Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1971)

Artikel: Représentations d'applications linéaires par des noyaux généralisés
Autor: Poncet, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35532

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Représentations d'applications linéaires par des noyaux généralisés*)

J. PONCET

1. Introduction

Si un opérateur autoadjoint A (pas nécessairement continu) d'un espace de Hilbert H, supposé de type dénombrable, a dans son spectre une partie continue, on peut définir un «système complet de vecteurs propres» de cet opérateur comme éléments de l'antidual d'un espace localement convexe convenable S_T.

S désigne un sous-espace dense de H tel que AS soit dans S, et T une topologie localement convexe sur S, plus fine que celle qui est induite par H. L'existence de tels vecteurs propres a été démontrée par plusieurs auteurs, sous certaines hypothèses (voir par exemple [2]). Nous établirons cette existence d'une manière rendue très simple par le choix particulier de S dans le domaine de A, mais notre problème principal est de donner des conditions générales sous lesquelles une application linéaire continue de S_T dans ${}^aS'_T$ faible (${}^aS_T$ est un espace antiisomorphe à S_T) peut être approchée par des applications de rang fini représentables par un *noyau* relativement à ce système de vecteurs propres.

Ceci fait naturellement intervenir un produit tensoriel (le produit inductif $S_T \otimes_i {}^aS_T$ de A. Grothendieck [4]) auquel on impose certaines conditions, par exemple, dans le cas de l'approximation forte, la semi-réflexivité de ce produit complété (voir 5.2 et la remarque 5.3).

L'existence d'une telle approximation constitue l'une des justifications possibles du formalisme de la «théorie des représentations» de Dirac-Jordan, dans lequel un opérateur quelconque est supposé représentable par une *matrice* associée à un système de vecteurs propres (celà pas seulement pour les opérateurs qui *commutent* avec A), ce qui, comme on sait, n'a de signification que dans des cas particuliers. Nous trouvons que la restriction d'un opérateur de H à S, si elle définit une application continue de S_T dans ${}^aS'_T$ faible, est représentable, sinon par un noyau (ou matrice), du moins par un noyau généralisé, c'est-à-dire une limite, en un certain sens, de vrais noyaux. Il existe par exemple toujours un *noyau faible* de cette application. Le cas de l'approximation forte est plus compliqué (n° 5).

Le fait de considérer les vecteurs propres d'un seul opérateur au lieu d'un ensemble commutant ne restreint pas essentiellement la généralité (voir n° 6).

La topologie T de S_T sera toujours donnée comme la topologie localement convexe

[1]) Travail préparé avec l'appui du Fonds national suisse et de l'Institut de physique théorique de l'Université de Genève.

la moins fine rendant continues des applications $\omega \mid S : S \to S_\alpha$ où α est une topologie localement convexe sur S, donnée une fois pour toutes, et plus fine que celle d'espace préhilbertien, et $\omega \mid S$ parcourt une certaine algèbre Φ_S d'endomorphismes de S qui contient la restriction $A \mid S$ de A à S. On notera $\langle x, y\rangle_H$ la forme hermitienne de H, $\langle \psi, x\rangle_T$ ou simplement $\langle \psi, x\rangle$ la forme antilinéaire en x (dans S_T), linéaire en ψ (dans ${}^aS'_T$) qui met en antidualité S_T et ${}^aS'_T$, et $\langle x, \psi\rangle$ le complexe conjugué de $\langle \psi, x\rangle$

En résumé, nous établirons les points suivants:

Soit A autoadjoint. On peut choisir S dense dans H tel que AS soit dans S, et que si Φ est une algèbre (n° 2) d'endomorphismes de S qui contient la restriction $A \mid S$ de A à S il existe des topologies localement convexes définies comme précédemment sur S, rendant continus ces endomorphismes, un espace localement compact Ξ_A, sur Ξ_A une mesure $d\xi$, une famille d'éléments p_ξ de ${}^aS'_T$, p_ξ étant défini pour presque tout ξ dans Ξ_A, qui sont éléments propres de l'*adjoint* $^*(A \mid S)$ (n° 4) avec les propriétés a) à e) ci-après:

a) pour x, y dans S,

$$\langle x, y\rangle_H = \int \langle x, p_\xi\rangle \langle p_\xi, y\rangle \, d\xi \, ;$$

b) S et H s'identifient à des sous-espaces faiblement denses de ${}^aS'_T$; donc tout ψ dans ${}^aS'_T$ est limite faible d'éléments x dans S, ce qu'on notera $x \xrightarrow{s} \psi$ et on a

$$\langle \psi, y\rangle = \lim_{x \xrightarrow{s} \psi} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle p_\xi, y\rangle \, d\xi$$

pour y dans S;

c) si S_T est semi-réflexif, on peut remplacer dans b) «faible», «faiblement» par «fort», «fortement».

