift left, "\beta"] & gr\mathbf{Z}G \arrow[d, shift left] \\ ULH \arrow[r, "\varphi_H"] \arrow[u, shift left, "\alpha"] & gr\mathbf{Z}H \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

α ist ein Monomorphismus wegen $\beta\cdot\alpha=1_{ULH}$.

SATZ. *Sei G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. φ_G ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G von der Form*

$$\mathbf{Z}^{(t)}\oplus\mathbf{Z}(m) \qquad t, m\geqslant 0$$

ist.

Beweis. Ist G von obiger Form, so ist φ_G bijektiv wegen 3.1. und 3.2.

Umgekehrt sei nun G eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe. G lässt sich darstellen als

$$G = \mathbf{Z}^{(t)} \oplus \mathbf{Z}(p_1^{s_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}(p_n^{s_n}),$$

wo die p_i Primzahlen, $t \geqslant 0$ und die $s_i > 0$ sind. Wir behaupten, dass alle p_i verschieden sind, falls φ_G bijektiv ist: Wäre zum Beispiel $p_1 = p_2 = p$, so enthielte G eine nichtzyklische endliche p-Gruppe H als direkten Summanden, für die φ_H ebenfalls bijektiv sein müsste (3.2.). Dies ist nicht möglich (2.1.). Also folgt

$$G = \mathbf{Z}^{(t)} \oplus \mathbf{Z}(m), \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i^{s_i}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATUR

[1] BAUMSLAG, G. and GRUENBERG, K., *Some Reflections on Cohomological Dimension and Freeness*, J. of Algebra *6* (1967).

[2] FUCHS, L., *Infinite Abelian Groups*, vol. 1 (New York, 1970).

[3] HARTLEY, B., *The Residual Nilpotence of Wreath Products*, Proc. London Math. Soc. (3) *20* (1970).

[4] LAZARD, *Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie*, Annales ENS *71* (1954).

[5] MAGNUS, W., KARRASS, A., and SOLITAR, D. *Combinatorial Group Theory* (New York, 1966).

[6] PASSI, I. B. S., *Polynomial Maps on Groups*, J. of Algebra *9* (1968).

[7] QUILLEN, D. G., *On the Associated Graded Ring of a Group Ring*, J. of Algebra *10* (1968).

[8] SERRE, J. P., *Lie Algebras and Lie Groups* (New York, 1965).

Forschungsinstitut für Mathematik
ETH
8006 Zürich

Eingegangen den 25. April