Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 46 (1971)

Artikel: Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der mathematischen Physik aus solchen der Geometrie

Autor: Bandle, Catherine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35516

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Konstruktion isoperimetrischer Ungleichungen der mathematischen Physik aus solchen der Geometrie

CATHERINE BANDLE (Zürich)

Einleitung

In dieser Arbeit ist von folgenden physikalischen Grössen die Rede:

Elektrischer Widerstand (Modul), Torsionssteifigkeit von Stäben, Energie einer sich im Gleichgewicht befindenden Membran, die vertikalen Kräften ausgesetzt ist (Poissonproblem), Grundfrequenz einer schwingenden Membran (Eigenwertproblem). Alle diese Grössen, sowie ihre Verallgemeinerungen aus § 2, 3.4 lassen sich durch Extremalprinzipien (Dirichlet- und Rayleighprinzip) kennzeichnen. Es gibt isoperimetrische Ungleichungen der mathematischen Physik, welche in enger Beziehung stehen zu solchen aus der Geometrie. Die berühmteste geometrische isoperimetrische Ungleichung der Ebene lautet: *Von allen Gebieten gleicher Fläche hat der Kreis den kleinsten Umfang.* Entsprechende Sätze der mathematischen Physik sind beispielsweise

(a) der Satz von Carleman [5], der von Szegö [23] verallgemeinert wurde: *Von allen mehrfach zusammenhängenden Gebieten mit gegebener Fläche, sowie vorgeschriebener Fläche der innern Löcher hat der Kreisring den grössten Modul.*

(b) die Vermutung von St. Venant, die 1948 von Pólya [18] bewiesen wurde: *Von allen einfach zusammenhängenden Gebieten mit gegebener Fläche hat der Kreis die grösste Torsionssteifigkeit.*

(c) die Vermutung von Rayleigh, für welche unabhängig voneinander Faber [7] und Krahn [13] einen Beweis geliefert haben: *Von allen Gebieten mit gegebener Fläche hat der Kreis den tiefsten Grundton.*

Diese und weitere Ungleichungen ähnlicher Art finden sich im Buch „Isoperimetric inequalities in mathematical physics" von Pólya-Szegö. Wir möchten an dieser Stelle auch auf die wertvolle Zusammenstellung isoperimetrischer Ungleichungen von Payne [15] hinweisen.

Wir werden die eingangs erwähnten Grössen für Gebiete auf allgemeinen zweidimensionalen Flächen untersuchen. Mit Hilfe geometrischer isoperimetrischer Ungleichungen von Alexandrow [1] werden Sätze der Art (a), (b) und (c) aufgestellt. Die Brücke, die eine Verbindung zwischen der Geometrie und unseren Problemen herstellt, ist das Lemma 1 (§1, 2.2). Dieses Lemma war schon verschiedenen Autoren bekannt [7, 13, 14, 16, 19, ...]. Diese allgemeineren Betrachtungen erlauben uns, Schranken für das Dirichletintegral der Lösungsfunktion des Poissonproblems und Abschätzungen für die Grundfrequenz einer inhomogenen schwingenden Membran anzugeben. Durch Benützung der harmonischen Verpflanzung [10] leiten wir eine

isoperimetrische Ungleichung für die Torsionssteifigkeit mehrfach zusammenhängender Gebiete her. Ferner seien erwähnt die Verschärfung eines Satzes von Peetre [16], Verallgemeinerungen eines Ergebnisses von Nehari [14, Satz I] und des Satzes von Gasser-Hersch [8]. Im letzten Abschnitt werden allgemeinere Eigenwertprobleme diskutiert. Insbesondere leiten wir in Anlehnung an [11] und [17] ein Maximumprinzip für den ersten Eigenwert her. Es sei hier betont, dass wir uns nicht mit Existenzfragen beschäftigen werden, sondern dass wir die Lösbarkeit der Probleme stets voraussetzen werden. Die Anregung zu dieser Arbeit stammt aus einem Satz von Nehari [14], der lautet: *Der erste Eigenwert* λ_1 *einer inhomogenen Membran mit der Massendichte* ϱ, *für die* $\ln\varrho$ *subharmonisch ist, genügt der Ungleichung* $\lambda_1 \geqslant j_0^2/M$ ($M = \iint \varrho\, dx\, dy$: totale Masse, $j_0 = 2{,}4048\ldots$).

Einige Resultate wurden in [2] angekündigt. In [3] und [4] wurden die Ungleichungen (a) und (c) in einer anderen Richtung verallgemeinert.

Ich möchte Herrn Professor J. Hersch herzlich danken. Er hat mich in verständnisvoller Weise in das Gebiet der isoperimetrischen Ungleichungen eingeführt und mich in meiner Arbeit stets gefördert. Mein Dank gilt ebenso Herrn Professor H. Bühlmann, bei dem ich Assistentin war, für seine grosszügige Unterstützung.

Nachtrag bei der Korrektur: In der Arbeit „Inequalities for Condensers, Hyperbolic Capacity, and Extremal Lengths" von F. W. Gehring, welche demnächst im Michigan Mathematical Journal erscheinen wird, finden sich ähnliche Ungleichungen für den Modul wie in § 2,1. Berücksichtig man dort im Satz 1 (11) die Alexandrowsche Ungleichung, so erhält man die gleichen Abschätzungen wie im Satz 2 unserer Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Verallgemeinerung der Schwarzschen Symmetrisierung
1. Einführung 184
1.1 Begriffe und Bezeichnungen 184
1.2 Geometrische isoperimetrische Ungleichungen 185
2. Symmetrisierungen 187
2.1 Definitionen 187
2.2 Eigenschaften der Symmetrisierung 187
§ 2. Anwendungen
1. Der Modul eines Ringgebietes 189
2. Poissonproblem 191
2.1 Homogenes Poissonproblem auf einer Mannigfaltigkeit 191
2.2 Das ebene inhomogene Poissonproblem 193
2.3 Beispiel 196
2.4 Eine Verallgemeinerung der harmonischen Verpflanzung 197
2.5 Untere Schranken für die Torsionssteifigkeit von mehrfach zusammenhängenden Gebieten 200
3. Eigenwertprobleme 203
3.1 Homogene, schwingende Membran auf einer Mannigfaltigkeit . . 203
3.2 Inhomogene, schwingende Membran in der Ebene 206
3.3 Obere Schranken für den ersten Eigenwert einer Membran . . . 208
3.4 Allgemeinere Eigenwertprobleme 209

§ 1. VERALLGEMEINERUNG DER SCHWARZSCHEN SYMMETRISIERUNG

1. Einführung

1.1 *Begriffe und Bezeichnungen*

Es sei $\mathfrak{M}$ eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit vom topologischen Typ der Ebene, dargestellt durch ein Linienelement der Form $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ $(i, j = 1, 2)$. $A(G) = \iint_G \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2$ $[g = \mathrm{Det}(g_{ij})]$ ist die Fläche eines Bereichs $G \subset \mathfrak{M}$, $L(\Gamma) = \int_\Gamma ds$ die Länge eines Bogens $\Gamma \subset \mathfrak{M}$. Mit $\omega(G)$ bezeichnen wir die (totale) Krümmung und mit $\Omega(G)$ die absolute Krümmung von G. Wenn K_G die Gauss'sche Krümmung bedeutet, so gilt $\omega(G) = \iint_G K_G\, dA$ und $\Omega(G) = \iint_G |K_G|\, dA$ $[dA = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2]$. Wir werden auch Metriken zulassen, bei denen K_G in isolierten Punkten ein Dirac'sches Mass ist. Geometrisch bedeutet das, dass $\mathfrak{M}$ neben den üblichen regulären Flächen

auch Polyeder umfasst. Die Krümmung $\omega(P)$ eines einzelnen Punktes P ist gleich der Differenz von 2π und dem vollen Winkel des Tangentialkegels in P. Sie ist daher in den Spitzen der Fläche von Null verschieden. Wir werden von nun an voraussetzen, dass $\Omega(B) \leqslant C$ für jeden kompakten Bereich $B \subset \mathfrak{M}$. Führt man in $\mathfrak{M}$ die Abstandsfunktion $\varrho(P, Q) = \inf_\Gamma \{\int_\Gamma ds\}$ ein, wobei $\Gamma \subset \mathfrak{M}$ über alle Verbindungskurven von P und Q variiert, so kann $\mathfrak{M}$ als Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung im Sinn von A. D. Alexandrow [1] aufgefasst werden. Unter der „Krümmung bezüglich K" [1, S. 513] (K beliebige reelle Zahl) verstehen wir die Mengenfunktion $\omega_K(G) = \omega(G) - KA(G)$. Es seien $\omega_K^+(G) = \sup_{E \subset G}\{\omega_K(E)\}$, $\omega_K^-(G) = \sup_{E \subset G}\{-\omega_K(E)\}$ für jede Borelmenge $E \subset G$. Nach dem Jordanschen Zerlegungssatz gilt $\omega_K(G) = \omega_K^+(G) - \omega_K^-(G)$. Im Fall einer regulären Metrik ist $\omega_K^+(G) = \iint_G \max\{K_G - K, 0\}\, dA$ und $\omega_K^-(G) = \iint_G \max\{-K_G + K, 0\}\, dA$. Es ist $\Omega(G) = \omega^+(G) + \omega^-(G)$. Wir werden folgende Bezeichnungen verwenden: $(\partial/\partial x^i)\, u = u_i$, $\nabla(u, v) = g^{ij} u_i v_j$, wobei g^{ij} die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors sind. Tritt ein Index wiederholt auf, so ist darüber zu summieren.

Die j-te Komponente von $\operatorname{grad} u$ ist $(\operatorname{grad} u)^j = g^{ij} u_i = u^j$. $\operatorname{grad} u$ steht in der Metrik g_{ij} senkrecht auf den Niveaulinien von u.

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

stellt den zweiten Differentialoperator von Beltrami (verallgemeinerter Laplaceoperator) dar. $D(f) = \iint \nabla(f, f)\, \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2$ ist das (verallgemeinerte) Dirichletintegral.

1.2 *Geometrische isoperimetrische Ungleichungen*

Die folgenden Ungleichungen stammen von A. D. Alexandrow [1, S. 509, 514]. Es sei $D \subset \mathfrak{M}$ ein Jordangebiet mit dem Rand Γ, $A(D) = A$ und $L(\Gamma) = L$. Wir werden stets voraussetzen, dass die absolute Krümmung beschränkt sei.

(a) Es gilt

$$L^2 \geqslant 2(2\pi - \omega^+(D))\, A \quad \text{für} \quad \omega^+(D) < 2\pi. \tag{1}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit der Krümmung $\omega^+(D)$ in der Spitze isometrisch ist[1]). (Wickelt man den Kegel auf die Ebene ab, und bezeichnet β den Zentriwinkel des Sektors, so stellt $\omega^+(D) = 2\pi - \beta$ die Krümmung der Kegelspitze dar).

