Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1971)

Artikel: Cobordismes de plongments et produits homotopiques
Autor: Burlet, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35522

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Cobordismes de plongements et produits homotopiques

O. BURLET

Introduction

Soient m et n des entiers positifs. On se propose d'étudier les plongements de variétés closes de dimension m dans $\mathbf{R}^{n+m}$. Nous allons considérer indépendamment des variétés orientées et non orientées. Si V est orientée, $-V$ désignera V munie de l'orientation opposée, et si V est non orientée $-V$ est égale à V.

Deux plongements (V_i, f_i) $(i=0, 1)$ seront équivalents s'il existe une variété W dont le bord ∂W est la réunion disjointe $V_0+(-V_1)$ de V_0 et $-V_1$, et un plongement f de W dans $\mathbf{R}^{n+m}\times I$ qui, restreint à V_i, donne le plongement f_i suivi de l'inclusion $\mathbf{R}^{n+m}=\mathbf{R}^{n+m}\times(i)\subset\mathbf{R}^{n}+{}^{m}\times I$ $(i=0, 1)$. On dit que (W, f) est un cobordisme de (V_0, f_0) vers (V_1, f_1).

Pour cette relation d'équivalence, la classification des plongements se ramène à un problème d'homotopie. Les classes de cobordismes de plongements de variétés de dimension m dans $\mathbf{R}^{n+m}$ forment un groupe isomorphe à $\pi_{n+m}(M_n)$, avec $M_n = MSO_n$ ou MO_n suivant que l'on considère des variétés orientées ou non (R. Thom [9]).

A l'aide du théorème des immersions de Smale-Hirsch et les propriétés de stabilité des variétés de Stiefel, Wells donne une interprétation géométrique des groupes d'homotopie stables de M_n. Les classes de cobordismes d'immersions de variétés de dimension m dans $\mathbf{R}^{n+m}$ forment un groupe isomorphe à $\pi^{st}_{n+m}(M_n)$. (Wells [10].) Par suspension de $\pi_{n+m}(M_n)$ dans le spectre formé par les espaces M_n, $n=1, 2, \ldots$, on trouve le groupe $\pi_m(M)$ qui s'interprète comme le groupe des classes de cobordismes de variétés closes de dimension m. Les homomorphismes naturels de suspension

$$\sigma: \pi_{n+m}(M_n) \to \pi^{st}_{n+m}(M_n)$$

$$\Psi: \pi^{st}_{n+m}(M_n) \to \pi_m(M)$$

s'interprètent géométriquement. σ associe à la classe de cobordisme d'un plongement ce plongement considéré comme immersion et Ψ associe à la classe de cobordisme d'une immersion (V', f') la classe de cobordisme de V'. Nous voulons calculer ces groupes et homomorphismes tensorisés par le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

Nous adopterons les notations $\pi_{n+m}(M_n, \mathbf{Q})$ pour $\pi_{n+m}(M_n)\otimes\mathbf{Q}$ et $\sigma_{\mathbf{Q}}$ pour $\sigma\otimes\mathbf{Q}$.

$\rightarrowtail$ désigne un monomorphisme et $\twoheadrightarrow$ un épimorphisme. Une classe de cohomologie de M_n à coefficients rationnels sera considérée par composition avec l'homomorphisme d'Hurewicz comme forme linéaire sur $\pi_*(M_n, \mathbf{Q})$. Remarquons que $\pi^{st}_*(M_n, \mathbf{Q})$ s'identifie à $\tilde{H}_*(M_n, \mathbf{Q})$ en vertu du théorème de Serre sur les groupes d'homotopie stables

des sphères et le théorème de comparaison de théories d'homologie. Avec cette identification $\sigma_{\mathbf{Q}}$ devient l'homomorphisme d'Hurewicz $h_{\mathbf{Q}}$. Les théorèmes principaux sont les suivants:

THÉORÈME 1. *Pour $n=2l+1$, $l\geqslant 1$, MO_n a le type d'homotopie rationnel faible d'un point et MSO_n celui du bouquet de sphères standards S_α de dimensions $n+4\,|\alpha|$ avec $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$, a_i entiers positifs, et $|\alpha|=\sum_{i=1}^{l} i\cdot\alpha_i$.*

Un théorème de Hilton donne alors la description de $\pi_*(MSO_n, \mathbf{Q})$ et de l'homomorphisme $h_{\mathbf{Q}}$ [4].

L'homomorphisme $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est injectif et l'annulateur de l'image est engendré par les monômes dans les classes de Pontrjagin divisibles par une classe p_i avec $i>l$.

On se réfère à l'identification de module gradué $(\pi_*(MSO, \mathbf{Q}))^*\approx \mathbf{Q}\,[p_1p_2\ldots p_i\ldots]$, p_i étant de degré $4i$ (R. Thom [9]).

THÉORÈME 2. *Pour $n=2l+2$, $l\geqslant 0$, $\pi_*(MSO(n), \mathbf{Q})$ est la somme directe de l'espace vectoriel $\{\gamma_0\}$ engendré par la classe d'homotopie γ_0 de l'inclusion naturelle $S^n\subset MSO(n)$ et l'algèbre de Lie libre engendrée par des éléments γ_α duaux aux classes de cohomologie Um_α, $\alpha\neq 0$. On considère ici le crochet défini par le produit de Whitehead. $m_\alpha=p_1^{\alpha_1}\ldots p_l^{\alpha_l}$, les α_i sont des entiers positifs, p_i désigne la i-ème classe de Pontrjagin et U la classe de Thom du fibré n-universel. $\sigma_{\mathbf{Q}}$ restreint à l'espace vectoriel engendré par les γ_0 est injectif et tous les produits de Whitehead sont envoyés sur zéro.*

L'annulateur du noyau de $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les formes $U^{2r}m_\alpha$, $r\geqslant 1$ et celui de l'image par les monômes dans les classes de Pontrjagin divisibles par un p_i avec $i>l+1$.