L'espace des applications linéaires continues de S_T dans ${}^aS'_T$ faible s'identifie comme on sait au dual du produit tensoriel inductif $S_T \otimes_i {}^aS_T$. On a alors:

d) ${}^a(S \otimes {}^aS)$ s'identifie à un sous-espace faiblement dense de $(S_T \otimes_i {}^aS_T)'$, toute application continue F de S_T dans ${}^aS'_T$ faible – en particulier tout élément de Φ_S et la restriction à S de tout opérateur continu de H – est comme élément de $(S_T \otimes_i {}^aS'_T)'$ limite faible d'applications de rang fini f qui ont un noyau $\langle \xi | f | \eta\rangle$ relativement au système p_ξ; en particulier

$$\langle Fx, y\rangle = \lim_{f \xrightarrow{s} F} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle \xi | f | \eta\rangle \langle p_\eta, y\rangle \, d\xi \, d\eta$$

pour x, y dans S;

e) F est aussi limite forte de telles applications f dans $(S_T \otimes_i {}^aS_T)'$ sous d'autres conditions, entre autres: qu'il existe, pour une famille d'opérateurs notés Ω, d'un

espace $S\hat{\otimes}_\beta{}^a S$ tels que $S_T \otimes_i{}^a S_T$ ait la topologie la moins fine rendant continues les applications

$$(\Omega \mid S \otimes {}^a S): S \otimes {}^a S \to S \otimes_\beta{}^\alpha S,$$

des extensions *fermées* (n° 3) *dans* le complété $S\hat{\otimes}_\beta{}^a S$, que l'injection continue de $S\otimes_\beta{}^a S$ dans l'espace hilbertien $H\hat{\otimes}_H{}^a H$ se prolonge en une injection continue de $S\hat{\otimes}_\beta{}^a S$ dans le même espace, et que $S\hat{\otimes}_\beta{}^a S$ soit semi-réflexif (5.2. et remarque 5.3).

On peut comparer ceci avec d'autres énoncés du type «théorème des noyaux», par exemple celui de I. M. Gelfand et N. Y. Vilenkin ([3], chap. 1). Nos conditions sont différentes et nous ne supposons pas la nucléarité de S_T. Nous avons cependant noté (n° 6) une conséquence de la condition supplémentaire que S_T soit nucléaire.

Je tiens à remercier ici très vivement A. Robert, à qui je dois quelques améliorations de texte.

2. Les espaces S_T

Soit Φ_0 un ensemble d'opérateurs ω (pas nécessairement continus) de H, tel que

1) l'opérateur identité I est dans Φ_0;

2) il existe un sous-espace S dense dans H, contenu dans le domaine de chaque ω, et les restrictions $(\omega \mid S)$ des ω à S forment une algèbre Φ_S d'endomorphismes de S. S'il existe un tel S l'intersection D_0 des domaines des produits finis d'opérateurs de Φ_0 est le plus grand S qui vérifie 2).

Soit S_α l'espace S muni d'une topologie localement convexe α donnée, et plus fine que celle d'espace préhilbertien, et soit T la topologie la moins fine sur S rendant continues les applications $(\omega \mid S): S \to S_\alpha$. L'espace S_T ainsi défini est localement convexe et séparé, et T est plus fine que α. Les endomorphismes $(\omega \mid S): S_T \to S_T$ sont continus (car les applications composées $(\omega^{(1)} \mid S) \circ (\omega^{(2)} \mid S): S_T \to S_\alpha$ le sont, pour $(\omega^{(1)} \mid S)$, $(\omega^{(2)} \mid S)$ dans Φ_S ([1], chap. I)).

3. Le complété $\hat{S}_T$

Dans les énoncés 3.1, 3.2, 3.3 suivants, il n'est pas nécessaire de supposer que α est plus fine que la topologie préhilbertienne de S.

Nous voulons démontrer le lemme suivant:

LEMME 3.1. *L'injection continue* $I \mid S: S_T \to S_\alpha$ *se prolonge en une injection continue de* $\hat{S}_T$ *dans* $\hat{S}_\alpha$ *si les opérateurs* $(\omega \mid S)$ *sur* S_α *ont des extensions fermées* $\overline{(\omega \mid S)}$ *dans* $\hat{S}_\alpha$.

Un opérateur Ω, continu ou non *dans* S_α, est *fermé* si pour tout filtre convergent

ψ dans $\hat{S}_\alpha$ tel que $\Omega(\psi)$ soit aussi convergent, la limite de ψ est dans le domaine de Ω et

$$\Omega(\lim \psi) = \lim \Omega(\psi).$$

Soit $D^{(1)}$ l'intersection des domaines des produits finis P_S d'opérateurs $\overline{(\omega \mid S)}$ dans $\hat{S}_\alpha$. S est dans $D^{(1)}$. Soit $D_V^{(1)}$ le même espace muni de la topologie localement convexe V, la moins fine rendant continues les applications

$$P_s : D^{(1)} \to \hat{S}_\alpha.$$

V induit T sur S et $\hat{S}_T$ est dans $\hat{D}_V^{(1)}$.

