Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1971)

Artikel: Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections
Autor: Portenier, Claude
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35523

Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections

par CLAUDE PORTENIER

Introduction

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier certaines classes d'espaces de Riesz et de les représenter par des espaces de fonctions ou de sections (continues).

Dans le paragraphe 0 nous rappelons les notions et les résultats dont nous aurons besoin. Nous les avons tirés en général des livres de H. Schaefer ([15]) et A. Perressini ([13]). Nous utiliserons aussi leur terminologie et leurs notations.

Si E est un espace de Riesz localement convexe, nous montrerons (1.6.) qu'il y a correspondance biunivoque par polarité entre les voisinages de 0 pour $\tau(E, E')$ qui sont fermés solides et co-réticulés et les chapeaux du cône positif dual. Cela nous permet de caractériser un espace de Kakutani comme un espace de Riesz localement convexe dont le cône positif dual est bien coiffé (1.8.). Remarquons que S. Kakutani (dans [11]) a déjà étudié ces espaces, dans le cadre des espaces de Banach, sous le nom de «abstract (M)-spaces»; R. G. Kuller ([12]) et G. Jameson ([10]) les appellent respectivement «locally m-convex vector lattices» et «topological M-spaces». Comme autre conséquence nous montrerons que le cône positif dual est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales si et seulement s'il existe une topologie d'espace de Kakutani séparée sur E, moins fine que $\tau(E, E')$ (1.12.). Un tel espace de Riesz localement convexe sera dit fonctionnel. A la fin de ce premier paragraphe nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un espace de Riesz régulièrement ordonné soit un espace de Kakutani pour sa topologie de l'ordre (1.17.).

Dans le paragraphe 2 nous donnons trois réponses différentes à la question suivante: étant donné un espace de fonctions (2.3.), quand toute forme linéaire réticulante continue est-elle évaluante? Ceci nous permet de retrouver les théorèmes classiques de S. Kakutani ([11], théorème 8) et L. Nachbin ([9], p. 170).

Le paragraphe 3 traite de la représentation des espaces de Riesz localement convexes fonctionnels. On montre que la réunion $\mathscr{G}$ des génératrices extrémales du cône dual positif est l'espace total d'un fibré principal $\mathscr{G} \to \mathscr{X}$ de groupe structural $\mathbf{R}_+^*$, appelé le spectre de E, et que E s'identifie à un espace de sections du fibré en droite associé au spectre (3.7.).

Dans [10] (théorème 6), G. Jameson représente E comme un espace de fonctions positivement homogènes sur $\mathscr{G}$, en remarquant qu'il n'y a pas de manière évidente de choisir un point par génératrice extrémale. Dans le cas normé, S. Kakutani ([11]), théorème 1) peut prendre les points qui sont de norme 1, mais l'espace topologique que l'on obtient peut être très pathologique. Il est conduit à prendre son adhérence, ce qui introduit les liaisons et pose le problème du meilleur quotient ([14], p. 38). Une nouvelle solution consiste à choisir une section continue du spectre. Nous verrons (3.23) que cela n'est pas toujours possible globalement. Toutefois il en existe au-dessus d'un ouvert X dense dans $\mathscr{X}$, ce qui conduit à représenter E comme un espace de fonctions sur X, ces fonctions ayant un certain comportement sur le bord de X (3.22.).

Dans le paragraphe 4, nous démontrons, en utilisant un résultat de G. Jameson ([10], théorème 7), un théorème de Stone-Weierstrass abstrait, valable dans les espaces de Kakutani (4.3.). Cela nous permet de retrouver les théorèmes classiques, par exemple celui de S. Kakutani ([11], théorème 3) et de répondre à une question de R. C. Buck ([4], p. 101).

Dans le paragraphe 5, nous introduisons une classe d'espaces de Riesz localement convexes (appelés quasi de Kakutani) intermédiaire entre celle des espaces de Kakutani et celle des espaces de Riesz localement convexes fonctionnels. Cette classe semble être la plus intéressante. On peut en effet démontrer un théorème de Dini (5.3.) et caractériser les idéaux fermés (5.5.).

Qu'il me soit permis ici de remercier très sincèrement Monsieur le Professeur Roger Bader, qui m'a suivi, aidé et conseillé tout au long de ce travail.

§0. Généralités

0.1. Tous les espaces vectoriels que nous considérerons seront définis sur le corps des réels **R**. Tous les espaces topologiques seront séparés et tous les espaces vectoriels topologiques seront localement convexes et séparés, sauf mention expresse du contraire.

0.2. Si E est un espace vectoriel ordonné nous désignerons toujours par C le cône convexe des éléments positifs de E. Une partie A de E est dite *pleine* si l'intervalle $[f, g]$ est contenu dans A pour tout $f, g \in A$. Si E est un espace de Riesz, nous dirons que la partie A est *solide* si $f \in A$ et $|g| \leqslant |f|$ implique $g \in A$, et *co-réticulée* si $f, g \in A$ implique $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g) \in A$. Un sous-espace vectoriel solide de E sera appelé un *idéal.*

Rappelons que l'enveloppe convexe d'une partie solide est solide et que l'enveloppe solide d'une partie co-réticulée symétrique est co-réticulée et convexe. Si F est un idéal de E, alors E/F est muni canoniquement d'une structure d'espace de Riesz telle que l'application linéaire canonique soit *réticulante* (i.e. permute avec sup).

0.3. Si E est un espace de Riesz et un espace localement convexe, nous dirons que E est un *espace de Riesz localement convexe* si l'application $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ est uniformément continue. Pour que E soit un espace de Riesz localement convexe, il faut et il suffit qu'il existe un système fondamental de voisinages de 0, qui soient fermés convexes et solides. Dans un tel espace l'adhérence d'un ensemble solide est solide et celle d'un ensemble co-réticulé est co-réticulée.

Soit E un espace de Riesz localement convexe. Nous dirons qu'il est *de Kakutani*, s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 co-réticulés. Dans un tel espace il existe un système fondamental de voisinages de 0 fermés solides et co-réticulés. Si la topologie de E est définie par une norme et si la boule unité est solide, nous dirons que E est un *espace de Riesz normé*; si en plus elle est co-réticulée, nous dirons que E est un *espace de Kakutani normé.* Si F est un idéal fermé de E, alors E/F est un espace de Riesz localement convexe pour les structures quotients. Si E est un espace de Kakutani, il en est de même de E/F.

0.4. Si $\langle E, F\rangle$ est un système dual et A une partie de E ou F, nous désignerons par A^o le polaire de A et par A^a le polaire absolu de A. F sera toujours muni de la topologie faible $\sigma(F, E)$.

0.5. Si E est un espace vectoriel ordonné, nous noterons C^* l'ensemble des formes linéaires positives sur E, cône dual (pour $\langle E, E^*\rangle$) de C, et par E^+ le sous-espace vectoriel C^*-C^* engendré par C^*.

Si E est un espace de Riesz, E^+ est aussi l'ensemble des formes linéaires relativement bornées sur E. Rappelons la formule importante suivante: pour tout $f\in C$ et tout $\mu\in E^+$, on a

$$|\mu|(f) = \sup_{|k|\leq f} \mu(k).$$

0.6. Rappelons qu'une forme linéaire μ est dite *réticulante* si $\mu(\sup(f, g)) = \sup(\mu(f), \mu(g))$ pour tout $f, g\in E$, ou, ce qui est équivalent, $\mu(|f|)=|\mu(f)|$ pour tout $f\in E$. On a le résultat important suivant:

Soit $\mu\in E^+$, $\mu\neq 0$. Pour que μ soit une forme linéaire réticulante, il faut et il suffit que μ engendre une génératrice extrémale de C^*.

Remarquons encore que l'ensemble des formes linéaires réticulantes est fermé dans E^+_σ et que C^* est faiblement complet.

0.7. Si E est un espace de Riesz localement convexe, alors E' (le dual de E) est un idéal de E^+. Réciproquement si $\langle E, E^+\rangle$ est un système dual (on dit que E est *régulièrement ordonné*) et si E' est un idéal dense de E^+_σ, alors la topologie $o(E, E')$ de la convergence uniforme sur les intervalles de E' est la moins fine des topologies compatibles avec la dualité $\langle E, E'\rangle$, qui font de E un espace de Riesz localement convexe.

0.8. Si E est un espace de Riesz régulièrement ordonné, nous noterons $\mathscr{T}_o$ sa topologie de l'ordre, qui est égale à $\tau(E, E^+)$ et est la plus fine qui en fasse un espace de Riesz localement convexe. On peut la décrire de la manière suivante. Soit H une partie cofinale de C pour le préordre: «il existe $\lambda>0$ tel que $\lambda\cdot f\leqslant g$» (on dit *positivement cofinale*). Pour toute application α de H dans $\mathbf{R}_+^*$, nous noterons U_α l'enveloppe convexe de la réunion des $\alpha(h)\cdot[-h, h]$. L'ensemble des U_α est un système fondamental de voisinages de 0 de $\mathcal{T}_o$.

Si E possède une unité e, alors $[-e, e]$ est la boule unité pour une norme définissant la topologie de l'ordre de E. C'est en outre un espace de Kakutani normé.

Rappelons encore le résultat suivant: un espace de Riesz normable complet est muni de sa topologie de l'ordre, i.e. $E'=E^+$.

0.9. Soit E un espace vectoriel. Un point x d'un ensemble convexe A de E est dit *extrémal* s'il n'est contenu dans aucun segment ouvert contenu dans A. Si E est un espace localement convexe, on appelle *tranche* de A toute intersection non-vide de A avec un demi-espace ouvert affine de E, i.e. un ensemble formé des $x\in A$ tels que $f(x)>a$, où f est une forme linéaire continue sur E et a un nombre réel. Un point de A est dit *extrémal fort* s'il possède dans A un système fondamental de voisinages formé de tranches. G. Choquet a montré (cf. [6]) que tout point extrémal d'un ensemble convexe faiblement complet est un point extrémal fort.

0.10. Soient C un cône convexe saillant pointé de sommet 0, d une génératrice ouverte de C et H un hyperplan coupant d en x. d est dite une *génératrice extrémale* si tout segment ouvert contenu dans C et coupant d est contenu dans d. Pour que d soit une génératrice extrémale de C, il faut et il suffit que x soit un point extrémal de $H\cap C$.