Pour $n=2l+2$, et $\pi_*(MO_n, \mathbf{Q})$ est la somme directe de l'espace vectoriel $\{\gamma_0\}$ engendré par un élément dual à U_T^2 et l'algèbre de Lie libre engendrée par des éléments γ_α duaux aux classes de cohomologie $U_T^2\, m_\alpha$, $\alpha\neq 0$. U_T désigne la classe de Thom du fibré universel à coefficients dans les nombres rationnels tordus par le faisceau des orientations. $\sigma_{\mathbf{Q}}$ est formellement le même homomorphisme que dans le cas orienté.

Pour n pair $\pi_*(M_n; \mathbf{Q})$ est comme algèbre de Lie graduée une extension non triviale de $\mathbf{Q}$ par une algèbre de Lie libre.

Conséquences:

a. En général il y a une multitude de plongements non cobordants à 0, qui sont cobordants à 0 si on les considère comme immersions.
   De plus ces plongements sont décrits explicitement par des enlacements.
b. Dans le cas orienté, pour qu'un multiple d'une immersion soit cobordant à un plongement il suffit que la classe d'Euler du fibre normal à l'immersion soit 0.
c. Il résulte des considérations sur l'homotopie rationnelle d'espaces de Thom orientés que $\pi_*(SMSO(n-1), Q)\to\pi_*(MSO(n), Q)$ est surjectif. Cela signifie

qu'un multiple convenable de tout plongement est cobordant à un plongement avec champ de vecteur normal non nul.

Dans un premier paragraphe, nous allons étudier l'homotopie rationnelle d'espaces simplement connexes. L'homomorphisme d'Hurewicz va jouer un rôle prépondérant. En effet, de sa surjectivité on pourra déduire immédiatement que l'espace en question a même type d'homotopie rationnel faible qu'un bouquet de sphères. Les démonstrations s'appuient sur le théorème de Cartan-Serre qui donne l'homotopie rationnelle d'un H-espace [6], les théorèmes de structure d'algèbres de Hopf connexes cocommutatives [6] et la suite spectrale de la fibration des chemins avec origine fixe sur un espace simplement connexe. Le paragraphe suivant sera consacré au cas particulier des espaces de Thom. Pour terminer on traitera le problème des relations entre produits de Whitehead et on donnera une interprétation géométrique des résultats.

Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur A. Haefliger qui m'a suggéré ce travail, ainsi qu'au professeur J. C. Moore pour ses bons conseils.

Mes remerciements vont aussi au professeur F. P. Peterson.

I. Homotopie rationnelle

Pour un espace simplement connexe X l'espace des lacets ΩX est un H-groupe connexe. L'application diagonale induit un morphisme $\Delta: H_*(\Omega X, K) \to H_*(\Omega X, K) \otimes H_*(\Omega X, K)$ et la multiplication un morphisme $\varphi: H_*(\Omega X, K) \otimes H_*(\Omega X, K) \to H_*(\Omega X, K)$.

La projection de ΩX sur le lacet constant induit une augmentation $\varepsilon: H_*(\Omega X, K) \to K$ et l'unité $\eta: K \to H_*(\Omega X, K)$ pour φ est définie par l'inclusion du lacet constant dans ΩX.

$H_*(\Omega X, K)$ muni de φ, Δ, ε, η est une algèbre de Hopf connexe cocommutative (cf. Milnor-Moore [6]).

Si A est une algèbre de Hopf on notera IA le noyau de l'augmentation. Dans l'exemple précédent IA est l'homologie réduite de ΩX.

A cause de la décomposition $A = K \oplus IA$, la comultiplication fournit une application naturelle $IA \to IA \otimes IA$. Le noyau PA de cette application s'appelle l'espace des éléments primitifs.

Autrement dit un élément x est primitif s'il est de degré positif et si $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ où Δ est la comultiplication.

De façon duale la multiplication donne par restriction une application $IA \otimes IA \to IA$ dont le conoyau QA s'appelle l'espace des éléments indécomposables. Si A est connexe cocommutative l'application composée $PA \subset IA \to QA$ est surjective.

THÉORÈME 1. *Soit X un espace simplement connexe. Alors la suspension homo-*

logique $s_{\mathbf{Q}}:\tilde{H}_*(\Omega X, \mathbf{Q}) \to \tilde{H}_{*+1}(X, \mathbf{Q})$ *se factorise par la projection canonique* $\tilde{H}_*(\Omega X, \mathbf{Q}) \to QH_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ *sur les éléments indécomposables.*

Démonstration du Théorème 1

Soit X un espace simplement connexe et $EX \to X$ la fibration des chemins d'origine fixe avec fibre l'espace des lacets ΩX. Nous pouvons considérer ΩX comme fibré sur un point.

Soit $E' = \{E'^r_{p,q}\}$ la suite spectrale de ce fibré trivial et soit $E = \{E^r_{p,q}\}$ la suite spectrale de la fibration $EX \to X$.

L'action naturelle de ΩX sur EX induit alors pour tout $r \geqslant 2$ un homomorphisme $\vee : E'^r_{s',t'} \otimes E^r_{s,t} \to E^r_{s'+s,t'+t}$ avec $d^r(x \vee y) = (-1)^{s'+t'} x \vee d^r y$ qui donne le produit de Pontrjagin habituel par restriction à la fibre c'est-à-dire de $E'^2_{0,t'} \otimes E^2_{0,t}$ dans $E^2_{0,t'+t}$.

