Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1971)

Artikel: Extremaleigenschaften von Kreissektoren und Halbkugeln
Autor: Bandle, Catherine
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35527

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Extremaleigenschaften von Kreissektoren und Halbkugeln

CATHERINE BANDLE

Einleitung

Die Schwarzsche Symmetrisierung stellt ein wichtiges Instrument zur Gewinnung isoperimetrischer Ungleichungen der mathematischen Physik dar. Darunter verstehen wir eine geometrische Transformation [12, S. 189], welche jeder in einem ebenen Gebiet G positiven Funktion f, die auf dem Rand Γ von G verschwindet, die Funktion $S_{2\pi}f$ zuordnet. $S_{2\pi}f$ ist auf dem Kreis $K=\{z;\ |z|<R\}$ definiert, der die gleiche Fläche wie G hat. $S_{2\pi}f$ ist eine monoton abnehmende Funktion von $r=|z|$ mit der Eigenschaft, dass die Flächen der Gebiete $\{P;\ P\in G, f(P)\geqslant\lambda\}$ und $\{P;\ P\in K,\ S_{2\pi}f\geqslant\lambda\}$ einander gleich sind. Die für die Herleitung isoperimetrischer Ungleichungen wichtigsten Eigenschaften sind:

(a) *Das Dirichletintegral nimmt bei der Schwarzschen Symmetrisierung ab,*
(b) $\iint_G H(f)\,dx\,dy=\iint_K H(S_{2\pi}f)\,dx\,dy$ *für jede integrierbare Funktion* $H(t)$.

Wir werden eine Symmetrisierung S_α angeben, welche auch für Funktionen definiert ist, die nicht auf dem ganzen Rand Null sind. Der Definitionsbereich der transformierten Funktion ist in diesem Fall der Kreissektor vom Öffnungswinkel α. Die Eigenschaft (b) ist immer gewährleistet, während für (a) zusätzliche Bedingungen über den Tangentendrehwinkel von Γ erforderlich sind. Um (a) beweisen zu können, benötigen wir geometrische isoperimetrische Ungleichungen für das „Didoproblem". Sie werden in § 1.1 hergeleitet.

Mit dieser Symmetrisierung beweisen wir einen Satz für Moduln, der als Verallgemeinerung desjenigen von Carleman [5] und Szegö [14] aufgefasst werden kann. Ferner geben wir eine untere und obere Schranke für den ersten Eigenwert einer stückweise freien Membran und verallgemeinern damit die Ungleichungen von Nehari [10, Satz III] und von Gasser-Hersch [7]. Im letzten Abschnitt dehnen wir die Symmetrisierung auf Funktionen dreier Variabeln aus und leiten isoperimetrische Ungleichungen für dreidimensionale stückweise freie Membranen her. Den Anstoss zu dieser Arbeit gab ein Satz von Nehari [10, Satz III], welcher besagt, dass von allen Membranen von gegebener Fläche, die längs einem bezüglich G konkaven Bogens frei sind, die halbkreisförmige, die längs dem Durchmesser frei ist, den kleinsten ersten Eigenwert hat. Die wichtigsten Ergebnisse wurden in [2] zusammengefasst. In [3] und [4] wurde die Schwarzsche Symmetrisierung in einer andern Richtung verallgemeinert.

Inhaltsverzeichnis

§ 1 α-Symmetrisierung
1. Geometrische isoperimetrische Ungleichungen für das Didoproblem
2. Definition der α-Symmetrisierung
§ 2 Anwendungen
1. Obere Schranken für den Modul
2. Untere Schranken für den ersten Eigenwert einer stückweise freien Membran
3. Obere Schranken für den ersten Eigenwert einer elastisch gebundenen Membran
§ 3 Symmetrisierungen im Raum
1.1. Zwei isoperimetrische Ungleichungen
1.2. Symmetrisierungen
2. Anwendungen

§ 1 α-Symmetrisierung

1. *Isoperimetrische Ungleichungen für das „Didoproblem"*

1.1. γ sei ein stückweise glatter Jordanbogen mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B. Der Parameter s bedeute die Bogenlänge längs γ und $P(s)$ stelle den zum

$$\vec{t}(s) = \lim_{\Delta s \searrow 0} \frac{\overrightarrow{AP}(s+\Delta s) - \overrightarrow{AP}(s)}{s}.$$

Parameterwert s gehörigen Punkt von γ dar $(P(0)=A$ und $P(l)=B)$. Wir definieren In den regulären Punkten fällt $\vec{t}(s)$ mit dem Begriff der orientierten Tangente zusammen. In den Eckpunkten stellt $\vec{t}(s)=\vec{t}(s+0)$ die rechte, $t(s-0)$ die linke Halbtangente dar.

DEFINITION. $\varphi_\gamma(P_1, P_2)$, wobei $s_{P_1}<s_{P_2}$ ist, ist der Drehwinkel der Tangente $\vec{t}(s)$, wenn der Bogen von $s_{P_1}+0$ bis $s_{P_2}-0$ durchlaufen wird. $\varphi_\gamma(P^-, P^+)$ ist der orientierte Winkel zwischen der linken und der rechten Halbtangente im Punkte P.

Der Winkel fällt je nach dem Drehsinn positiv oder negativ aus.

BEISPIEL: Wenn das Bogenstück zwischen P_1 und P_2 glatt ist und die Krümmung $\kappa(s)$ besitzt, dann ist $\varphi_\gamma(P_1, P_2)=\int_{s_{P_1}+0}^{s_{P_2}-0} \kappa(s)\, ds$.

DEFINITION: $\bar{\varphi}_\gamma = \begin{cases} \max_{P_1, P_2 \in \gamma} \varphi_\gamma(P_1, P_2), & \text{wenn dieses Maximum positiv ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

BEISPIELE.

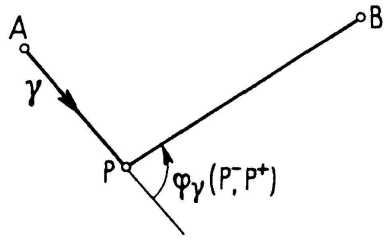

Fig. 1

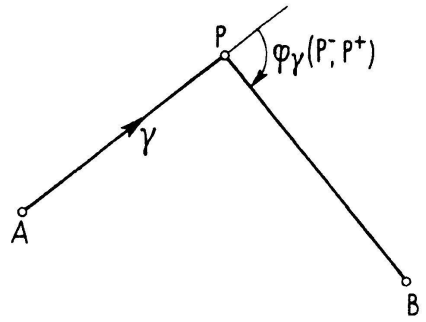

Fig. 2

(a) In der Figur 1 ist $\varphi_\gamma(P^-, P^+) > 0$, also $\bar{\varphi}_\gamma = \varphi_\gamma(P^-, P^+)$.
(b) In der Figur 2 ist $\varphi_\gamma(P^-, P^+) < 0$, folglich $\bar{\varphi}_\gamma = 0$.

DEFINITION. Ein Bogen heisst konvex, wenn er immer links von seinen Tangenten bzw. Halbtangenten liegt.

PROPOSITION 1. *Wenn γ konvex ist, gilt $\bar{\varphi}_\gamma = \varphi_\gamma(A, B)$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit E_i die Eckpunkte und mit $\kappa(s)$ die Krümmung von γ. Diese existiert überall mit Ausnahme endlich vieler Eckpunkte. Es gilt

$$\varphi_\gamma(P_1, P_2) = \int_{s_{P_1}+0}^{s_{P_2}-0} \kappa(s)\, ds + \sum_{\substack{\text{Eckpunkte} \\ \text{zwischen} \\ P_1 \text{ und } P_2}} \varphi_\gamma(E_i^-, E_i^+).$$

Wegen der Konvexität sind $\kappa(s) \geqslant 0$ und $\varphi_\gamma(E_i^-, E_i^+) > 0$. Daraus ergibt sich, dass $\varphi_\gamma(Q_1, Q_2) \geqslant \varphi_\gamma(P_1, P_2)$ ist für $s_{Q_1} \leqslant s_{P_1} \leqslant s_{P_2} \leqslant s_{Q_2}$. QED

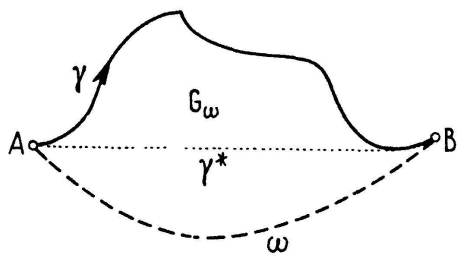

Fig. 3

ω sei ein konvexer Bogen von A nach B, der rechts von γ liege (Fig. 3). ω darf γ auch

berühren. G_ω sei das Gebiet zwischen γ und ω und $\bar{G}_\omega = G_\omega \cup \gamma \cup \omega$. Wir setzen $\bar{G}_{\gamma^*} = \bigcap_\omega \bar{G}_\omega$. γ und γ^* bilden den Rand von $\bar{G}_{\gamma^*}$. Sie können auch stückweise zusammenfallen.

DEFINITION. Wir nennen γ^* die rechte konvexe Hülle von γ.

PROPOSITION 2. $\bar{\varphi}_{\gamma^*} \leqslant \bar{\varphi}_\gamma$.

Beweis. Wir unterscheiden verschiedene Fälle:

1. γ und γ^* berühren sich in den Punkten A und B. Dann gilt $\varphi_{\gamma^*}(A, B) = \varphi_\gamma(A, B) \leqslant \bar{\varphi}_\gamma$. Nach Proposition 1 ist $\varphi_{\gamma^*}(A, B) = \bar{\varphi}_{\gamma^*}$.

2. γ und γ^* haben ausser A und B keine gemeinsamen Punkte (Fig. 4). γ^* ist in diesem Fall ein Geradenstück. Daraus folgt, dass $\bar{\varphi}_{\gamma^*} = 0 \leqslant \bar{\varphi}_\gamma$.