(b) Ist $\omega(B) \leqslant KA(B)$ für jedes beliebige Gebiet $B \subset D$, so gilt:

$$L^2 \geqslant A(4\pi - KA). \tag{2}$$

[1]) Diese Ungleichung wurde auch von A. Huber [12] mit rein potentialtheoretischen Mitteln hergeleitet.

Das Gleichheitszeichen tritt bis auf Isometrie nur bei den geodätischen Abstandskreisen auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung ein.

Die nächste Ungleichung enthält (a) und (b) als Spezialfälle und lautet:

(c) Falls $\omega_K^+(D) < 2\pi$, folgt:

$$L^2 \geqslant A(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA). \tag{3}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels in einem Raum konstanter Krümmung K mit der Krümmung $\omega_K^+(D)$ in der Spitze isometrisch ist.

Ein Modell eines solchen Kegels ist der Kreissektor auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung K mit dem Zentriwinkel $2\pi - \omega_K^+(D)$, bei dem die beiden Grenzradien identifiziert werden.

1. BEHAUPTUNG: $\omega_K^+(D)$ ist eine nicht zunehmende Funktion von K.
Denn es ist $\omega_{K_1}(B) \geqslant \omega_{K_2}(B)$ für $K_1 \leqslant K_2$.

2. BEHAUPTUNG: Im Falle einer Gauss'schen Metrik hat die Funktion $H(K) = 4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA$ bei gegebenem Bereich D genau *ein* Maximum $H(K_0)$. K_0 wird bestimmt durch die Gleichung

$$2\iint\limits_D (K_G - K_0)^+ \, dA = A(D), \quad (*)$$

wobei

$$(x)^+ = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis: Aus $H(K) = 4\pi - 2\iint_{K_G \geqslant K} (K_G - K)\, dA - KA$ ergibt sich

$$H'(K) = \frac{d}{dK} H(K) = 2 \iint\limits_{K_G \geqslant K} dA - A.$$

$H'(K)$ ist eine nicht zunehmende Funktion von K. Folglich ist $H(K)$ konkav und nimmt an der Stelle K_0 mit $H'(K_0) = 0$ ihr Maximum an.

Aus (c) und der Behauptung 2 folgt

(c') Ist K_0 gemäss (*) bestimmt und $\omega_{K_0}^+(D) < 2\pi$, so gilt

$$L^2 \geqslant A\left(4\pi - 2 \iint\limits_{K_G \geqslant K_0} K_G dA\right) > A(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA) \tag{4}$$

für alle K.

2. Symmetrisierungen

2.1 *Definitionen*

Es sei G ein beliebiges Gebiet das mit samt seinem Rand Γ in einem Jordangebiet $D \subset \mathfrak{M}$ liegt. f sei eine auf $G \cup \Gamma$ definierte, positive Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist, und welche auf dem Rand Γ verschwindet, O.B.d.A. können wir annehmen, dass $0 \leqslant f \leqslant 1$ ist.

Wir setzen $G_\lambda = \{P \in G; f(P) \geqslant \lambda\}$; $\Gamma_\lambda = \{P \in G; f(P) = \lambda\}$ ist der Rand von G.

DEFINITION: *In einem Raum mit konstanter Krümmung K bezeichnet $T_{\omega^+{}_K}(G)$ die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels mit der Krümmung ω_K^+ $(<2\pi)$ in der Spitze und der Fläche $A(T_{\omega^+{}_K}(G))$ gleich $A(G)$.*

Wenn $K>0$, existiert $T_{\omega^+{}_K}(G)$ nur, falls $A(G) \leqslant (4\pi - 2\omega_K^+)/K$ ist.

Spezialfälle: $T_{\omega^+}(G)$ stellt die Mantelfläche eines gewöhnlichen, geraden Drehkegels im euklidischen Raum dar. Ist $\omega_K^+ = 0$, so bedeutet $T_{\omega^+{}_K}(G)$ einen Kreis auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung K.

DEFINITION: *Der gegebenen Funktion f auf G wird eine Funktion $T_s f$ auf $T_s(G)$ $(s = \omega_K^+)$ zugeordnet, deren Niveaulinien Abstandskreise mit dem Mittelpunkt in der Spitze des Kegels sind, und die auf dem Rand von $T_s(G_\lambda)$ den Wert λ annimmt.*

$T_s f$ ist eine nicht zunehmende Funktion des Abstandes der Punkte auf $T_s(G)$ von der Spitze des Kegels. $T_s f$ ist durch f eindeutig bestimmt. Ferner ist $T_s f$ wegen der Monotonie fast überall differenzierbar. Die Transformation $G \to T_s(G)$ kann als Verallgemeinerung der Schwarzschen Symmetrisierung eines Gebietes G und $f \to T_s f$ als Verallgemeinerung der Schwarzschen Symmetrisierung einer Funktion f aufgefasst werden.

Spezialfälle: (a) Ist $\omega^+ = 0$ und $K = 0$, so stellt $f \to T_s f$ die Schwarzsche Symmetrisierung dar. Sie ist in [19, S. 189ff.] beschrieben.

(b) $T_{\omega^+} f\,(K=0)$ stimmt im wesentlichen mit der Symmetrisierung von Peetre [16] überein.

2.2 *Eigenschaften der Symmetrisierung*

Wie unmittelbar aus der Definition hervorgeht, gilt für eine beliebige in [0, 1] integrierbare Funktion $H(t)$

$$\iint\limits_G H(f)\,dA = \iint\limits_{T_{\omega^+{}_K}(G)} H(T_{\omega^+{}_K} f)\,dA. \tag{5}$$

Nach den in §1, 2.1 getroffenen Definitionen und Voraussetzungen gilt ein zu [19, S. 190 ...] analoger

SATZ 1: *Wenn* $\omega_K^+(D)=s<2\pi$ *ist, so gilt für das Dirichletintegral der Funktionen* f *und* $T_s f$ *die Ungleichung*

$$D_G(f) \geqslant D_{T_s(G)}(T_s f) \tag{6}$$

d.h. bei einer Symmetrisierung verkleinert sich das Dirichletintegral.

Beweis: Wir werden in Zukunft die Kurzformen $A(\lambda)=A(G_\lambda)$ und $L(\lambda)=L(\Gamma_\lambda)$ verwenden. Der Beweis beruht wesentlich auf dem nachstehenden Lemma. Dieses geht auf [7, 13, 19,...] zurück. Der Vollständigkeit halber werden wir den Beweis wiederholen.

LEMMA 1:

$$D_G(f) \geqslant \int_0^1 \frac{L^2(\lambda)}{-A'(\lambda)}\, d\lambda, \tag{7}$$

wobei $A'(\lambda)=(d/d\lambda)\,A(\lambda)$. *Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn* $\partial f/\partial n$ *längs allen Niveaulinien konstant ist.*

n bedeutet die Normale an Γ_λ bezüglich der Metrik g_{ij}, welche ins Innere von G_λ weist.

Beweis des Lemmas: $|\mathrm{grad} f|=(g_{ij}f^i f^j)^{1/2}$; die Fläche zwischen Γ_λ und $\Gamma_{\lambda+d\lambda}$ beträgt $\oint_{\Gamma_\lambda} dn\, ds$, wenn s die Bogenlänge auf Γ_λ ist und $dn=dn(s,\lambda)$ die Breite des Streifens zwischen Γ_λ und $\Gamma_{\lambda+d\lambda}$ an der Stelle s darstellt. Es gilt (vgl. §1, 1.1)

$$D_G(f) = \iint_G |\mathrm{grad}\, f|^2\, dA = \int_{\lambda=0}^{1} \oint_{\Gamma_\lambda} \left|\frac{\partial f}{\partial n}\right|^2 dn\, ds = \int_0^1 d\lambda \oint_{\Gamma_\lambda} \left|\frac{\partial f}{\partial n}\right| ds \tag{8}$$

Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\oint_{\Gamma_\lambda} \left|\frac{\partial f}{\partial n}\right| ds\right)\left(\oint_{\Gamma_\lambda} \frac{ds}{|\partial f/\partial n|}\right) \geqslant \left(\oint_{\Gamma_\lambda} ds\right)^2$$

und (8) schliesst man auf die Behauptung des Lemmas.

Setzt man in (7) die Ungleichung (3) ein, so folgt

$$D_G(f) \geqslant \int_0^1 \frac{A(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA)}{-A'}\, d\lambda$$

mit dem Gleichheitszeichen bei $T_{\omega^+{}_K(D)} f$.

§ 2. ANWENDUNGEN

1. Der Modul eines Ringgebietes

Es sei D ein Jordangebiet auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ (vgl. §1, 1.1). $G \subset D$ sei ein Gebiet, das von endlich vielen Jordankurven berandet wird. Diese Randkurven seien in zwei Klassen eingeteilt: $\{\Gamma_0^{(i)} \mid i=1,\dots,m\}$ und $\{\Gamma_1^{(j)} \mid j=1,\dots,n\}$, wobei die „äussere" Randkurve der ersten Klasse zugeteilt wird. Wir setzen $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_0^{(i)}$ und $\Gamma_1 = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_1^{(j)}$ und betrachten das folgende Dirichletproblem für dieses „*Ringgebiet* (Γ_0, Γ_1)":

Problem I:

$\Delta h = 0$ in G (h ist eine „harmonische" Funktion in G)
$h = 0$ auf Γ_0
$h = 1$ auf Γ_1

Die Grösse $\mu_{\Gamma_0\Gamma_1} = 1/D_G(h)$ heisst *Modul* des Ringgebietes (Γ_0, Γ_1).

Das Dirichletprinzip besagt:

$$\mu^{-1} = \operatorname*{Min}_{\substack{v=0 \text{ auf } \Gamma_0 \\ v=1 \text{ auf } \Gamma_1}} D_G(v), \tag{9}$$

wobei v stückweise stetig differenzierbar ist.

Setzt man in (9) Funktionen ein mit vorgeschriebenen Niveaulinien, so erhält man ähnliche Abschätzungen wie in [19, S. 46]. Es sei $\Psi(P) = \lambda\,(P \in G)$ ein zulässiges System von Niveaulinien und $v = v(\Psi(P))$, dann gilt

$$\mu^{-1} \leqslant \operatorname*{Min}_{\substack{v=0 \text{ auf } \Gamma_0 \\ v=1 \text{ auf } \Gamma_1}} \int_{\lambda=0}^{1} \oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} v'^2(\lambda) \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2 dn\, ds = \int_0^1 v'^2(\lambda)\, d\lambda \oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right| ds \tag{10}$$

wobei $\tilde{\Gamma}_\lambda$ die Niveaulinie $\Psi = \lambda$ bedeutet. Es wurde $\lambda_{\min} = 0$ und $\lambda_{\max} = 1$ gesetzt. Wir schreiben $T(\lambda) = \oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} |\partial\Psi/\partial n|\, ds$. Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\int_0^1 v'^2(\lambda)\, T(\lambda)\, d\lambda \geqslant \left\{\int_0^1 v'(\lambda)\, d\lambda\right\}^2 \left\{\int_0^1 [T(\lambda)]^{-1}\, d\lambda\right\}^{-1} = \left\{\int_0^1 [T(\lambda)]^{-1}\, d\lambda\right\}^{-1} \tag{11}$$

mit dem Gleichheitszeichen für $v'(\lambda) = [T(\lambda)]^{-1}/\int_0^1 [T(\lambda)]^{-1}\, d\lambda$.