On appelle *tranche conique* de C toute intersection de C avec un demi-espace homogène ouvert de E, i.e. un ensemble formé des $x\in C$ tels que $f(x)>0$, où f est une forme linéaire continue sur E. Une génératrice ouverte de C est dite *génératrice extrémale forte* si elle possède dans C un système fondamental de voisinages coniques formé de tranches coniques. On a aussi que toute génératrice extrémale d'un cône convexe saillant faiblement complet est une génératrice extrémale forte. Ce résultat sera très important par la suite.

0.11. Quand un cône convexe fermé est-il l'enveloppe fermée convexe de ses génératrices extrémales? Pour étudier ce problème G. Choquet a introduit la notion suivante (cf. [6]):

Soit C un cône convexe d'un espace vectoriel topologique. On appelle *chapeau* de C toute partie convexe compacte non-vide de C de complémentaire convexe dans C.

On peut montrer (0.13.) que si C est égal à la réunion de ses chapeaux (on dit que C est *bien coiffé*), alors C est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales.

Certaines propriétés géométriques d'un chapeau (cf. [1], p. 109 et ss.) sont valables pour une classe d'ensembles convexes plus grande, celle des tubes, définie ci-après.

0.12. Soient E un espace vectoriel, C un cône convexe saillant pointé de sommet 0, A une partie de C convexe contenant 0 et p sa jauge. On suppose encore que A est l'ensemble des x tels que $p(x) \leqslant 1$, ce qui est vrai par exemple si A est une partie fermée d'un espace vectoriel topologique.

A sera dit un *tube* si A est plein (pour l'ordre défini par C) et de complémentaire convexe dans C. On a le résultat:

Pour que A soit un tube, il faut et il suffit que p soit additive sur C.

Si A ne contient pas de demi-droite et est de complémentaire convexe dans C, on montre que p est additive sur C, donc que A est un tube.

0.13. La proposition suivante est une généralisation immédiate d'une propriété vraie pour les chapeaux:

Soit A un tube de C. Les points extrémaux de A sont 0 *et les points x situés sur les génératrices extrémales de C et tels que $p(x)=1$.*

0.14. Le résultat suivant nous sera utile par la suite:

Si E est un espace de Riesz et un espace vectoriel topologique, alors les enveloppes «fermée solide» et «fermée convexe symétrique» d'un tube de C sont égales.

0.15. Rappelons quelques résultats concernant les fibrations principales (cf. [3]).

Soient $\mathscr{G}$ un espace topologique dans lequel le groupe $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels >0 opère continûment, $\mathscr{X}$ un espace topologique et π une application continue de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{X}$. Rappelons que nous supposons toujours les espaces topologiques séparés. Nous dirons que π est une *fibration principale* de groupe structural $\mathbf{R}_+^*$ si pour tout $x\in\mathscr{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x et un homéomorphisme $\theta: U\times\mathbf{R}_+^* \to \pi^{-1}(U)$ tels que $\pi(\theta(u, \alpha))=u$ et $\theta(u, \alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot\theta(u, \beta)$ pour tout $u\in U$ et $\alpha, \beta\in\mathbf{R}_+^*$. $\mathscr{G}$ s'appelle l'espace total et $\mathscr{X}$ la base de π.

La relation d'équivalence définie par π coïncide avec celle définie par $\mathbf{R}_+^*$. π étant ouverte, $\mathscr{X}$ s'identifie à l'espace des orbites $\mathscr{G}/\mathbf{R}_+^*$ muni de la topologie quotient. En outre $\mathbf{R}_+^*$ opère proprement et librement.

0.16. Réciproquement soit $\mathscr{G}$ un espace topologique dans lequel $\mathbf{R}_+^*$ opère continûment, proprement et librement. Nous désignerons par $\mathscr{X}$ l'espace des orbites $\mathscr{G}/\mathbf{R}_+^*$ muni de la topologie quotient (qui est séparée) et par π l'application canonique $\mathscr{G}\to\mathscr{X}$.

Pour toute partie A de $\mathscr{X}$ et toute section s de π au-dessus de A, soit θ l'application bijective $(x, \alpha)\to\alpha\cdot s(x)$ de $A\times\mathbf{R}_+^*$ sur $\pi^{-1}(A)$. Pour que s soit continue, il faut et il suffit que θ le soit. Si tel est le cas, θ est un homéomorphisme de $A\times\mathbf{R}_+^*$ sur $\pi^{-1}(A)$.

On en déduit que, pour tout $\mu\in\mathscr{G}$, l'application $\alpha\mapsto\alpha\cdot\mu$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ au-dessus de $x=\pi(\mu)$ et que π est une fibration principale si et seulement s'il existe localement des sections continues.

0.17. Nous désignerons par $\mathscr{H}(\mathscr{G})$ l'espace de Riesz des fonctions f réelles continues sur $\mathscr{G}$ qui sont positivement homogènes, i.e. telles que $f(\alpha\cdot\mu)=\alpha\cdot f(\mu)$ pour tout $\mu\in\mathscr{G}$ et tout $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$. Par exemple, si s est une section continue de π au-dessus de A, alors f, définie par $\mu\mapsto(x,\alpha)\mapsto\alpha$, appartient à $\mathscr{H}(\pi^{-1}(A))$ et $f(\mu)>0$ pour tout $\mu\in\pi^{-1}(A)$. Réciproquement soit $f\in\mathscr{H}(\pi^{-1}(A))$ satisfaisant cette dernière condition et désignons par s la section de π au-dessus de A définie par $f(s(x))=1$. Alors s est une section continue.

0.18. $\mathbf{R}_+^*$ opère continûment et proprement dans $\mathscr{G}\times\mathbf{R}$. L'application $\pi\circ pr_1$ de $\mathscr{G}\times\mathbf{R}$ sur $\mathscr{X}$ passe au quotient (par $\mathbf{R}_+^*$) en une application continue $\pi_{\mathbf{R}}:\mathscr{G}_{\mathbf{R}}\to\mathscr{X}$. $\pi_{\mathbf{R}}$ (ou $\mathscr{G}_{\mathbf{R}}$) est appelé *l'espace fibré associé à π de fibre type* $\mathbf{R}$. Si l'on note $(\mu, a)\mapsto\mu * a$ l'application de $\mathscr{G}\times\mathbf{R}$ sur $\mathscr{G}_{\mathbf{R}}$, on a $\alpha\cdot\mu*\alpha\cdot a=\mu*a$ et $\pi_{\mathbf{R}}(\mu*a)=\pi(\mu)$ pour tout $\mu\in\mathscr{G}$, $a\in\mathbf{R}$ et $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$.

Soient $x\in\mathscr{X}$ et $\mu\in\mathscr{G}$ tel que $\pi(\mu)=x$. L'application $a\mapsto\mu*a$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{R}}$ au-dessus de x. Plus généralement si s est une section continue de π au-dessus de A, alors $(x, a)\mapsto s(x)*a$ est un homéomorphisme de $A\times\mathbf{R}$ sur $\pi_{\mathbf{R}}^{-1}(A)$.

0.19. Si f est une section de $\pi_{\mathbf{R}}$, pour tout $\mu\in\mathscr{G}$, il existe un unique élément $\varphi(\mu)\in\mathbf{R}$ tel que $f(\pi(\mu))=\mu*\varphi(\mu)$. La fonction réelle sur $\mathscr{G}:\mu\mapsto\varphi(\mu)$ est positivement homogène. Pour que f soit continue, il faut et il suffit que φ le soit. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble $\mathscr{S}(\pi_{\mathbf{R}})$ (resp. $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$) de toutes les sections (resp. continues) de $\pi_{\mathbf{R}}$ sur l'ensemble des fonctions réelles (resp. continues) positivement homogènes sur $\mathscr{G}$. En général nous ne ferons pas de distinction entre f et φ.

0.20. La structure d'espace vectoriel ordonné de $\mathbf{R}$ étant invariante par $\mathbf{R}_+^*$, on peut la transporter dans les fibres de $\pi_{\mathbf{R}}$. Cela nous permet de munir $\mathscr{S}(\pi_{\mathbf{R}})$ d'une structure d'espace de Riesz. Si $f, g\in\mathscr{S}(\pi_{\mathbf{R}})$, on a $\sup(f, g)(x)=\sup(f(x), g(x))$ pour tout $x\in\mathscr{X}$. Si f et g sont continues, il en est de même de $\sup(f, g)$, donc $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$ est co-réticulé dans $\mathscr{S}(\pi_{\mathbf{R}})$.

Remarquons que la bijection de $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$ sur $\mathscr{H}(\mathscr{G})$ est un isomorphisme d'espaces de Riesz.

§1. Dualité et espaces de Kakutani

1.1. Dans tout ce paragraphe E désignera un espace de Riesz localement convexe et $\mathscr{T}$ sa topologie. Rappelons que E' est un idéal de E^+, donc les génératrices extrémales de C^o sont exactement celles de C^* qui sont contenues dans E'. Par suite une forme linéaire continue $\neq 0$ est réticulante si et seulement si elle engendre une génératrice extrémale de C^o (0.6.).

1.2. PROPOSITION. *Si A est une partie de E stable pour* inf, *alors $A^o \cap C^o$ est un tube de C^o. Si A est pour $\tau(E, E')$ un voisinage de* 0 *stable pour* inf, *alors $A^o \cap C^o$ est un chapeau de C^o.*

Désignons par p la jauge de l'ensemble $A^o \cap C^o$. On vérifie immédiatement que l'on a $p(\mu) = \sup_{f \in A} -\mu(f)$ pour $\mu \in C^o$. Pour démontrer la première assertion, il suffit de voir que p est additive sur C^o, donc que $p(\mu) + p(\nu) \leqslant p(\mu + \nu)$ pour tout μ, $\nu \in C^o$. Soient $\varepsilon > 0$ et $f, g \in A$ tels que $p(\mu) - \varepsilon/2 \leqslant -\mu(f)$ et $p(\nu) - \varepsilon/2 \leqslant -\nu(g)$. On a $h = \inf(f, g) \in A$ et il vient

$$p(\mu + \nu) \geqslant -(\mu + \nu)(h) \geqslant -\mu(f) - \nu(g) \geqslant p(\mu) + p(\nu) - \varepsilon,$$

d'où le résultat. La seconde assertion est alors évidente.