3. Es seien P der erste, Q der letzte gemeinsame Punkt von γ und γ^* mit Ausnahme von A und B (Fig. 5).

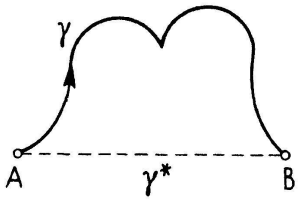

Fig. 4

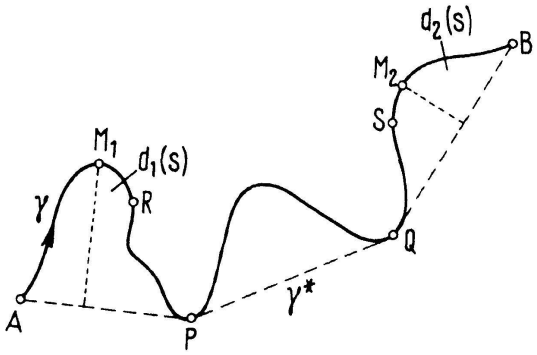

Fig. 5

$d_1(s)$ sei die Abstandsfunktion zwischen der Geraden AP und γ und $d_2(s)$ diejenige zwischen QB und γ. $d_1(s)$ resp. $d_2(s)$ nimmt in den Punkten $M_1 \in \gamma$ resp. $M_2 \in \gamma$ ihr Maximum an. Falls in den beiden Punkten M_1 und M_2 die Tangenten existieren, gilt $\varphi_{\gamma^*}(A, B) = \varphi_\gamma(M_1, M_2) \leqslant \bar{\varphi}_\gamma$. Andernfalls gibt es in den Umgebungen von M_1 und M_2 Punkte R und S mit $\varphi_{\gamma^*}(A, B) \leqslant \varphi_\gamma(R, S) \leqslant \bar{\varphi}_\gamma$.

4. γ und γ^* berühren sich nur in einem der beiden Eckpunkte. Dieser Fall lässt sich mit Hilfe von 1. und 3. sofort erledigen.

1.2. Wir betrachten ein ebenes Gebiet G. Sein Rand sei $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma$, wobei sich γ aus endlich vielen stückweise glatten Bögen oder geschlossenen Kurven zusammensetzt. Wir werden mit A den Flächeninhalt von G und mit L die Länge von Γ_0 bezeichnen. In diesem Abschnitt werden isoperimetrische Ungleichungen hergeleitet, welche eine Beziehung zwischen A und L herstellen.

(a) *Voraussetzungen:* G liege im Innern eines Sektors vom Öffnungswinkel $\alpha \leqslant \pi$.

γ bestehe aus endlich vielen Bögen auf den Grenzradien $\theta=0$ und $\theta=\alpha$ des Sektors (r, θ Polarkoordinaten) (Fig. 6).

Behauptung. $L^2 \geqslant 2\alpha A$.

Das Gleichheitszeichen steht nur beim Kreissektor.

Beweis. Spiegeln wir G an der Geraden $\theta=0$ und identifizieren wir die Geraden $\theta=\alpha$ und $\theta=-\alpha$, so erhalten wir ein Gebiet, das einem Gebiet auf einem geraden Kreiskegel mit dem vollen Winkel 2α isometrisch ist. Auf Grund der isoperimetrischen Ungleichung von Alexandrow auf Kegeln [1, *S.* 416][1]) folgt $(2L)^2 \geqslant 2(2\alpha)(2A)$, wobei das Gleichheitszeichen nur bei der Mantelfläche steht. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung.

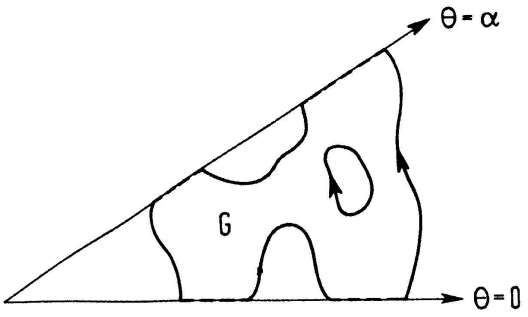

Fig. 6

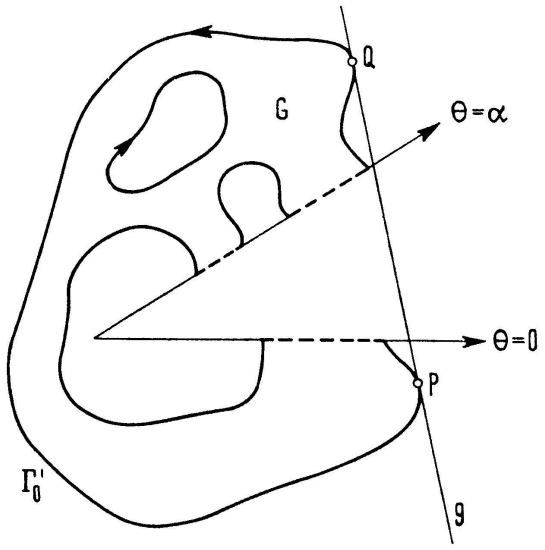

Fig. 7

Legende zu Fig. 6 u. 7: --- γ —— Γ_0.

(b) *Voraussetzungen.* Über γ treffen wir die gleichen Annahmen wie in (a). G hingegen liege ausserhalb des Sektors (Fig. 7).

Behauptung. $L^2 \geqslant 2\pi A$

Gleichheit tritt nur beim Halbkreis ein.

Beweis. Wir betrachten die Gerade g, welche die Punkte P und Q des äusseren Randbogens von G verbindet. g wurde so gewählt, dass die Strecke PQ zusammen mit $\Gamma_0' \subset \Gamma_0$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet G' begrenzt, das G enthält und

[1]) Diese Ungleichung findet sich auch in der Arbeit von A. Huber, On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature, Annals of Math., Bd. 60, Nr. 2, 1954.

vollständig auf einer Seite von g liegt. Wir spiegeln G' an der Geraden g und wenden die isoperimetrische Ungleichung der Ebene an. Daraus folgt $(2L(\Gamma_0'))^2 \geqslant 4\pi(2A(G'))$, wobei $L(\Gamma_0')$ die Länge von Γ_0' und $A(G')$ die Fläche von G' ist. Da $L \geqslant L(\Gamma_0')$ und $A \leqslant A(G')$, ist (b) gezeigt.

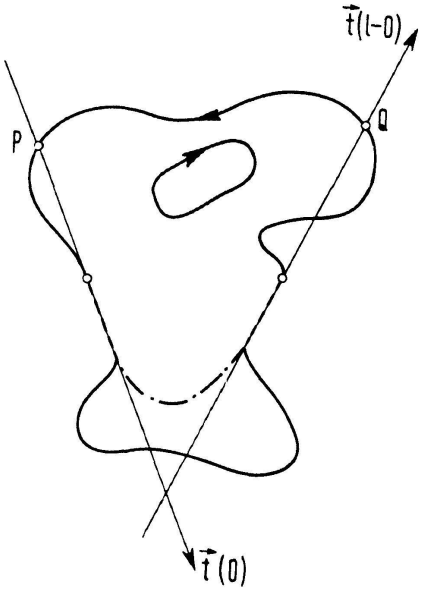

Fig. 8

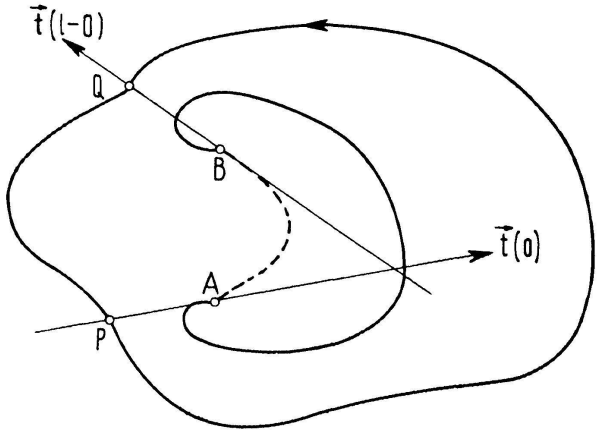

Fig. 9

Legende zu Fig. 8 u. 9: —— Γ_0; ---- γ; ——·——·—— $\gamma'\backslash\gamma$.

(c) *Voraussetzungen.* (vgl. Fig. 8, 9) γ muss folgende Bedingungen erfüllen

1. γ besteht aus einer endlichen Anzahl stückweise glatter Bögen, welche alle auf der gleichen innern oder äussern Randkurve von G liegen. Der Rand von G sei positiv orientiert.

2. γ liegt ferner auf einem konvexen Bogen γ' mit dem Anfangspunkt A, dem Endpunkt B und der Bogenlänge s. γ' ist gleich orientiert wie γ; d.h. geht man längs des Randes in positivem Sinne von einem Punkt $P' \in \gamma$ zu einem Punkt $Q' \in \gamma$, so ist $s_{P'} - s_{Q'} \leqslant 0$. Wir setzen voraus, dass $\bar{\varphi}_{\gamma'} < \pi$ ist.

Behauptung. $L^2 \geqslant 2\alpha A$, wobei $\alpha = \pi - \bar{\varphi}_{\gamma'}$.
Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn G ein Kreissektor mit dem Öffnungswinkel α und Γ_0 der Kreisbogen ist.

Beweis. Wir zeichnen in A und B die Tangenten $\vec{t}(0)$ und $\vec{t}(l-0)$. Diese bilden wegen der Proposition 1 einen Sektor vom Öffnungswinkel α. G zerfällt in zwei Bereiche G' und G''. G' befindet sich innerhalb, G'' ausserhalb des Sektors. Γ_0' (Γ_0'') bezeichne das Randstück von G' (G''), das zu Γ_0 gehört. Wegen (b) gilt

$$L^2(\Gamma_0'') \geqslant 2\pi A(G'') \tag{1}$$

P und Q sind diejenigen Schnittpunkte von $\vec{t}(0)$ und $\vec{t}(l-0)$ mit Γ_0, für die $QP \in \Gamma_0$

zusammenhängend ist, und die die Eigenschaft haben, dass das Gebiet innerhalb des Sektors, das von QP begrenzt wird, G' ganz umfasst. Nach (a) folgt

$$L^2(\Gamma_0') \geqslant L^2(QP) \geqslant 2\alpha A(G') \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$L^2 \geqslant L^2(\Gamma_0') + L^2(\Gamma_0'') \geqslant 2\alpha A(G') + 2\pi A(G'') \geqslant 2\alpha A.$$

Die nachfolgende Ungleichung stellt eine Verallgemeinerung von (a), (b) und (c) dar.