(10) und (11) ergeben mit dieser speziellen Funktion $v(\lambda)$

$$\mu \geqslant \int_0^1 \frac{d\lambda}{\oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right| ds} \tag{12}$$

Wir definieren

$$d\mu(\lambda)^{-1} = \frac{1}{d\lambda} \oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right| ds = \oint_{\tilde{\Gamma}_\lambda} \left|\frac{ds}{dn}\right|. \tag{13}$$

Somit lautet (12)

$$\mu \geqslant \int_0^1 d\mu(\lambda). \tag{14}$$

Das Gleichheitszeichen in (14) tritt genau dann ein, wenn die Niveaulinien $\tilde{\Gamma}_\lambda$ mit denjenigen von h zusammenfallen.

Wir bezeichen mit G_1 die Vereinigung aller Gebiete innerhalb $\Gamma_1^{(j)}$ $j=1, 2, \ldots, n$; A_1 sei die Fläche von G_1, A diejenige von G.

SATZ 2: *Wenn $\omega_K^+(D) < 2\pi$, gilt:*

$$\mu \leqslant \frac{1}{2(2\pi - \omega_K^+(D))} \left\{ \ln \frac{A + A_1}{4\pi - 2\omega_K^+(D) - K(A + A_1)} - \ln \frac{A_1}{4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA_1)} \right\}.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn G dem Gebiet $\hat{G} = T_{\omega^+ K(D)}(G \cup G_1) \setminus T_{\omega^+ K(D)}(G_1)$ isometrisch ist.

Beweis: Es sei $\hat{\mu}$ der Modul des Extremalgebietes $\hat{G}$. $\hat{h}$ ist die Lösung des Problems I für das Gebiet $\hat{G}$ und h diejenige für das Gebiet G. Wir setzen $H = \begin{cases} h \text{ in } G \\ 1 \text{ in } G_1 \end{cases}$.

Wegen des Dirichletprinzips (9) und Satz 1 gilt

$$\hat{\mu}^{-1} \leqslant D_{\hat{G}T_s(G \cup G_1)}(T_s H) \leqslant D_G(h) = \mu^{-1}.$$

Nun lässt sich $\hat{\mu}$ explizit berechnen.

Die Niveaulinien $\hat{\Gamma}_\lambda$ von $\hat{h}$ sind konzentrische Kreise. Folglich ist

$$d\hat{\mu}(\lambda) = \frac{1}{\oint_{\hat{\Gamma}_\lambda} \left|\frac{ds}{dn}\right|} = \frac{dn}{\oint_{\hat{\Gamma}_\lambda} ds} = \frac{dn\, L(\hat{\Gamma}_\lambda)}{L^2(\hat{\Gamma}_\lambda)} = -\frac{A'(\lambda)\, d\lambda}{L^2(\hat{\Gamma}_\lambda)}$$

wobei $A(\lambda) = A(\hat{G}_\lambda)$. Wegen (c) in § 1, 1.2 folgt

$$d\hat{\mu}(\lambda) = \frac{-A'(\lambda)\, d\lambda}{A(\lambda)(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA(\lambda))}$$

und auf Grund von (14)

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mu} &= \int_0^1 \frac{-A'}{A(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA)}\,d\lambda \\ &= \int_0^1 \frac{-1}{4\pi - 2\omega_K^+(D)}\left(\frac{A'}{A} + \frac{KA'}{4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA}\right)d\lambda .\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Dieser Satz stellt eine Erweiterung des Satzes von Carleman [5] und Szegö [23] dar. Setzt man $K=0$, so erhält man das

KOROLLAR 1: *Wenn* $\omega^+(D) < 2\pi\,(K=0)$ *ist, folgt*

$$\mu \leqslant \frac{1}{2(2\pi - \omega^+(D))} \ln \frac{A + A_1}{A_1} .$$

Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn G einem Kreisring auf einem geraden Kreiskegel isometrisch ist.

Existiert in D die Gauss'sche Krümmung K_G, so gilt

$$\omega_K(B) = \iint_B K_G dA - KA(B) \quad \text{für alle} \quad B \subset D .$$

KOROLLAR 2: *Falls* $K_G \leqslant K$ *in* D, *ist*

$$\mu \leqslant \frac{1}{4\pi}\left\{\ln \frac{A + A_1}{4\pi - K(A + A_1)} - \ln \frac{A_1}{4\pi - KA_1}\right\} .$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn G einem Kreisring auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung K isometrisch ist.

Pólya und Szegö haben dieses Ergebnis für den Fall bewiesen, dass sich G auf einer Kugeloberfläche befindet [19, S. 220].

2. Poissonproblem

2.1 *Homogenes Poissonproblem auf einer Mannigfaltigkeit*

Wir betrachten das Problem

Problem II:

$$\begin{aligned}\Delta u &= -1 \quad \text{in} \quad G \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma .\end{aligned}$$

Über G treffen wir die gleichen Annahmen wie in §1, 2.1. Das Dirichletprinzip lautet in diesem Fall

$$D(u) = \operatorname*{Max}_{v=0 \text{ auf } \Gamma} \left\{ 2 \iint_G v \, dA - D(v) \right\} \tag{16}$$

oder in einer äquivalenten Form

$$D(u) = \operatorname*{Max}_{v=0 \text{ auf } \Gamma} \left(\iint_G v \, dA \right)^2 / D(v). \tag{17}$$

Für v sind in beiden Fällen stückweise stetig differenzierbare Funktionen zugelassen. Die Maxima werden von der Lösung u von II geliefert. Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der Ebene, so gilt $D(u) = P/4$, wobei P die Torsionssteifigkeit eines Stabes bedeutet [19, S. 87].

SATZ 3: *Falls $\omega_K^+(D) < 2\pi$ ist, gilt*

$$D(u) \leqslant \frac{4\pi - 2\omega_K^+(D)}{K^2} \ln \frac{4\pi - 2\omega_K^+(D)}{4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA} - \frac{A}{K},$$

wobei wir Gleichheit beim Gebiet $T_{\omega^+{}_K(D)}(G)$ haben.

Beweis: Es sei $\hat{u}$ die Lösung des Problems II im Extremalgebiet $\hat{G} = T_{\omega^+{}_K(D)}(G)$. Wir wenden das Dirichletprinzip (17) auf $D_{\hat{G}}(\hat{u})$ an. Als Vergleichsfunktion wählen wir $T_{\omega^+{}_K(D)} u$ und erhalten

$$D_{\hat{G}}(\hat{u}) \geqslant \frac{\left(\iint_{\hat{G}} T_{\omega^+{}_K(D)} u \, dA \right)^2}{D_{\hat{G}}(T_{\omega^+{}_K(D)} u)} \geqslant \frac{\left(\iint_G u \, dA \right)^2}{D_G(u)} = D_G(u).$$

Die letzte Ungleichung ist eine Folgerung aus (5) und Satz 1. Um $D_{\hat{G}}(\hat{u})$ zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

Aus Symmetriegründen sind die Niveaulinien $\hat{\Gamma}_\lambda$ von $\hat{u}$ konzentrische Kreise um die Spitze des Kegels. Wir setzen $\hat{u} = \hat{u}(a)$, wobei a die Fläche von $\hat{G}_\lambda$ (Gebiet innerhalb $\hat{\Gamma}_\lambda$) ist. $D_{\hat{G}}(\hat{u})$ ist durch (16) gekennzeichnet, also

$$D_{\hat{G}}(\hat{u}) = \operatorname*{Max}_{v(A)=0} \left\{ 2 \int_0^A v(a) \, da - \int_0^A a(4\pi - 2\omega_K^+(D) - Ka) \, v'^2(a) \, da \right\}. \tag{18}$$

Die zum Variationsproblem gehörige Euler'sche Gleichung lautet:

$$1 + \frac{d}{da} \left[a(4\pi - 2\omega_K^+(D) - Ka) \, \hat{u}'(a) \right] = 0. \tag{19}$$

Die Randbedingungen sind: $\hat{u}(A)=0$, $\hat{u}(0)<\infty$. Durch Integration erhält man

$$\hat{u}(a)=\frac{1}{K}\ln\frac{4\pi-2\omega_K^+(D)-Ka}{4\pi-2\omega_K^+(D)-KA}. \tag{20}$$

Wegen der Greenschen Identität ist

$$D_{\hat{G}}(\hat{u})=-\iint\limits_{\hat{G}}\hat{u}\Delta\hat{u}\,dA+\oint\limits_{\hat{\Gamma}}\hat{u}\frac{\partial\hat{u}}{\partial n}\,ds$$

und somit

$$D_{\hat{G}}(\hat{u})=\int_0^A\hat{u}\,da=\frac{4\pi-2\omega_K^+(D)}{K^2}\ln\frac{4\pi-2\omega_K^+(D)}{4\pi-2\omega_K^+(D)-KA}-\frac{A}{K}.$$

Dieses Ergebnis erweitert einen Satz von Pólya-Szegö [18, 19, S. 191] über die Torsionssteifigkeit. Als Spezialfälle seien erwähnt (vgl. Korollar 1, 2):

KOROLLAR 3: *Falls $\omega^+(D)<2\pi\,(K=0)$ ist, gilt*

$$D(u)\leqslant\frac{A^2}{4(2\pi-\omega^+(D))} \tag{21}$$

Das Gleichheitszeichen steht bei Gebieten, die der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels isometrisch sind.

Beweis: Das Korollar 3 folgt aus dem Satz 3, wenn man K gegen Null streben lässt.

$$\lim_{K\to 0}\left\{\frac{4\pi-2\omega_K^+(D)}{K^2}\ln\frac{4\pi-2\omega_K^+(D)}{4\pi-2\omega_K^+(D)-KA}-\frac{A}{K}\right\}=\frac{A^2}{4(2\pi-\omega^+(D))}.$$

Dies kann auch direkt aus (19) gewonnen werden, indem man dort $K=0$ setzt und integriert.

KOROLLAR 4: *Im Falle $K_G\leqslant K$ in D gilt*

$$D_G(u)\leqslant\frac{4\pi}{K^2}\ln\frac{4\pi}{4\pi-KA}-\frac{A}{K}.$$

Das Gleichheitszeichen steht für ein Gebiet G, das einem Kreis auf einer Fläche von konstanter Krümmung K isometrisch ist.