Montrons, sous l'hypothèse que les $\overline{(\omega \mid S)}$ sont fermés, que l'injection continue de $\hat{S}_T$ dans $\hat{D}_V^{(1)}$ est en fait une injection continue dans $D_V^{(1)}$, ce qui entraine 3.1 en composant avec l'injection

$$I_s : D^{(1)} \to \hat{S}_\alpha$$

(la fermeture $\bar{I}_S$ de I_S est évidemment l'endomorphisme identique de $\hat{S}_\alpha$.) Il suffit de vérifier que

THÉORÈME 3.2. *$D_V^{(1)}$ est complet.*

Soit ψ un filtre de Cauchy dans $D_V^{(1)}$ et soit x un point de $D_V^{(1)}$. La condition que ψ soit de Cauchy dans $D_V^{(1)}$ (resp. converge vers x) est équivalente à la condition [5, p. 234] que les bases $P_S(\psi)$ soient de Cauchy dans $\hat{S}_\alpha$ (resp. convergent vers $P_S(x)$ dans $\hat{S}_\alpha$). Mais ψ est aussi de Cauchy dans $\hat{S}_\alpha$ puisque α est moins fine que V. Soit y la limite de ψ dans $\hat{S}_\alpha$, et montrons que y est dans $D_V^{(1)}$ et que ψ tend vers y dans $D_V^{(1)}$ (donc que $D_V^{(1)}$ est complet).

Soient $(\omega^{(i)} \mid S)$, $i = 1, \ldots, n$ des éléments de Φ_S. $\overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(\psi)$ est une base de Cauchy dans $\hat{S}_\alpha$, donc converge vers $z^{(1)}$ dans $\hat{S}_\alpha$, et $\overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(y) = z^{(1)}$ puisque $\overline{(\omega^{(1)} \mid S)}$ est fermé. De même $\overline{(\omega^{(2)} \mid S)}\,\overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(\psi)$ est une base de Cauchy dans $\hat{S}_\alpha$ qui converge vers $z^{(2)}$, et $\overline{(\omega^{(2)} \mid S)}(z^{(1)}) = z^{(2)}$, $\overline{(\omega^{(2)} \mid S)}\,\overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(y) = z^{(2)}$, etc.; finalement $\overline{(\omega^{(n)} \mid S)} \ldots \overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(\psi)$ est de Cauchy dans $\hat{S}_\alpha$, et si $z^{(n)}$ est so limite, on a

$$\overline{(\omega^{(n)} \mid S)}(z^{(n-1)}) = z^{(n)} = \overline{(\omega^{(n)} \mid S)}\,\overline{(\omega^{(n-1)} \mid S)} \ldots \overline{(\omega^{(1)} \mid S)}(y):$$

y appartient au domaine de chaque P_S, donc à $D^{(1)}$ et par l'équivalence des conditions ci-dessus, ψ converge vers y dans $D_V^{(1)}$.

THÉORÈME 3.3. *Si $\hat{S}_\alpha$ est semi-réflexif et si les $(\omega \mid S)$ ont des extensions fermées dans $\hat{S}_\alpha$, $\hat{S}_T$ est aussi semi-réflexif.*

En effet, $\hat{S}_T$ est séparé et s'identifie par la définition de $D_V^{(1)}$ à un sous-espace fermé d'un produit d'espaces isomorphes à $\hat{S}_\alpha$.

Dans le cas particulier où S_α est préhilbertien, $S_\alpha = H$ on peut prendre ω^{**} – s'il existe pour chaque ω – comme $\overline{(\omega \mid S)}$, et supposer a priori que les ω sont fermés dans H: $\omega = \omega^{**}$. Alors $\hat{S}_T$ est semi-réflexif, D_0 de n° 2 est $D^{(1)}$, et $D_V^{(1)}$ est complet et semi-réflexif.

Remarque 3.4. $P_S D^{(1)}$ est dans $D^{(1)}$ et les restrictions des P_S à $D_V^{(1)}$ engendrent une algèbre d'endomorphismes continus de $D_V^{(1)}$. En particulier la restriction de $\overline{(\omega \mid S)}$ à $\hat{S}_T$ est continue. Comme la restriction de $\overline{(\omega \mid S)}$ à S_T est $(\omega \mid S)$, on voit que les restrictions des $\overline{(\omega \mid S)}$ à $\hat{S}_T$ forment une algèbre $\hat{\Phi}_S$ d'endomorphismes continus de $\hat{S}_T$ qui sont les prolongements par continuité des $(\omega \mid S)$ à $\hat{S}_T$.