1.3. PROPOSITION. *Soit K un chapeau de C^o. Alors K^a est pour $\tau(E, E')$ un voisinage de* 0 *fermé solide et co-réticulé.*

K^a est pour $\tau(E, E')$ un voisinage de 0, puisque K est faiblement compact. En outre, par le théorème de Krein-Milman, K est l'enveloppe fermée convexe de ses points extrémaux, qui se trouvent sur des génératrices extrémales de C^o, donc sont des formes linéaires réticulantes. Ainsi si $f, g \in K^a$, on a $h = \sup(f, g) \in K^a$; en effet ceci est équivalent à $|\mu(h)| \leqslant 1$ pour tout μ point extrémal de K, d'où le résultat car on a $|\mu(h)| = |\mu(\sup(f, g))| = |\sup(\mu(f), \mu(g))| \leqslant \sup(|\mu(f)|, |\mu(g)|) \leqslant 1$. Ainsi K^a est co-réticulé, mais aussi équilibré. On en déduit qu'il est solide, car si $f \in K^a$ et $|g| \leqslant |f|$, on a $|f| = \sup(f, -f) \in K^a$ et $|\mu(g)| \leqslant \mu(|g|) \leqslant \mu(|f|) \leqslant 1$ pour tout $\mu \in K$, donc $g \in K^a$.

1.4. THÉORÈME. *Soit V une partie de E fermée convexe et solide. V est pour $\tau(E, E')$ un voisinage de* 0 *co-réticulé si et seulement si $V^o \cap C^o$ est un chapeau de C^o. On a alors $(V^o \cap C^o)^a = V$.*

Soit K une partie de C^o fermée convexe pleine et contenant 0. *K est un chapeau de C^o si et seulement si K^a est pour $\tau(E, E')$ un voisinage de* 0 *co-réticulé. On a alors $K^{ao} \cap C^o = K$.*

Par ce qui précède les conditions sont nécessaires. Elles sont aussi suffisantes par le lemme qui suit.

1.5 LEMME. *Si A est une partie fermée convexe solide de E et si $A^o \cap C^o$ est un tube de C^o, on a $(A^o \cap C^o)^a = A$. Si K est un ensemble compact convexe plein et contenant* 0 de *C^o, alors $K^{ao} \cap C^o = K$.*

A^o, qui est solide, est l'enveloppe solide de $A^o \cap C^o$, donc est l'enveloppe fermée convexe symétrique de $A^o \cap C^o$, cet ensemble étant un tube (0.14.). Le polaire absolu de $A^o \cap C^o$ est égal au polaire de l'enveloppe fermée convexe symétrique de $A^o \cap C^o$, donc au bipolaire de A, qui est égal à A.

K^{ao} est l'enveloppe convexe symétrique de K, donc si $\mu \in K^{ao} \cap C^o$, on a $\mu \geqslant 0$ et $\mu = \alpha \cdot \nu - (1-\alpha) \cdot \lambda$, où $\alpha \in [0, 1]$ et $\nu, \lambda \in K$, d'où $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha \cdot \nu \leqslant \nu$ et par suite $\mu \in K$.

Le théorème 1.4. signifie en fait:

1.6. COROLLAIRE. *Il y a correspondance biunivoque entre les voisinages V de* 0, *pour $\tau(E, E')$, qui sont fermés solides et co-réticulés et les chapeaux K de C^o par $V \mapsto V^o \cap C^o$ et $K \mapsto K^a$.*

1.7. COROLLAIRE. *Les chapeaux de C^o forment un ensemble filtrant croissant; plus précisement si K_1 et K_2 sont deux chapeaux de C^o, alors l'enveloppe convexe K de $K_1 \cup K_2$ est un chapeau de C^o.*

En effet K est fermé convexe contenant 0 et est plein par le lemme de décomposition; en outre $K_1^a = K_2^a \cap K^a$ est évidemment pour $\tau(E, E')$ un voisinage de 0 co-réticulé.

1.8. THÉORÈME. *Pour que C^o soit bien coiffé, il faut et il suffit qu'il existe sur E une topologie d'espace de Kakutani compatible avec la dualité.*

Il suffit de remarquer que pour $\mu \in C^o$, «μ appartient à un chapeau K» est équivalent à «K^a est contenu dans l'ensemble V_μ des $f \in E$ tels que $|\mu(f)| \leqslant 1$», et que la famille des intersections finies de V_μ (pour $\mu \in C^o$) est un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E')$, car pour μ quelconque on a $V_{2\mu^+} \cap V_{2\mu^-} \subset V_\mu$.

1.9. *Remarque.* La famille des K^a, où K parcourt celle des chapeaux de C^o, définit toujours une topologie $\mathscr{T}_k$ d'espace de Kakutani sur E, mais en général *non-séparée*. Elle est évidemment la plus fine parmi celles qui sont moins fines que $\tau(E, E')$ et qui font de E un espace de Kakutani (non nécessairement séparé), et elle est compatible avec la dualité (donc en particulier séparée) si et seulement si C^o est bien coiffé.

Si E est un espace de Kakutani, C^o est bien coiffé, donc est égal à l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales. Nous poserons la définition suivante:

1.10. DÉFINITION. Nous dirons qu'un espace de Riesz localement convexe E est *fonctionnel* si le cône dual C^o est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses géneratrices extrémales. De même un espace de Riesz sera dit fonctionnel si c'est un espace de Riesz localement convexe fonctionnel pour sa topologie de l'ordre.

Pour caractériser ces espaces nous aurons besoin du lemme évident suivant:

1.11. LEMME. *Soient A une partie, contenant* 0, *d'un espace vectoriel topologique et P un cône de sommet* 0. *Les enveloppes fermées convexes de $A+P$ et $A\cup P$ sont égales.*

1.12. THÉORÈME. *E est un espace de Riesz localement convexe fonctionnel si et seulement s'il existe une topologie d'espace de Kakutani (séparée) sur E, moins fine que $\tau(E, E')$.*

Remarquons que C^o est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales si et seulement si la réunion des chapeaux K de C^o est dense dans C^o. Il nous suffit donc de montrer que les assertions «$\overline{\bigcup K}=C^o$» et «$\mathscr{T}_k$ est une topologie séparée» sont équivalentes. Mais la première est équivalente à «$C=\bigcap K^o$». Cette dernière implique que $\mathscr{T}_k$ est séparée, car $K^a=(K\cup -K)^o=K^o\cap(-K)^o$, donc $\bigcap K^a=C\cap(-C)=\{0\}$. D'autre part on a $K^{ao}\cap C^o=K$, donc K^o est l'enveloppe fermée convexe de $K^a\cup C$, donc est égal par le lemme à l'adhérence de $C+K^a$. Cet ensemble étant contenu dans $C+2K^a$, on a $\bigcap K^o=\bigcap(C+K^a)$. Par suite «$\overline{\bigcup K}=C^o$» est équivalent à «$C$ est fermé pour $\mathscr{T}_k$». Nous venons d'utiliser deux fois (l'une pour $\tau(E, E')$, l'autre pour $\mathscr{T}_k$) que dans un espace vectoriel topologique on a $\bar{A}=\bigcap(A+U)$, où U parcourt un système fondamental de voisinages de 0. Ainsi si $\mathscr{T}_k$ est séparée, E, muni de vette topologie, devient un espace de Riesz localement convexe, donc C est fermé, ce qui termine la démonstration.

1.13. EXEMPLE. Soient X un ensemble et E un espace vectoriel de fonctions réelles sur X, co-réticulé dans $\mathbf{R}^X$. Cette dernière hypothèse signifie que pour tout $f, g\in E$, on a $\sup(f, g)\in E$, où $\sup(f, g)(x)=\sup(f(x), g(x))$ pour tout $x\in X$, ou encore, que les formes linéaires d'évaluation $\varepsilon_x: f\mapsto f(x)$ sont réticulantes. Si l'on munit E d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe plus fine que celle de la convergence simple dans X, i.e. telle que toutes les formes linéaires d'évaluation (sur X) soient continues, alors E est un espace de Riesz localement convexe fonctionnel, la topologie de la convergence simple dans X étant manifestement une topologie d'espace de Kakutani (séparée).

Tout espace de Riesz localement convexe fonctionnel E est en fait de ce type. En effet prenons pour X la réunion $\mathscr{G}$ des génératrices extrémales de C^o. Pour tout $f\in E$, désignons par $\Phi(f)$ la fonction réelle sur $\mathscr{G}: \mu\mapsto\mu(f)$. Il est alors clair, car $\mathscr{G}$ est total dans E'_σ et formé de formes linéaires réticulantes, que Φ est un isomorphisme (d'espace de Riesz) de E sur un espace vectoriel de fonctions réelles sur $\mathscr{G}$, co-réticulé dans $\mathbf{R}^{\mathscr{G}}$. Cette représentation n'est pas très intéressante, car $\mathscr{G}$ est beaucoup trop grand. Par la suite (§3) nous reprendrons cette question.

1.14. EXEMPLE. L'exemple de G. Choquet ([7]) d'un cône convexe saillant faiblement complet sans génératrices extrémales nous fournit un exemple d'espace de Riesz fonctionnel que l'on peut munir d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe pour laquelle il n'est pas fonctionnel.

Soit E l'espace de Riesz des fonctions réelles continues sur [0, 1]. On sait que E^+ est l'espace des mesures de Radon sur [0, 1], car E muni de la norme uniforme est un espace de Riesz normé complet, donc est muni de sa topologie de l'ordre. En outre il est de Kakutani, donc E est un espace de Riesz fonctionnel. Soit E' le sous-espace vectoriel des mesures de Radon μ pour lesquelles toutes les fonctions $x \mapsto |\chi - a|^{-\alpha}$ ($a \in [0, 1]$ et $0 \leqslant \alpha < 1$) soient $|\mu|$-intégrables. Il est évident que E' est un idéal de E^+ et par conséquent que C^o ne possède pas de génératrices extrémales, celles-ci devant être engendrées par les ε_x ($x \in [0, 1]$; cf. 2.15. corollaire 1.). Muni de la topologie $o(E, E')$ (0.7.), E est un espace de Riesz localement convexe non-fonctionnel, son dual E', contenant la mesure de Lebesgue, étant dense dans E^+_σ.

1.15. Soit E un espace de Riesz régulièrement ordonné, muni de sa topologie de l'ordre. On peut décrire la topologie $\mathscr{T}_{o,k}$ (remarque 1.9.) par une méthode identique à celle utilisée pour la topologie de l'ordre $\mathscr{T}_o$ (0.8.).

