

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 46 (1971)  
  
**Artikel:** Riemann-Roch-Transformationen und Kobordismen  
**Autor:** Würgler, Urs  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35531>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Riemann-Roch-Transformationen und Kobordismen

URS WÜRLER

## 1. Einleitung

Ist  $\Theta: h^* \rightarrow k^*$  eine natürliche stabile Transformation zwischen multiplikativen Kohomologiefunktoren und sind  $M, N$  kompakte differenzierbare  $h^*$ - und  $k^*$ -orientierte Mannigfaltigkeiten,  $f: M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung, so ist im allgemeinen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k^*(M) & \xrightarrow{f_!} & k^*(N) \\ \Theta \uparrow & & \Theta \uparrow \\ h^*(M) & \xrightarrow{f_!} & h^*(N) \end{array} \quad (1.1)$$

nicht kommutativ. Mit  $f_!$  bezeichnen wir dabei den Umkehrhomomorphismus, vgl. [2], [3] für ausführliche Diskussionen bzw. Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit. Für alle  $x \in h^*(M)$  gilt aber

$$f_! \Theta(x) = \Theta[f_!(x)] \quad (1.2)$$

wobei

$$\Theta(x) = \varphi^{-1} \Theta \varphi(x) \quad (1.3)$$

gesetzt wurde und wir mit  $\varphi$  den Thomisomorphismus des (stabilen) Normalenbündels von  $M$  bzw.  $N$  bezeichnen.

Die Relation (1.2) ist ein formaler Ausdruck für verschiedene Sätze vom Typus Riemann-Roch-Grothendieck und stammt von E. Dyer [3]. Ist  $\Theta$  multiplikativ, so lässt sich (1.2) in der Form

$$f_! [\Theta(x) \cup \Theta(1_M)] = f_! [\Theta(x)] \cup \Theta(1_N) \quad (1.4)$$

schreiben.

Setzt man  $h_!^*(M) = h^*(M)$ ,  $h_!^*(f) = f_!$  so besagt (1.4), dass  $\Theta$  eine natürliche Transformation von  $h_!^*$  nach  $k_!^*$  über der Kategorie der  $h^*$ - und  $k^*$ -orientierten Mannigfaltigkeiten ist. Eine natürliche Transformation

$$q: h_!^* \rightarrow k_!^*$$

nennen wir eine Riemann-Roch-Transformation, man vgl. (4.1) für eine präzise Definition.

In der vorliegenden Note untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Riemann-Roch-Transformationen und stabilen Kohomologieoperationen. In Satz 4.1.1. stellen wir fest, dass die durch (1.3) definierte Abbildung die jeder stabilen Kohomologieoperation eine Riemann-Roch-Transformation zuordnet, im Falle von  $G$ -orientierten Kohomologiefunktoren ( $G = \mathbf{O}, \mathbf{U}, \mathbf{Sp}$ ) bijektiv ist. Als Folgerungen ergeben sich insbesondere ein Zusammenhang zwischen Riemann-Roch-Transformationen vom Typ  $MG_1^* \rightarrow h_1^*$  und stabilen charakteristischen Klassen für  $G$ -Bündel mit Werten in  $h^*$  (4.2.3.) und mit 4.2.4. eine Charakterisierung des differenzierbaren Riemann-Roch-Satzes von Atiyah-Hirzebruch für schwach-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten. In 4.2.2. geben wir eine Charakterisierung des Funktors  $MG_1^*$  durch eine universelle Eigenschaft.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Professor A. Dold meinen herzlichsten Dank aussprechen. Er hat das Manuskript gelesen und durch seine freundliche Kritik wesentlich zu dessen Verbesserung beigetragen.

## 2. Vorbereitungen

2.1. Mit  $\mathbf{W}$  bezeichnen wir die stabile Kategorie der endlichen  $CW$ -Komplexe. Die Objekte von  $\mathbf{W}$  sind Paare  $(X, n)$  wobei  $X$  ein endlicher  $CW$ -Komplex mit Basispunkt ist und  $n$  eine ganze Zahl. Die Morphismen sind die Mengen  $\text{Mor}_{\mathbf{W}} \times ((X, n), (Y, m)) = \{S^{r+n}X, S^{r+m}Y\}$ ,  $r$  ist dabei eine ganze Zahl mit  $r+n \geq 0, r+m \geq 0$ . Es ist klar, dass diese Definition unabhängig von  $r$  ist. Objekte aus  $\mathbf{W}$  werden wir in der Form  $(X, n) = S^n X$  schreiben. Grob gesprochen handelt es sich bei den Objekten von  $\mathbf{W}$  um endliche  $CW$ -Komplexe und deren formale Desuspensionen.