2.2 *Das ebene, inhomogene Poissonproblem*

D sei ein kreishomöomorphes Gebiet der (x, y)-Ebene mit der Metrik $ds^2=\varrho(x, y)\times$

$\times(dx^2+dy^2)$. Der Beltramioperator hat dann die Form

$$\Delta = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{22}$$

Die Gauss'sche Krümmung beträgt

$$K_G = -\left(\frac{\partial^2 \ln\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln\varrho}{\partial y^2}\right)/2\varrho. \tag{23}$$

Ein bekannter Satz besagt [siehe beispielsweise [6, S. 249]]: Wenn $K_G\varrho(x,y)=\omega(x,y)$ Hölder stetig ist, gilt für $\ln\varrho$ der Ausdruck (24). Dieses Ergebnis wurde von Riesz [22] verallgemeinert: Es bezeichne P der laufende Punkt in D und $h(P)$ eine harmonische Funktion in D. Ist $\ln\varrho$ die Differenz zweier subharmonischer Funktionen in D, so gibt es ein Radonsches Mass ω mit

$$\ln\varrho(P) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \ln|P-Q|\,\omega(dA_Q)+h(P) \quad (dA_Q\text{: Flächenelement}). \tag{24}$$

Das Integral ist im Sinn von Lebesgue-Radon aufzufassen.

Es gilt

$$-2\omega = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\varrho, \tag{25}$$

wo die Ableitungen im Sinn der Distributionen verstanden werden. Gemäss Resultaten von Reschetnjak[2]) und A. Huber ist $\omega(dA_Q)$ die Krümmung im Sinn von Alexandrow (vgl. §1, 1.1).

Wir betrachten das

Problem III:

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy} &= -\varrho(x,y) && \text{in } G\\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, G sei ein Jordangebiet in der (x,y)-Ebene mit dem Rand Γ. Weiter setzen wir voraus, dass $\ln\varrho$ die Differenz zweier subharmonischer Funktionen sei. Es gilt deshalb die Darstellung (24).

Mit Hilfe des zugehörigen Masses ω definieren wir wie in §1, 1.1

$$\omega_K(B) = \omega(B) - KM(B),\ M(B) = \iint_B \varrho\,dx\,dy$$

---

[2]) Eine kurze Zusammenfassung des Satzes von Reschetnjak findet sich in [1, S. 504].

für jedes Gebiet $B \subseteq G$. $\omega_K = \omega_K^+ - \omega_K^-$ bedeute wiederum die Jordansche Zerlegung (vgl. §1, 1.1).

Die Übertragung von Satz 3 auf das Problem III ergibt

SATZ 4: *Für die Lösung u des Problems* III *genügt das Dirichletintegral* $D(u) = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy$ *im Falle* $\omega_K^+(G) < 2\pi$ *der Ungleichung*

$$D(u) \leqslant \frac{4\pi - 2\omega_K^+(G)}{K^2} \ln \frac{4\pi - 2\omega_K^+(G)}{4\pi - 2\omega_K^+(G) - KM} - \frac{M}{K}. \quad \left(M = \iint_G \varrho\, dx\, dy\right)$$

Das Gleichheitszeichen steht beispielsweise für den Kreis um den Ursprung mit

$$\varrho(z) = \frac{R^2(2 - \omega_K^+(G)/\pi)^2\, |z|^{-\omega_K{}^+(G)/\pi}}{[1 \pm |z|^{(2\pi - \omega^+{}_K(G))/\pi}]^2}. \qquad (K = \pm R^{-2})$$

Um das Extremalgebiet zu konstruieren, benötigen wir folgendes

LEMMA 2: *Verpflanzt man das Problem* III *mittels einer konformen Abbildung* $z = z(w)$ *in die w-Ebene* $(w = \xi + i\eta)$, *so geht es in das*

Problem III′:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) U = -\hat{\varrho}(w)$$

in $G' = w(G)$ $U = 0$ auf $\Gamma' = w(\Gamma)$, wobei $U = u(z(w))$, $\hat{\varrho}(w) = |dz/dw|^2\, \varrho(z(w))$ über.

Eine einfache Rechnung ergibt

(a) $D_G(u) = D_{G'}(U)$

(b) $\omega_\varrho(B) = \omega_{\hat{\varrho}}(B')$ mit $B' = w(B)$

In Satz 3 war das Extremalgebiet ein gerader Kreiskegel in einem Raum von konstanter Krümmung K. Dieser Kegel lässt sich isometrisch auf einen Kreissektor abbilden, der auf einer Fläche konstanter Krümmung K liegt und dessen Grenzradien identifiziert werden (vgl. §1, 1.2). Wir bilden diesen mit Hilfe einer stereographischen Projektion[3]) konform in die w-Ebene ab. Das Linienelement nimmt für $K = \pm R^{-2}$ die Form $ds^2 = 4R^2(1 \pm |w|^2)^{-2}\, |dw|^2$ an, und der Kreissektor geht wieder in einen Kreissektor über. Bildet man den letzteren mittels der Abbildung $z = w^{2\pi/(2\pi - \omega^+{}_K(G))}$ konform auf den Kreis der z-Ebene ab und berücksichtigt das Lemma 2, so erhält man die Massenverteilung ϱ, für welche im Satz 4 das Gleichheitszeichen steht.

Entsprechend zu §2, 2.1 ergeben sich aus Satz 4

---

[3]) Strubecker, *Differentialgeometrie* II, S. 50 und III, S. 169.

KOROLLAR 5: *Falls* $\omega^+(G)<2\pi$ *ist* $(K=0)$, *gilt*

$$D(u) \leqslant \frac{M^2}{4(2\pi - \omega^+(G))}.$$

Gleichheit beim Kreis um den Ursprung mit $\varrho(z)=|z|^{-\omega^+(G)/\pi}$

KOROLLAR 6: *Wenn* $\omega(B)/M(B)\leqslant K$ *ist für jedes beliebige Gebiet* $B\subseteq G$, *gilt*

$$D(u) \leqslant \frac{4\pi}{K^2} \ln \frac{4\pi}{4\pi - KM} - \frac{M}{K}.$$

Das Gleichheitszeichen steht bei beliebigen Kreisen mit

$$\varrho(z) = \frac{4R^2}{(1 \pm |z|^2)^2} \quad \textit{für} \quad K = \pm R^{-2}.$$

2.3 Als *Beispiel* betrachten wir das Poissonproblem $\Delta u = -\varrho(z)$ für den Kreis $|z|<R$ mit $u=0$ auf der Peripherie $|z|=R$. Hier geben wir obere und untere Schranken für $D(u)$ an. $\varrho(z)\in C^2$ sei eine positive, superharmonische Funktion, d.h. $\Delta\varrho\leqslant 0$. Dann ist

$$\Delta \ln \varrho = \frac{\Delta\varrho}{\varrho} - \left(\frac{\varrho_x}{\varrho}\right)^2 - \left(\frac{\varrho_y}{\varrho}\right)^2 \leqslant 0 \quad \text{und somit}$$

$$\omega^+(G) = \omega(G) = \iint_G -\frac{\Delta \ln \varrho}{2}\, dx\, dy.$$

Im rotationssymmetrischen Fall $\varrho=\varrho(r)$ gilt

$$\omega^+(G) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{d}{dr}\left(r\,\frac{\varrho_r}{\varrho}\right) dr\, d\theta = -\pi R\,\frac{\varrho_r(R)}{\varrho(R)}$$

sofern $\lim_{r\to 0} r\,\varrho_r(r)/\varrho(r)=0$ ist.

Um untere Schranken für $D(u)$ zu finden, benützen wir eine Methode von Nehari [14]. Wir wählen in (17) als Vergleichsfunktion v die Lösung des Problems $\Delta\tilde{u}=-1$ in $\{z;\,|z|<R\}$, $\tilde{u}=0$ auf $|z|=R$. Wegen $\Delta\varrho\leqslant 0$ ist $\Phi(r)=\int_0^{2\pi}(r,\theta)\,d\theta$ eine nicht zunehmende Funktion von r, ebenso $\tilde{u}=R^2/4-r^2/4$. Unter Anwendung des

Lemmas 1.2 von Banks[4]) folgt:

$$D(u) \geqslant \frac{\left(\iint\limits_G \tilde{u}\, dx\, dy\right)^2}{D(\tilde{u})} = \frac{\left(\int\limits_0^R (R^2/4 - r^2/4)\, \Phi(r)\, r\, dr\right)^2}{\pi R^4/8} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left\{\int\limits_0^R (R^2/4 - r^2/4)\, r\, dr \int\limits_0^R \Phi(r)\, r\, dr \Big/ \frac{R^2}{2}\right\}^2}{\pi R^4/8} = \frac{M^2}{8\pi}.$$

Zusammen mit Korollar 5 and 6 ergeben sich die Abschätzungen

$$M^2/8\pi \leqslant D(u) \leqslant M^2/(8\pi - 4\omega(G)). \tag{26}$$

Die rechte Seite ist nur gültig, wenn $\omega(G) < 2\pi$ ist. Wenn $-\Delta \ln \varrho / 2\varrho \leqslant K$ ist, lautet eine weitere Abschätzung

$$M^2/8\pi \leqslant D(u) \leqslant \frac{4\pi}{K^2} \ln \frac{4\pi}{4\pi - KM} - \frac{M}{K}, \tag{27}$$

wobei $4\pi - KM > 0$ vorausgesetzt wird.

Das Gleichheitszeichen tritt sowohl in (26) als auch in (27) für Konstantes ϱ in beiden Richtungen gleichzeitig auf.

2.4 *Eine Verallgemeinerung der harmonischen Verpflanzung*

Die harmonische Verpflanzung geht auf J. Hersch [10] zurück und stellt eine Möglichkeit dar, Funktionen von einem Gebiet in ein anderes zu verpflanzen, ohne dass sich dabei das Dirichletintegral ändert. Die Gebiete brauchen im Gegensatz zur konformen Verpflanzung nicht vom selben topologischen Typ und zwei-dimensional zu sein. Diese Verpflanzung kann gebraucht werden, um Vergleichsfunktionen für ein Extremalprinzip zu konstruieren. Wir werden sie hier in einer allgemeineren Form als in [10] wiedergeben.

Es sei G ein Ringgebiet der (x^1, x^2)-Ebene, dessen Rand in zwei Klassen Γ_0 und Γ_1 zerfällt (vgl. §2, 1), und

$$L = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

---

[4]) D. Banks, *Bounds for the Eigenvalues of some Vibrating Systems*, Pac. J. Math. *10*, Nr. 2, 473 (1960).

