Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1972)

Artikel: Überdeckungen mit konvexen Mengen und nichtlineare Gleichungssyteme

Autor: Wille, Friedrich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36367

Überdeckungen mit konvexen Mengen und nichtlineare Gleichungssysteme

von Friedrich Wille

Einleitung

Überdeckungssätze und Aussagen über die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme sind eng miteinander verknüpft, wie das Beispiel des Lebesgueschen Pflastersatzes und des Brouwerschen Fixpunktsatzes zeigt ([1], S. 376–379), oder auch der Satz von Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk und sein Zusammenhang mit dem Borsukschen Antipodensatz ([1], S. 483–487; [3], Satz I und Satz III; oder [9], Satz 1 und Korollar 1).

In der vorliegenden Arbeit werden Überdeckungen betrachtet, bei denen die Ränder beschränkter Mengen im R^n in den Vereinigungen endlich vieler konvexer abgeschlossener Mengen liegen. Die Durchschnittseigenschaften dieser Überdeckungen sind denen verwandt, die in Antipodensätzen für die Sphäre vorkommen.

Aus diesem Grunde gelangt man, ähnlich wie bei den Antipodensätzen, von den Überdeckungen zu Lösbarkeitskriterien für nichtlineare Gleichungssysteme, die gewisse Konvexitätseigenschaften besitzen. Zum Beispiel erhält man Nullstellensätze für spezielle konvexe Abbildungen, das sind Abbildungen im R^n, die komponentenweise konvex sind.

Besonders an den Anwendungen (§4) erkennt man, dass man mit den gewonnenen Sätzen auch Nullstellen gerader Abbildungen nachweisen kann, was ja mit dem Borsukschen Antipodensatz und dem damit verwandten Brouwerschen Fixpunktsatz nicht möglich ist.

Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse auf konvexe Operatoren in Banachräumen, vor allem auf Integralgleichungen, werden in [12, 13, 14] angegeben.

Die Beweise in der vorliegenden Schrift benutzen hauptsächlich elementare Methoden der Konvexgeometrie. Sie erfordern daher keine speziellen Vorkenntnisse. Nur vereinzelt werden Ergebnisse der kombinatorischen Topologie herangezogen.

§1. Analogien bei Überdeckungssätzen

In diesem Abschnitt werden Überdeckungssätze für beschränkte Mengen angegeben, die einen analogen Aufbau besitzen wie bekannte Überdeckungssätze für die Sphäre. Die Analogie soll zunächst am folgenden Satz 1 gezeigt werden.

R^n sei stets ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, in dem ein inneres Produkt (x, y) für $x, y \in R^n$ erklärt ist. Mit $|x| = \sqrt{(x, x)}$ wird die euklidische Norm von $x \in R^n$ bezeichnet und mit ∂M der Rand einer Menge M aus R^n. Damit gilt

SATZ 1. *Überdecken n konvexe abgeschlossene Mengen A_i aus R^n den Rand einer beliebigen beschränkten Menge $M \subset R^n$, so überdecken sie sogar die ganze Menge M.*

Man kann den Satz auch in folgender Form schreiben.

Überdecken n abgeschlossene Mengen A_i aus R^n den Rand einer beschränkten Menge $M \subset R^n$, wird M jedoch nicht vollständig von den A_i überdeckt, so ist wenigstens eins der A_i nicht konvex.

In dieser Gestalt lädt der Satz zum Vergleich mit dem Antipodensatz von Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk ([1], S. 487; [3, 5, 6, 9]) ein. Es sei

$$K^n = \{x \in R^n \mid |x| \leqq 1\}, \qquad n \geqq 1,$$

die *n-dimensionale Einheitskugel* und ihr Rand

$$\partial K^n = S^{n-1} = \{x \in R^n \mid |x| = 1\}$$

die *$(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre*. Ein *Antipodenpaar* besteht aus zwei Punkten x und $-x$ aus ∂K^n. Eine Teilmenge von ∂K^n heisst *antipodenfrei*, wenn sie kein Antipodenpaar enthält. Damit gilt

SATZ 1* (Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk). *Überdecken n abgeschlossene Mengen $A_i \subset \partial K^n$ die Sphäre ∂K^n, so enthält wenigstens ein A_i ein Antipodenpaar.*

Offenbar geht Satz 1, zweite Fassung, in Satz 1* über, wenn man die beschränkte Menge M durch K^n ersetzt, ferner die Voraussetzungen $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ durch $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ersetzt und statt „konvex" „antipodenfrei" schreibt.

An einem zweiten Satzpaar wird die Analogie noch deutlicher. $\operatorname{cl} A$ bedeutet dabei die abgeschlossene Hülle und $\operatorname{conv} A$ die konvexe Hülle einer Menge $A \subset R^n$. $\operatorname{int} A$ ist das Innere von A.

SATZ 2. *Aus $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, $M \subset R^n$ beschränkt, $n \geqq 2$, $M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \neq \emptyset$ und $A_i \subset R^n$ abgeschlossen und konvex für alle $i = 1, \ldots, n+1$ folgt:*

Je n der A_i und $Q = \operatorname{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$ besitzen einen gemeinsamen Punkt, während der Durchschnitt aller $n+1$ A_i leer ist.

ZUSATZ. *$Q \cap \bigcup_{i \neq k} A_i$ besteht aus genau einem Punkt x_k $(k = 1, \ldots, n+1)$, und es gilt $Q \subset \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.*

Für die Sphäre gilt dagegen, s. [1], S. 487, Satz X.

SATZ 2*. *Aus* $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$, $n \geqq 2$, A_i *abgeschlossen und antipodenfrei für alle* $= 1, \dots, n+1$, *folgt*:

Je n der A_i *besitzen einen gemeinsamen Punkt, während der Durchschnitt aller* $n+1$ A_i *leer ist.*

Die Sätze 1 und 1* wie auch 2 und 2* haben also die gleiche Form bezüglich der folgenden Analogie.