Spanier-Whitehead-Dualität ermöglicht die Konstruktion eines kontravarianten Funktors  $D: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ , der ein Antiautomorphismus und eine Involution auf  $\mathbf{W}$  ist. Es gilt also

$$1) D^2(S^n X) = S^n X$$

$$2) \text{Mor}_{\mathbf{W}}(S^n X, S^m Y) = \text{Mor}_{\mathbf{W}}(DS^m Y, DS^n X)$$

$D$  ist wie folgt gegeben: Ist  $X = (X, 0)$  ein  $CW$ -Komplex, so wählen wir eine genügend grosse natürliche Zahl  $N$  derart, dass das Spanier-Whitehead-Dual von  $X$ ,  $D_N X$ , existiert. Wir definieren  $DX = S^{-N} D_N X$  was uns wegen der Beziehung  $D_{n+1} X = S D_n X$  ein eindeutig bestimmtes, von  $N$  unabhängiges Objekt aus  $\mathbf{W}$  gibt. Ist  $S^r X$  ein beliebiges Objekt aus  $\mathbf{W}$ , so setzen wir  $D(S^r X) = S^{-r} DX$ .

2.2. Im Verlaufe der ganzen Arbeit verstehen wir unter  $G$  eine der stabilen Gruppen  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{U}$ , oder  $\mathbf{Sp}$  und unter  $\mathbf{F}$  einen der Körper  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  oder  $\mathbf{H}$ .  $d$  sei 1, 2 oder 4, je nach

Wahl der Gruppe  $G$ . Mit  $G_{nk}(\mathbb{F})$  bezeichnen wir die Grassmannmannigfaltigkeit der  $n$ -Ebenen im  $\mathbb{F}^{n+k}$ .  $BG(n) = \varinjlim G_{nk}(\mathbb{F})$  ist der klassifizierende Raum der Gruppe  $G(n)$ .  $\gamma_n$  bzw.  $\gamma_{nk}$  seien die universellen Bündel über  $BG(n)$  bzw.  $G_{nk}(\mathbb{F})$ . Ein Vektorbündel über einem  $CW$ -Komplex  $X$  denken wir uns stets durch seine klassifizierende Abbildung  $X \rightarrow BO$  gegeben. Eine  $G(n)$ -Struktur auf einem Vektorbündel  $\xi$  ist eine Äquivalenzklasse von Liftungen

$$\begin{array}{ccc} & BG(n) & \\ g\xi \nearrow & \downarrow j_n & \\ X & \xrightarrow{\xi} & BO(dn) \end{array}$$

Zwei Liftungen  $g$  und  $g'$  heissen dabei äquivalent, wenn eine Homotopie  $H: X \times I \rightarrow BG(n)$  so existiert, dass für alle  $(x, t) \in X \times I$  gilt:

$$j_n \circ H(x, t) = \xi(x).$$

Unter einer  $G$ -Mannigfaltigkeit  $M$  verstehen wir eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) zusammen mit einer  $G$ -Struktur  $g_M$  auf dem stabilen Normalenbündel  $\mu_M$  von  $M$ . Für Details verweisen wir auf [4].

Den Thomraum eines Vektorbündels  $\xi$  bezeichnen wir mit  $T(\xi)$ . Für  $T(\gamma_{ks})$  schreiben wir  $MG_s(k)$ , für  $T(\gamma_k)$  wie üblich  $MG(k)$ .

2.3. Unter einem Kohomologiefunktor verstehen wir stets eine über der Kategorie der endlichen  $CW$ -Paare definierte, multiplikative Kohomologietheorie  $h^* = \{h^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Mit  $\tilde{h}^*$  bezeichnen wir die reduzierte Theorie über der Kategorie der endlichen  $CW$ -Komplexe mit Basispunkt.  $\Sigma: \tilde{h}^i(X) \rightarrow \tilde{h}^{i+1}(SX)$  bedeute stets den Suspensionsisomorphismus. Ist  $h^*$  ein Kohomologiefunktor, so verstehen wir unter einer kanonischen Thomklasse für  $G$ -Bündel bezüglich  $h^*$  eine Folge  $U = \{U_n, n \in \mathbb{Z}\}$  von Kohomologieklassen, so dass gilt:

- 1)  $U_n \in \tilde{h}^{dn}(MG(n))$  ist eine Orientierungsklasse von  $\gamma_n$  für alle  $n$ .
- 2) Bezeichnet  $i: BG(n) \rightarrow BG(n+1)$  die Inklusion, so gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $i^*U_{n+1} = \Sigma^d U_n$ .

Besitzt  $h^*$  eine kanonische Thomklasse  $U$  für  $G$ -Bündel, so nennen wir das Paar  $(h^*, U)$  eine  $G$ -Theorie.

Ist  $h^*$  eine  $G$ -Theorie, so besitzt jedes  $G(n)$ -Bündel  $\xi$  eine durch  $T(g_\xi): T(\xi) \rightarrow MG(n)$  induzierte Thomklasse und  $h^*$  hat einen über der Kategorie der  $G$ -Bündel funktoriellen Thomisomorphismus  $\varphi_\xi: h^*(X) \rightarrow \tilde{h}^*(T(\xi))$ . Als Beispiel einer  $G$ -Theorie erwähnen wir die  $G$ -Kobordismustheorie  $MG^*$ . Ist  $(X, A)$  ein endliches  $CW$ -Paar, so ist  $MG^n(X, A)$  gegeben durch  $[S^{dk-n}X/A, MG(k)]$  für  $k$  gross genug.  $MG^*$  besitzt die durch  $U = \{U_n\}$ ,  $U_n = [\text{id}_{MG(n)}] \in MG^{dh}(MG(n))$  erklärte kanonische Thomklasse.