Pour démontrer le théorème il suffit de voir que la supension homologique s'annule sur les produits de Pontrjagin de classes de dimensions positives.

Ecrivons la décomposition de l'homomorphisme de suspension pour $q \geqslant 1$ en tenant compte du fait que $E^\infty_{s,t} = 0$, $(s, t) \neq (0, 0)$. $H_{q+1}(X, \mathbf{Q}) \approx E^2_{q+1,0} \supset \cdots \supset E^{q+1}_{q+1,0} \xrightarrow[\approx]{d^{q+1}} E^{q+1}_{0,q} \twoheadleftarrow \cdots \twoheadleftarrow E^2_{0,q} \approx H_q(\Omega X, \mathbf{Q})$ Soit $(x \vee y) \in E^2_{0,q'}$, $x \in E^2_{0,r'}$, $y \in E^2_{0,q-r}$ $0 < r < q$ $y \in E^2_{0,q-r}$ est un bord dans $E^j_{0,q-r}$ pour $j \leqslant q-r+1$. Il existe donc $w \in E^j_{j,q-r-j+1}$ avec $d^j(x \vee w) = +(x \vee y)$.

Comme $j \leqslant q$ cela implique que $(x \vee y)$ est envoyé sur zéro dans $E^{q+1}_{0,q}$ c'est-à-dire $(x \vee y)$ est dans le noyau de $s^1_{\mathbf{Q}}$.

PROPOSITION 1. *Si* $s_{\mathbf{Q}}$ *est surjectif, X a même type d'homotopie rationnel faible qu'un bouquet de sphères.*

L'algèbre de Hopf $H_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ étant connexe cocommutative, l'application naturelle $PH_*(\Omega X, \mathbf{Q}) \to QH_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ est surjective. En vertu du théorème 1, il en est de même pour le composé de l'inclusion de $PH_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ dans $\tilde{H}_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ suivi de la suspension.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_*(\Omega X, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{s_{\mathbf{Q}}} & \tilde{H}_{*+1}(X, \mathbf{Q}) \\ \uparrow & & \uparrow h_{\mathbf{Q}} \\ PH_*(\Omega X, \mathbf{Q}) \approx \pi_*(\Omega X, \mathbf{Q}) & \approx & \pi_{*+1}(X, \mathbf{Q}) \end{array}$$

La commutativité de ce diagramme nous assure la surjectivité de $h_{\mathbf{Q}}$. L'isomorphisme $PH_*(\Omega X, \mathbf{Q}) \approx \pi_*(\Omega X, \mathbf{Q})$ est garanti par le théorème de Cartan-Serre [6].

Choisissons une base (x_α) de $\tilde{H}_*(X, \mathbf{Q})$. Pour chaque x_α on peut trouver une sphère orientée S_α et une application $S_\alpha \to X$ qui envoie la classe fondamentale de S_α sur x_α. Le wedge de ces applications fournit une application de $\vee S_\alpha \to X$ qui induit un isomorphisme de $H_*(\vee S_\alpha, \mathbf{Q})$ sur $H_*(X, \mathbf{Q})$. Par le théorème de Whitehead généralisé

l'application dont il est question induit aussi un isomorphisme de $\pi_*(\vee S_\alpha, \mathbf{Q})$ sur $\pi_*(X, \mathbf{Q})$.

En particulier toute suspension a le type d'homotopie rationnel faible d'un bouquet de sphères. Soit $X = SY$, on a une inclusion naturelle $Y \to \Omega SY$ et le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_*(Y) \arrow[r] \arrow[dr, "\approx"'] & \tilde{H}_*(\Omega SY) \arrow[d, "s"] \\ & \tilde{H}_{*+1}(SY) \end{tikzcd}$$

L'isomorphisme est donné par la suite exacte réduite du cône sur Y modulo la base.

Désignons par D^n le disque standard dans $\mathbf{R}^n$ et par $S^{n-1} = \partial D^n$ son bord.

Pour des entiers positifs n, p, q quelconques nous allons choisir une fois pour toutes des identifications de D^n/S^{n-1} avec S^n et de S^{p+q-1} avec $\partial(D^p \times D^q)$.

Comme S^n est alors pointé de manière naturelle on modifiera éventuellement la seconde identification de sorte que par recollement des applications canoniques

$$D^p \times S^{q-1} \to D^p \to S^p \quad \text{et} \quad S^{p-1} \times D^q \to D^q \to S^q$$

on obtienne une application pointée bien déterminée

$$S^{p+q-1} \approx D^p \times S^{q-1} \bigcup_{S^{q-1} \times S^{q-1}} S^{p-1} \times D^q \to S^p \vee S^q$$

$S^p \vee S^q$ est le bouquet ou wedge des sphères S^p et S^q c'est-à-dire leur réunion disjointe dans laquelle on a identifié les points bases.

DÉFINITION. *Si $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ et $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ on appelle produit de Whitehead de α et β la classe d'homotopie $[\alpha, \beta]$ de l'application composée $S^{p+q-1} \to S^p \vee S^q \xrightarrow{\bar{\alpha} \vee \bar{\beta}} X$ où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont des représentants de α et β* [3].