Ähnliche Ungleichungen finden sich auch in der Arbeit von J. Hersch, *Propriétés de convexité du type de Weyl pour des problèmes de vibration ou d'équilibre*, ZAMP *12*, Nr. 4, 308, 315 (1961).

ein in G definierter, selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator. $a^{ij}(x^1, x^2)$ seien stetig differenzierbar in x^1 und x^2. Wir betrachten das Randwertproblem

Problem IV:

$$\begin{aligned} L[h] &= 0 \quad \text{in} \quad G \\ h &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_0 \\ h &= 1 \quad \text{auf} \quad \Gamma_1 . \end{aligned}$$

Wir werden mit Γ_λ die Niveaulinien $h=\lambda$ bezeichnen und mit $\vec{n}$ diejenige Normale, für die $\partial h/\partial n>0$. Wegen des Maximumprinzips von E. Hopf siehe z.B. [6] nimmt h sein Maximum und Minimum auf dem Rand Γ an. Unter dem *verallgemeinerten Modul* verstehen wir die Grösse

$$\bar{\mu} = 1 \Big/ \iint\limits_G a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) dx^1\, dx^2 .$$

Der Divergenzsatz besagt für dieses spezielle h

$$\left.\begin{aligned} \oint\limits_{\Gamma_1} a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) n_i\, ds &= \oint\limits_{\Gamma} h a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) n_i\, ds \\ &= \iint\limits_G a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) dx^1\, dx^2 = \bar{\mu}^{-1} \quad (\vec{n} = (n_1, n_2)). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Ferner gilt

$$-\oint\limits_{\Gamma_\lambda} a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right) n_j\, ds + \oint\limits_{\Gamma_1} a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right) n_j\, ds = \iint\limits_{G_\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right)\right) dx^1\, dx^2 = 0 . \tag{29}$$

Wir berechnen nun

$$\bar{D}(f) = \iint\limits_G a^{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) dx^1\, dx^2$$

für eine Funktion $f(x^1, x^2) = v(h(x^1, x^2))$. Es ist

$$\bar{D}(f) = \int\limits_{\lambda=0}^{1} v'^2(\lambda) \oint\limits_{\Gamma_\lambda} a^{ij}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x^j}\right) dn\, ds . \tag{30}$$

Aus (28) und (29) folgt

$$\bar{D}(f) = \int_0^1 v'^2(\lambda)\, d\lambda \frac{1}{\bar{\mu}}. \tag{31}$$

Dank (31) sind wir in der Lage, eine Funktion $f(x^1, x^2) = v(h)$, die in G definiert ist, so in ein Gebiet $\tilde{G}$ mit demselben Modul $\bar{\mu}$ zu verpflanzen, dass das Dirichletintegral $\bar{D}$ unverändert bleibt. Es sei $\tilde{h}$ die Lösung von Problem IV für das Ringgebiet $(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1)$. Wir setzen $\tilde{f} = v(\tilde{h})$. $\tilde{f}$ ist in $\tilde{G}$ definiert. Nach (31) gilt

$$\bar{D}_G(f) = \bar{D}_{\tilde{G}}(\tilde{f}) \tag{32}$$

Eigenschaften von $\bar{\mu}$: $\bar{\mu}$ ist durch das Variationsprinzip

$$\bar{\mu}^{-1} = \operatorname*{Min}_{\substack{f=0 \text{ auf } \Gamma_0 \\ f=1 \text{ auf } \Gamma_1}} \bar{D}(f) \tag{33}$$

gekennzeichnet. Wir geben durch $\Psi(P) = \lambda$, wobei $\Psi = 0$ auf Γ_0 und $\Psi = 1$ auf Γ_1, ein System von Niveaulinien vor. Nun suchen wir eine Funktion $f(P) = v(\Psi(P))$, für die $\bar{D}(f)$ möglichst klein wird. f in (33) eingesetzt ergibt

$$\bar{\mu}^{-1} \leqslant \operatorname*{Min}_{\substack{v(0)=0 \\ v(1)=1}} \int_0^1 v'^2(\lambda)\, d\lambda \oint_{\Gamma_\lambda} a^{ij}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) n_j\, ds. \tag{34}$$

Γ_λ bedeutet die Niveaulinie $\Psi = \lambda$. Wir definieren

$$T(\lambda) = \oint_{\Gamma_\lambda} a^{ij}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) n_j\, ds.$$

BEHAUPTUNG: $T(\lambda)$ ist positiv.
$\operatorname{grad} \Psi = (\partial \Psi / \partial n)\, \vec{n}$, wobei $\partial \Psi / \partial n > 0$. Somit gilt

$$a^{ij}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) n_j = \frac{\partial \psi}{\partial n}\, a^{ij} n_i n_j.$$

Da L ein elliptischer Operator ist, ist $a^{ij} n_i n_j > 0$. Wegen der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\int_0^1 v'^2(\lambda)\, T(\lambda)\, d\lambda \geqslant \left\{\int_0^1 v' d\lambda\right\}^2 \left\{\int_0^1 \frac{d\lambda}{T(\lambda)}\right\}^{-1} = \left\{\int_0^1 \frac{d\lambda}{T(\lambda)}\right\}^{-1}. \tag{35}$$

Aus (34) und (35) folgt

$$\bar{\mu} \geqslant \int_0^1 \frac{d\lambda}{T(\lambda)}. \tag{36}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Niveaulinien von Ψ mit denjenigen von h zusammenfallen. Wir bezeichnen mit $d\bar{\mu}$ den Modul des Gebietes, für das $\lambda \leqslant \Psi \leqslant \lambda + d\lambda$. Wegen (28) gilt

$$d\bar{\mu}^{-1} = \frac{1}{d\lambda} \oint_{\Gamma_\lambda} a^{ij}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right) n_j \, ds = \frac{1}{d\lambda} T(\lambda) = \oint_{\Gamma_\lambda} a^{ij} n_i n_j \frac{ds}{dn}. \tag{37}$$

Aus (36) und (37) folgt $\bar{\mu} \geqslant \int_0^1 d\bar{\mu}(\lambda)$, d.h. $\bar{\mu}$ ist superadditiv. Diese Überlegungen stützten sich auf [19, S. 46].

2.5 *Untere Schranken für die Torsionssteifigkeit von mehrfach zusammenhängenden Gebieten*

$G \subset \mathfrak{M}$ sei ein Gebiet, das von endlich vielen disjunkten Jordankurven berandet wird: der äusseren Randkurve Γ_0 und den inneren Randkurven $\Gamma_1^{(j)}$ $j=1,\ldots,n$. $G_1^{(j)}$ bezeichnen das Innere von $\Gamma_1^{(j)}$ $j=1,\ldots,n$ und D das Innere von Γ_0. Es sei $G_1 = \bigcup_{j=1}^n G_1^{(j)}$ und $\Gamma_1 = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_1^{(j)}$. Wir betrachten das

Problem V:

$$\Delta u = -1 \quad \text{in} \quad G$$
$$u = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_0, \; u = c_j \quad \text{auf} \quad \Gamma_1^{(j)} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

wobei die c_j durch die Beziehung $\oint_{\Gamma_1^{(j)}} \partial u/\partial n \, ds = A_j$ (A_j Fläche von $G_1^{(j)}$, n innere Normale von $G_1^{(j)}$) bestimmt sind. In der Ebene handelt es sich um das Torsionsproblem eines Stabes mit dem Querschnitt G. Die Torsionssteifigkeit stimmt bis auf einen Faktor mit dem Dirichletintegral überein

$$S = D_G(u) = \iint_G u \, dA + \sum_{j=1}^n c_j A_j. \tag{38}$$

S ist durch die folgenden Extremaleigenschaften charakterisiert [20]:

$$S = \operatorname*{Max}_v \left\{ 2 \iint_D v \, dA - D_D(v) \right\} \tag{39}$$

$$S = \operatorname*{Max}_v \frac{\left(\iint_D v \, dA \right)^2}{D_D(v)}. \tag{40}$$

In beiden Fällen durchläuft v alle stückweise stetig differenzierbaren Funktionen, welche längs Γ_0 verschwinden und in $G_1^{(j)}$ $j=1,\ldots,n$ konstante Werte annehmen. Das Maximum wird nur bei der Lösung u des Problems V erreicht.

SATZ 5: *Von allen Gebieten mit dem Modul $\mu_0=\mu_{\Gamma_0\Gamma_1}$ (vgl. §2, 1), der Fläche der inneren „Löcher" A_1 $(A_1=A(G_1))$ und der Krümmung $\omega_K^+(D)<2\pi$ hat der Kreisring $\hat{G}=T_{\omega^+{}_K(D)}(D)\setminus T_{\omega^+{}_K(D)}(G_1)$ auf einem Kreiskegel in einem Raum konstanter Krümmung K die kleinste Torsionssteifigkeit. Wenn $K>0$, muss $KA(D)\leqslant 2\pi-\omega_K^+(D)$ vorausgesetzt werden.*

Beweis: Wir werden mittels der harmonischen Verpflanzung eine Vergleichsfunktion für das Extremalprinzip (40) konstruieren. Die Lösung $\hat{u}$ von Problem V in $\hat{G}$ hat dieselben Niveaulinien wie die harmonische Funktion $\hat{h}$ in $\hat{G}$, die auf $\hat{\Gamma}_0$ (Rand von $T_{\omega^+{}_K(D)}(D)$) den Wert 0 und auf $\hat{\Gamma}_1$ (Rand von $T_{\omega^+{}_K(D)}(G_1)$) den Wert 1 annimmt. h sei die entsprechende Funktion in G mit $h=0$ auf Γ_0 und $h=1$ auf Γ_1. $\hat{u}$ hat die Form $\hat{u}=\Psi(\hat{h})$. Wir setzen $v=\Psi(h)$. Es sei ferner

$$V=\begin{cases} v & \text{in } G \\ \Psi(1) & \text{in } G_1. \end{cases}$$

V ist eine zulässige Funktion für (40). Also gilt

$$S\geqslant\frac{\left(\iint\limits_D V\,dA\right)^2}{D_D(V)}=\frac{\left(\iint\limits_G v\,dA+A_1\Psi(1)\right)^2}{D_G(v)}. \tag{41}$$

Wegen der Invarianz des Dirichletintegrals gegenüber harmonischer Verpflanzung folgt

$$D_G(v)=D_{\hat{G}}(\hat{u}). \tag{42}$$

Um den Zähler von (41) abzuschätzen gehen wir folgendermassen vor:

$\Gamma(\mu)$ bzw. $\hat{\Gamma}(\mu)$ bezeichnen die Niveaulinien $h=1-(\mu/\mu_0)$ bzw. $\hat{h}=1-(\mu/\mu_0)$. Wie man leicht nachprüft, ist μ der Modul der Gebiete

$$G_{1-(\mu/\mu_0)}=\left\{P;\,P\in G,\,h(P)\geqslant 1-\frac{\mu}{\mu_0}\right\}$$

und

$$\hat{G}_{1-(\mu/\mu_0)}=\left\{P;\,P\in\hat{G},\,\hat{h}(P)\geqslant 1-\frac{\mu}{\mu_0}\right\}.$$

Wir führen μ als Parameter ein und erhalten

$$\iint\limits_G v\,dA=\int\limits_0^{\mu_0}\tilde{\Psi}(\mu)\frac{dA}{d\mu}\,d\mu,\quad\text{wobei}\quad\tilde{\Psi}(\mu)=\Psi\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right). \tag{43}$$

Wegen (14) aus §2, 1 und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\frac{dA}{d\mu} = \oint_{\Gamma(\mu)} dn\, ds \oint_{\Gamma(\mu)} ds/dn \geqslant \left\{ \oint_{\Gamma(\mu)} ds \right\}^2 = L^2(\Gamma(\mu)). \tag{44}$$

LEMMA 3: $L(\Gamma(\mu)) \geqslant L(\hat{\Gamma}(\mu))$

Beweis des Lemmas: Auf Grund von Satz 2 (§2, 1) ist

$$A(G_1 - (\mu/\mu_0)) \geqslant A(\hat{G}_1 - (\mu/\mu_0)). \tag{45}$$

Die Fläche des Gebietes, das nur von $\Gamma(\mu)$ bzw. $\hat{\Gamma}(\mu)$ begrenzt wird, ist $A' = A(G_{1-(\mu/\mu_0)}) + A_1$ bzw. $\hat{A}' = A(\hat{G}_{1-(\mu/\mu_0)}) + A_1$. Berücksichtigt man, dass $f(A) = (4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA)A$ für

$$A = \begin{cases} [0, \infty) & \text{falls} \quad K \leqslant 0 \\ [0, (2\pi - \omega_K^+(D))/K] & \text{falls} \quad K > 0 \end{cases}$$

monoton wachsend ist, so folgt mit Hilfe von (45) und der isoperimetrischen Ungleichung (c) aus §1, 1.2

$$L^2(\Gamma(\mu)) \geqslant A'(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA') \geqslant \hat{A}'(4\pi - 2\omega_K^+(D) - K\hat{A}') = L^2(\hat{\Gamma}(\mu)).$$

Wegen (43), (44) und Lemma 3 folgt

$$\iint_G v\, dA \geqslant \int_0^{\mu_0} \tilde{\Psi} L^2(\hat{\Gamma}(\mu))\, d\mu = \iint_{\hat{G}} \hat{u}\, dA. \tag{46}$$

Durch Einsetzen von (46) in (41) ergibt sich die Behauptung.