4. L'antidual ${}^a S'_T$

Par la définition de S_T du n° 2, l'antidual ${}^a S'_T$ contient un sous-espace qui s'identifie à H, car S_T a une topologie plus fine que celle d'espace préhilbertien, donc ${}^a S'_T$ contient l'antidual de H qu'on peut identifier à H.

Nous définissons l'*adjoint* $^*(\omega \mid S)$ comme opérateur sur ${}^a S'_T$ par la condition $\langle {}^*(\omega \mid S) v, x\rangle_T = \langle v, (\omega \mid S)\, x\rangle_T$ (x est dans S_T). $^*(\omega \mid S)$ coïncide avec l'adjoint habituel $(\omega \mid S)^*$ sur le domaine de celui-ci identifié à un sous-espace de ${}^a S'_T$.

Si on considère $(\omega \mid S)$ comme opérant sur S identifié à un sous-espace de ${}^a S'_T$, on peut définir une extension $(\omega \mid S)'$ à ${}^a S'_T$ par la condition

$$\langle (\omega \mid S)'\, v, x\rangle_T = \langle v, \omega^* x\rangle_T$$

pourvu que ω^* *appartienne à* Φ_0, ce qu'on peut aussi écrire

$$\langle (\omega \mid S)'\, v, x\rangle_T = \langle v, (\omega \mid S)^*\, x\rangle_T$$

puisque $(\omega \mid S)^*$ est une extension de ω^*. On a donc $(\omega \mid S)' = {}^*(\omega^* \mid S)$. Si ω est symétrique dans H, on a $\omega^* x = \omega x = (\omega \mid S)\, x$ et les égalités de définitions de $^*(\omega \mid S)$ et $(\omega \mid S)$ donnent $^*(\omega \mid S) = (\omega \mid S)'$.

La continuité de $^*(\omega \mid S)$ et $(\omega \mid S)'$ sur ${}^a S'_T$ fort ou faible résulte de [1, chap. IV, §4, cor. de prop. 6].

Il y a moins d'ensembles bornés dans S_T que dans H, donc ${}^a S'_T$ fort induit sur H une topologie moins fine que celle de H. Soit e l'application identique de S dans ${}^a S'_T$. Alors $e \circ (\omega \mid S): S_T \to {}^a S'_T$ fort est continue. Dans la suite on notera simplement $(\omega \mid S)$ pour $e \circ (\omega \mid S)$.

Remarque 4.1. D'après [1, chap. IV, §2], si v est dans ${}^a S'_T$, $\langle v, x\rangle_T$ est une somme finie $\sum_i \langle v_i, (\omega^i \mid S)\, x\rangle_\alpha$ avec v_i dans ${}^a S'_\alpha$, donc $v = \sum_i {}^*(\omega^i \mid S)\, v_i$ (en identifiant ${}^a S'_\alpha$ à un sous-espace de ${}^a S'_T$).

THÉORÈME 4.1. a) *S est faiblement dense dans ${}^aS'_T$.* b) *si S_T est semi-réflexif S est fortement dense dans ${}^aS'_T$.*

L'injection continue $I \mid S : S_T \to H$ a une transposée injective ${}^t(I \mid S) : {}^aH \to S'_T$ puisque S_T est dense dans H. L'image de ${}^t(I \mid S)$ est donc dense dans S'_T pour toute topologie sur S'_T compatible avec la dualité (S, S'_T), en particulier pour la topologie faible (et aussi la topologie de Mackey) et la topologie forte si S_T est semi-réflexif.

THÉORÈME 4.2. *Si l'injection continue $j_\alpha : S_\alpha \to H$ se prolonge en une injection continue $\hat{j}_\alpha : \hat{S}_\alpha \to H$, si les $(\omega \mid S)$ ont des extensions fermées $\overline{(\omega \mid S)}$* (n° 3) *dans $\hat{S}_\alpha$, et si $\hat{S}_\alpha$ est semi-réflexif, alors il existe une injection continue de $\hat{S}_T$ dans ${}^aS'_T$ fort et l'image de $S = S_T$ est fortement dense dans ${}^aS'_T$.*

Par 3.1 on a une injection de $\hat{S}_T$ dans $\hat{S}_\alpha$, donc dans H du fait de l'injection $\hat{j}_\alpha$, ce qui permet, en utilisant encore 3.3, d'appliquer 4.1 b) à l'espace algébrique $\hat{S}$ de $\hat{S}_T$ et $({}^aS_T)'$ $(= {}^aS'_T)$ fort. $\hat{S}$ est donc dense dans ${}^aS'_T$ fort. D'ailleurs l'injection de $\hat{S}$ dans ${}^aS'_T$ s'obtient en composant les injections

$$\hat{S}_T \to H \to {}^aS'_T.$$

Comme S est dense dans $\hat{S}_T$, son image est donc dense dans ${}^aS'_T$ fort.