Soit H une partie positivement cofinale de C. Pour toute application $\alpha: H \mapsto \mathbf{R}^*_+$, on note V_α l'ensemble des $f \in E$ tels qu'il existe une partie finie $I \subset H$ et que l'on ait $|f| \leqslant \sup_{h \in I}(\alpha(h) \cdot h)$.

1.16. PROPOSITION. *L'ensemble des V_α est un système fondamental de voisinages de* 0 *de $\mathscr{T}_{o,k}$.*

En effet cet ensemble est un filtre de parties absorbantes, solides et co-réticulées (et par suite convexes et équilibrées), donc définit une topologie d'espace de Kakutani, peut-être non-séparée, évidemment moins fine que $\mathscr{T}_{o,k}$. Elle est aussi plus fine, car si V est un voisinage de 0 de $\mathscr{T}_{o,k}$, on peut supposé qu'il est solide et co-réticulé, donc si l'on choisit $\alpha(h) > 0$ tel que $\alpha(h) \cdot h \in V$, on a $V_\alpha \subset V$.

Nous savons qu'un espace de Riesz régulièrement ordonné possédant une unité est un espace de Kakutani pour sa topologie de l'ordre. Plus généralement on a le théorème:

1.17. THÉORÈME. *Soit E un espace de Riesz régulièrement ordonné satisfaisant l'une des deux conditions suivantes:*

(i) *il existe une suite (h_n) positivement cofinale de C.*

(ii) *pour toute suite (h_n) de C il existe $h \in C$ majorant positivement tous les h_n.*

Alors E muni de sa topologie de l'ordre est un espace de Kakutani.

La suite (h_n) étant positivement cofinale à C on peut l'utiliser pour définir $\mathscr{T}_o$ et $\mathscr{T}_{o,k}$. Soient U_α un voisinage de 0 de $\mathscr{T}_o$ et $\beta_n = \alpha_n / 2^n$. Nous allons montrer que

$V_\beta \subset U_\alpha$. Si $f \in E$ est tel que $|f| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n}(\beta_i \cdot h_i)$, on a

$$|f| \leqslant \sum_1^n \beta_i \cdot h_i = \sum_1^n \frac{1}{2^i} \cdot \alpha_i \cdot h_i$$

et ce dernier élément appartient à U_α, d'où (i).

Soit U_α un voisinage de 0 de $\mathscr{T}_o$, h parcourant C. Montrons que $a = \lim\sup \alpha_h > 0$. Si $a = 0$, alors $\lim \alpha_h = 0$, donc pour tout n il existe h_n tel que $0 \leqslant \alpha_g \leqslant 1/n$ pour tout g majorant positivement h_n. Soit h majorant positivement tous les h_n; on a $\alpha_h = 0$, ce qui est absurde. Ainsi il existe une partie H positivement cofinale de C telle que $\alpha_h \geqslant a/2$ pour tout $h \in H$. Si l'on pose $\beta_h = a/2$ pour tout $h \in H$, le voisinage V_β de 0 pour $\mathscr{T}_{o,k}$ est contenu dans U_α. En effet si $f \in E$ est tel que $|f| \leqslant \sup(\beta_i \cdot h_i)$, où (h_i) est une suite finie de H, on a $|f| \leqslant a/2 \cdot g \leqslant \alpha_g \cdot g$ pour tout $g \in H$ majorant positivement les h_i, donc $f \in U_\alpha$.

1.18. *Remarques.* 1) La même conclusion subsiste s'il existe une partie H positivement cofinale de C qui soit isomorphe au produit de deux ensembles préordonnés satisfaisant respectivement (i) et (ii).

2) La partie (i) du théorème était déjà connue de G. Choquet sous une forme plus générale, mais un peu plus faible.

Si $f \in E$ nous désignerons par V_f l'ensemble des $\mu \in E^+$ tels que $|\mu(f)| \leqslant 1$. L'ensemble des $V_f \cap C^*$ pour $f \in C$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans C^*, car pour f quelconque on a $V_{2f^+} \cap V_{2f^-} \subset V_f$. Si $f, g \in C$, alors $f \geqslant g$ est équivalent à $V_f \cap C^* \subset V_g \cap C^*$. La condition (i) peut donc s'énoncer sous la forme: 0 possède dans C^* un système fondamental dénombrable de voisinages. Le résultat de G. Choquet (cf. [1], chap. 2, §7, prop. 5, p. 112) affirme qu'alors C^* (qui est faiblement complet) est bien coiffé. Par suite $\mathscr{T}_{o,k}$ est compatible avec la dualité $\langle E, E^+ \rangle$ par le théorème 1.8. Nous avons en fait démontré un peu plus, c'est-à-dire $\mathscr{T}_{o,k} = \tau(E, E^+) = \mathscr{T}_o$.

1.19. EXEMPLES. Soient X un espace topologique localement compact et $E = \mathscr{K}(X)$ l'espace de Riesz des fonctions réelles continues à support compact sur X, muni de sa topologie limite inductive habituelle, qui est sa topologie de l'ordre (cf. [2], chap. 3). Soit $\mathscr{K}$ une famille exhaustive de compacts de X et pour tout $K \in \mathscr{K}$ choisissons $\theta_K \in \mathscr{K}(X)$ telle que $\theta_K \geqslant 0$ et $\theta_K \geqslant 1$ sur K. L'ensemble de ces θ_K est une partie positivement cofinale de C. Du théorème 1.17. découle le résultat suivant:

Si X est dénombrable à l'infini ou si pour toute suite (K_n) de compacts de X la réunion $\bigcup K_n$ est relativement compacte, alors $\mathscr{K}(X)$ est un espace de Kakutani.

Par exemple un espace d'ordinaux $\mathcal{O}_\alpha$ (cf. [8], 5.11., p. 72), i.e. l'ensemble de tous les ordinaux strictement plus petit qu'un certain ordinal α, muni de la topologie des intervalles ouverts, qui en fait un espace topologique localement compact, jouit toujours de l'une ou l'autre des propriétés ci-dessus.

Dans la planche de Tychonoff (cf. [8], 8.20., p. 123), i.e. l'espace topologique localement compact

$$[0, \omega_0] \times [0, \omega_1] - \{(\omega_0, \omega_1)\},$$

la famille $(K_{n,\alpha})$, $n<\omega_0$ et $\alpha<\omega_1$, $K_{n,\alpha}$ désignant l'ensemble des (j, β) tels que $j\leqslant n$ ou $\beta\leqslant\alpha$, est une famille exhaustive de compacts vérifiant la condition de la remarque 1) ci-dessus. $\mathscr{K}(X)$ est donc aussi un espace de Kakutani.

Si X est un espace discret, $\mathscr{K}(X)$ s'identifie à la somme directe $\mathbf{R}^{(X)}$ et E^+ à $\mathbf{R}^X$. Si X est non-dénombrable, alors $\mathscr{K}(X)$ n'est pas un espace de Kakutani, car $C^*=\mathbf{R}_+^X$ n'est pas bien coiffé (cf. [1], chap. 2, §7, Ex. 28, p. 158).

§2. Espaces de fonctions et formes linéaires évaluantes

2.1. Soient X un ensemble et E un espace vectoriel de fonctions réelles sur X, co-réticulé dans $\mathbf{R}^X$, muni d'une topologie $\mathscr{T}$ d'espace de Riesz localement convexe plus fine que celle de la convergence simple dans X.

Les formes linéaires d'évaluation vont jouer un rôle central dans l'étude de ces espaces. Plus généralement nous dirons qu'une forme linéaire sur E est *évaluante* si elle est de la forme $\alpha\cdot\varepsilon_x$ pour un $x\in X$ et $\alpha\geqslant 0$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\alpha, \beta\geqslant 0$ et $x, y\in X$, les relations «$\alpha\cdot\varepsilon_x=\beta\cdot\varepsilon_y$ sur F» et «$\alpha\cdot f(x)=\beta\cdot f(y)$ pour tout $f\in F$» sont équivalentes. Si tel est le cas nous dirons que $(x, y; \alpha, \beta)$ est une *liaison* de F sur X. Les liaisons $(x, x; \alpha, \alpha)$ et $(x, y; 0, 0)$ sont dites triviales.

La question qui va maintenant nous intéresser est la suivante:

Sous quelles conditions (portant sur X, E et $\mathscr{T}$) toutes les formes linéaires réticulantes continues sont-elles évaluantes, ou plus généralement, comment peut-on décrire les formes linéaires réticulantes continues à l'aide des formes linéaires évaluantes? Nous répondrons de trois manières différentes à cette question.

2.2. Pour commencer il nous faut introduire une topologie, voire une structure uniforme, sur X.

Plongeons X dans E'_σ par $\varepsilon: x\mapsto\varepsilon_x$. Cette application identifie les points $x, y\in X$ tels que $f(x)=f(y)$ pour tout $f\in E$. Toute fonction $f\in E$ est égale à la composition de ε et de la forme linéaire sur $E': \mu\mapsto\mu(f)$ associée à f. Sachant que la structure uniforme de E'_σ est la structure uniforme initiale relativement aux formes linéaires $\mu\mapsto\mu(f)$ pour $f\in E$, on voit qu'elle induit sur X (par ε) la structure uniforme initiale relativement aux fonctions $f\in E$. En outre l'espace topologique séparé associé à X s'identifie à $\varepsilon(X)$. Au besoin en remplaçant X par $\varepsilon(X)-\{0\}$ et E par l'ensemble des restrictions à $\varepsilon(X)-\{0\}$ des formes linéaires $\mu \mapsto \mu(f)$ pour $f \in E$, nous pouvons supposer que nous sommes dans la situation suivante:

2.3. DÉFINITION. Soient X_0 un espace topologique et X un sous-espace dense de X_0 dont le complémentaire est vide (resp. réduit à un point, le *point à l'infini*). Par abus nous dirons dans le second cas que X est un espace topologique avec point à l'infini.

Nous dirons que E est un *espace de fonctions* (sur X) si E est un espace vectoriel, co-réticulé dans $\mathbf{R}^X$, de fonctions réelles continues sur X (resp. et tendant vers zéro à l'infini, i.e. suivant le filtre trace sur X du filtre des voisinages du point à l'infini dans X_0), tel que la topologie initiale relativement aux $f \in E$ soit celle de X (resp. X_0) et que pour tout $x \in X$ il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.