Sind u_j und u_0 die Lösungen des Problems II für die Gebiete $G_1^{(j)}$ bzw. D, und wählt man in (39)

$$v = \begin{cases} u_j + c_j & \text{in} \quad G_1^{(j)} \quad j = 1, \ldots, n \\ u & \text{in} \quad G = D \setminus G_1 \end{cases}$$

(u Lösung von Problem V in G), so folgt die Ungleichung von Weinberger [24]

$$S + \sum_{j=1}^{n} D_{G_1^{(j)}}(u_j) \leqslant D_D(u_0). \tag{47}$$

Das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn $\Gamma_1^{(j)}$ mit einer Niveaulinie von μ_0 zusammenfällt.

Ähnlich wie in §2, 2.2 lassen sich mit Hilfe von Satz 5 und der Ungleichung (47) die nächsten Korollare beweisen.

KOROLLAR 7: *G_j $j=1,\dots,n$ seien einfach zusammenhängende, ebene Gebiete ($G_j \cap G_i = \phi$ für $i \neq j$), die in einem Jordangebiet G_0 der z-Ebene liegen. Γ_i $i=0, 1,\dots, n$ stelle den Rand von G_i, u_i die Lösung von* III *in G_i dar, d.h. $\Delta u_i = -\varrho(z)$ in G_i, $u_i = 0$ auf Γ_i. $\varrho(z)$ erfülle die gleichen Bedingungen wie in* §2, 2.2. *Wenn $\omega^+(G_0) < 2\pi$, so gilt*

$$D_{G_0}(u_0) - \sum_{j=1}^{n} D_{G_j}(u_j) \geqslant \frac{M_1^2}{4\alpha}(e^{4\alpha\mu_0} - 1),$$

wobei $\alpha = 2\pi - \omega^+(G_0)$, $M_1 = \sum_{j=1}^{n} \iint_{G_j} \varrho \, dx\, dy$, $\mu_{\Gamma_0\Gamma'} = \mu_0$ Modul von $G_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} G_j$, $\Gamma' = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j$.

Das Gleichheitszeichen tritt ein, wenn $j=1$, $\varrho(z) = |z|^{-\omega^+(G_0)/\pi}$ und sowohl G_0 als auch G_1 ein Kreis um den Ursprung ist.

KOROLLAR 8: *Von allen mehrfach zusammenhängenden, ebenen Gebieten mit dem Modul $\mu_{\Gamma_0\Gamma_1} = \mu_0$ und der Fläche der inneren Löcher A_1 hat der Kreisring die kleinste Torsionssteifigkeit, d.h.*

$$S \geqslant \frac{A_1^2}{8\pi}(e^{8\pi\mu_0} - 1).$$

Zusammen mit dem Satz von Pólya-Weinstein [20] ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{A_1^2}{8\pi}(e^{8\pi\mu_0} - 1) \leqslant S \leqslant \frac{(A_1 + A)^2 - A_1^2}{8\pi} \qquad (A\text{: Fläche von } G).$$

3. Eigenwertprobleme

3.1 *Homogene schwingende Membran aud einer Mannigfaltigkeit*

$G \subset \mathfrak{M}$ sei ein Gebiet, das in einem Jordangebiet $D \subset \mathfrak{M}$ liegt. Der Rand von G sei Γ. Das Problem der homogenen schwingenden Membran lautet:

Problem VI:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \text{in} \quad G \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, dass dieses Problem lösbar sei, und dass eine abzählbare Menge positiver Eigenwerte existiere. Der kleinste ist durch das Rayleighprinzip

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{v=0 \text{ auf } \Gamma} \frac{D(v)}{\iint_G v^2 \, dA} \tag{48}$$

charakterisiert. Das Minimum wird bei der ersten Eigenfunktion von Problem VI

angenommen. Peetre hat eine untere Schranke für λ_1 angegeben [16]. Der nachfolgende Satz stellt eine Verallgemeinerung und teilweise Verschärfung jenes Ergebnisses dar.

SATZ 6: *Falls* $\omega_K^+(D) < 2\pi$ *ist, gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \operatorname*{Min}_{v(A)=0} \frac{\int_0^A a(4\pi - 2\omega_K^+(D) - Ka)\, v'^2(a)\, da}{\int_0^A v^2(a)\, da} \qquad \left(A = \iint_G \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\right). \tag{49}$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn G der Mantelfläche eines Kreiskegels in einem Raum konstanter Krümmung K isometrisch ist.

Beweis: Wir wenden das Rayleighprinzip (48) für $\hat{\lambda}_1$ im Extremalgebiet $\hat{G} = T_{\omega^+ K(D)}(G)$ an und wählen als Vergleichsfunktion $v = T_{\omega^+ K(D)} u$, wobei u die erste Eigenfunktion von Problem VI in G ist. Das gibt

$$\hat{\lambda}_1 \leqslant \frac{D_{\hat{G}}(v)}{\iint_{\hat{G}} v^2\, dA} \leqslant \frac{D_G(u)}{\iint_G u^2\, dA} = \lambda_1 .$$

Die letzte Ungleichung folgt aus Satz 1 und (5) (§1, 2.2). Bei der Berechnung von $\hat{\lambda}_1$ ist zu beachten, dass die Niveaulinien $\hat{\Gamma}_\lambda$ von $\hat{u}$ konzentrische Kreise auf $\hat{G}$ sind. Folglich gilt nach Lemma 1 (§1, 2.2)

$$D_{\hat{G}}(\hat{u}) = \int_0^1 \frac{L^2(\lambda)}{-A'(\lambda)}\, d\lambda ,$$

wobei $L(\lambda)$ die Länge der Niveaulinie $\hat{\Gamma}_\lambda$ und $A(\lambda)$ die Fläche von $\hat{G}_\lambda$ bezeichnen. Es darf o.B.d.A. angenommen werden, dass $0 \leqslant \hat{u} \leqslant 1$. $L(\lambda)$ lässt sich in diesem Fall durch $A(\lambda)$ ausdrücken (vgl. §1, 1.2 (c)). Somit ist

$$D_{\hat{G}}(\hat{u}) = \int_0^1 \frac{A(\lambda)\,(4\pi - 2\omega_K^+(D) - KA(\lambda))}{-A'(\lambda)}\, d\lambda$$

und wegen (48)

$$\hat{\lambda}_1 = \operatorname*{Min}_{v(A)=0} \frac{\int_0^A a(4\pi - 2\omega_K^+(D) - Ka)\, v'^2(a)\, da}{\int_0^A v^2(a)\, da}. \tag{50}$$

Wir erwähnen wiederum die beiden Spezialfälle

KOROLLAR 9: *Wenn* $\omega^+(D) < 2\pi$ *ist, gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{(2\pi - \omega^+(D))\, j_0^2}{2A}$$

($j_0 = 2{,}4048\ldots$ erste Nullstelle der Besselfunktion nullter Ordnung)

Das Gleichheitszeichen steht nur bei Gebieten, die der Mantelfläche eines Kreiskegels isometrisch sind.

KOROLLAR 10: *Wenn* $\omega(B)/A(B) \leqslant K$ *für alle Gebiete* $B \subset D$ *ist, dann gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \operatorname*{Min}_{v(A)=0} \frac{\int_0^A a(4\pi - Ka)\, v'^2(a)\, da}{\int_0^A v^2(a)\, da}.$$

Das Gleichheitszeichen steht bis auf Isometrie nur bei den geodätischen Abstandskreisen auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung K.

Beispiele: 1) G sei ein Gebiet auf einem Polyeder. E_i $i = 1, \ldots, n$ seien seine Ecken innerhalb G und ω_i die entsprechenden Eckenkrümmungen. Nach Korollar 9 folgt

$$\lambda_1 \geqslant \frac{(2\pi - \sum_{\omega_i > 0} \omega_i)\, j_0^2}{2A}.$$

2) Eine Folgerung aus Korollar 10 lautet: Von allen Gebieten mit gegebenem Flächeninhalt auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung hat der Kreis den kleinsten ersten Eigenwert. Dieser Satz wurde schon von Peetre [16] für beliebige Dimensionen bewiesen.

Bemerkung A: Die rechte Seite von (50) kann als erster Eigenwert eines homogenen Seiles der Länge A und mit dem Elastizitätskoeffizienten $k(a) = a(4\pi - 2\omega_K^+(D) - Ka)$ aufgefasst werden, das rechts eingespannt und links frei ist. Die zugehörige Differentialgleichung ist $(k(a)\, v'(a))' + \nu v(a) = 0$ in $(0, A)$, $v(A) = 0$ und $v(0)$ beschränkt. K war bis auf die Bedingung $\omega_K^+(D) < 2\pi$ eine willkürliche Konstante. Wir setzen nun die Existenz der Gauss'schen Krümmung voraus. Verwendet man bei der Abschätzung des Dirichletintegrals (Lemma 1, § 1, 2.2) anstelle von Ungleichung (c) die schärfere Ungleichung (c'), so erhält man das Ergebnis:

Voraussetzungen: $K_0(a)$ sei durch die Beziehung

$$2\iint_D (K_G - K_0)^+ \, dA = a$$

(vgl. §1, 1.2) bestimmt. Wir setzen $k_0(a) = a(4\pi - 2\omega^+_{K_0(A)}(D) - K_0(a)\,a)$. Es gelte $\omega^+_{K_0(A)}(D) < 2\pi$.

Behauptung: $\lambda_1 \geqslant \tilde{\nu}_1$, wobei $\tilde{\nu}_1$ der erste Eigenwert des Seiles ist, das durch die Differentialgleichung $(k_0(a)\,v'(a))' + \tilde{\nu} v(a) = 0$ in $(0, A) = 0$ und $v'(0) = 0$ wenn $k_0(0) \neq 0$, sonst $v(0)$ endlich, beschrieben wird.