5. Le produit $S_T \otimes_i {}^aS_T$

Nous désignons dans ce n° 5 par S_H l'espace préhilbertien S dans H.

Le produit tensoriel inductif [4] $S_H \otimes_i {}^aS_H$ a une topologie plus fine que celle de l'espace préhilbertien $S_H \otimes_H {}^aS_H$ (l'espace $S \otimes {}^aS$ muni de la forme hermitienne) définie par

$$\langle x_1 \otimes {}^ay_1, x_2 \otimes {}^ay_2 \rangle_{H \otimes H} = \langle x_1, x_2 \rangle_H \langle y_2, y_1 \rangle_H$$

puisque l'application canonique $\psi : (x, y) \to x \otimes y$ de $S_H \times {}^aS_H$ dans $S_H \otimes_H {}^aS_H$ est continue.

Soient $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ dans Φ_0 de n°1: $\omega^{(1)} \otimes {}^a\omega^{(2)}$ est continue de $S_T \otimes_i {}^aS_T$ dans $S_H \otimes_i {}^aS_H$, donc $\omega^{(1)} \otimes {}^a\omega^{(2)}$ est continue de $S_T \otimes_i {}^aS_T$ dans $S_H \otimes_H {}^aS_H$; et $\omega^{(1)} \otimes {}^a\omega^{(2)}$ est aussi continue de $S_T \otimes_i {}^aS_T$ dans $S_T \otimes_i {}^aS_T$ puisque cette application est associée à l'application bilinéaire

$$(x, y) \to \psi(\omega^{(1)}x, {}^a\omega^{(2)}y)$$

séparément continue de $S_T \times {}^aS_T$ dans $S_T \otimes_i {}^aS_T$.

THÉORÈME 5.1. *${}^a(S \otimes {}^aS)$ s'identifie à un sous-espace faiblement dense de $(S_T \otimes_i {}^aS_T)'$; et toute application linéaire continue de S_T dans ${}^aS'_T$ faible – en particulier*

l'application définie par $(\omega \mid S)$, *ou un opérateur continu de* H *restreint à* $S: S \to H$, *en identifiant* H *à un sous-espace de* ${}^a S'_T$ *– est limite faible dans* $(S_T \otimes_i {}^a S_T)'$ *d'applications* f *de rang fini (qui sont des éléments de* ${}^a(S \otimes {}^a S)$*).*

Ceci est une conséquence de 4.1 a) par le fait que la topologie de $S_T \otimes_i {}^a S_T$ est plus fine que celle de $S_H \otimes_H {}^a S_H$ ce qui permet d'identifier $S \otimes {}^a S$ à un sous-espace de ${}^a(S_T \otimes_i {}^a S_T)'$.

L'approximation forte. Soit β une topologie localement convexe donnée sur $S \otimes {}^a S$, plus fine que celle de $S_H \otimes_H {}^a S_H$.

Soit Φ_1 une famille d'opérateurs pas nécessairement continus, notés Ω, du complété $S_\beta {}^a \hat{\otimes} S$. On suppose que le domaine de chaque Ω contient $S \otimes {}^a S$ et que Φ_1 contient les opérateurs de la forme $(\omega^{(1)} \mid S) \otimes (\omega^{(2)} \mid S)$, où $(\omega^{(1)} \mid S)$, $(\omega^{(2)} \mid S)$ appartiennent à Φ_S (n° 1). On suppose aussi qu'il existe un sous-espace Σ de $S \hat{\otimes}_\beta {}^a S'$ qui contient $S \otimes {}^a S$ et tel que les restrictions $(\Omega \mid \Sigma)$ à Σ forment une algèbre $\Phi_{\otimes,\Sigma}$ d'endomorphismes de Σ, et que chaque $(\Omega \mid \Sigma)$ possède une extension fermée $\overline{(\Omega \mid \Sigma)}$ dans $S \hat{\otimes}_\beta {}^a S$.