Jeder reduzierte Kohomologiefunktor  $\tilde{h}^*$  lässt sich auf die stabile Kategorie  $\mathbf{W}$  fortsetzen: Ist  $S^r X$  ein Objekt aus  $\mathbf{W}$  so setzt man einfach  $\tilde{h}^k(S^r X) = \tilde{h}^{k-r}(X)$ .

2.4. Sind  $h^*$  und  $k^*$  Kohomologiefunktoen so bezeichnen wir mit  $\text{Hom}^*(h, k) = \{\text{Hom}^i(h, k)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  die  $\mathbb{Z}$ -graduierte abelsche Gruppe der natürlichen stabilen Transformationen  $\Theta: h^* \rightarrow k^*$  vom Grad  $i$ . Mit  $C_G^*(h) = \{C_G^i(h)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  bezeichnen wir weiter die graduierte abelsche Gruppe der stabilen charakteristischen Klassen für  $G$ -Bündel mit Werten in  $h^*$ . Ein Element  $w \in C_G^*(h)$  ist also eine Funktion, die jedem  $G$ -Bündel  $\xi$  über  $X$  ein Element  $w(\xi) \in h^i(X)$  zuordnet, natürlich bezüglich  $G$ -Bündelabbildungen ist und zudem die Eigenschaft  $w(\xi \oplus 1) = w(\xi)$  für alle  $\xi$  aufweist.

### 3. Der Umkehrhomomorphismus

3.1. Ist  $M$  eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  so bezeichnen wir mit  $G_M$  die Menge aller möglicher  $G$ -Strukturen auf  $M$ , d.h. die Menge der  $G$ -Strukturen des (stabilen) Normalenbündels von  $M$ .

Für jede der stabile Gruppen  $G = \mathbf{O}, \mathbf{U}, \mathbf{Sp}$  definieren wir eine Kategorie  $\mathbf{B}_G$  wie folgt:

Die Objekte von  $\mathbf{B}_G$  sind die Tripel  $\langle M, r, g_M \rangle$  wobei  $M$  eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand,  $r$  eine ganze Zahl und  $g_M \in G_M$  eine  $G$ -Struktur von  $M$  bezeichnen. Die Morphismen in  $\mathbf{B}_G$  erklären wir durch  $\text{Mor}_{\mathbf{B}_G}(\langle M, r, g_M \rangle, \langle N, s, g_N \rangle) = \text{Mor}_{\mathbf{W}}(S^r(M/\partial M), S^s(N/\partial N)) \times (g_M, g_N)$ , wobei  $(g_M, g_N) \in G_M \times G_N$ . Die Komposition der Morphismen ist evident.  $F: \mathbf{B}_G \rightarrow \mathbf{W}$  sei der durch  $F(\langle M, r, g_M \rangle) = S^r(M/\partial M)$ ,  $F(f \times (g_M, g_N)) = f$  gegebene kovariante Funktor. Die Komposition  $D \circ F: \mathbf{B}_G \rightarrow \mathbf{W}$  von  $F$  mit dem Spanier-Whitehead-Dualitätsfunktor  $D$  bezeichnen wir mit  $D'$ . Es ist

$$D'(\langle M, r, g_M \rangle) = D(S^r M/\partial M) = S^{-r} D(M/\partial M).$$

Ist  $\mu$  ein  $a$ -dimensionales Normalenbündel von  $M$ , so sind die Räume  $T(\mu)$  und  $M/\partial M$  dual in  $S^{m+a+1}$ ,  $m = \dim M$ . D.h.  $D(M/\partial M) = S^{-(m+a+1)} T(\mu)$  oder also  $D'(\langle M, r, g_M \rangle) = S^{-(m+a+1)} T(\mu)$ .

3.2. Jeder  $G$ -Theorie  $(h^*, U)$  ordnen wir einen kovarianten Funktor

$$h_!^*: \mathbf{B}_G \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$$

wie folgt zu: Ist  $\langle M, r, g_M \rangle$  ein Objekt aus  $\mathbf{B}_G$ , so setzen wir  $h_!^*(\langle M, r, g_M \rangle) = h^*(M)$ ; ist  $f: \langle M, r, g_M \rangle \rightarrow \langle N, s, g_N \rangle$  ein Morphismus aus  $\mathbf{B}_G$  so erklären wir  $h_!^*(f) = f_! : h_!^*(\langle M, r, g_M \rangle) \rightarrow h_!^*(\langle N, s, g_N \rangle)$  folgendermassen: Ist  $\mu$  ein Normalenbündel von  $M$  mit  $G$ -Struktur  $g_M$ ,  $\nu$  ein Normalenbündel von  $N$  mit  $G$ -Struktur  $g_N$  so ist  $f_!$  durch

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 h_!^q(\langle M, r, g_M \rangle) & \xrightarrow{f_!} & h_!^{q+(n-m)+(s-r)}(\langle N, s, g_N \rangle) \\
 \parallel & & \parallel \\
 h^q(M) & & h^{q-r-m+s+n}(N) \\
 \varphi_\mu \downarrow \cong & & \varphi_\nu^{-1} \uparrow \cong \\
 \tilde{h}^{q+a}(T(\mu)) & & \tilde{h}^{q-r-m+s+n+b}(T(\nu)) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \tilde{h}^{q-r-m}(S^{-r-m-a}T(\mu)) & \xrightarrow{(D'f)^*} & \tilde{h}^{q-r-m}(S^{-s-n-b}T(\nu))
 \end{array}$$

gegeben.