ANALOGIE 1.

(a) $M \subset R^n$ *beschränkt*	entspricht	K^n (*Einheitskugel*).
(b) $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \neq \emptyset$	entspricht	$\partial K^n = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$
(c) *konvex*	entspricht	*antipodenfrei*
(d) $x \in Q = \mathrm{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i)$ *liegt in n Mengen* A_i	entspricht	*x liegt in n Mengen* A_i

Überdeckt man ∂M bzw. ∂K^n mit einer beliebigen endlichen Anzahl abgeschlossener Mengen A_i, so erhält man, etwas abweichend von der beschriebenen Analogie, folgendes Satzpaar.

SATZ 3. *Aus* $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $M \subset R^n$ *beschränkt*, $n \geqq 2$, $M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i \neq \emptyset$ *und* $A_i \subset R^n$ *abgeschlossen und konvex für alle* $i = 1, \dots, m$ *folgt*:

$Q = \mathrm{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i)$ *enthält einen Punkt, der in n Mengen* A_i *liegt, während der Durchschnitt aller* A_i *leer ist.*

SATZ 3*(s. [10], Satz 2). *Aus* $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $n \geqq 2$, *wobei jedes* A_i *abgeschlossen ist und in einer offenen Hemisphäre von* ∂K^n *liegt, folgt*:

Es existiert ein Punkt in ∂K^n, *der in n Mengen* A_i *liegt. Ferner gilt* $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$.

Eine offene Hemisphäre von ∂K^n hat dabei die Gestalt $H = \{x \in \partial K^n \mid (x, a) > 0\}$, $a \in R^n$, $a \neq 0$.

Die beiden Sätze entsprechen sich bezüglich (a), (b), (d) in Analogie 1, während (c) abgewandelt werden muss zu

(c′) A_i *konvex* entspricht A_i *liegt in einer offenen Hemisphäre.*

Eine Verschärfung dieser oder ähnlicher Art lässt sich nicht vermeiden, da Satz 3* falsch wird, wenn man „A_i *liegt in einer offenen Hemisphäre*" durch „A_i *antipodenfrei*" ersetzt.

Betrachtet man dagegen *symmetrische Überdeckungen*, d.s. Überdeckungen, bei denen mit A_i stets auch $-A_i$ eine überdeckende Menge ist, so lässt sich eine vollständige Analogie erreichen. Man hat Analogie 1 nur in folgender Weise sinngemäss abzuwandeln.

ANALOGIE 2.

(a_1) *$M \subset R^n$ beschränkt mit $0 \in M$*	entspricht K^n (*Einheitskugel*).
(b_1) $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)]$ *und* $M \setminus \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)] \neq \emptyset$	entspricht $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)]$
(c) *konvex*	entspricht *antipodenfrei*
(d_1) $x \in Q = \mathrm{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)])$ *liegt in n Mengen* $A_i \cup (-A_i)$	entspricht *x liegt in n Mengen* $A_i \cup (-A_i)$

Analogie 2 unterscheidet sich von Anologie 1 also dadurch, dass anstelle von A die Menge $A_i \cup (-A_i)$ steht und $0 \in M$ vorausgesetzt wird. Folgende Satzgruppen gehen durch Analogie 2 ineinander über.

VORAUSSETZUNG. *Es sei M eine beschränkte Menge des R^n, $n \geqq 2$, mit $0 \in M$. Ferner gelte*

$$\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{m} [A_i \cup (-A_i)],$$

wobei jedes $A_i \subset R^n$ abgeschlossen und konvex ist und $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ (d.h. $0 \notin A_i$) *erfüllt. Für*

$$Q = \mathrm{cl}\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} [A_i \cup (-A_i)]\right)$$

gilt also $0 \in Q \neq \emptyset$. Damit folgt

SATZ 4. *$m \geqq n$.*

SATZ 5. *Aus $m = n$ ergibt sich*

$$Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset.$$

SATZ 6. *In jedem Fall enthält Q einen Punkt, der in n Mengen $A_i \cup (-A_i)$ liegt.*
Für die Sphäre gilt dagegen folgendes.

VORAUSSETZUNG. *Es sei*

$$\partial K^n = \bigcup_{i=1}^{m} [A_i \cup (-A_i)], \qquad n \geqq 2,$$

wobei jedes A_i abgeschlossen und antipodenfrei ist (also auch $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$ erfüllt). Damit folgt

SATZ 4* (Ljusternik-Schnirelmann). $m \geqq n$. ([6], S. 42, Corollaire; [5], Satz II)

SATZ 5*. *Aus* $m=n$ *folgt*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset .$$

(A. Granas [4], S. 83, Lemma 14)

SATZ 6*. *In jedem Fall existiert ein Punkt in* ∂K^n, *der in* n *Mengen* $A_i \cup (-A_i)$ *liegt* (H. Hadwiger [5], Satz I)

Das Merkwürdige ist, dass sich die Sätze 6 und 6* völlig entsprechen, während dies für die ähnlich gebauten Sätze 3 und 3* nicht gilt.

Analogien der beschriebenen Art sind vor allem deswegen nützlich, weil man durch sie zu neuen Vermutungen und Ergebnissen gelangen kann. Dazu sei Folgendes bemerkt.

Bei Satz 5 kann man vermuten, dass $Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ aus genau einem Punkt besteht, da dies bei dem ähnlich gebauten Satz 2 erfüllt ist, s. Zusatz. Doch konnte dies bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

§2. Beweise zu den Überdeckungen mit konvexen Mengen

Wegen der Ähnlichkeit der Überdeckungen mit konvexen Mengen einerseits und antipodenfreien Mengen andererseits kann man vermuten, dass die Sätze k sich aus den bekannten Sätzen k* herleiten lassen.