Beispiel: $G \subset \mathfrak{M}$ sei ein Jordangebiet mit $K_m \leqslant K_G \leqslant K_M$ in G. $B \subset G$ bedeute den Bereich, für den $K_G = K_M$. Wir treffen folgende Annahmen: $A(B) \geqslant A/2$, wobei $A = A(G)$, und $K_M A < 4\pi$. Nach dem obigen Resultat gilt

$$K_0(a) = a(4\pi - K_M a).$$

3.2 *Inhomogene schwingende Membran in der Ebene*

Wir werden in diesem Abschnitt stets voraussetzen, dass G ein Jordangebiet in der (x, y)-Ebene sei. Γ bedeute den Rand von G. Das Problem der inhomogenen schwingenden Membran in G mit der Massendichte $\varrho(x, y)$ lautet:

Problem VII:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + \lambda \varrho u &= 0 \quad \text{in} \quad G \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

Genau gleich wie in §2, 2.2 schliesst man von Satz 6 auf

SATZ 7: $\ln \varrho$ *sei die Differenz zweier subharmonischer Funktionen und besitze die Darstellung* (24) (§2, 2.2)

$$\ln \varrho = -\frac{1}{\pi} \iint_G \ln |P - Q| \, \omega(dA_Q) + h(P).$$

$\omega^+_K(B) - \omega^-_K(B)$ *sei die Jordansche Zerlegung von* $\omega_K(B) = \omega(B) - KM(B)$, *wobei* $M(B) = \iint_B \varrho \, dx \, dy$ (vgl. §1, 1.1, §2, 2.2). *Falls* $\omega^+_K(G) < 2\pi$ *ist, gilt:*

$$\lambda_1 \geqslant \operatorname*{Min}_{v(M)=0} \frac{\int_0^M a(4\pi - 2\omega_K^+(G) - Ka)\, v'^2(a)\, da}{\int_0^M v^2(a)\, da}$$

$$\left(M = \iint_G \varrho\, dx\, dy\text{: totale Masse}\right).$$

Das Gleichheitszeichen steht beim Kreis um den Ursprung mit

$$\varrho(z) = \frac{R^2(2 - \omega_K^+(G)/\pi)^2\, |z|^{-\omega_K{}^+(G)/\pi}}{\left[1 \pm |z|^{\frac{2\pi - \omega_K{}^+(G)}{\pi}}\right]^2}$$

für $K = \pm R^{-2}$ und bei allen konform äquivalenten Problemen.

$\varrho(z)$ wurde wiederum durch stereographische Projektion gewonnen (vgl. §2, 2.2). Als Spezialfälle seien erwähnt (vgl. §2, 2,2 Korollar 5 und 6):

KOROLLAR 11: *Falls $\omega^+(G) < 2\pi$ ist, gilt*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{2\pi - \omega^+(G)}{2M}\, j_0^2 \qquad (j_0 = 2{,}4048\ldots).$$

Das Gleichheitszeichen wird beim Kreis um den Ursprung mit $\varrho(z) = |z|^{-\omega^+(G)/\pi}$ angenommen.

Dieses Korollar stellt eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Nehari [14] dar. Ist nämlich $\ln \varrho$ subharmonisch, so gilt $\omega^+(G) = 0$ und somit $\lambda_1 \geqslant \pi j_0^2/M$.

In gewissen Fällen erlaubt Satz 7 die Schranke von Nehari zu verschärfen. Das nächste Korollar enthält eine solche Verschärfung.

KOROLLAR 12: *Unter der Bedingung $\omega(B) \leqslant KM(B)$ für beliebige Gebiet $B \subseteq G$ folgt*

$$\lambda_1 \geqslant \operatorname*{Min}_{v(M)=0} \frac{\int_0^M a(4\pi - Ka)\, v'^2(a)\, da}{\int_0^M v^2(a)\, da}.$$

Das Gleicheitszeichen steht bei beliebigen Kreisen mit

$$\varrho(z) = 4R^2(1 \pm |z|^2)^{-2} \quad \textit{für} \quad K = \pm R^{-2}.$$

3.3 *Obere Schranken für den ersten Eigenwert einer Membran*

$G \subset \mathfrak{M}$ sei ein Gebiet, das von endlich vielen disjunkten Jordankurven $\Gamma^{(j)}$ $j=0, 1, \ldots, m$ begrenzt wird. $\Gamma^{(0)}$ bedeute die äussere Randkurve und $D \subset \mathfrak{M}$ das Jordangebiet innerhalb $\Gamma^{(0)}$, das G enthält. In G definieren wir das Problem der elastisch gebundenen Membran:

Problem VIII:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{in} \quad G$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k_i(s)\, u = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

(n ist die äussere Normale von G bezüglich der Metrik g_{ij}, $k_i(s) \geqslant 0$ eine stetige Funktion der Bogenlänge s auf $\Gamma^{(i)}$)

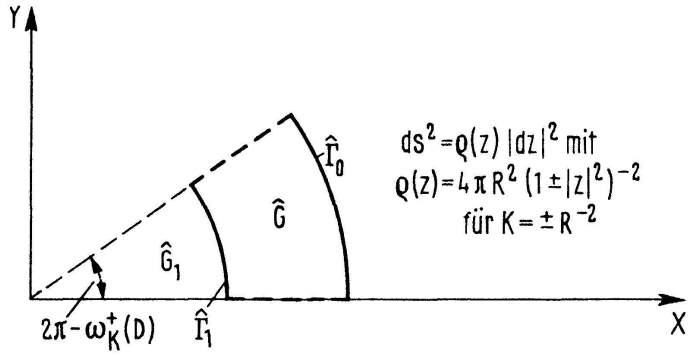
Der kleinste Eigenwert ist durch das Rayleighprinzip

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{v} \frac{D(v) + \sum_{j=0}^{m} \oint_{\Gamma^{(j)}} k_j v^2\, ds}{\iint_G v^2\, dA}, \tag{51}$$

wobei v beliebige, stückweise stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, charakterisiert. Das Minimum wird von der ersten Eigenfunktion u geliefert.

Neben Problem VIII betrachten wir das Problem I in G (§2, 1), wobei wir $\Gamma_0 = \bigcup_{j=0}^{s} \Gamma^{(j)}$ und $\Gamma_1 = \bigcup_{j=s+1}^{m} \Gamma^{(j)}$ setzen. Der Modul $\mu_{\Gamma_0 \Gamma_1}$ sei μ_0 (§2, 1), $G_1 = \bigcup_{j=s+1}^{m} G^{(j)}$, wobei $G^{(j)}$ das Gebiet innerhalb $\Gamma^{(j)}$ bezeichnet. A_1 ist die Fläche von G_1, $K_0 = \sum_{j=0}^{s} \oint_{\Gamma^{(j)}} k_j\, ds$ und $K_1 = \sum_{j=s+1}^{m} \oint_{\Gamma^{(j)}} k_j\, ds$ die totale Federung von Γ_0 und Γ_1.

$\hat{G}$ sei ein Kreisring auf einem Kreiskegel in einem Raum konstanter Krümmung K mit dem vollen Winkel $2\pi - \omega_K^+(D)$ in der Spitze ($\omega_K^+(D) < 2\pi$). Der Rand von $\hat{G}$ setzt sich aus zwei Kreislinien $\hat{\Gamma}_0$ und $\hat{\Gamma}_1$ zusammen, wobei $\hat{\Gamma}_1$ die jenige mit dem kürzeren Abstand zur Kegelspitze ist (Fig. 1.). $\hat{G}_1$ bezeichne das Gebiet innerhalb $\hat{\Gamma}_1$ auf dem Kegel.



Figur 1.

Wir treffen folgende Annahmen: $A(\hat{G}_1)=A_1$ ($\hat{G}_1$ hat den gleichen Flächeninhalt wie G_1), $\hat{G}$ habe den gleichen Modul μ_0 wie G. Daraus folgt, dass $L(\hat{\Gamma}_0)=2\alpha A_1 L_1 e^{\alpha\mu_0}/(L_1^2+KA_1^2 e^{2\alpha\mu_0})$ mit $\alpha=2\pi-\omega_K^+(D)$ und $L_1^2=A_1(2\alpha-KA_1)$.

Wir betrachten die Membran

$$\Delta\hat{u}+\hat{\lambda}\hat{u}=0 \quad \text{in} \quad \hat{G}, \frac{\partial\hat{u}}{\partial n}+\frac{K_i}{L(\hat{\Gamma}_i)}\hat{u}=0 \quad \text{auf} \quad \hat{\Gamma}_i \quad i=0,1. \tag{52}$$

SATZ 8: *Unter den in* §2, 3.3 *erwähnten Voraussetzungen gilt* $\lambda_1\leqslant\hat{\lambda}_1$. Wenn $K>0$ ist, muss zusätzlich $A(D)<(2\pi-\omega^+(D))/K$ gefordert werden.

Beweis: Aus Symmetriegründen hat die erste Eigenfunktion $\hat{u}$ von (52) dieselben Niveaulinien wie $\hat{h}$ (vgl. §2, 1 und §2, 2.5). Wir schreiben $\hat{u}=\Psi(\hat{h})$. $\hat{u}$ kann harmonisch nach G verpflanzt werden. Wir setzen die verpflanzte Funktion $v=\Psi(h)$ in das Rayleighprinzip (51) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &\leqslant \frac{D_G(v)+\sum_{j=0}^{s}\oint_{\Gamma(j)} k_j v^2\,ds+\sum_{j=s+1}^{m}\oint_{\Gamma(j)} k_j v^2\,ds}{\iint_G v^2\,dA}\\ &\leqslant \frac{D_{\hat{G}}(\hat{u})+K_0\Psi^2(0)+K_1\Psi^2(1)}{\iint_{\hat{G}}\hat{u}^2\,dA}=\hat{\lambda}_1.\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Die zweite Ungleichung von (53) ergibt sich aus den gleichen Überlegungen wie in §2, 2.5 (42), (43)..., (46). Insbesondere wird dort gezeigt, weshalb man für positive K eine zusätzliche Voraussetzung verlangen muss.