Die Unabhängigkeit dieser Definition von einer speziellen Wahl der Normalenbündel  $\mu, \nu$  verifiziert man leicht, ebenso die Funktoreigenschaften von  $h_!^*$ .

Wir nennen  $h_!^*$  den zur  $G$ -Theorie  $(h^*, U)$  gehörigen Gysinfunctor über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$ .

*Bemerkung.* Es ist bekannt (vgl. etwa [4]), dass sich bei darstellbaren Kohomologiefunktoren  $h^*$  Orientierungsklassen des Normalenbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und Fundamentalklassen dieser Mannigfaltigkeit vermöge des Slantproduktes wechselseitig entsprechen. Ist  $U$  eine Orientierungsklasse und  $[M, \partial M]$  die zugehörige Fundamentalklasse, so hat man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{h}^{q+r}(T(\mu)) & \\
 \nearrow \varphi & & \nwarrow D \\
 h^q(M) & \xrightarrow[\quad P \quad]{\cap [M, \partial M]} & h_{n-q}(M, \partial M)
 \end{array}$$

$P$  bezeichnet dabei den Poincaré-Lefschetz-Dualitätsisomorphismus,  $D$  Spanier-Whiteheaddualität und  $r$  die Dimension von  $\mu$ . Aus dieser Beziehung und der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{h}^{q+r}(T(\mu)) & \xrightarrow{(Df)^*} & \tilde{h}^{q+r}(T(\nu)) \\
 D \uparrow \cong & & D \uparrow \cong \\
 h_{m-q}(M, \partial M) & \xrightarrow{f_*} & h_{m-q}(N, \partial N)
 \end{array}$$

folgt man leicht, dass sich für einen Morphismus  $f: \langle M, g_M \rangle \rightarrow \langle N, g_N \rangle$   $f_!$  in der Form

$$f_! = P_M^{-1} \circ f_* \circ P_N$$

schreiben lässt. In diesem Falle handelt es sich bei  $f_!$  also um den „gewöhnlichen“ Umkehrhomomorphismus.

3.3. Sind  $\langle M, r, g_M \rangle, \langle N, s, g_N \rangle$  zwei Objekte aus  $\mathbf{B}_G$ , so definieren wir ihr Produkt in  $\mathbf{B}_G$  durch  $\langle M, r, g_M \rangle \times \langle N, s, g_N \rangle = \langle M \times N, r+s, g_{M \times N} \rangle$  wobei  $g_{M \times N}$  die Produkt  $G$ -Struktur bezeichnet.

Ist  $(h^*, U)$  eine  $G$ -Theorie, so induziert die Kohomologiemultiplikation  $h^*X \otimes h^*Y \rightarrow h^*(X^*Y)$  offensichtlich ein Produkt

$$m: h_1^i(\langle M, r, g_M \rangle) \otimes h^j(\langle N, s, g_N \rangle) \rightarrow h_1^{i+j}(\langle M \times N, r + s, g_{M \times N} \rangle)$$

auf dem Funktor  $h_1^*$ .

Weil in der stabilen Kategorie  $\mathbf{W}$  die Beziehung  $D(X) \wedge D(Y) = D(X \wedge Y)$  gilt und weil der Thomisomorphismus einer  $G$ -Theorie  $(h^*, U)$  multiplikativ ist (im Falle  $G = \mathbf{O}$  folgt dies aus der Bemerkung, dass jede  $\mathbf{O}$ -Theorie strikt-kommutativ ist), d.h. für  $G$ -Bündel  $\xi, \eta$  gilt:  $\varphi_{\xi \times \eta}(x \times y) = \varphi_{\xi}(x) \times \varphi_{\eta}(y)$ , folgt leicht, dass für  $G = \mathbf{O}, \mathbf{U}, \mathbf{Sp}$  die Relation

$$(f \times g)_! m(x \otimes y) = m[f_!(x) \otimes g_!(y)]$$

gilt, d.h. das Produkt  $m$  ist natürlich.

#### 4. Riemann-Roch-Transformationen

**4.1. DEFINITION.** Es seien  $h^*$  und  $k^*$  zwei  $G$ -Theorien. Eine natürliche Transformation

$$\varrho: h_1^* \rightarrow k_1^*$$

über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$  nennen wir eine Riemann-Roch-Transformation.