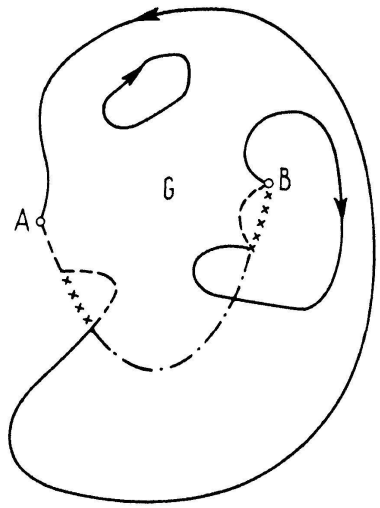

Fig. 10

Legende für alle weiteren Figuren: —— Γ_0 ---- γ —·—·— $\gamma'\backslash\gamma$ × × × × × $\gamma'^*\backslash\gamma'$.

(d) *Voraussetzungen.* (vgl. Fig. 10) γ liegt auf einem Bogen γ' mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B. γ' sei gleich orientiert wie γ (vgl. (c)), und es gelte $\bar{\varphi}_{\gamma'} < \pi$ (γ braucht nicht wie in (c) auf einer einzigen Randkurve zu liegen und γ' braucht nicht konvex zu sein)

Behauptung. $L^2 \geqslant 2\alpha A$, wobei $\alpha = \pi - \bar{\varphi}_{\gamma'}$.
Das Gleichheitszeichen steht nur beim Kreissektor, bei dem Γ_0 der Kreisbogen ist.

Beweis. Wir betrachten das Gebiet $\tilde{G}$, das von einer Teilmenge $\tilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$ und $\tilde{\gamma}'^* \subset \gamma'^*$ (γ'^* ist die konvexe Hülle von γ' s.§ 1,1.1) berandet wird und G enthält. γ'^* verläuft stets rechts von γ'. Da γ' und γ gleich orientiert sind, existiert ein solches Gebiet $\tilde{G} \subset G$. Durch die gleichen Überlegungen wie in (c) schliesst man auf

$$L^2(\tilde{\Gamma}_0) \geqslant 2\tilde{\alpha} A(\tilde{G}) \quad \text{mit} \quad \tilde{\alpha} = \pi - \bar{\varphi}_{\gamma'^*}(A, B)$$

Zusammen mit Proposition 2 (§ 1,1.1) folgt

$$L^2 \geqslant L^2(\tilde{\Gamma}_0) \geqslant 2\tilde{\alpha} A(\tilde{G}) \geqslant 2\alpha A.$$

1.3. *Geometrische isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete*

DEFINITION. Ein Gebiet heisst symmetrisch von der Ordnung q (q natürliche Zahl), falls ein Punkt 0 (Symmetriezentrum) existiert, so dass G bei einer Drehung um den Winkel $2\pi/q$ um 0 in sich selbst übergeht.

Wir treffen über G folgende Annahmen:

(A) G sei ein symmetrisches Gebiet der Ordnung q

(B) Sein Rand Γ bestehe aus einer inneren, geschlossenen Randkurve γ und den übrigen Randkurven Γ_0. Sowohl γ als auch Γ_0 sollen dieselbe Symmetrie wie G aufweisen. (Fig. 11).

(C) Es sei S ein Sektor vom Öffnungswinkel $2\pi/q$ mit der Spitze in 0. S schneidet aus γ den Bogen γ_S heraus. Wir setzen $\bar{\Phi}_S = \bar{\varphi}_{\gamma_S}$ und $\bar{\Phi}_\gamma = \max_S \bar{\Phi}_S$. Es gelte $\bar{\Phi}_\gamma \leqslant \pi$.

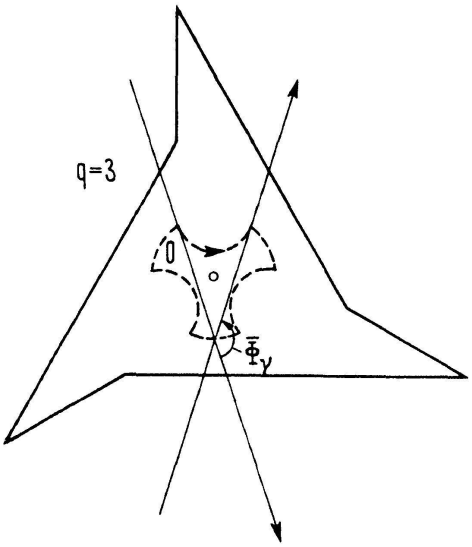

Fig. 11

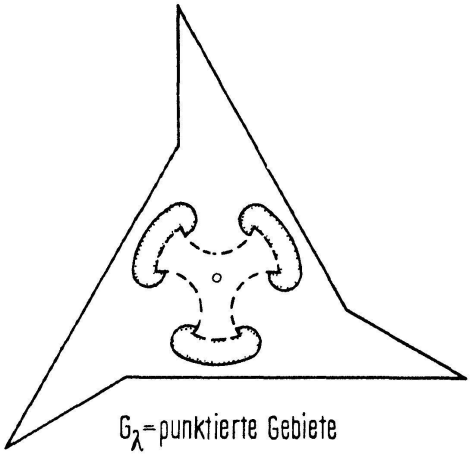

Fig. 12

Nun betrachten wir einen Bereich G_λ im Innern von G mit derselben Symmetrieordnung wie G. Der Rand von G_λ enthält Teilbögen aus γ. Denjenigen Teil, der nicht zu γ gehört, bezeichnen wir mit Γ_λ. G_λ braucht nicht zusammenhängend zu sein (Fig. 12). $A(\lambda)$ ist die Fläche von G_λ und $L(\lambda)$ die Länge von Γ_λ.

Behauptung. Unter den Voraussetzungen (A), (B) und (C) gilt $L^2(\lambda) \geqslant \min\{4\pi, 2q\alpha\}\, A(\lambda)$, wobei $\alpha = (\pi - \bar{\Phi}_\gamma)$.

Beweis. 1. G_λ besteht nur aus einer Komponente. In diesem Fall gehört seine äussere Randkurve ganz zu Γ_λ. Wendet man die isoperimetrische Ungleichung der Ebene an, so folgt $L^2(\lambda) \geqslant 4\pi A(\lambda)$.

2. G_λ setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Wegen der Symmetrie sind es deren kq (k natürliche Zahl). G_λ geht durch Rotation aus den zusammen-

hängenden Gebieten $G_\lambda^1, G_\lambda^2, \ldots, G_\lambda^k$ hervor. Γ_λ^i $i=1,\ldots,k$ sind die zu Γ_λ gehörigen Randstücke von G_λ^i. Wenn wir $\alpha=\pi-\bar{\Phi}_\gamma$ setzen, so find für jedes G_λ^i die Bedingungen von (d) (§1,1.2) erfüllt. Somit ist

$$L^2(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 2\alpha A(G_\lambda^i) \quad i=1,\ldots,k$$

und

$$L^2(\lambda) = \left(q \sum_{i=1}^{k} L(\Gamma_\lambda^i)\right)^2 \geqslant q^2 \sum_{i=1}^{k} L^2(\Gamma_\lambda^i) \geqslant q^2 \sum_{i=1}^{k} 2\alpha A(G_\lambda^i) = 2\alpha q A(\lambda)$$

Aus 1. und 2. ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung. In gewissen Fällen ist es nicht nötig, dass γ aus einer ganzen geschlossenen Randkurve besteht. G sei ein Gebiet, das der Bedingung (A) (wie vorher) genügt und ferner die folgenden Voraussetzungen erfüllt:
(B′) Sein Rand $\Gamma=\Gamma_0\cup\gamma$, sowie Γ_0 und γ seien ebenfalls symmetrisch von der Ordnung q. γ bestehe aus verschiedenen Bögen, welche im Innern von G auf einer geschlossenen, symmetrischen Kurve γ' liegen.
(C′) Es gelte $\bar{\Phi}_{\gamma'}=0$

Behauptung 2. $L^2(\lambda)\geqslant 4\pi A(\lambda)$
Das Gleichheitszeichen steht beim Kreis.

Beweis. Der Beweis ist gleich wie derjenige von Behauptung 1. Wir werden die Behauptung 2 nur noch für Gebietstypen nachweisen wie sie in Fig. 13 eingezeichnet sind.

Wir verbinden die Schnittpunkte A und B von γ mit der äusseren Randkurve von G_λ durch eine Gerade. (Die symmetrischen Punkte werden mit dem gleichen Buchstaben versehen). Damit erhalten wir ein Gebiet G'_λ, das G enthält.

Wegen der Konkavität und der Symmetrie von γ' ist das Geradenstück AB kleiner als Teilstück DC von Γ_λ. Daraus folgt, dass die Randkurve von G'_λ kleiner ist als Γ_λ. Wendet man auf sie die isoperimetrische Ungleichung der Ebene an, so ergibt sich die Behauptung.

Aus der isoperimetrischen Ungleichung der Ebene folgt die Behauptung 2.