Si E est muni d'une topologie nous supposerons qu'elle en fait un espace de Riesz localement convexe et qu'elle est plus fine que celle de la convergence simple dans X. Nous munirons toujours X de la structure uniforme initiale relativement aux $f \in E$. X s'identifie par ε avec son image dans E'_σ, le point à l'infini s'identifiant avec 0 lorsqu'il existe, c'est-à-dire lorsque 0 est adhérent à X.

On peut aussi considérer X comme plongé dans E^+_σ, puisque la structure uniforme faible $\sigma(E^+, E)$ induit la structure uniforme faible $\sigma(E^+, E)$. L'adhérence $\hat{X}_0$ de X_0 dans C^*, qui est faiblement complet, s'identifie au complété de X. $\hat{X} = \hat{X}_0 - \{0\}$ étant un ensemble de formes linéaires réticulantes, on peut considérer E comme un espace de fonctions sur $\hat{X}$.

2.4. *Remarque*. Soient X un espace topologique (resp. avec point à l'infini) et E un espace vectoriel, co-réticulé dans $\mathbf{R}^X$, de fonctions réelles continues sur X (resp. et tendant vers zéro à l'infini).

Si X (resp. X_0) est compact, E est un espace de fonctions si et seulement si E sépare les points de X[1]) et si, pour tout $x \in X$, il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.

Si, pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ et $f = 0$ hors de V, alors E est un espace de fonctions. Dans ce cas nous dirons qu'il est *riche*.

2.5 EXEMPLE. Si X est un espace topologique complètement régulier, nous désignerons par $\mathscr{C}(X)$ (resp. $\mathscr{C}^b(X)$) l'espace de Riesz des fonctions réelles continues sur X (resp. et bornées). Si X a un point à l'infini nous désignerons par $\mathscr{C}^0(X)$ (resp. $\mathscr{C}^{0b}(X)$) l'espace de Riesz des fonctions réelles continues sur X tendant vers zéro à l'infini (resp. et bornées) et par $\mathscr{K}(X)$ (resp. $\mathscr{K}^b(X)$) l'espace de Riesz des fonctions réelles continues sur X nulles sur un voisinage du point à l'infini (resp. et bornées). Tous ces espaces de fonctions sont riches.

Remarquons qu'un espace topologique localement compact, non-compact, est

---

[1]) i.e. pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

muni canoniquement d'un point à l'infini en le plongeant dans son compactifié d'Alexandroff.

2.6. EXEMPLE. Soit X l'intervalle $[0, 1]$ et E l'espace de Riesz des fonctions f réelles continues sur $[0, 1]$ telles que $f(0)=\frac{1}{2}f(1)$. $(0, 1; 1, \frac{1}{2})$ est une liaison (et la seule) de E sur X. E n'est pas riche.

2.7. EXEMPLE. Soit X l'intervalle $]0, 1]$ et E l'espace de Riesz des fonctions f réelles continues sur $]0, 1]$ telles que $\lim_{x\to 0} f(x)/x$ existe. La forme linéaire réticulante: $f \mapsto \lim_{x\to 0} f(x)/x$ n'est pas évaluante et n'est pas continue pour la topologie de la convergence uniforme. E possède une unité, la fonction $e(x)=x$, et, muni de la norme canonique associée, c'est un espace de Kakutani normé complet (M-espace). On voit immédiatement que X_0 s'identifie à $[0, 1]$.

1ère. réponse

2.8. Soit E un espace de Riesz localement convexe. Nous désignerons par $\mathscr{G}$ la réunion des génératrices extrémales de C° (i.e. l'ensemble des formes linéaires réticulantes continues), muni de la topologie induite par $\sigma(E', E)$, par T un sous-cône de $\mathscr{G}$ et par $\overline{\langle T\rangle}$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par T. Nous noterons indifféremment par une barre l'adhérence dans E'_{σ} ou dans $\mathscr{G}$.

2.9. PROPOSITION. *On a $\overline{\langle T\rangle} \cap \mathscr{G} = \bar{T}$, ou encore, pour tout $\mu \in \mathscr{G}$, $\mu \notin \bar{T}$, il existe $f \in C$ tel que $\mu(f)>0$ et $\nu(f)=0$ pour tout $\nu \in T$.*

Le cône C^* étant faiblement complet, toutes ses génératrices extrémales sont fortes. Il en est donc de même de celles de C°. Il existe donc $f \in E$ tel que $\mu(f)>0$ et $\nu(f)\leqslant 0$ pour tout $\nu \in T$. On vérifie immédiatement que f^+ répond à la question.

2.10. THÉORÈME. *Soit E un espace de fonctions sur X. Toute forme linéaire réticulante continue est limite faible de formes linéaires évaluantes.*

X étant total dans E'_{σ}, il est clair par la proposition précédente que le cône engendré par X, ensemble des formes linéaires évaluantes, est dense dans $\mathscr{G}$.

2.11. *Remarques.* 1) Nous montrerons plus tard, lorsque E est riche (théorème 3.22), que pour toute forme linéaire réticulante continue μ, il existe $\varrho \in E$ et un filtre Φ sur X tels que $\mu = \lim \varepsilon_x/\varrho(x)$, i.e. $\mu(f) = \lim f(x)/\varrho(x)$ pour tout $f \in E$.

2) Dans l'exemple 2.7., X est fermé dans $\mathscr{G}$. Ceci n'est donc pas une condition suffisante pour que toutes les formes linéaires réticulantes continues soient évaluantes.

2ème. réponse

2.12. THÉORÈME. *Soit E un espace de fonctions. Si l'ensemble B des $f \in E$ tels que $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in X$ est un borné total de E et si X_0 est complet, alors toute forme linéaire réticulante continue est évaluante.*

B est une partie solide et co-réticulée et on a $X^\circ = B + C$. On en déduit que $X^{\circ\circ} = (B+C)^\circ = B^\circ \cap C^\circ$ par le lemme 1.11., donc que $B^\circ \cap C^\circ$ est l'enveloppe fermée convexe de $X \cup \{0\}$. Remarquons maintenant que $B^\circ \cap C^\circ = B^* \cap C^* \cap E'$, en désignant par B^* le polaire de B pour la dualité $\langle E, E^+ \rangle$. Comme $B^* \cap C^*$ (resp. $B^\circ \cap C^\circ$) est un tube de C^* (resp. C°), tout point extrémal de $B^\circ \cap C^\circ$ est un point extrémal de l'ensemble convexe faiblement complet $B^* \cap C^*$, donc est un point extrémal fort; par suite $\hat{X}$ contient tous les points extrémaux $\neq 0$ de $B^\circ \cap C^\circ$. Il faut remarquer que cela n'implique pas en général l'existence d'un tel point, car il se trouverait sur une génératrice extrémele de C° coupant B° et non-contenue dans B°. La conclusion est alors immédiate par le lemme évident suivant.

2.13. LEMME. *B est borné (resp. total) pour $\sigma(E, \langle \mathscr{G} \rangle)$ si et seulement si $B^\circ \cap C^\circ$ absorbe les points de $\mathscr{G}$ (resp. ne contient pas de génératrices extrémales de C°).*

2.14. *Remarque.* On a en fait montrer que «X_0 est fermé» est une condition suffisante pour que toute forme linéaire réticulante continue soit évaluante. Cette condition est nécessaire si $\hat{X}$ n'a qu'un point dans chaque génératrice extrémale de C°.

2.15. Ce théorème nous fournit une démonstration «analyse fonctionnelle» des résultats classiques suivants:

COROLLAIRE 1. *Soit E un espace de fontions bornées sur X, muni de la norme uniforme. Si X_0 est compact, alors toute forme linéaire réticulante continue est évaluante.*

COROLLAIRE 2. *Soit X un espace topologique complètement régulier (resp. avec point à l'infini). Pour que toute forme linéaire réticulante sur $\mathscr{C}^b(X)$ (resp. $\mathscr{C}^{0b}(X)$) soit évaluante, il faut et il suffit que X (resp. X_0) soit compact.*

B est un borné total pour la topologie de l'ordre, car cette topologie peut être définie par la norme uniforme. $\mathscr{C}^b(X)$ (resp. $\mathscr{C}^{0b}(X)$) étant isomorphe à $\mathscr{C}^b(\hat{X})$ (resp. $\mathscr{C}^{0b}(\hat{X})$), on voit immédiatement que $\hat{X}$ n'a qu'un point sur chaque génératrice extrémale de C^*. B° étant faiblement compact, le résultat est alors évident par la remarque 2.14. ci-dessus.

COROLLAIRE 3. *Soit X un espace topologique complètement régulier (resp. avec* *point à l'infini). Pour que toute forme lineaire réticulante sur $\mathscr{C}(X)$ (resp. $\mathscr{C}^0(X)$) soit évaluante, il faut et il suffit que X (resp. X_0) soit replet.*

Rappelons qu'un espace topologique complètement régulier Y est dit *replet* s'il est complet pour la structure uniforme initiale relativement aux $f\in\mathscr{C}(Y)$, ou aussi relativement aux $f\in\mathscr{C}(Y)$ qui s'annulent en un point de Y.

Dans le premier cas $B=[-1, 1]$, donc est borné pour la topologie de l'ordre. Dans le second cas si B n'est pas borné, il existe une forme linéaire positive μ et une suite (f_n) de $\mathscr{C}^0(X)$ telles que $0\leqslant f_n(x)\leqslant 1$ pour tout $x\in X$ et $\mu(f_n)\geqslant 2^n$. La fonction $f=\sum 1/2^n\cdot f_n$ appartient à $\mathscr{C}^0(X)$ et on a

$$\mu(f)\geqslant\sum_1^N\frac{1}{2^n}\cdot\mu(f_n)\geqslant N$$

pour tout N, ce qui est absurde. Pour montrer que B est total, il nous suffit de voir que toute forme linéaire positive μ nulle sur B est nulle. Pour tout $f\in C$ et tout entier $n\geqslant 1$, on a $f\leqslant\inf(f, n)+1/n\cdot f^2$, d'où $0\leqslant\mu(f)\leqslant 1/n\cdot\mu(f^2)$, donc $\mu(f)=0$. On conclut comme précédemment.

3ème. réponse

2.16. DÉFINITION. Si E est un espace de fonctions et si T est un fermé de X, nous dirons que *T porte $\mu\in E'$* si $f\in E$ et $f=0$ sur T implique $\mu(f)=0$. Le plus petit fermé, $S(\mu)$, qui porte μ (s'il existe), sera dit le *support* de μ et si tout $\mu\in E'$ possède un support nous dirons que E est *supportable*.