THÉORÈME 5.2. *Si* $S_T \otimes_i {}^a S_T$ *a la topologie la moins fine rendant continues les applications* $(\Omega \mid S \otimes {}^a S): S \otimes {}^a S \to S \hat{\otimes}_\beta {}^a S$, *si l'injection continue* $j_\beta: S \otimes_\beta {}^a S \to H \hat{\otimes}_H {}^a H$ *se prolonge en une injection continue* $\hat{j}_\beta: S \hat{\otimes}_\beta {}^a S \to H \hat{\otimes}_H {}^a H$ *et si* $S \hat{\otimes} {}^a S$ *est semi-réflexif alors* ${}^a(S \otimes {}^a S)$ *et* ${}^a(S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T)$ *s'identifient à des espaces fortement denses de* $(S_T \otimes_i {}^a S_T)'$. *En particulier les applications de* S_T *dans* ${}^a S'_T$ *faible définies par les* $(\omega \mid S)$ *et les restrictions à* S *d'opérateurs continus de* H *(*H *étant identifié à un sous-espace de* ${}^a S'_T$*) sont limites fortes (dans* $(S_T \otimes_i {}^a S_T)'$*) d'applications de rang fini* f.

La démonstration est analogue à celle de 4.2.

Soit Σ_τ l'espace Σ muni de la topologie localement convexe τ la moins fine rendant continues les $(\Omega \mid \Sigma): \Sigma \to S \otimes_\beta {}^a S$.

$S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T$ est semi-réflexif comme sous-espace fermé d'un espace semi-réflexif $\hat{\Sigma}_\tau$. D'autre part, il est sous-espace, avec topologie plus fine, de $\hat{\Sigma}_\beta$, puisqu'on a une injection continue de $\hat{\Sigma}_\tau$ dans $\hat{\Sigma}_\beta$ par 3.1, $(\Omega \mid \Sigma)$ ayant une extension fermée dans $\hat{\Sigma}_\beta = S \hat{\otimes}_\beta {}^a S$. Comme on a une injection continue de $\hat{\Sigma}_\beta$ dans $H \hat{\otimes}_H {}^a H$ par hypothèse, on a donc une injection j_i continue de $S_T \hat{\otimes} {}^a S_T$ dans son antidual ${}^a(S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T)'$ fort.

Mais par 4.1. b), $S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T$ ayant une topologie plus fine que celle qui est induite par $H \hat{\otimes}_H {}^a H$, et étant semi-réflexif, l'image par j_i de $S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T$ est fortement dense dans ${}^a(S_T \otimes_i {}^a S_T)'$, donc aussi l'image de $S_T \otimes_i {}^a S_T$.

Remarque 5.3. Les conditions de validité de 5.2 sont automatiquement satisfaites si l'injection $S_T \otimes_i {}^a S_T \to H \hat{\otimes}_H {}^a H$ se prolonge en une injection continue de $S_T \hat{\otimes}_i {}^a S_T$

dans $H\hat{\otimes}_H{}^aH$ et si $S_T\hat{\otimes}_i{}^aS_T$ est semi-réflexif, en prenant pour β précisément la topologie de $S_T\otimes_i{}^aS_T$ et pour Φ_1 l'algèbre engendrée par les endomorphismes continus de la forme $(\omega^{(1)} \mid S)\otimes(\omega^{(2)} \mid S)$, Σ étant $S\otimes{}^aS$.

Sur la question générale du prolongement d'une injection continue en une injection continue, on peut consulter [5, chap. IV].

6. Le noyau généralisé d'une application de S_T dans ${}^aS'_T$ faible

A étant un opérateur autoadjoint de H, qu'on suppose d'abord à spectre continu, on sait d'après les théorèmes de réduction de [6, chap. VII, théorèmes 7.2, 7.9, 7.10, 7.15] que H est somme hilbertienne d'une suite de sous-espaces fermés H_n tels que la restriction A_n de A à H_n soit autoadjointe et à spectre simple. Chaque H_n est isomorphe à un espace $L^2(d\varrho_n)$, $d\varrho_n = d\|E(\lambda)f_n\|$ étant une mesure sur une droite d_n, $E(\lambda)$ la famille spectrale de A, et f_n (vecteur cyclique dans H_n) tel que H_n soit engendré par les vecteurs $E(\lambda)f_n$. Si J_n est l'isomorphisme en question, l'opérateur $J_nA_nJ_n^{-1}$ est équivalent à la multiplication par λ sur $L^2(d\varrho_n)$. Dans la suite, on écrit A_n pour $J_nA_nJ_n^{-1}$. Si $E_n(\lambda)$ est la restriction de $E(\lambda)$ à H_n, on a

$$A_n = \int \lambda \, dE_n(\lambda).$$

Comme H_n est engendré par les éléments $E(\lambda)f_n$, $E_n(\lambda)$ est constant au voisinage d'un point μ si et seulement si $E_n(\lambda)f_n$ l'est, donc si et seulement si ce voisinage est $d\varrho_n$-négligeable. Autrement dit, le support de $d\varrho_n$ noté $\operatorname{supp}(d\varrho_n)$ est le spectre de A_n (le complémentaire dans d_n de l'ouvert des points au voisinage desquels $E_n(\lambda)$ est constant).