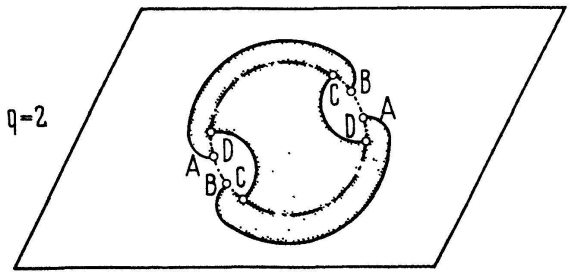

Fig. 13

2. *Definition der α-Symmetrisierung*

2.1. G sei ein ebenes Gebiet mit dem Rand Γ und dem Flächeninhalt A.

DEFINITION. Mit $S_\alpha(G)$ bezeichnen wir den Kreissektor mit dem gleichen Flächeninhalt wie G, der durch die Radien $\theta=0$, $\theta=\alpha$ und durch den Kreisbogen $r=\{2A/\alpha\}^{1/2}$ begrenzt wird ($\alpha\leqslant 2\pi$).

f sei eine stückweise stetig differenzierbare Funktion in $G\cup\Gamma$. γ ist eine endliche Vereinigung stückweise glatter Bögen, welche dem Rand Γ angehören. Es gelte ferner $f\geqslant 0$ in $G\cup\gamma$, $f=0$ auf $\Gamma_0=\Gamma\backslash\gamma$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
$G_\lambda=\{P;\, P\in G\cup\Gamma, f(P)\geqslant\lambda\}$,
$\Gamma_\lambda=\{P;\, P\in G\cup\Gamma, f(P)=\lambda\}$ sei derjenigen Teil des Randes von G_λ, der nicht zu γ gehört. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $0\leqslant f\leqslant 1$ ist und somit $\lambda\in[0, 1]$.

DEFINITION. $S_\alpha f$ ist die auf $S_\alpha(G)$ definierte, positive, nicht-zunehmende Funktion von r, die auf dem Kreisbogen des Sektors $S_\alpha(G_\lambda)$ den Wert λ annimmt.

Da $S_\alpha f$ eine abnehmende Funktion ist, ist sie fast überall differenzierbar. $S_{2\pi}$ bedeutet die Schwarzsche Symmetrisierung [12, S. 189]

2.2. *Eigenschaften von $S_\alpha f$.*

Aus der Definition von $S_\alpha f$ geht hervor, dass

$$\iint\limits_G H(f)\,dx\,dy=\iint\limits_{S_\alpha(G)} H(S_\alpha f)\,dx\,dy \tag{3}$$

für jede in [0, 1] integrierbare Funktion $H(t)$.

Unter dem Dirichletintegral von f verstehen wir die Grösse $D(f)=\iint \operatorname{grad}^2 f\,dxdy$.

SATZ I. *G und Γ mögen den Voraussetzungen von (d) (§1,1.2) genügen, nämlich: $\Gamma=\Gamma_0\cup\gamma$ sei positiv orientiert, γ liege auf einem Bogen γ' mit derselben Orientierung wie γ und mit $\bar\varphi_{\gamma'}<\pi$. f sei eine positive, stückweise stetig differenzierbare Funktion in $G\cup\Gamma$, welche auf Γ_0 verschwindet. Dann nimmt das Dirichletintegral bei einer α-Symmetrisierung ab:*

$$D_G(f)\geqslant D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha f),\quad \text{wobei}\quad \alpha\leqslant\pi-\bar\varphi_{\gamma'} \tag{4}$$

Beweis. Wir benötigen ein Lemma, das auf [6, 9, 12, S. 219...] zurückgeht und eine Möglichkeit darstellt, das Dirichletintegral mit Hilfe geometrischer Ungleichungen abzuschätzen.

LEMMA 1. *Wenn $A(\lambda)$ die Fläche von G_λ und $L(\lambda)$ die Länge von Γ_λ bedeuten, so ist*

$$D_G(f) \geqslant \int_0^1 \frac{L^2(\lambda)}{-A'(\lambda)}\, d\lambda, \tag{5}$$

wobei $A'(\lambda) = (d/d\lambda)\, A(\lambda)$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $\partial f/\partial n$ konstant ist längs den Niveaulinien Γ_λ von f (n innere Normale an G_λ).

Beweis des Lemmas. Es gilt die Umformung

$$D_G(f) = \iint_G \operatorname{grad}^2 f\, dx\, dy = \iint_{\lambda=0\,\Gamma_\lambda}^{1} \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^2 dn\, ds = \int_0^1 d\lambda \int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial n}\, ds \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{\Gamma_\lambda} \frac{\partial f}{\partial n}\, ds \int_{\Gamma_\lambda} \frac{ds}{\partial f/\partial n} \geqslant \left\{\int_{\Gamma_\lambda} ds\right\}^2 = L^2(\lambda) \tag{7}$$

und der Beziehung $\int_{\Gamma_\lambda} (\partial f/\partial n)\, ds = -(d/d\lambda)\, A(\lambda)$ folgt die Behauptung des Lemmas.

G_λ setzt sich aus einem oder mehreren Gebieten $G_\lambda^i i = 1, \ldots, n$ zusammen. Das zu Γ_λ gehörige Randstück von G_λ^i sei Γ_λ^i. Wird G_λ^i ausschliesslich von Γ_λ^i berandet, so gilt die isoperimetrische Ungleichung der Ebene

$$L^2(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 4\pi A(G_\lambda^i). \tag{8}$$

Andernfalls genügen die G_λ^i mit dem Rand $\Gamma_\lambda^i \cup \gamma^i\, (\gamma^i \subset \gamma)$ den Voraussetzungen von (d) (§1,1.2) und es ist in diesem Fall

$$L^2(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 2\alpha A(G_\lambda^i). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt

$$L^2(\lambda) \geqslant \sum_{i=1}^{n} L^2(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 2\alpha \sum_{i=1}^{n} A(G_\lambda^i) = 2\alpha A(\lambda). \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) lässt sich (5) weiter abschätzen

$$D_G(f) \geqslant \int_0^1 \frac{2\alpha A(\lambda)}{-A'(\lambda)}\, d\lambda. \tag{11}$$

Wir berechnen nun $D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha f)$. Es sei

$$\hat{G}_\lambda = \{P;\, P \in S_\alpha(G),\, S_\alpha f(P) \geqslant \lambda\} \quad \text{und} \quad \hat{\Gamma}_\lambda = \{P;\, P \in S_\alpha(G),\, S_\alpha f(P) = \lambda\}$$

der zum Rand von $\hat{G}_\lambda$ gehörige Kreisbogen. Da für $S_\alpha f$ sowohl in (7) als auch in (10) das Gleichheitszeichen steht, folgt

$$\left.\begin{aligned} D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha f) &= \int_0^1 \frac{2\alpha A(\hat{G}_\lambda)}{-A'(\hat{G}_\lambda)}\,d\lambda = \int_0^1 \frac{2\alpha A(\lambda)}{-A'(\lambda)}\,d\lambda \\ \left(A'(\hat{G}_\lambda) &= \lim_{d\lambda \searrow 0} \frac{A(\hat{G}_{\lambda+d\lambda}) - A(\hat{G}_\lambda)}{d\lambda}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Aus der Konstruktion von $S_\alpha f$ geht unmittelbar hervor, dass $A(\hat{G}_\lambda) = A(\lambda)$. Aus (11) und (12) ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung. Wie aus (12) ersichtlich ist, ist $D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha f)$ eine zunehmende Funktion von α.

SATZ I'. *G, γ und Γ_0 erfüllen die Voraussetzungen* (A), (B), (C) *oder* (A), (B'), (C') *aus* §1,1.3 *und f sei ebenfalls symmetrisch von der Ordnung q und genüge den Voraussetzungen des Satzes I. Dann gilt:*

$$D_G(f) \geqslant D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha f), \quad \text{wobei} \quad \alpha \leqslant \min\{2\pi, q(\pi - \bar{\Phi}_\gamma)\}.$$

Der Beweis ist genau gleich wie derjenige von Satz 1. Man benützt anstelle der Ungleichung (10) die Ergebnisse aus §1,1.3.

§ 2 Anwendungen

1. *Obere Schranken für den Modul*

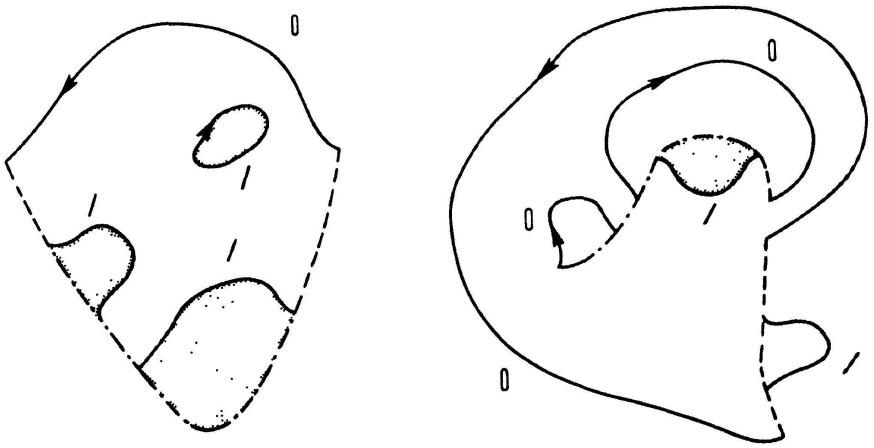

Fig. 14

G_1: schraffierte Gebiete
Kurven und Bögen mit dem Zeichen 0 (1) gehören zu $\Gamma_0(\Gamma_1)$

Voraussetzungen. G sei ein ebenes Gebiet mit dem stückweise glatten und positiv orientierten Rand $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\gamma$. γ habe dieselben Eigenschaften wie im Satz 1 aus §1,2.2, d.h. γ liegt auf einem gleich orientierten Bogen γ' mit $\bar{\varphi}_{\gamma'}<\pi$. $\Gamma_0=\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_0^{(j)}$, $\Gamma_1=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_1^{(i)}$, wobei $\Gamma_0^{(j)}$ und $\Gamma_1^{(i)}$ Bögen mit dem Anfangs- und Endpunkt auf γ oder geschlossene Kurven bedeuten (Fig. 14)

Wir betrachten nun folgendes Dirichletproblem:

$$\text{D1}\quad \Delta h=0 \text{ in } G \qquad (\Delta \text{ Laplaceoperator})$$

$$h=1 \text{ auf } \Gamma_1$$

$$h=0 \text{ auf } \Gamma_0$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}=0 \text{ auf } \gamma \qquad (n \text{ äussere Normale an } G)$$

$$\mu^{-1}=\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}^{-1}=\min_{\substack{v=0 \text{ auf } \Gamma_0\\ v=1 \text{ auf } \Gamma_1}} D(v)$$

wobei das Minimum über alle stückweise stetig differenzierbaren Funktionen zu erstrecken ist.