Cette notion sera étudiée en détail ultérieurement. Nous verrons qu'elle est en fait l'une des plus naturelles généralisations au cas topologique de la notion de base algébrique. On sait que $\mathscr{K}(X)$ (X localement compact) et $\mathscr{C}(X)$ (X replet; cf. [9], théorème 17, p. 172), munis de leur topologie de l'ordre, sont supportables.

2.17. PROPOSITION. *Soit E un espace de fonctions supportable. Alors $\mu=0$ est équivalent à $S(\mu)=\emptyset$ et $\mu=\alpha\cdot\varepsilon_x$ ($\alpha\neq 0$) est équivalent à $S(\mu)=\{x\}$.*

La première assertion est évidente. Si $\mu=\alpha\cdot\varepsilon_x$ ($\alpha\neq 0$), $\{x\}$ porte μ, et puisque $\mu\neq 0$, c'est évidemment le plus petit fermé portant μ. Réciproquement soit $f\in E$ tel que $\mu(f)\neq 0$ et $f(x)=1$; pour tout $g\in E$, on a $\mu(g)=\mu(f)\cdot g(x)$, car $g-g(x)\cdot f$ est nul en x, donc $\mu=\mu(f)\cdot\varepsilon_x$.

2.18. PROPOSITION. *Un espace de fonctions supportable est riche.*

Cela résulte immédiatement de $S(\varepsilon_x)=\{x\}$.

2.19. PROPOSITION. *Soient E un espace de fonctions supportable, $x\in X$ et $\mu\in E'$.*

Pour que $x \in S(\mu)$, il faut et il suffit que pour tout voisinage V de x, il existe $f \in E$ tel que $\mu(f) \neq 0$ et $f=0$ hors de V.

En effet «$x \notin S(\mu)$» est équivalent à «il existe un ouvert V contenant x tel que, pour tout $f \in E$, on ait $\mu(f)=0$ si $f=0$ hors de V».

2.20 THÉORÈME. *Toute forme linéaire réticulante continue sur un espace de fonctions supportable est évaluante.*

Soit μ une forme linéaire réticulante continue; il nous suffit de montrer que $S(\mu)$ est réduit à un point. Si $S(\mu)$ contient deux points distincts x, y, soient V et W deux voisinages, respectivement de x et y, disjoints et f, g deux fonctions positives de E telles que $\mu(f)=\mu(g)=1$ et $f=0$ (resp. $g=0$) hors de V (resp. W). On a $\sup(f, g) =f+g$, donc $\mu(f) + \mu(g) = \mu(\sup(f, g)) = \sup(\mu(f), \mu(g))$, ce qui est absurde.

§ 3. Représentations des espaces de Riesz localement convexes fonctionnels

3.1. DÉFINITIONS. Soit $\mathscr{G}$ un espace topologique dans lequel $\mathbf{R}_+^*$ opère continûment, proprement et librement. Nous dirons que $\pi: \mathscr{G} \to \mathscr{X}$ (0.16.) est une *fibration principale complètement régulière* si, pour tout $\mu \in \mathscr{G}$ et tout ouvert saturé V contenant μ, il existe $f \in \mathscr{H}(\mathscr{G})$ tel que $f(\mu) \neq 0$ et $f=0$ hors de V (0.17.). π est évidemment une fibration principale au sens de 0.15.

Un sous-espace vectoriel co-réticulé E de $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$ (0.18. et 0.19.) sera appelé un *espace de sections* (associé à π) si, pour tout $x \in \mathscr{X}$ et tout voisinage V de x, il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ et $f=0$ hors de V (axiome de richesse).

Pour tout $\mu \in \mathscr{G}$ (on pose $x=\pi(\mu)$) et tout $f \in \mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$, on peut écrire $f(x)=\mu * f(\mu)$ par l'identification de $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$ avec $\mathscr{H}(\mathscr{G})$ (0.19. et 0.20.). L'application $\varepsilon_\mu: f \mapsto f(\mu)$ de E dans $\mathbf{R}$ est évidemment linéaire et réticulante. On dit que c'est une forme linéaire *évaluante* sur E (cf. 2.1.). Nous identifierons $\mathscr{G}$ à son image dans E^+ par l'application injective ε.

3.2. En général on munit un espace de sections E d'une topologie d'espace de Riesz localement convexe plus fine que la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{X}$, égale à la topologie faible $\sigma(E, \langle\mathscr{G}\rangle)$. C'est donc un espace de Riesz localement convexe fonctionnel.

3.3. PROPOSITION. *Soit E un espace de sections. L'application ε est un homéomorphisme de $\mathscr{G}$ dans E'_σ.*

Il nous suffit de montrer que $\mathscr{G}$ est muni de la topologie initiale relativement aux $f \in E$. Soit $\mu_0 \in \mathscr{G}$. Il existe $f \in E$ tel que $f(\mu_0)=1$. Comme système fondamental de voisinages de μ_0 dans $\mathscr{G}$, on peut prendre les ensembles $A_{U,\delta}$ formés des μ tels que $\pi(\mu) \in U$ et $|f(\mu)-1| < \delta$, où U est un voisinage assez petit de $\pi(\mu_0)$ et $1 > \delta > 0$ (0.17.

et 0.16.). Par la richesse de E, il existe $g \in E$ tel que $g(\mu_0)=1$ et $g=0$ hors de U. L'intersection des ensembles $f^{-1}(]1-\delta, 1+\delta[)$ et $g^{-1}(]1-\delta, 1+\delta[)$ est dans $A_{U,\delta}$, d'où le résultat.

3.4. Soit maintenant E un espace de Riesz localement convexe fonctionnel. Nous désignerons par $\mathscr{G}$ la réunion des génératrices extrémales de C^o, muni de la topologie induite par E'_σ. Il est clair que E est isomorphe à un sous-espace co-réticulé de l'espace de Riesz $\mathscr{H}(\mathscr{G})$ (cf. exemple 1.13.); en outre pour tout $\mu \in \mathscr{G}$ et tout cône ouvert V de $\mathscr{G}$ contenant μ, il existe $f \in C$ tel que $f(\mu) \neq 0$ et $f=0$ hors de V (proposition 2.9.).

3.5. PROPOSITION. $\mathbf{R}_+^*$ *opère continûment, librement et proprement dans* $\mathscr{G}$.

Les deux premières assertions sont évidentes. Soient I un ensemble d'indices, Φ un ultrafiltre (ou simplement un filtre) sur I et $i \mapsto (\alpha_i, \mu_i)$ une application de I dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathscr{G}$. Si $\mu = \lim \mu_i$ et $\nu = \lim \alpha_i \cdot \mu_i$ existent (dans $\mathscr{G}$), soit $f \in E$ une forme linéaire continue sur E'_σ telle que $f(\mu) \neq 0$. On a $f(\mu) = \lim f(\mu_i)$, donc $f(\mu_i) \neq 0$ pour i assez grand; d'autre part $f(\nu) = \lim \alpha_i \cdot f(\mu_i)$. Par suite $\alpha = \lim \alpha_i = f(\nu)/f(\mu)$ existe, d'où le résultat, car on a bien $\nu = \alpha \cdot \mu$.

3.6. DÉFINITION. Nous dirons que $\pi: \mathscr{G} \to \mathscr{X}$ est le *spectre* de l'espace de Riesz localement convexe fonctionnel E.

Par ce qui précède nous pouvons énoncer:

3.7. THÉORÈME. *Tout espace de Riesz localement convexe fonctionnel est isomorphe à un espace de sections associé à son spectre. Ce spectre est une fibration principale complètement régulière.*

3.8. *Remarque*. L'ouvert de $\mathscr{X}$, où $f \in \mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$ est >0, est appelé *l'ouvert de positivité* de f. La richesse de E implique que les ouverts de positivité des $f \in C$ forment une base de la topologie de $\mathscr{X}$.

3.9. Soit π une fibration principale complètement régulière et E un espace de sections associé à π. Désignons par $\mathscr{G}_0$ l'enemble $\mathscr{G} \cup \{0\}$ muni de la structure uniforme induite par E'_σ. $\mathscr{G}$, comme sous-espace dense de $\mathscr{G}_0$, est muni d'un point à l'infini (cf. définition 2.3.). Nous noterons par $\mathscr{H}^0(\mathscr{G})$ l'espace de Riesz des fonctions réelles continues positivement homogènes qui tendent vers zéro à l'infini sur $\mathscr{G}$. Pour que $h \in \mathscr{H}(\mathscr{G})$ appartienne à $\mathscr{H}^0(\mathscr{G})$, il faut et il suffit qu'il existe $f \in C$ tel que $|h| \leqslant f$. En notant par $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ l'image de $\mathscr{H}^0(\mathscr{G})$ dans $\mathscr{C}(\pi_{\mathbf{R}})$, on voit que E est cofinal dans $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$.

3.10. PROPOSITION. *Soit E un espace de sections associé à π, muni de sa topologie de l'ordre. Pour que π soit le spectre de E, il faut et il suffit que $\mathscr{G}_0$ soit complet.*

Il est clair que $\mathscr{G}$ s'identifie à une partie dense de l'espace total du spectre de E (propositions 3.3 et 2.9.). La proposition est alors évidente, puisque C^* est faiblement complet.

3.11. LEMME. *Tout $f \in \mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ est l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) des $g \in E$ tels que $g \leqslant f$ (resp. $g \geqslant f$).*

Supposons tout d'abord que $f \geqslant 0$. Soient $x \in \mathscr{X}$ et $a \in \pi_{\mathbf{R}}^{-1}(x)$ tels que $a < f(x)$. Il nous suffit de montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $g \leqslant f$ et $g(x) \geqslant a$. Soit $h \in E$ tel que $a \leqslant h(x) < f(x)$ et désignons par V l'ouvert de positivité de $f-h$. Par la richesse de E, il existe $h' \in E$ tel que $h'(x) = h(x)$ et $h' = 0$ hors de V. La section $g = \inf(h, h')$ répond à la question. Le lemme est alors évident; il suffit de constater qu'il existe $g \in E$ tel que $g \geqslant |f|$ et d'appliquer ce qui précède à $g+f$ et $g-f$.

3.12. DÉFINITION. Soit E un espace de sections associé à π. Nous dirons qu'une forme linéaire positive μ sur E à la *propriété de Daniell* (sur $\mathscr{X}$) si, pour toute famille filtrante croissante (f_i) de E d'enveloppe supérieure $f \in E$, on a $\mu(f) = \sup \mu(f_i)$.