II. Homotopie rationnelle des espaces de Thom

Rappelons que l'anneau de cohomologie rationnelle de $BSO(n)$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbf{Q}[p_1 \cdots p_{[(n-1)/2]} \chi_n]$ dans les classes de Pontrjagin et d'Euler $p_1 \cdots p_{[(n-1)/2]}$ et χ_n du fibré n-universel orienté avec la relation $\chi_n = 0$ pour n impair. U désignera la classe de Thom de ce fibre. Comme d'habitude $[(n-1)/2]$ est la partie entière de $(n-1)/2$ [9].

L'isomorphisme de Thom dit que $\tilde{H}^*(MSO(n), \mathbf{Q})$ est engendré librement par U comme module sur l'anneau de cohomologie rationnelle de $BSO(n)$. En outre la structure multiplicative de $H^*(MSO(n, \mathbf{Q})$ est donnée par $Ua \cup Ua' = U(\chi \cup a \cup a')$ où χ_n et a, a' sont des classes de cohomologie de $BSO(n)$.

PROPOSITION (1.2). *Pour $n=2l+1$ la suspension homologique $s_{\mathbf{Q}}:\tilde{H}_*(\Omega MSO\times\times(n),\mathbf{Q})\to\tilde{H}_{*+1}(MSO(n),\mathbf{Q})$ est surjective. En effet l'application de suspension $\varphi:SMSO(n-1)\to MSO(n)$ induit un monomorphisme $\varphi^*:H^*(MSO(n),\mathbf{Q})\to H^*\times\times(SMSO(n-1),\mathbf{Q})$ puisque les éléments de base $U_{p_1}^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_l^{\alpha_l}$ sont envoyés sur les éléments $U_{p_1}^{\alpha_1}\ldots p_{l-1}^{\alpha_{l-1}}\chi_{2l}^{2\alpha_l}$. Par passage au dual φ induit un épimorphisme en homologie rationnelle.*

Considérons alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}\tilde{H}_*(\Omega SMSO(n-1),\mathbf{Q}) & \xrightarrow{s_{\mathbf{Q}}} & \tilde{H}_{*+1}(SMSO(n-1),\mathbf{Q})\\ \downarrow{\scriptstyle(\Omega\varphi)_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*}\\ \tilde{H}_*(\Omega MSO(n),\mathbf{Q}) & \xrightarrow[s_{\mathbf{Q}}]{} & \tilde{H}_{*+1}(MSO(n),\mathbf{Q})\end{array}$$

On voit tout de suite que $s_{\mathbf{Q}}$ est surjectif.

En vertu de la proposition (1.1), $MSO(n)$ a donc même type d'homotopie rationnel faible qu'un bouquet de sphères. Chaque sphère de ce bouquet représente une classe d'homologie γ_α duale à Um_α avec $m_\alpha=p_1^{\alpha_1}\ldots p_l^{\alpha_l}$ les α_i étant des entiers positifs.

La suite exacte de Gysin du revêtement à deux feuillets $BSO(n)\to BO(n)$ et l'isomorphisme de Thom montrent que $\tilde{H}_*(MO(n),\mathbf{Q})=0$ pour $n=2l+1$. Pour $n=2l+2$, $H^*(MO(n),\mathbf{Q})$ est l'algèbre libre engendrée par les classes $U_T^2m_\alpha$ avec les relations $U_T^2m_{\alpha_1}\otimes U_T^2m_{\alpha_2}=U_T^2\otimes U_T^2m_{(\alpha_1+\alpha_2)}$ où U_T désigne la classe de Thom du fibré universel non orienté avec coefficients dans les nombres rationnels tordus par le faisceau des orientations.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il nous reste à étudier l'homomorphisme $\Psi_{\mathbf{Q}}$ dans le cas n impair. En effet le théorème de Whitehead généralisé nous assure que $MO(2l+1)$ a même type d'homotopie rationnel faible qu'un point.

Par définition $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est le composé des applications suivantes:

$$\pi_*^{st}(MSO(n),\mathbf{Q})\approx\tilde{H}_*(MSO(n),\mathbf{Q})\approx\tilde{H}_{*+r}(S^rMSO(n),\mathbf{Q})\to\tilde{H}_{*+r}(MSO(n+\mathrm{r}),\mathbf{Q})$$

ce dernier groupe étant isomorphe à $\pi_{*-n}(MSO,\mathbf{Q})$ pour r assez grand.

La naturalité de l'isomorphisme de Thom montre l'équivalence entre Ψ_Q et l'homomorphisme. $H_{*-n}(BSO(n),\mathbf{Q})\to H_{*-n}(BSO(n+r),\mathbf{Q})$ induit par la suspension $BSO(n)\to BSO(n+r)$.

On sait que cette suspension donne un épimorphisme en cohomologie rationnelle pour n impair. Il s'en suit par dualité que $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est injectif. L'image de $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est déterminée de manière analogue.

Le théorème de Hilton sur l'homotopie d'un bouquet de sphères [4] donne alors les groupes de cobordismes de plongements en codimension impaire tensorisés par les nombres rationnels. On verra une méthode pour construire une base.

La suspension $BSO(2l+2)\to BSO(2l'+2)$ induit en cohomologie rationnelle l'homomorphisme $\mathbf{Q}[p_1\ldots p_{l'}\chi_{2l'+2}]\to\mathbf{Q}[p_1\ldots p_l\chi_{2l+2}]$ qui envoie p_i sur p_i pour $i\leqslant l$,

p_{l+1} sur χ^2_{2l+2} et les variables d'indice plus grand que $l+1$ sur zéro. Par dualité et identification canonique on en déduit que l'annulateur de l'image de $\Psi_{\mathbf{Q}}$ est engendré par les monômes dans les classes de Pontrjagin divisibles par un p_i avec $i>l+1$ et l'annulateur du noyau est engendré par les classes $U^{2t}m_\alpha$, t entier >0.