Sur l'espace localement compact Ξ_A réunion des droites d_n introduisons la mesure $d\varrho$ somme des mesures $d\varrho_n$. H est isomorphe à $L^2(d\varrho)$ par un isomorphisme J qu'on peut appeler la somme des J_n.

Si A a des valeurs propres, il leur correspond par réduction des H_{n_i} à une dimension, $\operatorname{supp}(d\varrho_{n_i})$ est un point, Ξ_A est une réunion de droites et d'une partie discrète réunion des $\operatorname{supp}(d\varrho_{n_i})$.

Soit S_n l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $\operatorname{supp}(d\varrho_n)$, et soit S la somme directe des S_n: S est dense dans H et AS est dans S. C'est aussi l'ensemble des fonctions continues à support compact dans la réunion Ξ'_A des $\operatorname{supp}(d\varrho_n)$. Soit α une topologie localement convexe sur S plus fine que la topologie préhilbertienne, et telles que les formes linéaires $q_\xi : h \to h(\xi)$ soient continues pour tout ξ dans Ξ'_A (donc presque partout dans Ξ_A), h étant continue à support compact dans Ξ'_A. Par exemple, on peut prendre pour S_α la somme directe des S_n munis de la topologie de la convergence uniforme sur $\operatorname{supp}(d\varrho_n)$, du fait que $d\varrho_n$ est bornée.

Soient alors Φ_0, Φ_S, S_T comme au n° 2. On suppose que A est dans Φ_0. Les formes antilinéaires $p_\xi : h \to \overline{h(\xi)}$ sont dans ${}^aS'_T$ pour presque tout $\xi \in \Xi_A$. Dorénavant, nous noterons $d\xi$ pour $d\varrho(\xi)$. Pour toute paire x, y dans S on aura, en posant $A_S = A \mid S$:

THÉORÈME 6.1. *$\langle x, y\rangle_H = \int \langle x, p_\xi\rangle \langle p_\xi, y\rangle \, d\xi$ et $\langle {}^*A_S p_\xi, x\rangle = \langle p_\xi, A_S x\rangle = \alpha(\xi)\langle p_\xi, x\rangle$ où ${}^*A_S p_\xi = \alpha(\xi) p_\xi$, $\alpha(\xi)$ étant réelle, et d'ailleurs continue sur Ξ'_A; si ψ est dans ${}^aS'_T$,*

$$\langle \psi, y\rangle = \lim_{x \xrightarrow{s} \psi} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle p_\xi, y\rangle \, d\xi$$

où $x \xrightarrow{s} \psi$ signifie que ψ est limite faible d'éléments x de S dans ${}^aS'_T$, et si S_T est semi-réflexif on a même

$$\langle \psi, y\rangle = \lim_{x \to \psi} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle p_\xi, y\rangle \, d\xi$$

uniformément en y sur tout ensemble borné de S_T, $x \to \psi$ signifiant que ψ est limite forte d'élément x de S dans ${}^aS'_T$.

Les deux dernières identités sont des conséquences immédiates de 4.1.

Convenons maintenant de dire qu'une application linéaire F continue de S_T dans ${}^aS'_T$ faible a un *noyau généralisé faible* (resp. fort) si F est, comme élément de $(S_T \otimes_i {}^aS_T)'$, limite faible (resp. forte) d'applications f qui ont un noyau $\langle \xi | f | \eta\rangle$ de carré sommable (de Hilbert-Schmidt) pour la mesure produit $d\xi \, d\eta$ sur $\Xi_A \times \Xi_A$, c'est-à-dire

$$\langle f x, y\rangle = \int \langle x, p_\xi\rangle \langle \xi | f | \eta\rangle \langle p_\eta, y\rangle \, d\xi \, d\eta$$

avec

$$\int |\langle \xi | f | \eta\rangle|^2 \, d\xi \, d\eta < \infty$$

L'énoncé 6.2 n'est autre qu'une transposition de 5.1 et 5.2 en termes de noyaux.

THÉORÈME 6.2. a) *Une application continue F de S_T dans ${}^aS'_T$ faible, en particulier l'application définie par un $(\omega \mid S)$ ou la restriction à S d'un opérateur continu de H, en identifiant H à un sous-espace de ${}^aS'_T$, a toujours un noyau faible, et F est même limite faible d'applications de rang fini*

$$f : x \to \sum_i (g_i \otimes {}^a h_i)(x) = \sum_i \langle x, h_i\rangle_H \, g_i$$

avec h_i, g_i dans S, dont le noyau est

$$\langle \xi | f | \eta\rangle = \sum_i \langle p_\xi, h_i\rangle \langle g_i, p_\eta\rangle,$$

d'où

$$\langle Fx, y\rangle = \lim_{f \xrightarrow{s} F} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle \xi | f | \eta\rangle \langle p_\eta, y\rangle \, d\xi \, d\eta .$$

b) *Les mêmes applications F ont un noyau généralisé fort si* $S_T \otimes_i {}^a S_T$ *satisfait aux conditions de* 5.2 *ou* 5.3. *On a alors une identité analogue*

$$\langle Fx, y\rangle = \lim_{f \to F} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle \xi | f | \eta\rangle \langle p_\eta, y\rangle \, d\xi \, d\eta .$$