Tatsächlich kann man auch Satz 1 und 4 aus Satz 1* und 4* mühelos gewinnen, wobei Satz 1 in der zweiten Form zu betrachten ist. Man hat lediglich in M eine Kugel zu wählen, die von keinem A_i bzw. $A_i \cup (-A_i)$ geschnitten wird. Diese Kugel kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Einheitskugel K^n annehmen. Durch $f(x)=x/|x|$ $(x \in R^n,\ x \neq 0)$ wird jede konvexe Überdeckungsmenge A_i oder $-A_i$ in eine antipodenfreie Menge auf ∂K_n übergeführt. Damit folgen aus Satz 1* und 4* die Sätze 1 und 4.

Bei den übrigen Sätzen ist eine ähnliche Herleitung nicht ohne weiteres möglich. Aus diesem Grunde sollen für die Sätze k, $k \neq 5$, direkte Beweise angegeben werden, die nur Methoden der analytischen Geometrie und der Konvexgeometrie benutzen. Zu diesem Zweck formulieren wir einen allgemeineren Satz 7.

SATZ 7. *Es sei* M *eine beschränkte Menge im* R^n, $n \geqq 2$, *und*

$$\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

eine Überdeckung von ∂M mit m abgeschlossenen konvexen Mengen A_i, die nicht die ganze Menge M überdecken, d.h.

$$Q = \operatorname{cl}\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

ist nicht leer. Bezeichnet man mit P die Schnittpunktmenge

$P = \{x \mid x \in Q$ und x liegt im Durchschnitt von wenigstens n Mengen $A_i\}$ so folgt:

(I) $m \geqq n+1$,

(II) $Q \subset \operatorname{conv} P$, *also* $P \neq \emptyset$,

(III) $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$.

Der Satz fusst auf folgendem

LEMMA 1. *Es sei M eine beschränkte Menge im R^n, E^n ein offener Halbraum in R^n,*

$$\partial M \cap E^n \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i,$$

eine Überdeckung mit abgeschlossenen konvexen Mengen $A_i \subset R^n$ und

$$Q = \operatorname{cl}\left(M \cap E^n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \neq \emptyset.$$

Damit folgt:

Unter den $x \in Q$ existiert ein x_0 mit maximalem Abstand von ∂E^n, welches in n Mengen A_i liegt.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass in $Q \cap E^n$ ein x_0 liegt, welches n Mengen A_i angehört.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \in \partial E^n$. E^n hat also die Form

$$E^n = \{x \in R^n \mid (x, q) > 0\}, \quad q \in R^n, \quad |q| = 1.$$

Wegen $Q \neq \emptyset$ gibt es ein $x_1 \in \operatorname{int} Q$ mit

$$\alpha = (x_1, q) > 0. \tag{1}$$

Zu den A_i betrachten wir die Parallelmengen

$$A_i^\varepsilon = \bigcup_{y \in A_i} \{x \in R^n \mid |x - y| \leqq \varepsilon\},$$

wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt wird, dass x_1 keinem A_i^ε angehört.

Die Menge M sei durch die Zahl $r > 0$ beschränkt, d.h. $|x| \leqq r$ für alle $x \in M$.

Damit definieren wir den Punkt

$$p = -\frac{r^2}{\alpha} q .$$

Aus Kompaktheitsgründen existiert ein Punkt x_ε in

$$Q^\varepsilon = \mathrm{cl}\left(M \cap E^n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i^\varepsilon\right)$$

mit

$$|x_\varepsilon - p| = \max_{x \in Q^\varepsilon} |x - p| . \tag{2}$$

Wir zeigen, dass x_ε in E^n und im Durchschnitt von wenigstens n Mengen A_i^ε liegt. x_ε liegt in E^n aus folgendem Grunde: Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon - p|^2 &\geqq |x_1 - p|^2 = |x_1 - \alpha q + \alpha q - p|^2 \\ &= |x_1 - \alpha q|^2 + |\alpha q - p|^2 \geqq |\alpha q - p|^2 = \left(\alpha + \frac{r^2}{\alpha}\right)^2 > \frac{r^4}{\alpha^2} + 2r^2 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon - p|^2 &= |x_\varepsilon - (x_\varepsilon, q)\, q + (x_\varepsilon, q)\, q - p|^2 \\ &= |x_\varepsilon - (x_\varepsilon, q)\, q|^2 + |(x_\varepsilon, q)\, q - p|^2 \leqq r^2 + 2\frac{r^2}{\alpha}(x_\varepsilon, q) + \frac{r^4}{\alpha^2} . \end{aligned}$$

Zusammengenommen folgt

$$\frac{r^4}{\alpha^2} + 2r^2 < r^2 + 2\frac{r^2}{\alpha}(x_\varepsilon, q) + \frac{r^4}{\alpha^2}$$

und damit

$$(x_\varepsilon, q) > \frac{\alpha}{2} . \tag{3}$$

Daraus folgt insbesondere: $x_\varepsilon \in E^n$.

x_ε gehört n Mengen A_i^ε an, was folgendermassen bewiesen wird.

x_ε liegt in mindestens einem A_i^ε, da x_ε Randpunkt von Q^ε ist. x_ε sei, nach geeigneter Umnumerierung, in $A_1^\varepsilon, \ldots, A_s^\varepsilon$ enthalten, jedoch nicht in A_i^ε mit $i > s$. Wir nehmen $s < n$ an und führen dies zum Widerspruch.

Da $x_\varepsilon \in Q^\varepsilon$ von $\partial M \cap E^n$ mindestens den Abstand $\varepsilon > 0$ hat, ist x_ε innerer Punkt von $M \cap E^n$. Es gibt also eine Umgebung $U \subset M \cap E^n$ von x_ε, die kein A_i^ε mit $i > s$ schneidet.