Pour calculer l'homotopie rationnelle des espaces de Thom $MSO(2l+2)$ et $MO(2l+2)$ nous allons utiliser les fibrations principales associées à U et U^2_T. Les conclusions du théorème 2 résultant alors essentiellement de la proposition 1.

On peut faire correspondre à la classe entière $U \in H^{2l+2}(MSO(2l+2), Q)$ une application f_U, définie à homotopie près, de $MSO(2l+2)$ dans l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, 2l+2)$.

Soit $\pi: E_U \to MSO(2l+2)$ le fibré induit par f_U de la fibration des chemins avec origine fixe dans $K(\mathbf{Z}, 2l+2)$. $E_U \xrightarrow{\pi} MSO(2l+2)$ s'appelle la fibration principale associée à U. La fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, 2l+1)$ donc une sphère d'homologie rationnelle.

La suite exacte de Gysin se scinde en suites exactes courtes $0 \to H^{i-2l-1}(MSO \times \times(2l+2), Q) \xrightarrow{\cup U} H^{i+1}(MSO(2l+2), Q) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+1}(E_U, Q) \to 0$ de sorte que $\tilde{H}^*(E_U, Q)$ admet pour base les classes Um_α, $\alpha \neq 0$ (il faudrait écrire $\pi^*(Um_\alpha)$), et le produit de deux classes quelconques est zéro.

L'application $\varphi: SMSO(2l+1) \to MSO(2l+2)$ induit un homomorphisme en cohomologie rationnelle qui envoie Um_α sur $U'm_\alpha$, U' étant la suspension de la classe de Thom dans la cohomologie de $MSO(2l+1)$. D'autre part $SMSO(2l+1)$ est rationnellement un bouquet de sphères c'est-à-dire pour tout α il existe une application $\gamma_\alpha: S_\alpha \to SMSO(2l+1)$ envoyant $U'm_\alpha$ sur un générateur de $\tilde{H}^*(S_\alpha)$ et telle que $\vee_\alpha \gamma_\alpha: \vee_\alpha S_\alpha \to SMSO(2l+1)$ induise un isomorphisme en cohomologie rationnelle. On a $[\varphi \cdot (\vee_{\alpha \neq 0} \gamma_\alpha)]^*(U) = 0$ de sorte que par construction on peut relever $\varphi \cdot (\vee_{\alpha \neq 0} \gamma_\alpha)$ dans E_U.

$$\begin{tikzcd}
 & & E_U \arrow[d] \\
\bigvee_{\alpha \neq 0} S_\alpha \arrow[r, "\bigvee_{\alpha \neq 0} \gamma_\alpha"] \arrow[urr, "\varrho"] & SMSO(2l+1) \arrow[r, "\varphi"] & MSO(2l+2)
\end{tikzcd}$$

On remarque que ϱ induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle.

Par suite E_U a même type d'homotopie rationnel faible qu'un bouquet de sphères, chaque sphère représentant une classe d'homologie γ_α duale à $Um_\alpha \cdot \alpha$ est un l-uple d'entiers positifs non nuls. Pour simplifier les notations γ_α désignera également la classe d'homotopie de l'inclusion de la sphère correspondante dans le bouquet.

La suite exacte d'homotopie de $E_U \xrightarrow{\pi} (MSO(2l+2))$ se scinde en suites exactes courtes $0 \to \pi_i(E_U, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\pi^*} \pi_i(MSO(2l+2), \mathbf{Q}) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(K(\mathbf{Z}, 2l+1), \mathbf{Q}) \to 0$ de façon que

$\pi_i(E_U, \mathbf{Q}) \underset{\pi_*}{\approx} \pi_i(MSO(2l+2), \mathbf{Q})$ pour $i \neq 2l+2$. En dimension $2l+2$ la classe d'homotopie γ_0 de l'inclusion naturelle de S^{2l+2} dans $MSO(2l+2)$ correspond par l'opérateur bord à un générateur de $\pi_{2l+1}(K(\mathbf{Z}, 2l+1))$.

Par fonctorialité du produit de Whitehead $\pi_*(E_U, \mathbf{Q})$ est une sous-algèbre de Lie de $\pi_*(MSO(2l+2), \mathbf{Q})$ et γ_0 engendre additivement un espace complémentaire $\{\gamma_0\}$. En utilisant le théorème de Hilton on peut ainsi donner une base de $\pi_*(MSO(2l+2, Q)$. On vérifie que $\{\gamma_0\}$ est aussi une sous-algèbre de Lie parce que $[\gamma_0, \gamma_0]=0$.

Malheureusement $\pi_*(MSO(2l+2), \mathbf{Q})$ n'est pas isomorphe en tant qu'algèbre de Lie au produit direct de $\pi_*(E_U, \mathbf{Q})$ et de $\{\gamma_0\}$.

En effet $[\gamma_0, \gamma_\alpha]$ est en général un élément non nul dans $\pi_*(E_U, \mathbf{Q})$.

Pour le voir, remarquons qu'à toute classe $Um_\alpha \in H^{n+4|\alpha|}(MSO(n), \mathbf{Z})$, $n=2l+2$, correspond une application f_α de $MSO(n)$ dans $K(\mathbf{Z}, n+4|\alpha|)$. Leur produit donne une application f de $MSO(n)$ dans le produit correspondant Y d'espaces d'Eilenberg-MacLane. f induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle jusqu'en dimension $2n+7$ de sorte que par dualité et le théorème de Whitehead généralisé il en est de même jusqu'en dimension $2n+6$ pour l'homomorphisme induit en homotopie rationnelle. Cela implique la nullité des produits de Whitehead $[\gamma_0, \gamma_0]$ et $[\gamma_0, \gamma_1]$.