Es ist klar, dass die Komposition zweier Riemann-Roch-Transformationen wieder eine Riemann-Roch-Transformation ist. Die abelsche Gruppe (bezüglich der üblichen Addition) der Riemann-Roch-Transformationen von  $h^*$  nach  $k^*$  vom Grade  $i$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{\mathbf{B}_G}^i(h_1, k_1)$ ,  $\text{Hom}_{\mathbf{B}_G}^*(h_1, k_1)$  steht für die  $\mathbf{Z}$ -graduierte abelsche Gruppe  $\{\text{Hom}^i(h_1, k_1)\}_{i \in \mathbf{Z}}$ . Es sei  $\Theta: h^* \rightarrow k^*$  eine stabile Kohomologieoperation zwischen den beiden  $G$ -Theorien  $(h^*, U)$  und  $(k^*, V)$ ,  $f: \langle M, r, g_M \rangle \rightarrow \langle N, s, g_N \rangle$  ein Morphismus aus  $\mathbf{B}_G$ . Sind  $\mu$  und  $\nu$   $G$ -Normalenbündel von  $M$  bzw.  $N$  so definieren wir für alle  $x \in h_1^*(\langle M, r, g_M \rangle) = h^*(M)$ :

$$\Theta(x) = \varphi_{\mu}^{-1} \Theta \varphi_{\mu}(x).$$

Man sieht sofort, dass der Homomorphismus  $\Theta: h_1^*(\langle M, r, g_M \rangle) \rightarrow k_1^*(\langle M, r, g_M \rangle)$  wegen der Stabilität von  $\Theta$  unabhängig von  $\mu$  ist. Eine einfache Rechnung zeigt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h^*(\langle M, r, g_M \rangle) & \xrightarrow{\Theta} & k^*(\langle M, r, g_M \rangle) \\ f_! \downarrow & & f_! \downarrow \\ h^*(\langle N, s, g_N \rangle) & \xrightarrow{\Theta} & k^*(\langle N, s, g_N \rangle) \end{array}$$

kommutativ ist, d.h. die Zuordnung  $\Theta \rightarrow \Theta$  definiert einen Homomorphismus

$$\Psi: \text{Hom}^*(h, k) \rightarrow \text{Hom}^*(h_1, k_1)$$

vom Grade 0.

$m: h_i^* \otimes h_i^* \rightarrow h^*$  bezeichne die in 3.3. definierte Produktabbildung.

**DEFINITION.** Eine Riemann-Roch-Transformation  $\varrho: h_i^* \rightarrow k_i^*$  über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$  heisst multiplikativ, wenn für alle  $x \in h_i^* (\langle M, r, g_M \rangle)$ ,  $y \in h_i^* (\langle N, s, g_N \rangle)$  gilt:

$$\varrho[m(x \otimes y)] = m[\varrho(x) \otimes \varrho(y)].$$

Mann sieht leicht ein, dass die einer multiplikativen Kohomologieoperation  $\Theta: h^* \rightarrow k^*$  vermöge der Abbildung  $\Psi$  zugeordnete Riemann-Roch-Transformation  $\Theta$  multiplikativ ist,  $\Theta$  lässt sich überdies in der Form

$$\Theta(x) = \Theta(x) \cup \Theta(1_M)$$

darstellen, dabei ist  $x \in h_i^* (\langle M, r, g_M \rangle)$  (vgl. [2]).

Der nachfolgende Satz gibt insbesondere eine positive Antwort auf die Frage, ob jede Riemann-Roch-Transformation  $\varrho: h_i^* \rightarrow k_i^*$  zwischen Gysinfunktoren über  $\mathbf{B}_G$  von der Form  $\Theta = \Psi(\Theta)$  ist, wobei  $\Theta \in \text{Hom}_{\mathbf{W}}^*(h, k)$ .

**SATZ 4.1.1.** *Es seien  $(h^*, U)$  und  $(k^*, V)$  zwei  $G$ -Theorien. Dann ist der durch  $\Theta \rightarrow \Theta$  gegebene Homomorphismus*

$$\Psi: \text{Hom}_{\mathbf{W}}^*(h, k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{B}_G}^*(h_i, k_i)$$

*ein Isomorphismus graduierter abelscher Gruppen vom Grad 0.  $\Psi$  bildet die Menge der multiplikativen stabilen Kohomologieoperationen auf die Menge der multiplikativen Riemann-Roch-Transformationen ab.*