In x_ε errichte man an jedes A_i^ε mit $i \leqq s$ eine Stützhyperebene H_i und bilde

$$V = U \cap \bigcap_{i=1}^{s} H_i.$$

V liegt ganz in Q^ε, denn kein Punkt von $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$ ist innerer Punkt von A_i^ε, $i \leqq s$, und kein Punkt von U liegt in A_i^ε, $i > s$. Da die Dimension von $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$ grösser oder gleich $n-s \geqq 1$ ist, enthält V wenigstens eine Strecke, die x_ε als inneren Punkt enthält. Auf dieser Strecke existiert aber ein Punkt z mit $|z-p| > |x_\varepsilon - p|$. Da $z \in V \subset Q^\varepsilon$ gilt, ist (2) verletzt. Also folgt $s \geqq n$, d.h. x_ε ist in wenigstens n Mengen A_i^ε enthalten.

Mit $\varepsilon \to 0$ erhält man aus Kompaktheitsgründen und wegen (3): Es gibt mindestens ein $x_0 \in Q \cap E^n$, welches in n Mengen A_i liegt.

Damit gibt es aber auch ein $x_0 \in Q \cap E^n$, welches

$$(x_0, q) = \max_{x \in Q} (x, q) = \beta \tag{4}$$

erfüllt und n Mengen A_i angehört. Definiert man nämlich die Halbräume

$$E_k^n = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; (x, q) > \frac{k}{k+1} \beta \right\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass in jedem $Q \cap E_k^n$ ein x_k existiert, welches n Mengen A_i angehört. Jeder Häufungspunkt x_0 der Folge $\{x_k\}$ gehört dann n Mengen A_i an. Ausserdem besitzt x_0 maximalen Abstand von ∂E^n, womit alles bewiesen ist.

Beweis des Satzes 7. (I). Angenommen, es ist $m \leqq n$. x_1 sei ein Punkt in M, der keinem A_i angehört. Dann existiert nach dem Trennungssatz ([8], S. 37, Satz 2.14) ein offener Halbraum $E^n \subset R^n$ mit $x_1 \in E^n$, der A_1 nicht schneidet. In $E^n \cap M$ muss es nach Lemma 1 einen Punkt x_0 geben, der n Mengen A_i angehört. Das ist aber unmöglich, da E^n von höchstens $n-1$ Mengen A_i geschnitten wird.

(II). Es sei $\tilde{Q} = M \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, also $Q = \mathrm{cl}\,\tilde{Q}$. Zu zeigen ist $\tilde{Q} \subset \mathrm{conv}\,P$, dann ist auch $Q \subset \mathrm{conv}\,P$ erfüllt, da $\mathrm{conv}\,P$, ebenso wie P, kompakt ist. Angenommen, es gilt $\tilde{Q} \not\subset \mathrm{conv}\,P$. Dann gibt es ein $x_1 \in \tilde{Q}$, $x_1 \notin \mathrm{conv}\,P$, zu dem ein offener Halbraum $E^n \subset R^n$ existiert mit $x_1 \in E^n$ und $\mathrm{conv}\,P \cap E^n = \emptyset$. In E^n existiert aber nach Lemma 1 ein Punkt aus P, also folgt $\mathrm{conv}\,P \cap E^n \neq \emptyset$ und damit ein Widerspruch.

(III). Schliesslich beweisen wir $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$. Es sei $z_0 \in \tilde{Q}$. Angenommen, es gibt einen Punkt x_0, der in allen A_i liegt. Dann trifft die von x_0 ausgehende Halbgerade durch z_0 den Rand ∂M in einem Punkt y_0 ausserhalb der Strecke $[x_0, z_0] = \mathrm{conv}\{x_0, z_0\}$. Da y_0 in einem A_i liegt, und x_0 ebenfalls in diesem A_i, so gehört auch $z_0 \in [x_0, y_0]$ zu A_i, was $z_0 \in \tilde{Q}$ widerspricht.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 1 ist gleichbedeutend mit (I) in Satz 7, Satz 3 und Satz 6 erhält man aus (II), (III).

Beweis des Satzes 2. Es genügt zu zeigen, dass $Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ aus genau einem Punkt besteht.

Zunächst beweisen wir, dass $Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ nicht leer ist. Es existiert ein $x_1 \in Q$ und ein Halbraum $E^n \subset R^n$ mit $x_1 \in E^n$, $E^n \cap A_{n+1} = \emptyset$. Mit Lemma 1 folgt damit die Existenz eines Punktes $x_0 \in E^n \cap Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$,

$Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ besteht nur aus einem Punkt x_0. Nimmt man nämlich an, es existiert ein weiterer Punkt $z_0 \neq x_0$ in $Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, so kann man z_0 durch eine Folge $\{z_k \mid k = 1,2,\ldots\}$ aus $\tilde{Q} = M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ approximieren. Die Gerade durch x_0 und z_k schneidet ∂M in einem Punkt y_k, der $z_k \in [x_0, y_k]$ erfüllt ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Damit folgt $y_k \in A_{n+1}$, denn $y_k \in \partial M$ liegt in wenigstens einem A_i. Aus $y_k \in A_i$ mit $i \leqq n$ würde wegen $x_0 \in A_i$ aber $z_k \in A_i$ folgen, was $z_k \in \tilde{Q}$ widerspricht.

Da die Folge $\{y_k\}$ beschränkt ist, besitzt sie einen Häufungspunkt y_0, der $z_0 \in [x_0, y_0]$ und $y_0 \in A_{n+1}$ erfüllt. Führt man die gleiche Überlegung noch einmal durch, wobei x_0 und z_0 ihre Rollen tauschen, so erhält man die Existenz eines $y_1 \in A_{n+1}$ mit $x_0 \in [z_0, y_1]$. Also liegen x_0 und z_0 auf der Strecke $[y_0, y_1]$, d.h. $x_0, z_0 \in A_{n+1}$. x_0 ist somit in allen A_i enthalten. Das ist aber nach Satz 7 (III) unmöglich.