Montrons que $[\gamma_0, \gamma_2]$ n'est pas zéro. En dimension inférieure à $2n+12$, le noyau de f^* se réduit au sous-espace engendré par $v = Up_1 \otimes Up_1 - U \otimes Up_1^2$.

Soit $E_v \to Y$ le fibré principal associé à v. La fibre est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbf{Z}, 2n+7)$. Par construction f se relève en une application f: $MSO(n) \to E_v$ qui induit un isomorphisme en homotopie rationnelle jusqu'en dimension $2n+10$.

En désignant par g_α le composé de γ_α et f_α on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
S^n \vee S^{n+8} \arrow[r, "g_0 \vee g_2"] & E_v \arrow[d] & K(\mathbf{Z}, 2n+7) \arrow[l, "i"'] \\
\cap & & \\
S^n \times S^{n+8} \arrow[r, "g_0 \times g_2"] & Y &
\end{tikzcd}$$

où les indices 0 et 2 sont les l-uples $(0, 0, \ldots, 0)$ et $(2, 0, 0, 0)$.

La classe $(g_0 \times g_2)_*(v)$ provient d'une classe de cohomologie relative qui représente l'obstruction à étendre le relèvement $g_0 \vee g_2$ de $g_0 \times g_2 \mid S^n \vee S^{n+8}$ à $S^n \times S^{n+8}$. Cette obstruction s'interprète comme homomorphisme

$$\omega: H_{2n+8}(S^n \times S^{n+8}, S^n \vee S^{n+8}, \mathbf{Z}) \to \pi_{2n+7}(K(\mathbf{Z}, 2n+7))$$

Le groupe $H_{2n+8}(S^n \times S^{n+8}, S^n \vee S^{n+8}, \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et l'image d'un génerateur par l'application composée $i_* \cdot \omega$ coïncide au signe près, avec le produit de Whitehead $[g_0, g_2]$. Comme ω est non nul et que i_* est injectif on a $[g_0, g_2] \neq 0$.

Par identification de rang $[\gamma_0, \gamma_2]$ doit être un multiple de $[\gamma_1, \gamma_1]$. Un calcul de F. P. Peterson montre la relation $[\gamma_0, \gamma_2] = 2[\gamma_1, \gamma_1]$.

$[\gamma_0, \gamma_\alpha]$ sera toujours une combinaison linéaire des produits $[\gamma_{\alpha'}, \gamma_{\alpha''}]$ avec $\alpha'+\alpha''=\alpha$, α' et $\alpha''\neq 0$. mais il semble assez difficile de déterminer les coefficients en toute généralité.

Remarquons que tous les raisonnements faits pour $MSO(2l+2)$ s'appliquent directement à $MO(2l+2)$ dès que l'on a montré que $E_{U_T^2}$ a même type d'homotopie rationnelle qu'un bouquet de sphères.

LEMME 1. *L'application naturelle* $\varepsilon: MSO(2l+2)\to MO(2l+2)$ *qui oublie l'orientation induit en cohomologie rationnelle un homomorphisme* ε^* *qui envoie* $U_T^2 m_\alpha$ *sur* $U^2 m_\alpha$.

La suite exacte de Gysin du revètement $BSO(2l+2)\xrightarrow{p} BO(2l+2)$ *se scinde et* p^* *envoie* $\chi_T m_\alpha$ *sur* χm_α. *Par naturalité de l'isomorphisme de Thom on a le résultat.*

LEMME 2. *La complexification* $\lambda: MSO(2l+2)\to MU(2l+2)$ *induit en cohomologie rationnelle l'homomorphisme* λ^* *qui envoie* $U_{\mathbf{C}} c_2^{\alpha_1}\dots c_{2l}^{\alpha_l}$ *sur* $U^2 p_1^{\alpha_1}\dots p_l^{\alpha_l}$. *Soit* $2l+2=n$.

On a

$$\begin{array}{ccc} & & \xi_n^{\mathbf{C}} \\ & & \downarrow \\ BSO_n & \xrightarrow[\lambda_0]{} & BU_n \end{array}$$

et par définition

$\bar{\lambda}_0^* \xi_p^{\mathbf{C}} = \xi_n \otimes \mathbf{C}$. *Soit* $\bar{\lambda}_0$ *l'application induite par* λ_0 *entre les thomifiés des fibrés* $\xi_p^{\mathbf{C}}$ *et* $\xi_n\otimes\mathbf{C}$.

En particulier $\bar{\lambda}_0^* U_{\mathbf{C}} c_2^{\alpha_1}\dots c_{2l}^{\alpha_l} = \tilde{U} p_1^{\alpha_1}\dots p_l^{\alpha_l}$ *où* $\tilde{U}$ *est la classe de Thom du complexifié* $\xi_n\otimes\mathbf{C}$ *du fibré n-universel. D'autre part on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccccc} \xi_n & \xrightarrow{\varrho} & \xi_n\otimes\mathbf{C} & \xrightarrow{\bar{\Delta}} & \xi_n\times\xi_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BSO_n & \xrightarrow[id]{} & BSO_n & \xrightarrow[\Delta]{} & BSO_n\times BSO_n \end{array}$$

où Δ *est l'application diagonale et* ϱ *choisi de sorte que le composé des flèches supérieures soit l'application diagonale.*