**Beweis.** Es bezeichne  $T: \mathbf{B}_G \rightarrow \mathbf{W}$  den (kontravarianten) Funktor, der jedem Objekt  $\langle M, r, g_M \rangle$  aus  $\mathbf{B}_G$  den Thomraum des stabilen Normalenbündels von  $M$  zuordnet.  $F: \mathbf{B}_G \rightarrow \mathbf{W}$  sei der Vergissfunktor, der ein Objekt  $\langle M, r, g_M \rangle$  aus  $\mathbf{B}_G$  in den stabilen  $CW$ -Komplex  $S^r X \in \text{Ob}(\mathbf{W})$  überführt,  $X = M/\partial M$ . Der Funktor  $F$  ist voll und treu, weil zudem jedes Objekt  $S^r X$  von  $\mathbf{W}$   $\mathbf{W}$ -isomorph zu einem Objekt der Form  $F(\langle m, r, g_M \rangle)$  ist (man bette einen zu  $X$  homotopieäquivalenten kompakten Simplicialkomplex  $X'$  simplicial in einen geeigneten  $\mathbf{F}^n$  ein und betrachte anschliessend eine „regular neighbourhood“ von  $X'$ ) stellt  $F$  eine Kategorienäquivalenz dar. Ist  $D: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$  die durch Spanier-Whitehead-Dualität gegebene Antifäquivalenz, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_G & \xrightarrow{F} & \mathbf{W} \\ & \searrow T & \swarrow D \\ & \mathbf{W} & \end{array}$$

aufgrund des  $S$ -Dualitätssatzes von Atiyah [1] kommutativ. Daraus resultiert, dass auch  $T$  eine Antiäquivalenz ist. Sind nun  $\tilde{h}^*, \tilde{k}^*: \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{Ab}^z$  zwei Kohomologie-

funktoren so folgt aus der Antiäquivalenz von  $T$  die Existenz einer Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{W}}^*(h, k) \approx \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}_G}^*(h \circ T, k \circ T). \quad (1)$$

Ist  $t_!^*$  ein Gysinfunktor über  $\mathbf{B}_G$  so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} t_!^*(\langle M, r, g_M \rangle) & \xrightarrow[\approx]{\varphi} & \tilde{t}^* \circ T(\langle M, r, g_M \rangle) \\ f_! \downarrow & & \downarrow (D \circ Ff)^* \\ t_!^*(\langle N, s, g_N \rangle) & \xrightarrow[\approx]{\varphi} & \tilde{t}^* \circ T(\langle N, s, g_N \rangle) \end{array} \quad (2)$$

definitionsgemäss für alle Morphismen  $f$  aus  $\mathbf{B}_G$  kommutativ, d.h. der kanonische Thomisomorphismus der  $G$ -Theorie  $t^*$  definiert eine natürliche Äquivalenz

$$\varphi: t_!^* \approx t^* \circ T \quad (3)$$

über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$ .

Sind nun  $h^*$  und  $k^*$  zwei  $G$ -Theorien, so folgt die Satzaussage sofort durch Kombination von (1) und (3). Der Zusatz, dass  $\Psi$  multiplikative Transformationen in multiplikative überführt, ist evident.

Bekanntlich lässt sich nach Dold – sofern  $k^*$  rationale Vektorräume als Koeffizienten besitzt – jeder Homomorphismus:  $\tilde{h}^*(S^0) \rightarrow \tilde{k}^*(S^0)$  eindeutig zu einer stabilen natürlichen Transformation  $\tilde{h}^* \rightarrow \tilde{k}^*$  fortsetzen. Mit Satz 4.1.1. folgt daraus unmittelbar:

**KOROLLAR 4.1.2.** *Es seien  $h^*$  und  $k^*$  zwei  $G$ -Theorien. Sind die Koeffizienten von  $k^*$  rationale Vektorräume, so lässt sich jeder Homomorphismus*

$$h_!^*(pt) \rightarrow k_!^*(pt)$$

*eindeutig zu einer Riemann-Roch-Transformation*

$$h_!^* \rightarrow k_!^*$$

*fortsetzen.*

4.2. In diesem Abschnitt untersuchen wir den der  $G$ -Kobordismustheorie zugeordneten Gysinfunktor etwas genauer.

Ist  $h^* = MG^*$  und  $k^*$  eine beliebige  $G$ -Theorie, so ist jede Riemann-Roch-Transformation  $\varrho: MG_!^* \rightarrow k_!^*$  durch ihre Werte auf den Einselementen  $1_M \in MG^0(M)$ ,  $M$  eine kompakte  $G$ -Mannigfaltigkeit, vollständig bestimmt:

**LEMMA 4.1.1.** *Es sei  $h^*$  eine  $G$ -Theorie,  $M^m$  eine kompakte  $G$ -Mannigfaltigkeit und  $\varrho \in \mathrm{Hom}^*(MG_!, h_!)$ . Ist  $x \in MG^i(M)$  und wird das Poincarédual  $z = P(x) \in MG_{m-i}(M)$*

durch die singuläre Mannigfaltigkeit  $f: N^{m-i} \rightarrow M^m$  repräsentiert, so gilt

$$\varrho(x) = f_! \varrho(c_N^* 1)$$

Dabei bezeichnet  $c_N: N \rightarrow pt$  die triviale Abbildung von  $N$  auf den Punkt.