Nous définirons plus loin (définition 5.1.) une classe d'espaces de Riesz localement convexes fonctionnels, contenant les espaces de Kakutani, telle que toutes les formes linéaires positives continues sur l'un de ces espaces aient la propriété de Daniell (théorème 5.3.).

3.13. THÉORÈME. *Soit E un espace de sections associé à π. Il existe une topologie d'espace de Riesz localement convexe sur $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ induisant celle de E telle que chaque forme linéaire positive continue sur E, ayant la propriété de Daniell, se prolonge de manière unique en une forme linéaire positive continue sur $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$.*

Si V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 convexes et solides de E, alors les enveloppes solides $\tilde{V}$ dans $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ ($\tilde{V}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ tels qu'il existe $g \in V$ et que l'on ait $|f| \leqslant |g|$) définissent une topologie d'espace de Riesz localement convexe sur $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ induisant celle de E. En effet l'ensemble des $\tilde{V}$ est un filtre de parties convexes solides et absorbantes, et on a $\tilde{V} \cap E = V$; en outre pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}}), f \neq 0$, il existe $g \in C$, $g \neq 0$, tel que $g \leqslant |f|$ (lemme 3.11.), donc si l'on choisit V tel que $g \notin V$, on a $f \notin \tilde{V}$, ce qui prouve que cette topologie est séparée.

Toute forme linéaire positive continue sur E se prolonge évidemment à $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ en une forme linéaire positive et on vérfie immédiatement qu'elle est continue. L'unicité découle de l'unicité du prolongement d'une forme linéaire positive ([1], proposition 1, chap. II, §3, n° 1, p. 63), car on a

$$\sup_{g \in E, g \leqslant f} \mu(g) = \inf_{g \in E, g \geqslant f} \mu(g),$$

pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$, par le lemme 3.11. et la propriété de Daniell.

3.14. *Remarque.* Nous munirons toujours $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ de la topologie d'espace de Riesz localement convexe définie au début de cette démonstration. C'est la plus fine des topologies d'espace de Riesz localement convexe qui induisent celle de E, car si W est un ensemble solide de $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$, on a $\overline{\widetilde{W \cap E}} \subset W$. En particulier si E est muni de sa topologie de l'ordre, alors $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ est aussi muni de sa topologie de l'ordre.

3.15. COROLLAIRE. *E et $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ ont même spectre.*
C'est évident puisque les ε_μ ont la propriété de Daniell.

3.16. COROLLAIRE. *Si E est un espace quasi de Kakutani (cf. définition* 5.1.*), alors E est dense dans $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$.*
Cela est immédiat, en tenant compte du théorème 5.3., car E et $\mathscr{C}^0(\pi_{\mathbf{R}})$ ont même dual.

3.17. Soient E un espace de Riesz localement convexe fonctionnel et π son spectre. On peut obtenir d'autres isomorphismes, moins maniables, mais avec des espaces de fonctions, en procédant de la manière suivante. Nous avons vu (3.4.) que E s'identifie à un sous-espace co-réticulé de $\mathscr{H}(\mathscr{G})$. Il nous suffit de considérer une partie de $\mathscr{G}$ n'ayant qu'un point par génératrice extrémale, i.e. une section de π, mais un choix arbitraire n'est évidemment pas intéressant. Celui d'une section continue semble dans ce cadre être le plus naturel, toutefois nous verrons par un exemple (3.23) que $\mathscr{X}$ peut être non-régulier, ce qui exclut l'existence de section continue globale.

3.18. PROPOSITION. *Il existe une section continue de π au-dessus d'un ouvert dense de $\mathscr{X}$.*
Cela découle immédiatement du lemme de Zorn.
Soient X une partie dense de $\mathscr{X}$ et s une section de π au-dessus de X. E s'identifie à un espace de fonctions sur $s(X)$ muni de la topologie induite par E'_σ.

3.19. PROPOSITION. *s est continue si et seulement si E, comme espace de fonctions sur $s(X)$, est riche.*
En effet s est continue si et seulement si $\pi^{-1}\pi(F)$ est fermé dans $\pi^{-1}(X)$ pour tout fermé F de $s(X)$, c'est-à-dire si et seulement si $\overline{\langle F \rangle} \cap s(X) = F$ pour tout fermé F de $s(X)$ (proposition 2.9.). Cette dernière assertion est évidemment équivalente à la richesse de l'espace de fonctions E.

3.20. *Remarques.* 1) Si s est continue, alors X et $s(X)$ sont homéomorphes, ce qui permet d'identifier E à un espace de fonctions riche sur X.
2) Réciproquement soit E un espace de fonctions riche sur X. Il est clair que X

plongé dans E'_σ définit une section continue du spectre de E au-dessus d'une partie dense (homéomorphe à X) de la base.

3.21. Soient E un espace de fonctions riche sur X, π son spectre, $y \in \mathscr{X} - X$, Φ un filtre sur X convergent vers y, $\mu \in \pi^{-1}(y)$ et $\varrho \in C$ tel que $\mu(\varrho)=1$. Désignons par s la section continue définie par X et par t la section continie associée à ϱ, définie au voisinage de y. On a $s(x)=\varrho(x)\cdot t(x)$ pour les $x \in X$ proches de y, donc $f(x)/\varrho(x) = f(t(x))$ pour tout $f \in E$. Comme $t(x)$ tend vers μ suivant Φ, on voit que $\mu(f) = \lim f(x)/\varrho(x)$. On peut donc énoncer:

3.22. THÉORÈME. *Tout espace de Riesz localement convexe fonctionnel est isomorphe à un espace de fonctions riche, défini sur une partie (ouverte) dense X de la base de son spectre. En outre il existe une famille de couples (Φ, ϱ), où Φ est un ultrafiltre non-trivial sur X et $\varrho \in C$, telle que* $\lim f(x)/\varrho(x)$ *existe pour tout $f \in E$. En désignant par $\mu(f)$ ce nombre, μ est une forme linéaire réticulante continue et toute forme linéaire réticulante continue non-évaluante est multiple d'un de ces μ.*

3.23. EXEMPLE. Soit X le sous-espace de $[0, 1]$ formé des points différents de $1/n$, n entier $\geqslant 1$. Notons ϱ_n la fonction continue sur $X: x \mapsto |x-1/n|^{-1}$. L'espace de Riesz E de toutes les fonctions réelles continues f sur X, telles que, pour tout n, $\mu_n(f) = \lim f(x)/\varrho_n(x)$ existe lorsque $x \to 1/n$, muni de la topologie de l'ordre, est un espace de fonctions sur X. Il est riche, car toute fonction continue bornée sur X appartient à E. Les μ_n sont évidemment des formes linéaires réticulantes non-évaluantes.

Nous allons voir que $\mathscr{X}$ s'identifie en tant qu'ensemble à $[0, 1]$. Soit μ une forme linéaire réticulante non-évaluante, définie par $\varrho \in C$ et Φ un ultrafiltre non-trivial sur X. Φ est une base d'ultrafiltre sur $[0, 1]$, donc est convergent vers un point de la forme $1/n$. Pour tout $f \in E$, on a

$$\mu(f) = \lim f(x)/\varrho(x) = \lim (f(x)/\varrho_n(x)) \cdot (\varrho_n(x)/\varrho(x)) = \mu_n(f) \cdot \mu(\varrho_n),$$

i.e. $\mu = \mu(\varrho_n) \cdot \mu_n$.

Pour tout $f \in E$, on a $\mu_n(f)=0$ pour tout n, sauf un nombre fini. En effet $\mu_n(f) \neq 0$ implique que f est non-bornée au voisiange de $1/n$, donc, si cela avait lieu pour une infinité de n, f ne pourrait être continue en 0. L'ouvert de positivité de f est donc un ouvert de $[0, 1]$ privé de tous les points $1/n$, sauf un nombre fini. Par exemple si f est la constante 1, il est égal à X. Il n'est alors pas difficile de voir que les ouverts de $\mathscr{X}$ sont les ensembles $U - A$, où U est un ouvert de $[0, 1]$ et A un ensemble quelconque de points $1/n$.

$\mathscr{X}$ n'est pas régulier, donc il n'existe pas de section continue globale du spectre de E.

3.24. EXEMPLE. Soit X un espace topologique complètement régulier (resp. avec point à l'infini). Le spectre de $\mathscr{C}(X)$ (resp. $\mathscr{C}^0(X)$), muni de sa topologie de l'ordre et lorsque X (resp. X_0) est replet, est trivial de base X. Il en est de même pour $\mathscr{K}(X)$, lorsque X est localement compact.

3.25. THÉORÈME. *Soit E un espace de Riesz régulièrement ordonné, muni de sa topologie de l'ordre. Pour que E possède une unité, il faut et il suffit que E soit fonctionnel et que la base de son spectre soit compacte. Si tel est le cas, E est isomorphe à un espace de fonctions riche sur la base.*

Si E possède une unité, alors E est un espace de Kakutani normé, donc fonctionnel. La section continue du spectre de E, associée à cette unité, est globale. Comme l'image de cette section est fermée et dans la boule unité duale, on en déduit que la base du spectre est compacte.

Réciproquement en considérant E comme un espace de sections, des arguments de compacité montre qu'il existe une unité.

§4. Théorème de Stone-Weierstrass

Démontrons tout d'abord un résultat dû à G. Jameson ([10], théorème 7). On a tout d'abord le lemme classique suivant:

4.1. LEMME. *Soient X un espace topologique compact et A un ensemble co-réticulé (dans $\mathbf{R}^X$) de fonctions réelles continues sur X. Si, pour tout $x, y \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x)<1$ et $f(y)>-1$, alors il existe $g \in A$ tel que $|g(x)|<1$ pour tout $x \in X$.*

4.2. THÉORÈME. *Soient A une partie fermée convexe co-réticulée d'un espace de Kakutani et $f \notin A$. Il existe deux formes linéaires réticulantes continues μ, ν telles que*

$$\inf(\mu-\nu)(A) > (\mu-\nu)(f).$$

On peut supposer que $f=0$. Soit U un voisinage de 0 fermé solide et co-réticulé disjoint de A. Désignons par X l'adhérence de l'ensemble des points extrémaux du chapeau $K=U^\circ \cap C^\circ$. X est un ensemble faiblement compact formé de formes linéaires réticulantes continues. Puisque $K^o=X^o=U$, pour tout $g \in A$, il existe $\mu \in X$ tel que $|\mu(g)|>1$. Par le lemme, il existe μ, $\nu \in X$ tels que pour tout $g \in A$ on ait $\mu(g) \geqslant 1$ ou $\nu(g) \leqslant -1$. L'application $g \mapsto (\mu(g), -\nu(g))$ de A dans $\mathbf{R}^2$ est affine, donc son image B est convexe et 0 n'appartient pas à l'adhérence de $B+\mathbf{R}_+^2$. Il existe donc par Hahn-Banach une forme linéaire χ sur $\mathbf{R}^2$ telle que $0<\inf \chi(B)$. Si l'on écrit $\chi(a, b) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, on voit que α et β sont $\geqslant 0$ et il vient $\inf(\alpha \cdot \mu - \beta \cdot \nu)(A) > 0$.