G_1 ist die Vereinigung aller Gebiete G_{1i} mit G_{1i} mit $G_{1i}\cap G=\phi$, deren Rand zur Menge $\Gamma_1\cup\{\gamma'\backslash\gamma\}$ gehört. A ist die Fläche von G, A_1 diejenige von G_1.

SATZ 2. *Unter den zu Beginn dieses Abschnittes aufgestellten Voraussetzungen gilt:*

$$\mu\leqslant\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{A+A_1}{A_1}, \quad \text{wobei} \quad \alpha\leqslant\pi-\bar{\varphi}_{\gamma'}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur beim Gebiet $\hat{G}=S_\alpha(G\cup G_1)\backslash S_\alpha(G_1)$ *ein, wobei* Γ_0 *aus dem Kreisbogen* $r=\{2(A+A_1)/\alpha\}^{1/2}$, Γ_1 *aus dem Kreisbogen* $r=\{2A_1/\alpha\}^{1/2}$ *und* γ *aus den Grenzradien* $\theta=0$ *und* $\theta=\alpha$ *bestehen.*

Beweis. Wir schätzen den Modul $\hat{\mu}$ des Extremalgebietes mit Hilfe des Dirichletprinzips ab

$$\hat{\mu}^{-1}\leqslant D_{\hat{G}}(v), \quad \text{wobei} \quad v=0 \text{ auf } \hat{\Gamma}_0 \quad \text{und} \quad v=1 \text{ auf } \hat{\Gamma}_1.$$

Als Vergleichsfunktion wählen wir $S_\alpha H$ mit $H=\begin{cases} h & \text{in } G\\ 1 & \text{in } G_1.\end{cases}$

Auf Grund von Satz 1 (§1,2.2) folgt

$$\hat{\mu}^{-1}\leqslant D_{\hat{G}}(S_\alpha H)=D_{S_\alpha(G\cup G_1)}(S_\alpha H)\leqslant D_{G\cup G_1}(H)=D_G(h)=\mu^{-1}.$$

Die Lösung von $D1$ in $\hat{G}$ ist $\hat{h}=(\ln R_0-\ln r)/\ln(R_0/R_1)$; $\alpha R_0^2/2=A+A_1$, $\alpha R_1^2/2=$ $=A_1$. Daraus lässt sich unmittelbar $\hat{\mu}$ berechnen.

Der Satz 2 stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von Carleman [5] und Szegö [14] dar.

BEISPIEL. G sei der Einheitskreis; γ, Γ_0 und Γ_1 liegen auf der Peripherie. Die Länge von Γ_0 sei 2π-2ω und diejenige von Γ_1 2β. Es gelte $2\omega<\pi$. Unterwerfen wir G einer "zirkulären" Symmetrisierung [12, S. 193], so nimmt der Modul zu. Das neue Gebiet ist wieder der Einheitskreis (Fig. 15). Der Rand ist symmetrisch bezüglich der x-Achse. Die Längen von Γ_0 und Γ_1 sind wieder 2π-2ω und 2β. Wir geben nun obere Schranken für den Modul μ von G' an.

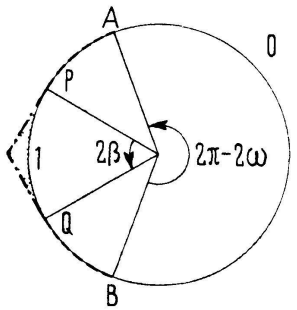

Fig. 15

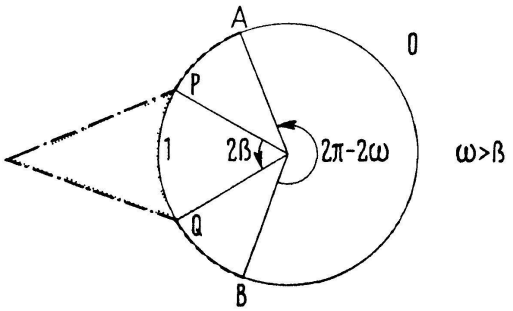

Fig. 16

$\gamma'\backslash\gamma$ liegt auf den Tangenten in P und Q (Fig. 15). Die für Satz 2 benötigten Grössen sind: $A=\pi$, $A+A_1=\pi+\operatorname{tg}\beta-\beta$, $\alpha=\pi-2\omega$. Somit gilt nach Satz 2

$$\mu \leqslant \frac{1}{2(\pi-2\omega)} \ln \frac{\pi+\operatorname{tg}\beta-\beta}{\operatorname{tg}\beta-\beta}.$$

Die Wahl von $\gamma'\backslash\gamma$ ist bis auf die Bedingung $\bar{\varphi}_{\gamma'}<\pi$ willkürlich. Wir erhalten eine bessere Abschätzung, wenn $\gamma'\backslash\gamma$ beispielweise auf zwei Geraden durch P und Q liegt, die parallel sind zu den Tangenten in A und in B (Fig. 16).

2. *Untere Schranken für den ersten Eigenwert einer stückweise freien Membran.*

G sei ein ebenes Gebiet mit dem Rand $\Gamma=\Gamma_0\cup\gamma$. Wir betrachten die Membran

$$\text{M1} \quad \begin{aligned} \Delta u+\lambda u &= 0 \text{ in } G \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ auf } \gamma \quad (n \text{ äussere Normale}). \end{aligned}$$

Der erste Eigenwert ist durch das Rayleighprinzip gekennzeichnet:

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{v=0 \text{ auf } \Gamma_0} \frac{D_G(v)}{\iint\limits_G v^2 dxdy}.$$

Das Minimum ist über alle stückweise stetigen Funktionen v zu erstrecken. Die erste Eigenfunktion liefert das Minimum des Rayleighquotienten.

SATZ 3. *Falls G, Γ_0 und γ die Voraussetzungen von (d) (§1,1.2) erfüllen, d.h. γ liegt auf einem stückweise glatten Bogen γ', der gleich orientiert ist wie γ und für den $\bar{\varphi}_{\gamma'}<\pi$, so ist*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\alpha j_0^2}{2A}, \quad \alpha \leqslant \pi - \bar{\varphi}_{\gamma'}$$

(A Fläche von G, $j_0=2.4048\ldots$ erste Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung).

Das Gleichheitszeichen steht nur bei der Membran $\hat{G}=S_\alpha(G)$, die längs dem Kreisbogen $r=\{2A/\alpha\}^{1/2}$ eingespannt und längs den Radien $\theta=0$ und $\theta=\alpha$ frei ist.

Beweis. Die erste Eigenfunktion des Extremalgebietes $\hat{G}$ ist

$$\hat{u}(r) = J_0\left(\frac{j_0}{R} r\right), \quad \text{wobei} \quad R = \{2A/\alpha\}^{\frac{1}{2}}.$$

Der entsprechende Eigenwert ist $\hat{\lambda}_1 = j_0^2/R^2$. Wir bezeichnen mit u die erste Eigenfunktion der Membran in G. u hat konstantes Vorzeichen und kann demzufolge symmetrisiert werden. Wir schätzen $\hat{\lambda}_1$ mit Hilfe des Rayleighquotienten ab. Als Vergleichsfunktion wählen wir $S_\alpha u$. Somit erhalten wir unter Berücksichtigung von (3) und Satz 1 (§1,2.2)

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \frac{D_{S_\alpha(G)}(S_\alpha u)}{\iint\limits_{S_\alpha(G)} (S_\alpha u)^2\, dx\, dy} \leqslant \frac{D_G(u)}{\iint\limits_G u^2 dx\, dy} = \lambda_1 .$$

Bemerkungen. 1. Wenn γ konkav und zusammenhängend ist, ist $\alpha=\pi$ und $\lambda_1 \geqslant \pi j_0^2/2A$. Dieses Resultat findet sich schon in einer Arbeit von Nehari [10, Satz III]. Nehari verwendete konforme Abbildungen und musste daher einige Annahmen topologischer Art über G und γ treffen, auf die hier verzichtet werden konnte.

2. Wenn $\bar{\varphi}_{\gamma'} \geqslant \pi$ ist, gibt es keine untere Schranken, die nur von A und $\bar{\varphi}_{\gamma'}$ abhängig sind. Gegenbeispiel: Wir betrachten das Rechteck der Höhe $BC=h$ und der Länge $AB=l$. Es sei $\Gamma_0=DA\cup BC$ und $\gamma=AB\cup CD$. $A=lh$ und

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \frac{(\pi h)^2}{A^2}\ (0 < h < \infty),\ \bar{\varphi}_{\gamma'} = \pi .$$

BEISPIELE.

1) G sei ein beliebiges Gebiet, γ eine geschlossene, konkave innere Randkurve (Fig. 17). In diesem Fall ist $\bar{\varphi}_{\gamma'}=\bar{\varphi}_\gamma=0$ und $\lambda_1 \geqslant \pi j_0^2/2A$.

2) G sei ein beliebiges Gebiet und γ ein Schlitz im Innern von G (Fig. 18).