*Beweis.*  $N^{m-i} = N$  ist eine kompakte  $G$ -Mannigfaltigkeit ohne Rand, der Poincaré-Isomorphismus  $P_N: MG^*(N) \rightarrow MG_*(N)$  ist gegeben durch  $P_N(u) = u \cap [N]$  und die Fundamentalklasse  $[N] \in MG_{m-i}(N)$  von  $N$  lässt sich durch  $\text{id}_N: N \rightarrow N$  repräsentieren.  $z \in MG_{m-i}(M)$  lässt sich demnach in der Form  $z = f_*([N])$  darstellen und es gilt

$$\begin{aligned} \varrho(x) &= \varrho[P_M^{-1}(z)] \\ &= \varrho[P_M^{-1}(f_*[N])] \\ &= \varrho[P_M^{-1} f_* P_N(1_N)] \\ &= \varrho[f_!(c_N^* 1)] \\ &= f_! \varrho(c_N^* 1). \end{aligned}$$

*Bemerkung.* Setzt man  $MG^* = MU^* = k^*$  und bezeichnet  $s_\alpha: MU^* \rightarrow MU^*$  eine Landweber-Novikovoperation, so liefert Lemma 4.1.1. angewandt auf die Riemann-Roch-Transformation  $s_\alpha$  einen Satz von Novikov, vgl. [1] Thm. 8.3. Man hat dabei zu berücksichtigen, dass  $s_\alpha(c_N 1)$  im Falle  $M = pt$  gerade gleich der Conner-Floyd-Chernklasse des stabilen Normalenbündels von  $N$  ist.

Lemma 4.1.1. ermöglicht eine einfache Charakterisierung des Gysinfunktors  $MG_!^*$  über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$  durch folgende universelle Eigenschaft:

**SATZ 4.2.2.** *Zu jedem Gysinfunktor  $h_!^*$  über der Kategorie  $\mathbf{B}_G$  existiert genau eine Riemann-Roch-Transformation*

$$\tau_h: MG_!^* \rightarrow h_!^*$$

*derart, dass für alle kompakten  $G$ -Mannigfaltigkeiten  $M$  gilt:*

$$\tau_h(c_M^* 1) = c_M^*(1).$$

*Beweis.* Mit Lemma 4.2.1. schliesst man sofort, dass für alle  $h_!^*$  höchstens ein solches  $\tau$  existieren kann. Um die Existenz nachweisen, betrachten wir den für jede  $G$ -Theorie  $(h^*, V)$  erklärten Orientierungshomomorphismus  $\mu: MG^* \rightarrow h^*$ , der wie folgt definiert ist: Wird  $x \in MG^i(X, A) = [S^{dk-i} X/A, MG(k)]$  durch  $f: S^{dk-i} X/A \rightarrow MG(k)$  repräsentiert, und ist  $V = \{V_n\}$  eine kanonische Thomklasse von  $h^*$ ,  $V_k \in \tilde{h}^{dk}(MG(k))$ , so gilt:  $\mu(x) = \Sigma^{i-dk} f^*(V_k)$ . Der Definition von  $\mu$  entnimmt man sofort, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} MG^*(T(\xi)) & \xrightarrow{\mu} & \tilde{h}^*(T(\xi)) \\ \varphi_\xi \uparrow & & \uparrow \varphi_\xi \\ M^*(X) & \xrightarrow{\mu} & h^*(X) \end{array}$$

für jedes  $G$ -Bündel  $\xi$  kommutiert und daraus folgt unmittelbar, dass die Riemann-Roch-Transformation  $\mu$  die geforderten Eigenschaften besitzt.

Nach Landweber ([5], Thm. 3.1. und seinen an den Beweis anschliessenden Bemerkungen) ist die durch  $\Theta \mapsto \varphi_\xi^{-1} \Theta \varphi_\xi(1)$  gegebene Abbildung  $\phi: \text{Hom}^*(MG, h) \rightarrow C_G(h)$  ein Isomorphismus. Mittels Satz 4.1.1. folgt daraus leicht

**SATZ 4.2.3.**  *$(h^*, U)$  sei eine  $G$ -Theorie. Zu jeder stabilen charakteristischen Klasse  $w \in C_G^*(h)$  gibt es genau eine Riemann-Roch-Transformation*

$$\varrho_w: MG_1^* \rightarrow h_1^*$$

*derart, dass für alle geschlossenen  $G$ -Mannigfaltigkeiten  $\langle M, g_M \rangle \in \text{Ob}(\mathbf{B}_G)$  gilt*

$$\varrho_w(c_M^*1) = w(v_M)$$

*wobei  $v_M$  das stabile Normalenbündel von  $M$  bezeichnet.*

*Bemerkung.* Jede stabile Operation  $\Theta: h^* \rightarrow k^*$  zwischen  $G$ -Theorien definiert vermöge  $\xi \mapsto \varphi_\xi^{-1} \Theta U_\xi$  eindeutig ein Element  $w \in C_G^*(k)$  mit  $\Theta(c_M^*1) = w(v_M)$ . Mit 4.1.4., 4.2.2. und 4.2.3. folgert man leicht, dass zu jedem  $\varrho \in \text{Hom}^*(h_1, k_1)$  ein eindeutig bestimmtes Element  $\varrho \in \text{Hom}^*(MG_1, k_1)$  so existiert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h_1^* & \xrightarrow{\varrho} & k_1^* \\ & \swarrow \tau_h \quad \searrow \sigma & \\ & MG_1^* & \end{array}$$

kommutiert.