Damit ist Satz 2 samt Zusatz bewiesen.

Beweis des Satzes 4. Angenommen, es ist $m < n$. Es sei H_i eine Hyperebene durch 0 mit $A_i \cap H_i = \emptyset$, also wegen $H_i = -H_i$ auch $(-A_i) \cap H_i = \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$. Der lineare Unterraum $\bigcap_{i=1}^{m} H_i$ besitzt mindestens die Dimension $n - m \geqq 1$. Er enthält also eine Gerade durch 0, die kein A_i schneidet. Das kann nicht sein, da die Gerade wegen $0 \in M$ den Rand ∂M trifft, der von den A_i überdeckt wird.

Zum Beweise von Satz 5 ziehen wir ein Hilfsmittel aus der kombinatorischenTopologie heran, nämlich das folgende Lemma von Sperner. Unter einem *n-dimensionalen euklidischen Simplex* Δ^n verstehen wir dabei die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten $x_0, \ldots, x_n$ des R^n die nicht alle in einer Hyperebene liegen. Das Simplex Δ^n wird von den $n+1$ $(n-1)$*-dimensionalen Seiten* $S_i = conv\{x_k \mid k \neq i\}$ berandet. Damit lautet das Spernersche Lemma:

LEMMA 2 ([1], S. 378, Satz B). *Überdeckt man Δ^n mit abgeschlossenen Mengen $B_0, B_1, \ldots, B_n$, wobei $B_i \cap S_i = \emptyset$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$ erfüllt ist, so folgt*

$$\bigcap_{i=0}^{n} B_i \neq \emptyset .$$

Beweis des Satzes 5. Zu zeigen ist $Q \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Zu jedem A_i existiert wegen $0 \notin A_i$ eine Hyperebene durch 0, die A_i nicht schneidet und folglich auch $-A_i$ nicht trifft. Es gibt also zu jedem A_i einen Halbraum

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x, q_i) > 0\}, \quad |q_i| = 1,$$

mit $A_i \subset E_i$, $-A_i \cap \operatorname{cl} E_i = \emptyset$. Die Punkte $q_1, \ldots, q_n$ sind linear unabhängig. Wären sie nämlich linear abhängig, so enthielte $\bigcap_{i=1}^n \partial E_i$ mindestens eine Gerade durch 0. Diese Gerade träfe kein A_i oder $-A_i$, also auch keinen Punkt aus ∂M, was nicht sein kann.

Aus diesem Grunde sind auch die Geraden

$$g_k = \bigcap_{i \neq k} \partial E_i, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

linear unabhängig, d.h. ihre konvexe Hülle bildet den ganzen Raum R^n. Man wähle nun auf jeder Geraden g_k einen Punkt x_k mit $x_k \in E_k$, so dass M im Inneren des „Hyperoktaeders" $\operatorname{conv}\{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \ldots, x_n, -x_n\}$ liegt. Wir betrachten nun das n-dimensionale euklidische Simplex $\Delta^n = \operatorname{conv}\{0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und versuchen darauf das Spernersche Lemma anzuwenden.

Die Mengen B_i, $i = 1, \ldots, n$, werden folgendermassen aus den A_i gewonnen. Man wähle zu jedem A_i eine Parallelmenge A_i^ε, $\varepsilon > 0$, die ebenso wie A_i in E_i liegt. Ferner sei C_i der von A_i aufgespannte Kegel

$$C_i = \{\lambda x \mid x \in A_i, \quad \lambda \geqslant 0\}.$$

Damit bildet man

$$B_i = A_i^\varepsilon \cup \operatorname{cl}(C_i \setminus M) \qquad \text{für} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und

$$B_0 = \operatorname{cl}\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^n [A_i^\varepsilon \cup (-A_i^\varepsilon)]\right).$$

Die B_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, erfüllen bezüglich Δ^n die Voraussetzungen des Spernerschen Lemmas. Es gibt also ein x_ε, welches im Durchschnitt aller B_i liegt. Da B_0 im Inneren von M liegt, ist auch x_ε ein Punkt von M. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt aus der Kompaktheit von $\operatorname{cl} M$: Es gibt ein $x_0 \in Q = \operatorname{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^n [A_i \cup (-A_i)])$, welches in allen A_i, $i = 1, \ldots, n$, enthalten ist.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 3. Gleichungssysteme mit Konvexitätseigenschaften

Wie kann man nun die bewiesenen Überdeckungssätze ausnutzen, um über die Lösungen von reellen Gleichungssystemen

$$f_i((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad x_1, \ldots, x_n \text{ reell}, \tag{5}$$

etwas auszusagen, wobei die Funktionen $f_i : M \to R^1$, $M \subset R^n$, im allgemeinen als nichtlinear vorausgesetzt werden?

Man geht im Prinzip so vor, dass man die Mengen

$$A_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leqq 0\} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

und

$$A_{n+1} = \{x \in M \mid f_i(x) \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

bildet. Besitzen die Mengen A_i, $i=1, \ldots, n+1$, aufgrund eines Überdeckungssatzes einen gemeinsamen Punkt $x=(x_1, \ldots, x_n)$ so ist dieser Punkt Lösung des Gleichungssystems (5).

Um diese Methode, möglicherweise leicht abgewandelt, mit den bewiesenen Überdeckungssätzen zusammen anwenden zu können, müssen die Gleichungssysteme gewisse Konvexitätseigenschaften besitzen.

Das einfachste wäre, wenn alle f_i konvexe Funktionen wären, d.h. wenn für jedes Tripel x, y, z aus M mit $y=\lambda x+(1-\lambda) z$, $0<\lambda<1$, die Ungleichung $f_i(y) \leqq \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(z)$ gelten würde. Die durch $f=(f_1, \ldots, f_n)$ definierte Abbildung $f: M \to R^n$ heisst dann eine *spezielle konvexe Abbildung.*

Man kommt aber meistens mit der Bedingung aus, dass

$$A_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leqq 0\}$$

aus einer oder mehreren Zusammenhangskomponenten besteht, die konvex bzgl. M sind. Dabei heisst eine Menge $A \subset R^n$ *konvex bzgl.* $M \subset R^n$, wenn mit x, $y \in A$ auch $[x, y] \cap M$ zu A gehört, wobei $[x, y]$ wie üblich die Verbindungsstrecke von x und y ist.