Si $T(\xi_n\otimes\mathbf{C})$ *désigne le thomifié de* $\xi_n\otimes\mathbf{C}$ *on a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} MSO_n & \xrightarrow{d} & MSO_n\wedge MSO_n \\ & \searrow^{\varrho} \quad \nearrow_{\bar{\Delta}} & \\ & T(\xi_\eta\otimes\mathbf{C}) & \end{array}$$

Par définition du cup-produit $d^*(Um_{\alpha_1}\otimes Um_{\alpha_2}) = U^2 m_{\alpha_1+\alpha_2}$. *Par naturalité de l'isomorphisme de Thom* $\bar{\Delta}^*(Um_{\alpha_1}\otimes Um_{\alpha_2}) = \tilde{U} m_{\alpha_1+\alpha_2}$. *Par commutativité* $\varrho^*\tilde{U} m_{\alpha_1+\alpha_2} = U^2 m_{\alpha_1+\alpha_2}$ *mais* $\lambda = \bar{\lambda}_0\cdot\varrho \Rightarrow \lambda^* U_{\mathbf{C}} c_2^{\alpha_1}\dots c_{2l}^{\alpha_l} = U^2 p_1^{\alpha_1}\dots p_l^{\alpha_l}$ (c.q.f.d).

Considèrons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} MSO_n \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & MU_n \\ & MO_n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

On voit que λ^* va sur l'image de ε^* et comme ε^* est monomorphe on conclut que f^* est surjectif. Plus précisément $f^*(U_{\mathbf{C}} c_2^{\alpha_1} \ldots c_{2l}^{\alpha_l}) = U_T^2 p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}$. Soit $E_{U_{\mathbf{C}}} \to MU_n$ la fibration principale associée à $U_{\mathbf{C}}$.

LEMME 3. *$E_{U_{\mathbf{C}}}$ a même type d'homotopie rationnel faible qu'un wedge de sphères. Si $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})$ $S^2 MU_{n-1} \approx_{\mathbf{Q}} \bigvee_\alpha S_\alpha$ avec S_α une sphère de dimension $2n+2\sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i$*

$$\begin{tikzcd} & E_{U_{\mathbf{C}}} \\ \bigvee_{\alpha \neq 0} S_\alpha \arrow[ur] \arrow[r] & MU_n \arrow[u] \end{tikzcd}$$

l'application de suspension $S^2 MU_{n-1} \to MU_n$ restreinte à $\bigvee_{\alpha \neq 0} S_\alpha$ se relève dans $E_{U_{\mathbf{C}}}$ et la suite exacte de Gysin en cohomologie rationnelle pour la fibration principale montre que ce relèvement induit un isomorphisme en cohomologie rationnelle donc aussi en homotopie rationnelle.

PROPOSITION. *L'espace total $E_{U_T^2}$ de la fibration principale sur $MO(2l+2)$ associée à U_T^2 a même type d'homotopie rationnel faible qu'un wedge de sphères.*

Soit $n = 2l+2$. Par construction des fibrations principales on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E_{U_T^2} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & E_{U_{\mathbf{C}}} \arrow[d] \\ MO_n \arrow[r] & MU_n \end{tikzcd}$$

La surjectivité de f^* et π^* implique celle de $\bar{f}^*$. $\bar{f}$ induit un homomorphisme de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $E_{U_{\mathbf{C}}}$ dans celle de EU_T^2. Cet homomorphisme sera surjectif dans les termes E^2 parce que $H^*(E_{U_{\mathbf{C}}}; \mathbf{Q})$ et $H^*(E_{U_T^2}; \mathbf{Q})$ ont des structures d'anneaux triviales. (Les cup-produits d'éléments de degré positifs sont nuls.)

Or $E_{U_{\mathbf{C}}}$ est rationnellement un bouquet de sphères donc toutes les différentielles dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore associée à $E_{U_{\mathbf{C}}}$ sont zéros.

On en déduit que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de $E_{U_T^2}$ est triviale et que par

conséquent $E_{U_T^2}$ a même type d'homotopie rationnel faible qu'un wedge de sphères. [3].

Ces considérations achèvent la démonstration du théorème 2. D'après le lemme 1, l'homomorphisme ε^*, envoie $U_T^2 m_\alpha$ sur $U^2 m_\alpha$.
C'est donc un monomorphisme.

Par dualité $\varepsilon_*: H_*(MSO(n); Q) \to H_*(MO(n); Q)$ est surjectif. On peut donc dire que tout plongement stable provient par chirurgie d'une immersion orientée.

Un plongement est stable si la classe d'homotopie rationnelle qu'il détermine dans l'espace de Thom correspondant n'est pas annulée par l'homomorphisme d'Hurewicz.

III. Interprétation geométrique des resultats

PROPOSITION 3.1. *L'image de l'application naturelle $\varepsilon: MSO(n) \to MO(n)$ en homotopie rationelle est contenue dans le noyau de $h_{\mathbf{Q}}$.*
$\gamma_\alpha \in \pi_*(MSO(n), Q)$ est dual à Um_α de sorte que

$$\langle U_T m'_\alpha, \varepsilon_*(\gamma_\alpha)\rangle = \langle \varepsilon^* U_T m_{\alpha'}, \gamma_\alpha\rangle = \langle U^2 m_{\alpha'}, \gamma_\alpha\rangle = 0$$

pour tout α'. Il en résulte $h_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon_*(\gamma_\alpha) = 0$.