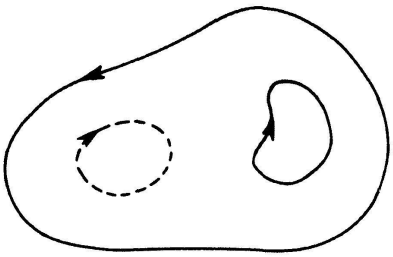

Fig. 17

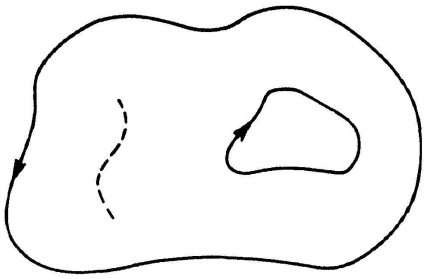

Fig. 18

Wir fassen γ als Rand eines Gebietes der Fläche 0 auf. Folglich ist $\bar{\varphi}_\gamma = \max_{P_1, P_2 \in \gamma} \varphi_\gamma |(P_1, P_2)|$ (die Tangente durchläuft γ in beiden Richtungen). Somit ist $\lambda_1 \geqslant (\pi - \bar{\varphi}_\gamma) j_0^2 / 2A$.
Handelt es sich um einen geraden Schlitz, dann ist $\bar{\varphi}_\gamma = 0$ und $\lambda_1 \geqslant \pi j_0^2 / 2A$.

Dieses letzte Ergebnis kann auch aus der Ungleichung von Rayleigh-Faber-Krahn [6, 9, 13] und der alternierenden Symmetrisierung [11] gewonnen werden[2])

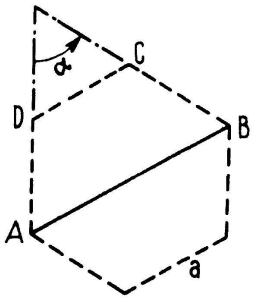

Fig. 19

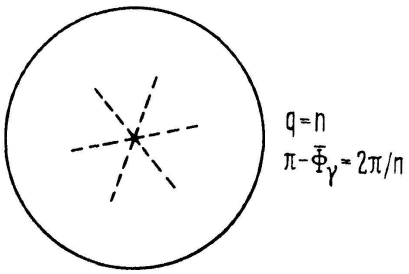

Fig. 20

3) Es soll eine untere Schranke für den zweiten Eigenwert ν_2 einer 6-eckigen freien Membran angegeben werden (Fig. 19). ν_2 ist gleich dem ersten Eigenwert der trapezförmigen Membran $ABCD$, welche längs AB eingespannt und sonst frei ist. Die für Satz 3 notwendigen Grössen betragen $\alpha = \pi/3$, $A = (3\sqrt{3}/4)\, a^2$. Für die Abschätzung nach oben wird die Ungleigung von Szegö[3]) benützt

$$2{,}331 a^{-2} < \nu_2 < 4{,}099 a^{-2},$$

Im Fall von symmetrischen Membranen lässt sich der Satz 3 noch verschärfen.

SATZ 3′: *Wenn G, Γ_0 und γ den Bedingungen (A), (B), (C) oder (A), (B'), (C')*

---

[2]) siehe auch J. Hersch, Enseignement mathématique, 5, (1959).
[3]) G. Szegö, J. rat. Mech. Analysis 3, S. 343–356 (1954).

aus §1,1.3 *genügen, gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\alpha j_0^2}{2A}, \quad \alpha = \min\{2\pi, q(\pi - \bar{\Phi}_\gamma)\}.$$

Das Gleichheitszeichen steht für $\alpha = 2\pi$ *beim Kreis mit radialen Schlitzen* (Fig. 20).

Der Kreis mit radialen Schlitzen hat denselben ersten Eigenwert wie derjenige ohne Schlitz.

Für den Beweis dieses Satzes sei auf den Beweis von Satz 3 hingewiesen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man anstelle von Satz 1 den Satz 1′ verwendet.

3. *Obere Schranken für den ersten Eigenwert einer elastisch gebundenen Membran.*

Wir gehen von denselben Voraussetzungen wie in §2,1. aus. Insbesondere werden dort der Winkel α und der äussere Flächeninhalt A_1 definiert. Das Problem der elastisch gebundenen Membran lautet:

$$\mathrm{M}_2 \qquad u + \Delta u = 0 \text{ in } G$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k_j^{(i)}(s)\, u = 0 \text{ auf } \Gamma_j^{(i)} \quad j = 0, 1$$

$$i = \begin{cases} 1, \ldots, m & \text{falls} \quad j = 0 \\ 1, \ldots, n & \text{falls} \quad j = 1 \end{cases} \quad (n \text{ äussere Normale})$$

Wir führen die Bezeichnungen $K_0 = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_0^{(i)}} k_{(i)}^0\, ds$ und $K_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1^{(i)}} k_1^{(i)}\, ds$. ein K_0 ist die totale Federung von Γ_0, K_1 diejenige von Γ_1. Wir nehmen an, der Modul $\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}$ von G sei μ_0.

Nun betrachten wir die Membran: $\Delta\hat{u} + \hat{\lambda}\hat{u} = 0$ im Kreisringsektor $\hat{G}$, der durch $\hat{\gamma}$ (auf $\theta = 0$ und $\theta = \alpha$), $\hat{\Gamma}_0$ (auf $r = \hat{R}_0$) und $\hat{\Gamma}_1$ (auf $r = \hat{R}_1$) berandet ist. Die Randbedingungen sind: $\partial\hat{u}/\partial n = 0$ auf $\hat{\gamma}$, $\partial\hat{u}/\partial n + K_0/\alpha R_0\, \hat{u} = 0$ auf $\hat{\Gamma}_0$ und $\partial\hat{u}/\partial n + K_1/\alpha R_1\, \hat{u} = 0$ auf $\hat{\Gamma}_1$.

$\hat{R}_1$ wird so bestimmt, dass $\hat{G}_1 = S_\alpha(G_1)$, d.h. $\alpha\hat{R}_1^2/2 = A_1$. Der Modul von $\hat{G}$ sei ebenfalls μ_0. Daraus folgt, dass $\hat{R}_0 = \{2A_1/\alpha\}^{1/2}\, e^{\alpha\mu_0}$.

Der nächste Satz verallgemeinert denjenigen von Gasser-Hersch [7]

SATZ 4. *Unter den Voraussetzungen von* §2,1. *über* G,

γ *und* Γ_0 *gilt:* $\lambda_1 \leqslant \hat{\lambda}_1$

Beweis. Wir schätzen λ_1 mit Hilfe des Rayleighquotienten ab

$$\lambda_1 \leqslant \frac{D(v) + \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_0^{(i)}} k_0^{(i)} v^2\, ds + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1^{(i)}} k_1^{(i)} v^2\, ds}{\iint_G v^2 dx\, dy}. \tag{13}$$

Die zu $\hat{\lambda}_1$ gehörige Eigenfunktion $\hat{u}$ hat dieselben Niveaulinien wie die Lösung $\hat{h}$ von $D1$ in $\hat{G}$. Wir können sie demzufolge harmonisch nach G verpflanzen [8].

h sei die Lösung von $D1$ in G. Wir bezeichnen mit Γ_λ ($\hat{\Gamma}_\lambda$) die Niveaulinien $h=\lambda$ ($\hat{h}=\lambda$) und mit G_λ ($\hat{G}_\lambda$) das Gebiet, in welchem h ($\hat{h}$) grösser ist als λ. Als Parameter für die Niveaulinien wählen wir $\mu_{\Gamma_1\Gamma_\lambda}(G_\lambda)$ resp. $\mu_{\Gamma_1\Gamma_\lambda}(\hat{G}_\lambda)$. Es gilt

$$\mu^{-1}(G_\lambda) = D_G\left(\frac{h-\lambda}{1-\lambda}\right) = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial h}{\partial h}\, ds = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{\mu_0}$$

und ebenso

$$\mu^{-1}(\hat{G}_\lambda) = D_{\hat{G}}\left(\frac{\hat{h}-\lambda}{1-\lambda}\right) = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{1-\lambda}\frac{\partial \hat{h}}{\partial n}\, ds = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{\mu_0}.$$

Daraus folgt, dass $\mu(G_\lambda)=\mu(\hat{G}_\lambda)$. Da die Γ_λ resp. $\hat{\Gamma}_\lambda$ Niveaulinien einer harmonischen Funktion sind, ist der Modul additiv, d.h. $\mu=\int d\mu$ ($d\mu=\mu_{\Gamma_\lambda\Gamma_{\lambda+d\lambda}}(G_\lambda\backslash G_{\lambda+d\lambda})$). Wir definieren $\hat{u}(x,y)=\psi(\hat{h}(x,y))=\chi(\mu(x,y))$ und $U(x,y)=\psi(h(x,y))=\chi(\mu(x,y))$. Setzt man $U(x,y)$ als Vergleichsfunktion in (13) ein und berücksichtigt man, dass $U(x,y)$ längs Γ_0 und Γ_1 konstant und dass $D_G(U)=D_{\hat{G}}(\hat{u})$ ist, so folgt

$$\lambda_1 \leqslant \frac{D_{\hat{G}}(\hat{u}) + K_0\chi^2(\mu_0) + K_1\chi^2(0)}{\int_0^{\mu_0} \chi^2(\mu)\frac{dA}{d\mu}\, d\mu}, \quad \text{wobei} \quad A(\mu) = A(G_1 - \mu/\mu_0) \tag{14}$$

$$\frac{dA}{d\mu} = \int_{\Gamma(\mu)} dn\, ds \int_{\Gamma(\mu)} \frac{ds}{dn} \geqslant \left[\int_{\Gamma(\mu)} ds\right]^2 = L^2(\Gamma(\mu)). \tag{15}$$

$dn(s,\lambda)$ bedeutet die Länge der Normalen zwischen Γ_λ und $\Gamma_{\lambda+d\lambda}$ im Punkt, der zur Bogenlänge s gehört; $\Gamma(\mu)=\Gamma_{1-\mu/\mu_0}$.

Nach Satz 2 (§2,1) gilt

$$A(G_\lambda) \geqslant A(\hat{G}_\lambda) = \frac{L^2(\hat{\Gamma}_\lambda)}{2\alpha} \tag{16}$$

und nach Ungleichung (d) (§1,1.2)

$$L^2(\Gamma_\lambda) \geqslant 2\alpha A(G_\lambda). \tag{17}$$

(15), (16) und (17) ergeben zusammen

$$\frac{dA}{d\mu} \geqslant L^2(\hat{\Gamma}(\mu)).$$

und somit

$$\int_0^{\mu_0} \chi^2(\mu) \frac{dA}{d\mu} d\mu \geqslant \int_0^{\mu_0} \chi^2(\mu) L^2(\hat{\Gamma}(\mu)) d\mu = \iint_{\hat{G}} \hat{u}^2 dx\, dy. \tag{18}$$

(18) in (14) eingesetzt ergibt die Behauptung.