Die oben genannte Bedingung ist z.B. für die Funktion $f_i(x)=x_1 \cdot x_2+1$ (x_1, x_2 reell) erfüllt, obwohl f_i keineswegs eine konvexe Funktion ist.

Im Folgenden sei in R^n eine feste Basis gewählt, bezüglich der jeder Vektor $x \in R^n$ n reelle Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzt und jede Abbildung $f: M \to R^n$ in Komponenten $f_i: M \to R^1$ zerfällt: $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Mit R^n_+ bezeichnen wir im Folgenden den *natürlichen Kegel*

$$R^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_k \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad k = 1, \ldots, n\}$$

SATZ 8. *Es sei* $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen beschränkten Menge* $M \subset R^m$ *in den* R^n, $n \leqq m$, *wobei Folgendes gilt:*

(a) *Es gibt ein* $\varepsilon_0 > 0$, *so dass die Mengen* $\{x \in M \mid f_i(x) \leqq -\varepsilon\}$ *für alle* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *und* $i=1, \ldots, n$ *konvex bzgl. M sind,*

(b) $f(\partial M) \cap R^n_+ = \emptyset$.

Damit folgt: f besitzt keine Nullstelle in M. Allgemeiner gilt $f(M) \cap R^n_+ = \emptyset$.

Beweis. Man wähle ein ε, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, welches kleiner als der Abstand zwischen $f(\partial M)$

und R^n_+ ist, bilde die Mengen

$$A_i = \operatorname{conv}\left\{x\in M \mid f_i(x) \leqq -\frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n,$$
$$A_i = \emptyset \qquad\qquad \text{für} \quad i = n+1, \dots, m \quad (\text{falls} \quad n < m),$$

und verifiziere für sie die Voraussetzungen von Satz 1 (mit m statt n). Aus Satz 1 folgt dann $f(M) \cap R^n_+ = 0$.

SATZ 9. *Es sei $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen Menge $M \subset R^n$ in den R^n, wobei Folgendes gilt:*

(a) *Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Mengen $\{x\in M \mid f_i(x) \leqq 0\}$, $i = 1, \dots, n$, ist endlich. Jede dieser Zusammenhangskomponenten ist konvex bzgl. M,*

(b) *es gibt einen offenen Halbraum $E \subset R^n$, für den $M \cap E$ beschränkt, $f(\partial M \cap \operatorname{cl} E) \cap$ $\cap R^n_+ = \emptyset$ und $f(M \cap E) \cap \operatorname{int} R^n_+ \neq \emptyset$ ist.*

Damit folgt: f besitzt eine Nullstelle in $\operatorname{int} M \cap E$.

ZUSATZ. *Gilt anstelle von* (a):

(a′) *Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $B_i = \{x\in M \mid f_i(x) \leqq 0\}$ konvex bzgl. M und $f_i(x) < 0$ für alle $x \in \operatorname{int} B_i$,*

so folgt mit den übrigen Voraussetzungen von Satz 9: f besitzt genau eine Nullstelle in M. Sie liegt in $\operatorname{int} M \cap E$.

Dazu sei Folgendes bemerkt: Ist f eine spezielle konvexe Abbildung, d.h.: sind alle f_i konvexe Funktionen, so ist unter den Voraussetzungen von Satz 9 die Bedingung (a′) im Zusatz automatisch erfüllt. Man hat also in diesem Falle die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $f(x) = 0$. Damit wird ein Satz von G. J. Rieger ([7], §7, Satz 6) verallgemeinert (Dort wird eine Funktion f konvex genannt, wenn $-f$ konvex in unserem Sinne ist).

Beweis des Satzes 9. Man numeriere die Zusammenhangskomponenten der Mengen $\{x\in M \mid f_i(x) \leqq 0\}$ fortlaufend durch: $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, und bilde die Mengen

$$A_i = \operatorname{conv} Z_i \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Lemma 1 ergibt dann die Behauptung von Satz 9.

Beweis des Zusatzes. Nach Satz 9 existiert eine Nullstelle $x_0 \in \operatorname{int} M \cap E$ von f. Angenommen, es existiert noch eine weitere Nullstelle x_1 in M. Dann trifft die Gerade g durch x_0 und x_1 das Randstück $\partial M \cap \operatorname{cl} E$. Sei x_2 ein Punkt aus $g \cap \partial M \cap \operatorname{cl} E$, der x_0 am nächsten liegt, jedoch nicht zwischen x_0 und x_1. Überlegt man sich die möglichen Lagen von x_1, so findet man leicht, dass es einen solchen Punkt geben muss.

Wegen $f(\partial M \cap \operatorname{cl} E) \cap R^n_+ = \emptyset$ gilt $f_i(x_2) < 0$ für wenigstens ein i. Man wähle nun ein $x_3 \in g \cap \operatorname{int} M$, welches näher an x_2 liegt als x_0 und x_1, und welches $f_i(x_3) < 0$ erfüllt. Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein solches x_3. x_3 ist also innerer Punkt von B_i. Damit muss aber, wegen der Konvexität von B_i, einer der Punkte x_0 oder x_1 ebenfalls im Inneren von B_i liegen, was nach (a′) wegen $f_i(x_0)=f_i(x_1)=0$ nicht sein kann.

Damit ist der Zusatz bewiesen.