L'homomorphisme $h_{\mathbf{Q}} \cdot \varepsilon_*$ est alors zéro parce que l'homotopie rationnelle de $MSO(n)$ est engendrée par les produits de Whitehead itérés des γ_α et que ε_* est multiplicatif.

COROLLAIRE. *Pour tout plongement (V, f) représentant un élément stable non nul de $\pi_*(MO(n), \mathbf{Q})$ la variété V est nécessairement non orientable. Comme nous l'avons déjà remarqué, les plongements qui représentent des éléments stables de $\pi_*(MO(n), \mathbf{Q})$ proviennent par une chirurgie nonorienté d'une immersion orientée. On peut montrer, par exemple que l'immersion standard de S^{2l} dans $\mathbf{R}^{4l}$ avec un point double est cobordante comme immersion non orientée à un plongement de la bouteille de Klein généralisée. Cette bouteille de Klein est obtenue en recollant les extremités, $S^{2l-1} \times 0$ et $S^{2l-1} \times 1$, de $S^{2l-1}[\times 0, 1]$ à l'aide d'un difféomorphisme de degré -1.*

Soient (f_1, V_1) et (f_2, V_2) des plongements représentant des classes d'homotopie α_1 et α_2 de $M_n \cdot m_1 = \dim V_1$, $m_2 = \dim V_2$. Les applications $\mathrm{id} \times f_2: S^{n+m_1-1} \times V_{2_1} \to S^{n+m_1-1} \times \times D^{n+m_2-1}$ et $f_1 \times \mathrm{id}: V_1 \times S^{n+m_2-1}$ fournissent un plongement de $S^{n+m_1-1} \times V_2 + V_1 \times \times S^{n+m_2-1}$ dans $S^{2n+m_1+m_2-1} = S^{n+m_1-1} \times D^{n+m_2} \cup D^{n+m_1} \times S^{n+m_2-1}$ qui représente le produit de Whitehead $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Cela découle directement des définitions et de la construction de Thom-Pontrjagin.

L'itération convenable de ces enlacements nous fournira une base des groupes de cobordismes de plongements tensorisés par $\mathbf{Q}$. En effet, les produits de Whitehead basiques, des classes d'homotopie représentées par les inclusions $\gamma_\alpha: S_\alpha \subset \bigvee_\alpha S_\alpha$, constituent une base de l'homotopie rationnelle de $\bigvee_\alpha S_\alpha$.

PROPOSITION 3.2. *La suspension φ: $SMSO(n-1) \to MSO(n)$ induit un épimorphisme en homotopie rationnelle.*

On distingue les deux cas $n=2l+2$, $2l+1$

a) $n=2l+1$ *l'homomorphisme induit par* φ *en homologie rationnel est surjectif et les deux espaces sont rationnellement des bouquets de sphères*

b) $n=2l+2$ $\pi_*(MSO(2l+2), \mathbf{Q}) \approx \pi_*(E_U, \mathbf{Q}) \oplus \{\gamma_0\}$. *De plus en homotopie rationnelle l'application composée* $\vee_\alpha S_\alpha \xrightarrow{V\gamma_\alpha} SMSO(2l+1) \xrightarrow{\varphi} MSO(2l+2)$ *envoie* $\pi_*(\vee_{\alpha\neq 0} S_\alpha, \mathbf{Q})$ *isomorphisquement sur* $\pi_*(E_U, \mathbf{Q})$ *et* $\pi_*(S_0, \mathbf{Q})$ *surjectivement sur* $\{\gamma_0\}$ (*cf. calcul de l'homotopie rationnelle de* $MSO(2l+2)$).

COROLLAIRE. *Un multiple convenable de tout plongement orienté est cobordant à un plongement avec champ de vecteur normal non nul.*

Pour tout plongement orienté $f: V^k \to \mathbf{R}^{n+k}$, $n=2l+1$, *Boéchat et Haefliger* [1] *ont introduit une classe* $w_f \in H^{n-1}(V^k, \mathbf{Z})$ *telle que* $Wm_\alpha(V,f)=(W_f \cdot f^* m_\alpha)[V]$ *définisse un homomorphisme* $Wm_\alpha: \pi_{n+k}(MSO(n) \to \mathbf{Z}$, m_α *étant un monôme quelconque dans les classes de Pontrjagin* $p_1 \ldots p_l$.

On observe que Wm_α *ne s'annule pas sur* $[\gamma_0, \gamma_\alpha]$ *et que tous les autres produits de Whitehead ainsi que les éléments stables se trouvent sans son noyau. Les homomorphismes* Wm_α *fournissent ainsi les premiers exemples d'invariants non stables pour les cobordismes de plongements. Il serait intéressant d'exhiber, du moins rationnellement un système complet de tels invariants.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Boéchat, *Plongements de variétés différentiables orientées de dimension* $4k$ *dans* $\mathbf{R}^{6k+1}$ (Thèse Université de Genève), Comment. Math. Helv. *46* (1971).

[2] H. Cartan, *Séminaire H. Cartan – Algèbre d'Eilenberg-MacLane et Homotopie* (1954–1955).

[3] S. Eilenberg and J. C. Moore, *Homology and fibrations I*, Comment. Math. Helv. *40* (1966), 199.

[4] P. Hilton, *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc. (1955).

[5] J. Milnor, *Characteristic classes*, mimeographed notes, Princeton (1957).

[6] J. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. *81* (1965).

[7] J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés* – Ann. of Math. (2) *54* (1951).

[8] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill series in higher mathematics.

[9] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. 28 (1954).

[10] R. Wells, *Cobordism of immersions Topology* (1966).

Université de Lausanne

Reçu le 15 septembre 1970