§ 3 Symmetrisierungen im Raum

1.1. *Zwei isoperimetrische Ungleichungen*

G sei ein Körper im Raum, der durch eine endliche Schar Γ stückweise analytischer Flächen begrenzt wird. Γ setzt sich aus der Vereinigung stückweise analytischer Flächenstücke γ und $\Gamma \backslash \gamma = \Gamma_0$ zusammen. F bedeute den Flächeninhalt von Γ_0 und V das Volumen von G.

(a) Wenn γ auf einer Ebene liegt, gilt die Ungleichung

$$F^3 \geqslant 18\pi V^2.$$

Diese Ungleichung ist isoperimetrisch, denn das Gleichheitszeichen steht bei der Halbkugel, wobei γ die Aequatorebene ist.

Beweis. Durch Spiegelung von G an der Aequatorebene entsteht ein Körper mit dem Volumen $2V$ und der Oberfläche $2F$. Wenn sich der Körper durchdringt, trennen wir den innern vom äusseren Körper. Wendet man die isoperimetrische Ungleichung des Raumes an, so erhält man

$$(2F)^3 \geqslant 36\pi(2V)^2$$

und daraus die Behauptung.

(b) G sei ein *Drehkörper* mit der z-Achse als Drehachse. Wir werden mit $^-$ die Schnittfigur in der (r, z)-Ebene (Meridianebene) bezeichnen. Wir treffen folgende Annahmen:

(Fig. 21)

(i) $\bar{\Gamma}$ ist positiv orientiert.

(ii) $\bar{\gamma}$ ist eine Teilmenge der äusseren Randkurve von $\bar{G}$ und befindet sich auf einem Bogen $\bar{\gamma}'$, der gleich orientiert ist wie $\bar{\gamma}$. A ist der Anfangs- und B der Endpunkt von $\bar{\gamma}'$.

(iii) P und Q seien zwei Punkte der äusseren Randkurve von $\bar{G}$ mit der grössten bzw. kleinsten z-Komponente. Die äussere Randkurve besteht aus den zwei Teilen PQ und QP; $\bar{\gamma}$ liegt auf dem Bogen PQ, der näher bei der z-Achse ist.

(iv) Alle Teilbögen aus $\bar{\Gamma}_0$, die dem Bogen AB angehören, verlaufen bezüglich der Orientierung von $\bar{\gamma}'$ links von $\bar{\gamma}'$.

(v) Ist s die Bogenlänge von $\bar{\gamma}'$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$, so gilt für jeden Wert s $r(s) \geqslant \min\{r(0), r(l)\}$ ($r(s)$: r-Komponente des zum Parameterwert s gehörigen Punktes von $\bar{\gamma}'$).

Behauptung. $F^3 \geqslant 18\pi V^2$

Gleichheit tritt wie in (a) wiederum bei der Halbkugel ein.

Beweis.

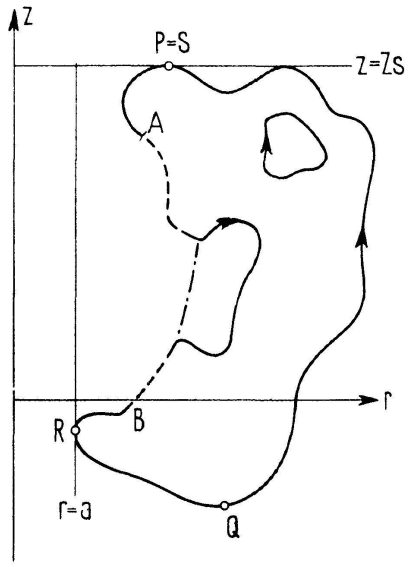

Fig. 21

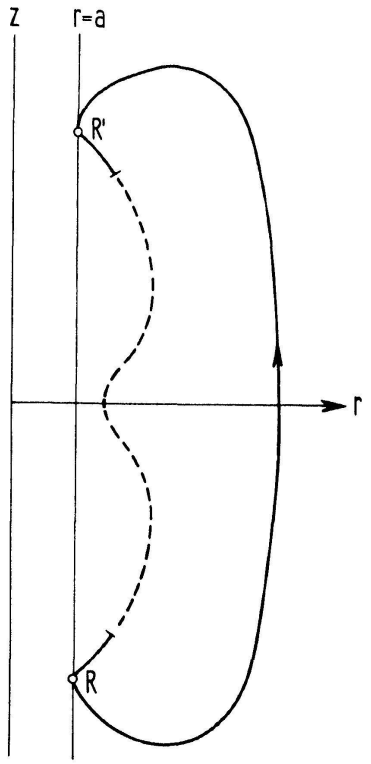

Fig. 22

R sei derjenige Punkt auf $\bar{\Gamma}_0$ mit der kleinsten r-Komponente $r_R = a$. Mit S bezeichnen wir denjenigen der Punkte P und Q, der die Eigenschaft hat, dass das Gebiet $\bar{G}'$, das durch die Geraden $r=a$, $z=z_S$ und dem Bogen $\widehat{RS}$ bzw. $\widehat{SR}$ aus $\bar{\Gamma}_0$ begrenzt wird, $\bar{G}$ ganz enthält. Durch Spiegelung von $\bar{G}'$ an der Geraden $z=z_S$ entsteht ein Gebiet $\bar{G}'' \supset \bar{G}'$, dessen Rand aus dem Bogen $\bar{\Gamma}'' = \widehat{RS} \cup \widehat{SR'}$ (R' Spiegelbild von R) und aus einem Teilstück der Geraden $r=a$ besteht. G'' entstehe durch Drehung von $\bar{G}''$, Γ'' durch Drehung von $\bar{\Gamma}''$ um die z-Achse. Es ist klar, dass

$$V(G'') \geqslant 2V \quad (V(G'') \text{ Volumen von } G'') \tag{19}$$

$$F(\Gamma'') \leqslant 2F \quad (F(\Gamma'') \text{ Flächeninhalt von } \Gamma''). \tag{20}$$

Wir werden nun die Ungleichung

$$F^3(\Gamma'') \geqslant 36\pi V^2(G'') \tag{21}$$

beweisen, aus welcher wegen (19) und (20) sofort die Behauptung (b) folgt.

Wir führen die Grösse $\varrho = r - a$ ein.

$$V(G'') = 2\pi \iint\limits_{G''} (\varrho + a)\, d\varrho\, dz = 2\pi \iint\limits_{G''} \varrho\, d\varrho\, dz + 2\pi a A(\bar{G}'')$$

$$F(\Gamma'') = 2\pi \int\limits_{\Gamma''} (\varrho + a)\, ds = 2\pi \int\limits_{\Gamma''} \varrho\, ds + 2\pi a L(\bar{\Gamma}'')$$

$\bar{G}'''$ setze sich zusammen aus $\bar{G}''$ und dem Gebiet, das durch Spiegelung von $\bar{G}''$ an der Geraden $r = a$ entsteht. Die Fläche von $\bar{G}'''$ beträgt $2A(\bar{G}'')$. Nun betrachten wir den geraden Zylinder mit der Grundfläche $\bar{G}''$ und der Höhe πa. An jedem seiner beiden Enden setzen wir den Körper auf, der durch Drehung von $\bar{G}''$ um den Winkel π um die Gerade $r = a$ entsteht. Damit haben wir einen Körper mit dem Volumen $V(G'')$ und der Oberfläche $F(\Gamma'')$ konstruiert. Wenden wir auf diesen die isoperimetrische Ungleichung des Raumes an, so ergibt sich (21). Da in (21) Gleichheit nur im Fall der Kugel eintreten kann, folgt aus (19) und (20), dass im Extremalfall $\bar{G}$ ein Viertelskreis ist und $\bar{\gamma}$ aus den Grenzradien $z = 0$ und $r = 0$ besteht. Damit ist (b) gezeigt.

Die Ungleichung (b) lässt sich in gewissen Spezialfällen noch verschärfen.

(b′) G sei ein *zur* (x, y)*-Ebene symmetrischer Drehkörper* mit der z-Achse als Drehachse. γ sei ebenfalls symmetrisch zur (x, y)-Ebene. Es gelten ferner die Voraussetzungen (i), (ii), (iii), (iv) und (v) von (b) (Fig. 22).

Behauptung. $F^3 \geqslant 36\pi V^2$ (Gleichheit bei der Kugel)

Beweis. Wir betrachten das Gebiet $\bar{G}'$, das von einem Teilstück der Geraden $r = a$ (vgl. den Beweis von (b)) und einem Teilbogen $\bar{\Gamma}' = RR' \subset \bar{\Gamma}_0$ begrenzt wird (Fig. 22). Genau gleich wie in (b) (21) beweist man, dass $F^3(\bar{\Gamma}') \geqslant 36\pi V^2(G')$. Da $V \leqslant V(G')$ und $F \geqslant F(\Gamma')$, folgt die Behauptung.

1.2. *Symmetrisierungen*

G, γ und Γ_0 genügen den zu Beginn von §3,1.1 aufgestellten Voraussetzungen. f sei eine auf $G \cup \Gamma$ definierte, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $0 \leqslant f \leqslant 1$ in $G \cup \Gamma$, $f = 0$ auf Γ_0. Wir bezeichnen mit Γ_λ die Niveauflächen $f = \lambda$ und mit G_λ den Körper in G, auf dem $f \geqslant \lambda$. $F(\lambda)$ stelle die Fläche von Γ_λ und $V(\lambda)$ das Volumen von G_λ dar.