Dieser Satz verallgemeinert denjenigen von Gasser-Hersch [8]. Es lassen sich folgende Folgerungen ziehen:

KOROLLAR 13: *Von allen eingespannten Membranen mit gegebenem Modul, fester Fläche* der *"innern Löcher" und vorgegebener Krümmung* $\omega^+(D)$ *hat der Kreisring auf einem Kreiskegel den grössten ersten Eigenwert.*

KOROLLAR 14: *Von allen Membranen von gegebenem Modul, fester Fläche* A_1 *und mit der Gauss'schen Krümmung* $K_G\leqslant K$ *in* D, *die längs* Γ_1 *frei und längs* Γ_0 *eingespannt sind, hat der Kreisring auf einer Fläche konstanter Gauss'scher Krümmung* K *den grössten ersten Eigenwert. Wenn* $K>0$, *muss* $A(D)<2\pi/K$ *vorausgesetzt werden.*

3.4 *Allgemeinere Eigenwertprobleme*

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

G: n-dimensionales, beschränktes Gebiet im R^n
Γ: Randfläche von G

$$(u, v)_\varrho = \int_G u(\vec{x})\, v(\vec{x})\, \varrho(\vec{x})\, dV,$$

L sei ein bezüglich der Metrik $(\ )_\varrho$ $\varrho > 0$ selbstadjungierter, elliptischer Operator zweiter Ordnung in G. Er lässt sich allgemein in der Form [6]

$$L = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\varrho a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + b$$

darstellen, wobei $a^{ij} = a^{ji}$ ist. Wegen der Elliptizität von L ist $a^{ij}\xi_i\xi_j$ eine positiv definite quadratische Form in G. Wir werden von nun an stets voraussetzen, dass $b \geqslant 0$ in G. Nun betrachten wir das Eigenwertproblem

Problem IX:

$$\begin{aligned} L[u] &= \lambda u \quad \text{in} \quad G \qquad (u \in C^2) \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma \end{aligned}$$

Der kleinste Eigenwert ist durch die Extremaleigenschaft

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{v=0 \text{ auf } \Gamma} \frac{\displaystyle\int_G a^{ij}\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x^j}\right)\varrho\, dV + \int_G bv^2\varrho\, dV}{\displaystyle\int_G v^2\varrho\, dV} \tag{54}$$

gekennzeichnet. Die Vergleichsfunktionen v seien stückweise stetig differenzierbar. Die folgenden Betrachtungen stammen von Peetre [17]. Um λ_1 besser abschätzen zu können, benützen wir das Hilfsproblem

Problem IX′:

$$\begin{aligned} A[u'] &= \lambda' u' \quad \text{in} \quad G \\ u' &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma \end{aligned}$$

wobei

$$A[u'] = -\frac{1}{\sqrt{c}}\Delta(\sqrt{c}u') + \left(b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)u', \qquad a = 1/\mathrm{Det}(a^{ij}),$$

$$c = \frac{\varrho}{\sqrt{a}}, \qquad \Delta = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a}\, a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Das Rayleighprinzip für λ_1' lautet

$$\lambda_1' = \operatorname*{Min}_{v=0 \text{ auf } \Gamma} \frac{\int_G \nabla(\sqrt{c}v, \sqrt{c}v)\sqrt{a}\,dV + \int_G \left(b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right) v^2 \varrho\,dV}{\int_G v^2 \varrho\,dV}. \tag{55}$$

Setzt man für $\sqrt{c}\,u, = \tilde{u}$, so geht IX′ über in

Problem X:

$$\Delta\tilde{u} + \tilde{\lambda}\tilde{u} - \left(b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)\tilde{u} = 0 \quad \text{in} \quad G$$
$$\tilde{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma.$$

LEMMA 4 (Peetre): $\lambda_1 = \lambda_1' = \tilde{\lambda}_1$.

Beweis: Berücksichtigt man die Identitäten

$$\nabla(\sqrt{c}\,w, \sqrt{c}\,v) = c\nabla(w, v) + \nabla(\sqrt{c}, \sqrt{c}wv)$$
$$\nabla(\sqrt{c}, \sqrt{c}\,wv) = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a}\,a^{ij}\sqrt{c}\,wv\frac{\partial(\sqrt{c})}{\partial x^j}\right) - \sqrt{c}\,wv\,\Delta\sqrt{c},$$

und setzt diese in (55) ein, so folgt mit Hilfe von (54) unmittelbar die Behauptung.

Folgerungen

1) Infolge des Lemma 4 gilt für den ersten Eigenwert von Problem IX

$$\nu_1 + \inf_G\left(b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right) \leqslant \lambda_1 \leqslant \nu_1 + \sup_G\left(b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right). \tag{56}$$

ν_1 ist der erste Eigenwert von $\Delta u + \nu u = 0$ in G, $u = 0$ auf Γ, wobei unter Δ der Beltramioperator bezüglich der Metrik a_{ij} (a^{ij} kontravariante Komponenten des metrischen Tensors) zu verstehen ist. Obere und untere Schranken für ν_1 liefern gleichzeitig Schranken für λ_1. Das Gleichheitszeichen steht in (56) nur, wenn $b + (\Delta\sqrt{c}/\sqrt{c})$ fast überall konstant ist.

2) Das Lemma 3 ermöglicht es, Ergebnisse, die in [11] für spezielle Eigenwertprobleme bewiesen worden sind, auf allgemeinere vom Typ IX zu übertragen.

KOROLLAR 15: *Wenn λ_1 der erste Eigenwert des Problems IX ist, gilt*

$$\lambda_1 = \operatorname*{Max}_{\vec{p}} \inf_G \left\{b + \frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i) - a_{ij}p^ip^j\right\}$$

[[$\vec{p}=(p^1,p^2,\cdots,p^n)$, wobei p^i nach x^i differenzierbar ist, $a=1/\mathrm{Det}(a^{ij})$, $c=\varrho/\sqrt{a}$, $a_{ij}=(a^{ij})^{-1}$.]]

Beweis: $\tilde{u}$ sei die erste Eigenfunktion von Problem X. Es gelten folgende Umformungen:

$$\left(a_{ij}p^ip^j-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i)\right)\tilde{u}^2=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i\tilde{u}^2)+a_{ij}p^ip^j\tilde{u}^2+2\tilde{u}p^i\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x^i} \tag{57}$$

und unter Berücksichtigung der Schreibweise $\tilde{u}_i=\partial\tilde{u}/\partial x^i$ und $\tilde{u}^i=a^{ij}\tilde{u}_j$

$$\left.\begin{aligned}&a^{ij}\tilde{u}_i\tilde{u}_j+\left[a_{ij}p^ip^j-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i)\right]\tilde{u}^2\\&\quad=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i\tilde{u}^2)+\tilde{u}^i\tilde{u}_i+2\tilde{u}p^i\tilde{u}_i+p_jp^j\tilde{u}^2\\&\quad=-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i\tilde{u}^2)+a^{ij}(\tilde{u}_j+\tilde{u}p_j)(\tilde{u}_i+\tilde{u}p_i).\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Durch Integration von (58) ergibt sich auf Grund der Bedingung $\tilde{u}=0$ auf Γ und der Elliptizität von L

$$\int_G \nabla(\tilde{u},\tilde{u})\sqrt{a}\,dV+\int_G\left[a_{ij}p^ip^j-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i)\right]\tilde{u}^2\sqrt{a}\,dV\geqslant 0$$

und daraus

$$\int_G\left[\tilde{\lambda}_1-\left(b+\frac{\Delta\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)-\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{a}\,p^i)+a_{ij}p^ip^j\right]\tilde{u}^2\sqrt{a}\,dV\geqslant 0. \tag{59}$$

$\tilde{\lambda}_1$ ist der erste Eigenwert des Problems X. Auf Grund von (59) und Lemma 4 folgt die Behauptung. Das Maximum wird für $p_i=-\tilde{u}^i/\tilde{u}$ angenommen. Die linke Seite von (56) folgt unmittelbar aus dem Korollar 15 durch geeignete Wahl von p.

3) Setzt man in (57) $\sqrt{a}=\varrho$ und bedeutet u die erste Eigenfunktion von IX mit dem zugehörigen Eigenwert λ_1, so geht (58) über in

$$a^{ij}u_iu_j+\left[a_{ij}p^ip^j-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\varrho p^i)\right]u^2=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\varrho p^iu^2)+a^{ij}(u_j+up_j)(u_i+up_i). \tag{60}$$

Wie im Korollar 15 folgt

$$\int_G\left[\lambda_1-b-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\varrho p^i)+a_{ij}p^ip^j\right]u^2\varrho\,dV\geqslant 0$$

und daraus

KOROLLAR 16: *Es sei* $p=(p^1, p^2, \ldots, p^n)$, *wobei* p^i *je nach* x^i *für* $i=1, 2, \ldots, n$ *differenzierbar sind, dann gilt für* λ_1 *von* IX *das Maximumprinzip*

$$\lambda_1 = \operatorname*{Max}_{\vec{p}} \inf_G \left\{ b + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\varrho p^i) - a_{ij} p^i p^j \right\}.$$

Das Maximum wird für $p^i = -u^i/u$ $i=1, \ldots, n$ angenommen.

Bemerkung: Dieses Resultat steht in engem Zusammenhang mit einem Ergebnis von Hartman-Wintner [9].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. D. ALEXANDROW, *Die innere Geometrie der kovexen Flächen* (Berlin 1955).

[2] C. BANDLE, *Inégalités isopérimétriques pour des membranes vibrantes*, C. R. Acad. Sc. Paris *269* (1969), 1054.

[3] C. BANDLE, *Symétrisation de Schwarz „angulaire" et théorèmes isopérimétriques*, C. R. Acad. Sc. Paris *270* (1970), 294.

[4] C. BANDLE, Extremaleigenschaften von Kreissektoren und Halbkugeln, in Vorbereitung.

[5] T. CARLEMAN, *Über ein Minimalproblem der mathematischen Physik*, Math. Z. *1* (1918), 208–212.

[6] R. COURANT und D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics* (New York 1965), Bd. II.

[7] G. FABER, *Beweis, dass unter allen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt*, Sitz. bayer. Akad. Wiss. (1923), 169–172.

[8] T. GASSER und J. HERSCH, *Über die Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegö*, ZAMP *19* (1968), 672–675.

[9] P. HARTMAN und A. WINTNER, *On a comparison theorem for selfadjoint partial differential equations of elliptic type*, Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1955), 862–865.

[10] J. HERSCH, *Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimétriques*, Comm. Math. Helv. *44* (1969), 354–366.

[11] J. HERSCH, *Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante*, ZAMP *11* (1960), 387–413.

[12] A. HUBER, *Zur isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen*, Acta Math. *97* (1957), 95–101.

[13] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. *94* (1924), 97–100.

[14] Z. NEHARI, *On the principal frequency of a membrane*, Pacific J. Math. *8* (1958), 285–293.

[15] L. PAYNE, *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Review *9*, Nr. 3 (1967), 453–488.

[16] J. PEETRE, *A generalisation of Courant's nodal line theorem*, Math. Scand. *5* (1957), 15–20.

[17] J. PEETRE, *Estimates of the number of nodal domains*, Proc. Thirteenth Congress Math. Scand. (1957), 198–201.

[18] G. PÓLYA, *Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization*, Quart. Appl. Math. *6* (1948), 267–277.

[19] G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Princeton 1951).

[20] G. PÓLYA und A. WEINSTEIN, *On the torsional rigidity of multiply connected domains*, Ann. of Math. *52* (1950), 154–163.

[21] LORD RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, 2nd ed. (Macmillan, London 1894/96).

[22] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, I und II, Acta Math. *48* (1926), 329–343 und *54* (1930), 321–360.

[23] G. SZEGÖ, *Über einige neue Extremalaufgaben der Potentialtheorie*, Math. Z. *31* (1930), 583–593.

[24] H. F. WEINBERGER, *Upper and lower bounds for the torsional rigidity*, J. Math. and Phys. *32* (1953), 54–62.

Eingegangen, 19. Mai 1970