Par 6.2 a), l'application identique $I \mid S$ a un noyau faible. On peut le représenter de manière évidente par une série faiblement convergente $\sum_i \langle p_\xi, g_i\rangle \langle g_i, p_\eta\rangle$, série que nous noterons $\delta(\xi, \eta) = \langle \xi \mid \eta\rangle$, où les g_i forment un système orthonormé complet de S.

Soit v_ξ une fonction mesurable pour $d\varrho$ et localement bornée en mesure sur Ξ_A. Soit V l'opérateur de multiplication défini par v_ξ. Son domaine contient S, et si la restriction $V \mid S$ est continue de S_T dans ${}^a S'_T$ faible, elle a toujours un noyau faiblement convergent qu'on peut représenter d'ailleurs par les deux séries $v_\xi \delta(\xi, \eta)$ et $v_\eta \delta(\xi, \eta)$, on peut donc écrire $v_\xi \delta(\xi, \eta) = v_\eta \delta(\xi, \eta)$.

En effet, soit

$$\langle \xi | f_N | \eta\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle p_\xi, g_i\rangle \langle g_i, p_\eta\rangle .$$

On a, pour $x, y \subset S$, et si W désigne l'opérateur sur S défini par la multiplication par $\bar{v}_\xi$,

$$\lim_{N \to \infty} \int \langle x, p_\xi\rangle v_\xi \langle \xi | f_N | \eta\rangle \langle p_\eta | y\rangle \, d\xi \, d\eta$$
$$= \langle Vx, y\rangle = \langle x, Wy\rangle = \lim_{N \to \infty} \int \langle x, p_\xi\rangle \langle \xi | f_N | \eta\rangle v_\eta \langle p_\eta | y\rangle \, d\xi \, d\eta .$$

Remarque 6.3. Si S_T est nucléaire alors l'injection continue $i: S_T \to H$ est nucléaire (car i est bornée et H complet) donc la composée de i avec une application continue est nucléaire, en particulier l'application composée

$$S_T \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\gamma} H \xrightarrow{f_H} {}^a S'_T$$

est nucléaire pour tout opérateur continu de H [4, § 2, chap. II].

Remarque 6.4. Au lieu de partir, comme nous l'avons fait, d'un seul opérateur autoadjoint, on pourrait se donner une famille d'opérateurs X autoadjoints qui soient des fonctions $U_X(A)$ d'un opérateur A autoadjoint, dont on définit les vecteurs propres généralisés comme précédemment. Supposant encore que chaque X est représenté par

un opérateur de multiplication par une fonction X_ξ, $d\xi$ – mesurable sur Ξ_A, si la restriction $X \mid S$ se prolonge en une application continue de S_T dans ${}^aS'_T$ faible, celle-ci a un noyau généralisé au moins faiblement convergent dans $(S_T \otimes_i {}^aS_T)'$, même si S n'est par tout entier dans le domaine de X, mais ce noyau n'est pas nécessairement représenté par une série de la forme $X_\xi\, \delta(\xi, \eta)$.

Autre variante: on pourrait se donner directement un espace localement compact E, un espace $H = L^2$ associé à une mesure positive de Radon sur E, notée encore $d\xi$, une famille d'opérateurs autoadjoints B de H représentés comme opérateurs de multiplication par des fonctions continues B_ξ, opérateurs qu'on supposerait appartenir à Φ_0 (n° 1), S devenant le sous-espace de H des fonctions continues à support compact. Les fonctions propres (généralisées) simultanées des opérateurs B se définissent de manière évidente. Si X est un opérateur de multiplication par une fonction $d\xi$-mesurable, dont la restriction à S se prolonge en une application continue de S_T dans ${}^aS'_T$, celle-ci a au moins un noyau faible, mais pas nécessairement représentable par les séries précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris, 1953, 1955).
[2] I. M. Gelfand and G. E. Silov, *Applications de la théorie des fonctions généralisées*, J. de math. pures et appliquées *35* (1956), 383–413.
[3] I. M. Gelfand and N. Y. Vilenkin, *Les distributions*, (Dunod, 1967). t. 4
[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., n° 16, 1955.
[5] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, 2te Aufl. (Springer-Verlag, 1966).
[6] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space* (New-York, 1932).

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne

Reçu le 29 juin 1970