Wir geben zum Schluss noch eine Charakterisierung des differenzierbaren Riemann-Roch-Satzes von Atiyah-Hirzebruch für schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeiten.

Wir betrachten die  $\mathbb{Z}_2$ -graduierten Kohomologiefunktor  $KU^\# = KU^0 \oplus KU^{-1}$ ,  $MU^\# = MU^{\text{ev}} \oplus MU^{\text{odd}}$  und  $H^\#(, \mathbb{Q}) = H^{\text{ev}}(, \mathbb{Q}) \oplus H^{\text{odd}}(, \mathbb{Q})$ ; dabei setzen wir  $MU^{\text{ev}}X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} MU^{2k}X$ ,  $MU^{\text{odd}}X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} MU^{2k+1}X$  und analog für  $H^{\text{ev}}$  und  $H^{\text{odd}}$ . Der komplexen  $K$ -Theorie geben wir die durch  $([\xi] - 1) \in K^0(\mathbb{C}P_\infty)$  bestimmte kanonische Orientierung,  $\xi$  bezeichnet hier das kanonische Linienbündel über  $\mathbb{C}P_\infty$ .  $ch: KU^\# \rightarrow H^\#(, \mathbb{Q})$  sei der Cherncharakter,  $td \in C_U(H^\#)$  bezeichne die Toddklasse.

**SATZ 4.2.4.** *Es gibt genau eine multiplikative Riemann-Roch-Transformation*

$$\varrho: KU_1^\# \rightarrow H_1^\#(, \mathbb{Q})$$

*derart, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:  $\varrho(1_{\mathbb{C}P_n}) = td(\mathbb{C}P_n)$ .  $\varrho$  ist identisch mit der dem Cherncharakter  $ch$  assoziierten Riemann-Roch-Transformation  $\mathbf{ch}$ .*

*Bemerkung.* Die Tatsache, dass  $\mathbf{ch}$  eine Riemann-Roch-Transformation ist, besagt

wegen  $\mathbf{ch}(x) = ch(x) \cup \mathbf{ch}(1_M)$  und aufgrund der Beziehung  $\mathbf{ch}(1_M) = td(\tau_M) = td(M)$ , dass für jede stetige Abbildung  $f: M \rightarrow N$  zwischen schwach fastkomplexen Mannigfaltigkeiten und für alle  $x \in KU^*(M)$  gilt

$$f_! [ch(x) \cup td(\tau_M)] = ch[f_!(x)] \cup td(\tau_N).$$

Dies ist gerade die Aussage des differenzierbaren Riemann-Roch-Satzes.

*Beweis.* Es ist klar, dass der Orientierungshomomorphismus  $\mu: MU^* \rightarrow KU^*$  vermöge der Bottperiodizität eine multiplikative Kohomologieoperation  $MU^* \rightarrow KU^*$  liefert, die wir mit demselben Symbol bezeichnen. Nach [6] Thm. 10.1. ist  $\mu: MU^* \rightarrow KU^*$  epimorph. Daraus folgt, dass auch  $\tau_K = \mu$  epimorph ist. Sei nun  $\varrho: K_!^* \rightarrow H_!^*(\cdot, \mathbb{Q})$  eine Riemann-Roch-Transformation mit  $\varrho(1_{CP_n}) = td(CP_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Jede Riemann-Roch-Transformation nach  $H_!^*(\cdot, \mathbb{Q})$  ist nach Korollar 4.1.2. vollständig bestimmt durch ihre Restriktion auf die Koeffizienten. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_!^*(pt) & \xrightarrow{\varrho} & H_!^*(pt, \mathbb{Q}) \\ & \nwarrow \tau_K \quad \nearrow \varrho \circ \tau_K & \\ & MU_!^*(pt) \otimes \mathbb{Q} & \\ & \uparrow \otimes 1 & \\ & MU_!^*(pt) & \end{array}$$

Weil  $MU^*(pt) \otimes \mathbb{Q}$  der durch die Kobordismusklassen der komplexen projektiven Räume erzeugte rationale Polynomring ist, ist  $\varrho \circ \tau_K$  durch die Werte  $\varrho \circ \tau_K(1_{CP_n})$  eindeutig bestimmt (vgl. 4.2.1.). Weil  $\tau_K$  epimorph ist folgt das Resultat mit den bekannten Eigenschaften des Cherncharakters.

## LITERATUR

- [1] ATIYAH, M. F., *Thom complexes*, Proc. London Math. Soc. 11, 291–310. (1961)
- [2] DYER, E., *Cohomology theories* (Benjamin Inc. 1969).
- [3] —, *Relations between cohomology theories* (Colloquium on algebraic topology, Aarhus 1962).
- [4] STONG, R. E., *Notes on cobordism theory*. Princeton, 1968.
- [5] LANWEBER, P. S., *Cobordism operations and Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 129, (1967) 94–110.

Math. Institut der Universität  
CH-3000 Bern

Eingegangen den 2. Mai 1970, umgearbeitet 5. März 1971