SATZ 10. *Es sei M eine abgeschlossene beschränkte Menge im R^n mit $0\in M$ und $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n): M\to R^n$ eine stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für jedes $i=1,\ldots,n$ ist $B_i=\{x\in M \mid f_i(x)\leqq 0\}$ konvex bzgl. M.*

(b) $f(0)\in \operatorname{int} R^n_+$

(c) *Es existiert eine abgeschlossene Teilmenge D von ∂M mit $\partial M=D\cup(-D)$ und $f(D)\cap R^n_+=\emptyset$.*

Daraus folgt: f besitzt eine Nullstelle in $\operatorname{int} M$.

Beweis. Mit $A_i=\operatorname{conv} B_i$ und Satz 5 erhält man sofort die Behauptung.

Ob man die Eindeutigkeit der Nullstelle beweisen kann, wenn man statt (a) die Bedingung (a′) aus dem Zusatz zu Satz 9 voraussetzt, ist bisher unbekannt.

Wie schon erwähnt, sind (a) oder (a′) stets erfüllt, wenn f eine spezielle konvexe Abbildung ist. Allgemeinere konvexe Abbildungen, vor allem in Banachräumen, werden in [12, 13, 14] behandelt.

§4. Anwendungen

Beispiele für die Nullstellensätze lassen sich inbesondere unter Systemen mit Polynomgleichungen leicht finden. Zur Demonstration seien einige einfache Systeme angegeben.

BEISPIEL 1. Betrachtet wird das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\equiv (x_1-1)^2 + x_2^4 + (x_3-\tfrac{1}{2})^6 - \tfrac{3}{2} = 0 \\ f_2(x) &\equiv (x_1-\tfrac{1}{2})^2 + (x_2-1)^4 + x_3^6 - \tfrac{3}{2} = 0 \\ f_3(x) &\equiv x_1^2 + (x_2-\tfrac{1}{2})^4 + (x_3-1)^6 - \tfrac{3}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

mit $x=(x_1,x_2,x_3)$, x_i reell.

Es soll gezeigt werden, das dieses Gleichungssystem in dem Würfel M mit den Ecken $P_{jkl}=(j,k,l)$, $j,k,l\in\{0,1\}$, keine Lösung x besitzt. Dazu wird Satz 8 benutzt.

Die Bedingung (a) in Satz 8 ist sicher erfüllt, da die f_i als Summen einfacher konvexer Funktionen konvex sind. Es soll dem Leser überlassen bleiben, die Bedingung (b), $f(\partial M)\cap R^3_+=\emptyset$, nachzuweisen. Man hat dazu lediglich die Werte der Funktionen f_i in den acht Ecken P_{jkl} zu berechnen. Daraus erkennt man leicht, das jedes f_i auf zwei Seiten des Würfels M negativ ist, wodurch auf allen sechs Seiten (b) erfüllt ist. Satz 8 ergibt dann die Unlösbarkeit von (6) in M.

BEISPIEL 2. Gelöst werden soll das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\equiv 1 - 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ f_2(x) &\equiv 1 + x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ f_3(x) &\equiv \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}x_1^4 + \tfrac{1}{6}x_2^6 - x_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

mit $x=(x_1, x_2, x_3)$, x_i reell.

Mit Satz 9 lässt sich zeigen: Das Gleichungssystem besitzt mindestens vier Lösungen in dem Quader M mit den Ecken $P_{jkl}=(j, k, l), j, k\in\{1, -1\}, l\in\{0, 1\}$.

Es genügt die Existenz einer Lösung $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ sicherzustellen, weil damit offenbar $(-\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $(\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ und $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ebenfalls Lösugen sind, wobei $\bar{x}_1 \neq 0$ und $\bar{x}_2 \neq 0$ gilt. Letzteres stellt man durch Einsetzen in $f_1(x)=0$ und $f_2(x)=0$ sofort fest.

f_1 und f_2 sind nicht konvex, was den Nachweis von (a) in Satz 9 etwas beschwerlicher macht. Man erkennt jedoch: Die durch $\{x\in R^3 \mid f_1(x)=0\}$ beschriebene Fläche ist ein zweischaliges Hyperboloid. $A_1=\{x\in R^3 \mid f_1(x)\leqq 0\}$ stellt daher die beiden Schalen mit „Füllung" dar und zerfällt somit in zwei konvexe Zusammenhangskomponenten. Das gleiche gilt für f_2. Da ferner f_3 konvex ist, gilt Bedingung (a) in Satz 9.

Wählt man zum Nachweis von (b) in Satz 9 den Halbraum $E=\{x\in R^3 \mid x_3>0\}$, so erkennt man die Gültigkeit von (b) durch Berechnung der Werte von f_i in den Ecken P_{jkl} und in 0. Satz 9 liefert damit die gesuchte Lösungsexistenz.

Zum Schluss betrachten wir noch zwei allgemeinere Beispiele.

BEISPIEL 3. Es soll das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} f_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} x_k^i + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} b_{kj}^{(i)} x_j^i - c_k = 0 \\ \text{mit} \quad k=1,\dots,n, \quad n\geqq 2, \quad x=(x_1,\dots,x_n)\in R_+^n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

untersucht werden, wobei $a_k^{(i)}$, $b_{kj}^{(i)}$ und c_k nichtnegative reelle Zahlen sind, die die Ungleichungen

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{s} b_{kj}^{(i)} < c_k < \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} \cdot n^{-i} \tag{9}$$

für alle $j=1,\dots,n$ und $k=1,\dots,n$ erfüllen.

Mit dem Zusatz zu Satz 9 soll gezeigt werden, dass (8) in R_+^n genau eine Lösung besitzt.

Die Funktionen f_k sind sämtlich konvex. Es ist also, wie im Anschluss an den Zusatz in § 3 bemerkt wurde, nur die Voraussetzung (b) im Satz 9 zu verifizieren.