$S(G)$ ist die Halbkugel im oberen Halbraum $z \geqslant 0$ mit dem Mittelpunkt in 0 *und demselben Volumen wie G.*

Sf ist die auf $S(G)$ definierte, monoton abnehmende[4]) *Funktion von r, die auf der Halbkugeloberfläche von $S(G_\lambda)$ $r=(3V(\lambda)/2\pi)^{1/3}$ den Wert λ annimmt.*

Über Sf gelten ähnliche Sätze wie über die α-Symmetrisierung (§1,2.2).

Für jede in [0, 1] integrierbare Funktion $H(t)$ ist

$$\iiint\limits_G H(f)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{S(G)} H(Sf)\,dx\,dy\,dz \tag{22}$$

SATZ 5. *Das Dirichletintegral nimmt in den folgenden Fällen bei einer Symmetrisierung ab:*

$$D_G(f) \geqslant D_{S(G)}(Sf) \quad \left(D(f) = \iiint \operatorname{grad}^2 f\,dx\,dy\,dz\right)$$

(a) *γ liegt in einer Ebene*

(b) *G ist ein Drehkörper mit der z-Achse als Drehachse. f ist auch rotationssymmetrisch. Es gelten ferner die Voraussetzungen* (i), (ii), (iv) *von* (b) (§3,1.1) *und* (iii') *$z(s)$ ist nicht zunehmend ($z(s)$: z-Komponente des Punktes $P(s)\in\bar{\gamma}'$), (v') für beliebige s_1, s_2 mit $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ ist $r(s) \geqslant \min\{r(s_1), r(s_2)\}$ ($r(s)$: r-Komponente des Punktes $P(s)\in\bar{\gamma}'$).*

Beweis. Das nachfolgende Lemma ist das Analogon von Lemma 1 (§1,2.2) im R^3. Sein Beweis, auf den hier verzichtet wird, entspricht demjenigen von Lemma 1.

LEMMA 2.

$$D(f) \geqslant \int_0^1 \frac{F^2(\lambda)}{-V'(\lambda)}\,d\lambda \quad \left(V'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}V(\lambda)\right). \tag{23}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $\partial f/\partial n$ (n Normale in Richtung von gradf) konstant ist auf Γ_λ.

G_λ besteht aus einer oder mehreren Komponenten G_λ^i $i=1,\ldots,n$. Wird G_λ^i ausschliesslich von $\Gamma_\lambda^i \subset \Gamma_\lambda$ begrenzt, so gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$F^3(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 36\pi V^2(G_\lambda^i). \tag{24}$$

Andernfalls erfüllen G_λ^i und sein Rand die Bedingungen der Ungleichungen (a) oder (b) aus §3,1.1. Somit gilt

$$F^3(\Gamma_\lambda^i) \geqslant 18\pi V^2(G_\lambda^i). \tag{25}$$

---

[4]) Die Funktion kann auch stückweise konstant sein.

Aus (24) und (25) und der Jensenschen Ungleichung[5]) folgt

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} F(\Gamma_\lambda^i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} (18\pi V^2(G_\lambda^i))^{1/3} \geqslant \{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{18\pi V(G_\lambda^i)}\}^{2/3}$$
$$= \{18\pi V^2(\lambda)\}^{1/3}. \tag{26}$$

Setzt man (26) in (23) ein und berücksichtigt, dass

$$D_{S(G)}(Sf) = \int_0^1 \frac{\{18\pi V^2(\lambda)\}^{2/3}}{-V'(\lambda)}\, d\lambda$$

(vgl. §1,2.2 Beweis von Satz 1) so folgt die Behauptung.

Die *Schwarzsche Symmetrisierung* einer Funktion f in G ist wie folgt definiert [12, S. 189]: f wird in eine Funktion f transformiert, die nur von r abhängig ist. Auf der Kugeloberfläche $r=(3V(\lambda)/4\pi)^{1/3}$ [die Kugel hat dasselbe Volumen wie $G(\lambda)$] nimmt f den Wert λ an.

Mit Hilfe der Ungleichung (b') und des Lemmas 2 lässt sich der nächste Satz beweisen.

SATZ 5'. *G sei ein zur (x, y)-Ebene symmetrischer Drehkörper. γ sei ebenfalls symmetrisch zur (x, y)-Ebene. Es mögen ferner gelten die Voraussetzungen* (i), (ii), (iv) *von* (b') (§3,1.1) *und* (iii'): *$z(s)$ sei nicht zunehmend für $s \in [0, l/2]$ [$z(s)$: z-Komponente von $P(s) \in \bar{\gamma}'$, l Länge von $\bar{\gamma}'$], (v'): für beliebige $s_1, s_2 \in [0, l/2]$ mit $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ gelte $r(s) \geqslant \min\{r(s_1), r(s_2)\}$ ($r(s)$: r-Komponente von $P(s) \in \bar{\gamma}'$). Weist ferner f die gleichen Symmetrien wie G auf, so nimmt das Dirichletintegral bei einer Schwarzschen Symmetrisierung ab.*

KOROLLAR 1. *G sei ein beliebiger Körper ausserhalb der Kugel $\{\vec{x};\ |\vec{x}| < k\}$; γ liege auf der Kugeloberfläche $|\vec{x}| = k$. Dann gilt:*

$$D_G(f) \geqslant D_{S(G)}(Sf).$$

Beweis. Zunächst unterwerfen wir f einer sphärischen Symmetrisierung bezüglich der z-Halbachse ($z \geqslant 0$) und dem Mittelpunkt im Ursprung [12, S.205ff.]. Dabei nimmt das Dirichletintegral von f ab, ohne dass sich $V(\lambda)$ ändert. Die transformierte Funktion befriedigt die Voraussetzungen von Satz 5 (b). Durch Anwendung dieses Satzes ergibt sich die Behauptung.

2. *Anwendungen*

Ähnlich wie in §2 kann die Symmetrisierung aus §3,1.2 benützt werden, um

[5]) Beckenbach-Bellman, Inequalities S. 18.

Ungleichungen, welche den drei-dimensionalen Modul und den ersten Eigenwert der drei-dimensionalen Membran betreffen, herzuleiten. Wir werden uns auf die Abschätzung des ersten Eigenwertes nach unten beschränken.

Das Problem der drei-dimensionalen stückweise freien Membran lautet:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ in } G \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \gamma \quad (n \text{ äussere Flächennormale})$$

G, γ und Γ_0 wurden in §3,1.1 definiert. λ_1 ist durch das Rayleighprinzip

$$\lambda_1 = \underset{v=0 \text{ auf } \Gamma_0}{\text{Min}} \frac{D(v)}{\iiint\limits_G v^2 dxdydz}$$

charakterisiert, wobei das Minimum von der ersten Eigenfunktion angenommen wird. u hat in G konstantes Vorzeichen und kann demnach symmetrisiert werden.

SATZ 6. *Wenn G und γ eine der Bedingungen (a) und (b) von Satz* 5 (§3,1.2) *genügen, gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \left(\frac{2\pi^4}{3V}\right)^{2/3}.$$

Das Gleichheitszeichen steht nur bei der Halbkugel, wobei γ die Aequatorebene und Γ_0 die Kugelkalotte ist.

Beweis. Die Beweisidee von Satz 3 (§2,2) kann auf diesen Fall wörtlich übertragen werden. Wir setzen in den Rayleighquotienten zur Charakterisierung von $\hat{\lambda}_1 = (2\pi^4/3V)^{2/3}$ (erster Eigenwert des Extremalgebietes) die Vergleichsfunktion Su ein und schätzen diesen mit Hilfe von Satz 5 un (22) ab.

Die nachstehenden Ergebnisse sind Folgerungen aus dem Korollar 1 und dem Satz 5′.

KOROLLAR 2. Ist G ausserhalb der Kugel $\{\vec{x};\ |\vec{x}| < k\}$, und liegt γ auf der Kugeloberfläche $r = k$, so ist

$$\lambda_1 \geqslant \left(\frac{2\pi^4}{3V}\right)^{2/3}.$$

SATZ 6'. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5' lässt sich λ_1 wie folgt nach unten abschätzen:*

$$\lambda_1 \geqslant \left(\frac{4\pi^4}{3V}\right)^{2/3}.$$

Das Gleichheitszeichen tritt nur bei der Kugel ein.

Diese Ergebnisse stellen eine teilweise Erweiterung der Ungleichung von Nehari [10, Satz III] auf drei-dimensionale Membranen, sowie eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Rayleigh-Faber-Krahn [6, 9, 13] auf stückweise freie Membranen dar.

LITERATUR

[1] A. D. ALEXANDROW, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen,* Berlin (1955).

[2] C. BANDLE, *Symétrisation de Schwarz "angulaire"et théorèmes isopérimétriques*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. *270,* (1970) S. 294.

[3] C. BANDLE, *Inégalités isopérimétriques pour des membranes vibrantes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. *269*, (1969) S. 1054.

[4] C. BANDLE, *Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der mathematischen Physik aus solchen der Geometrie*, Comment. Math. Helv. *46* (1971).

[5] T. CARLEMAN, *Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik*, Math. Z. *1* (1918), 208–212.

[6] G. FABER, *Beweis, dass unter allen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kb. S.-B. (1923) S. 169–172.

[7] T. GASSER und J. HERSCH, *Über die Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegö, Z.* Angew. Math. Phys. *19*, (1968) 672–675.

[8] J. HERSCH, *Transplantation harmonique, transplantation par modules et théorèmes isopérimétriques*, Comment. Math. Helv. *44*, (1969) 354–366.

[9] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Mat. Ann. *94*, (1924) 97–100.

[10] Z. NEHARI, *On the principal frequency of a membrane*, Pacific J. Math. *8*, (1958) 285–293.

[11] G. PÓLYA, *Circle, sphere, symmetrization, and some classical physical problems, Modern Mathematics for the Engineer*, 2nd series, (1961) 420–441.

[12] G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton, 1951).

[13] Lord RAYLEIGH, *The theory of the sound*, 2nd ed. (Macmillan, London, 1894/96).

[14] G. SZEGÖ, *Über einige neue Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z., *31*, (1930) 583–593.

Eingegangen den 22. Juni 1970.