De ce théorème on déduit une version abstraite du théorème de Stone-Weierstrass.

4.3. THÉORÈME. *Soit F un sous-espace co-réticulé d'un espace de Kakutani E. Pour que F soit dense dans E, il faut et il suffit que deux formes linéaires réticulantes continues égales sur F soient égales.*

4.4. COROLLAIRE. *Soit E un espace de fonctions. On suppose que E est un espace de Kakutani et que toute forme linéaire réticulante continue est évaluante. Pour qu'un sous-espace vectoriel co-réticulé F de E soit dense, il faut et il suffit que F n'ait pas plus de liaisons que E.*

Grâce aux critères 2.12. et suivants, on retrouve tous les théorèmes de Stone-Weierstrass faisant intervenir des conditions de séparation ponctuelle, en particulier celui de S. Kakutani ([11], théorème 3).

4.5. PROPOSITION. *Soient E un espace de fonctions sur X et F un sous-espace vectoriel. On suppose que X contient au moins deux points. Pour que F n'ait que des liaisons triviales, il faut et il suffit que, pour tout* $x, y \in X$, $x \neq y$, *il existe* $f \in F$ *tel que* $f(x) \neq 0$ *et* $f(y) = 0$.

La démonstration est du même type que celle du théorème 4.8. qui suit.

4.6. *Application.* Soit X un espace topologique localement compact. L'espace $\mathscr{C}^b(X)$, muni de la topologie stricte (cf. [4]), définie par les semi-normes

$$f \mapsto \sup_{x \in X} |\theta(x) \cdot f(x)| \quad \text{pour} \quad \theta \in \mathscr{C}^0(X),$$

est évidemment un espace de Kakutani. Son dual étant l'ensemble des mesures bornées sur X, cet espace est supportable, donc toutes les formes linéaires réticulantes continues sont évaluantes (théorème 2.20.). Le théorème de Stone-Weierstrass que l'on obtient ici généralise le théorème 3 de R. C. Buck et répond à la question qu'il pose p. 101.

4.7. *Application.* Soit X un espace localement compact dénombrable à l'infini ou tel que la réunion de toute suite de compacts soit relativement compacte. L'espace $\mathscr{K}(X)$, muni de sa topologie limite inductive habituelle, est un espace de Kakutani (exemple 1.19.). Il est supportable, donc toutes les formes linéaires réticulantes (continues) sont évaluantes (théorème 2.20.). Ceci fournit un nouveau théorème de Stone-Weierstrass.

4.8. THÉORÈME. *Soit E un espace de sections associé à son spectre. On suppose que E est un espace de Kakutani et que* $\mathscr{X}$ *contient au moins deux points. Pour qu'un sous-espace vectoriel co-réticulé F de E soit dense, il faut et il suffit que, pour tout* $x, y \in \mathscr{X}$, $x \neq y$, *il existe* $f \in F$ *tel que* $f(x) \neq 0$ *et* $f(y) = 0$.

Puisque toute forme linéaire réticulante continue est évaluante, on vérifie immédiatement que la condition est suffisante par le théorème 4.3. Réciproquement choisissons $g \in F$ tel que $g(x) \neq 0$, $\mu \in \pi^{-1}(x)$ tel que $\varepsilon_\mu(g)=1$, $\nu \in \pi^{-1}(y)$ et $h \in F$ tel que $\varepsilon_\mu(h) \neq \varepsilon_\nu(h)$. Si $\varepsilon_\nu(h)=0$, h répond à la question. Si $\varepsilon_\nu(h) \neq 0$, posons $f=g-(\varepsilon_\nu(g)/\varepsilon_\nu(g)) \cdot h_1$ on a $\varepsilon_\nu(f)=0$ et $\varepsilon_\mu(f)=1-\varepsilon_\mu(h)/\varepsilon_\nu(h) \neq 0$.

§5. Théorème de Dini et caractérisation des idéaux fermés

5.1. DÉFINITION. Un espace de Riesz localement convexe E sera dit *quasi de Kakutani* si la bande de E' engendrée par la réunion des chapeaux de C^o est égale à E'.

Cela signifie que pour tout $\mu \in C^o$, il existe une famille (μ_i), chaque μ_i appartenant à un chapeau de C^o, telle que $\mu = \sup \mu_i$. Nous dirons aussi que C^o est *presque bien coiffé.*

Il est clair qu'un tel espace est fonctionnel.

5.2. EXEMPLES. 1) Tout espace de Kakutani est évidemment quasi de Kakutani.

2) Si X est un espace topologique localement compact, alors $\mathscr{K}(X)$ est quasi de Kakutani.

Puisque, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur X, on a $\mu = \sup \theta \cdot \mu$, θ parcourant l'ensemble filtrant croissant des fonctions de $\mathscr{K}(X)$ telles que $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, il suffit de montrer que $\theta \cdot \mu$ appartient à un chapeau, i.e. au polaire d'un voisinage de 0 solide et co-réticulé. Il suffit de prendre celui des $f \in \mathscr{K}(X)$ tels que $|f| \leqslant 1/\mu(\theta)$.

Voici tout d'abord un théorème de Dini.

5.3. THÉORÈME. *Soit E un espace de sections associé à son spectre. On suppose que E est un espace quasi de Kakutani. Si* (f_i) *est une famille filtrante croissante de sections de E d'enveloppe supérieure* $f \in E$, *alors* (f_i) *converge vers* f *(pour la topologie de E).*

Par le théorème 4.3., p. 223 de [15], il nous suffit de montrer que $\mu(f_i)$ tend vers $\mu(f)$ quel que soit $\mu \in C^o$, i.e. que chaque $\mu \in C^o$ a la propriété de Daniell. Il est clair qu'il suffit de le démontrer pour un μ appartenant à un chapeau K de C^o. Désignons par X l'adhérence de l'ensemble des points extrémaux de K, qui est un ensemble faiblement compact de formes linéaires réticulantes continues. Les fonctions continues sur X: $\nu \mapsto \nu(f_i)$ forment une famille filtrante croissante d'enveloppe supérieure $\nu \mapsto \nu(f)$. On conclut par le théorème de Dini classique et le théorème de Krein-Milman.

5.4. PROPOSITION. *Soit E un espace quasi de Kakutani. Pour tout idéal I de E, le cône* $I^o \cap C^o$ *est l'enveloppe fermée convexe de la réunion de ses génératrices extrémales.*

Remarquons tout d'abord que si I est fermé dans E, alors I est fermé pour $\mathscr{T}_k$ (cf. 1.9.). I^o s'identifie au dual de E/I et la topologie $\mathscr{T}_k$ passe au quotient en une topologie d'espace de Kakutani séparée; on a donc le résultat par le théorème 1.12.

5.5. THÉORÈME. *Soit E un espace de sections associé à son spectre. On suppose que E est un espace quasi de Kakutani. Il y a correspondance biunivoque entre les idéaux fermés I de E et les fermés T de $\mathscr{X}$ par $I \mapsto T_I$ et $T \mapsto I_T$, où T_I est l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ tels que $f(x)=0$ pour tout $f \in I$ et I_T est l'ensemble des $f \in E$ tels que $f(x)=0$ pour tout $x \in T$.*

$I^o \cap C^o$ est un tube (proposition 1.2.), donc $I=(I^o \cap C^o)^a$ (lemme 1.5.). T_I est fermé, car égal à l'image par π de la réunion des génératrices extrémales de $I^o \cap C^o$. Par la proposition précédente, on voit que I est l'ensemble des $f \in E$ qui s'annulent sur T_I.

Réciproquement si T est un fermé de $\mathscr{X}$, I_T est un idéal fermé de E et, puisque E est riche, si $x \in \mathscr{X}$ est tel que $f(x)=0$ pour tout $f \in I_T$, on a nécessairement $x \in T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1 et 2, 2ème édition.
[2] ——, *Intégration*, chap. 1 à 4, 2ème édition.
[3] ——, *Variétés différentielles et analytiques*, fasc. R
[4] R. C. Buck, *Bounded continuous functions on a locally compact space*, Michigan Math. J. *5* (1958), 95–104.
[5] G. Choquet, *Limites projectives d'ensembles convexes et éléments extrémaux*, C. R. Acad. Sci. Paris *250* (1960), 2495–2497.
[6] ——, *Ensembles et cônes convexes faiblement complets*, C.R. Acad. Sci. Paris *254* (1962), 1908–1910 et 2123–2125.
[7] ——, *Etude des mesures coniques. Cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales*, C.R. Acad. Sci. Paris *255* (1962), 445–447.
[8] L. Gillman and W. Jerison, *Rings of continuous functions* (Van Nostrand, 1960).
[9] E. Hewitt, *Linear functionals on spaces of continuous functions*, Fund. Math. *37* (1950), 161–189.
[10] G. Jameson, *Topological M-spaces*, Math. Z. 103 (1968), 139–150.
[11] S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. of Math. *42* (1941), 994–1024.
[12] R. G. Kuller, *Locally convex topological vector lattices and their representations*, Michigan Math. J. *5* (1958), 83–90.
[13] A. Peressini, *Ordered topological vector spaces* (Harper and Row, 1957).
[14] M. Rogalski, *Espaces de Banach réticulés et problème de Dirichlet*, Publ. math. d'Orsay, 1968–69.
[15] H. Schaefer, Topological vector spaces, (Macmillan, 1966).

Reçu mars 1970 / 28 janvier 1971

Les résultats du dernier paragraphe ont été considérablement améliorés dans:
C. Portenier, Caractérisation de certains espaces de Riesz, Séminaire Choquet, 10e année, 1970/71 (à paraître).