Es ist $M=R_+^n$. Man wähle einen Halbraum $E\subset R^n$, der aus R_+^n ein euklidisches Simplex herausschneidet, und zwar das Simplex Δ^n, dessen Ecken die Einheitsvektoren und der Ursprung 0 sind:

$$E = \{x \in R^n \mid (x, p) < |p|^2\} \quad \text{mit} \quad p = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

Aus den Vorzeichen der Werte der Funktionen f_i in p und in den Ecken von $\Delta^n = M \cap \cap \operatorname{cl} E$ erkennt man, dass (b) in Satz 9 gilt. Also folgt: *Das Gleichungssystem* (8) *besitzt genau eine Lösung x in R^n_+.*

Weitere Beispiele zu Satz 9 findet man bei G. J. Rieger [7].

Schliesslich soll Satz 10 angewendet werden.

BEISPIEL 4. Gelöst werden soll das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} & f_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} (1 - x_k)^i \cdot a_k^{(i)} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{kj}^{(i)} \cdot x_j^i - c_k = 0, \\ & \quad k = 1, \ldots, n, \qquad n \geqslant 2, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in dem Würfel

$$W = \{x \in R^n \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1 \quad \text{für alle} \quad k\}$$

variiert. Dabei gelte $a_k^{(i)} \geqslant 0$, $c_k > 0$, $b_{jk}^{(i)} \geqslant 0$, $a_k^{(1)} \geqslant 0$ für alle k, j und alle $i \geqslant 2$, sowie

$$\sum_{i=2}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{kj}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |b_{kj}^{(1)}| < c_k < \sum_{i=1}^{m} a_k^{(i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |b_{kj}^{(1)}| \quad \text{für alle} \quad k. \tag{14}$$

f_k wird zu einer konvexen Funktion

$$\bar{f}_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} |1 - x_k|^i \, a_k^{(i)} + \sum_{i=2}^{s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{kj}^{(i)} \, |x_j|^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} b_{kj}^{(1)} \cdot x_j - c_k$$

auf den Einheitswürfel $M = \{x \in R^n \mid |x_k| \leqq 1 \text{ für alle } k\}$ erweitert. Die Abbildung $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$, definiert auf M, soll mit Satz 10 untersucht werden. Dabei sei

$$D = \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in M \mid x_k = 1\}$$

woraus $\partial M = D \cup (-D)$ folgt: Aus (14) folgt

$$\bar{f}(0) \in \operatorname{int} R^n_+ \quad \text{und} \quad \bar{f}(D) \cap R^n_+ = \emptyset,$$

denn auf $\{x \in M \mid x_k = 1\}$ gilt offenbar $\bar{f}_k(x) < 0$ für alle k.

Durch Anwendung von Satz 10 wird damit die Existenz einer Nullstelle $x_0 \in M$ von f geliefert. x_0 liegt in W, da aus (14) folgt, dass für $x \in M$, $x \notin W$, also $x_k < 0$ für ein k, die Ungleichung $f_k(x) > 0$ gilt. Also folgt:

Das System (13) *besitzt eine Lösung in W.*

Zum Schluss sei bemerkt, dass man bei speziellen konvexen Abbildungen, die die Voraussetzungen von Satz 9 befriedigen, die Lösung auch konstruktiv gewinnen kann. Von Rieger [7] ist gezeigt worden, dass das Regula-falsi-Verfahren stets die Nullstelle liefert, wenn die Voraussetzungen von Satz 9 gelten und M ein n-dimensionales euklidisches Simplex ist. Unter den gleichen Voraussetzungen hat B. Bongers [2] gezeigt, dass auch das schnellere Newton-Verfahren zur Nullstelle führt. Dabei ist das Newton-Verfahren in sinnvoller Weise sogar auf stetige nichtdifferenzierbare Abbildungen ausgedehnt worden. Es ist eine offene Frage, ob man die Nullstellen in Satz 10 in ähnlicher Weise gewinnen kann.

LITERATUR

[1] ALEXANDROFF, P., HOPF, H., *Topologie*, 1. Band. N. Y., 1965.

[2] BONGERS, B., *Newton-Verfahren für nichtdifferenzierbare konvexe Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen*, Staatsexamensarbeit, Düsseldorf, 1971.

[3] BORSUK, K., *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. *20* (1933), 177–190.

[4] GRANAS, A., *The Theory of Compact Vector Fields and Some of its Applications to Topologie of Functional Spaces* (I), Rozprawy Matematyczne, Warszawa, 1962.

[5] HADWIGER, H., *Elementare Kombinatorik und Topologie*, El. Math. *15* (1960), 49–60.

[6] LJUSTERNIK, L., SCHNIRELMANN, L., *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Paris, 1934 (Moskau, 1930).

[7] RIEGER, G. J., *Die Regula falsi für Systeme konvexer Gleichungen*, Math. Nachr. *40* (1969), 154–164.

[8] VALENTINE, F. A., *Konvexe Mengen*, B. I. Mannheim, 1968.

[9] WILLE, F., *Verallgemeinerung der Sätze von Borsuk-ulam und Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk auf nicht-antipodische Punktepaare*, Monatsh. Math. *74* (1970), 351–370.

[10] ——, *Durchschnitts- und Distanzeigenschaften bei Überdeckungen von Kugel, Sphäre und Raum*, Arch. Math. *21* (1970), 666–672.

[11] ——, *Zur Überdeckung der Sphäre mit sphärisch streng konvexen Mengen*. Math. Phys. Sem. Ber. *17* (1970), 221–222.

[12] ——, *Überdeckungen mit konvexen Mengen und Nullstellen konvexer Abbildungen*, Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1970.

[13] ——, *Nullstellen konvexter* Operatoren, Zeitschr. Angew. Math. Mech. *52* (1972) T196.

[14] ——, *Nichtlineare Operatoren mit Konvexitätseigenschaften*. (Erscheint demnächst.)

Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf,
Düsseldorf BR Deutschland

Eingegangen den 11. Januar 1972