Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 46 (1971)

Artikel: Plongements de variétés différentiables orientées de dimension 4k dans R...

Autor: Boéchat, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35513

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Plongements de variétés différentiables orientées de dimension $4k$ dans $\mathbf{R}^{6k+1}$.

J. BOÉCHAT

Introduction

Le théorème général de la théorie du lissage des plongements, tel qu'il est énoncé dans [8], indique que pour lisser un plongement semi-différentiable $f: M^n \to \mathbf{R}^{n+q}$ d'une variété différentiable M^n, $q>2$, on rencontre des obstructions qui sont des éléments de $H^{l+1}(M^n, C_l^q)$, C_l^q étant le groupe des classes d'isotopie de plongements différentiables de la sphère S^l dans la sphère S^{l+q}. Pour $k \geqslant 1$ on sait que $C_l^{2k+1}=0$ pour $l<4k-1$ et $C_{4k-1}^{2k+1} \approx \mathbf{Z}$ (cf [7]); pour lisser un plongement semi-différentiable $f: M^{4k} \to \mathbf{R}^{6k+1}$, on rencontre donc une seule obstruction: un élément de $H^{4k}(M^{4k}, \mathbf{Z})$. Lorsque M^{4k} est close, connexe, orientée, on désigne par ω_f l'évaluation de cette obstruction sur la classe fondamentale de M^{4k}. Le but de ce travail est de calculer l'entier ω_f.

Dans une première partie, on associe à tout plongement semi-différentiable $f: M^n \to \mathbf{R}^{n+q}$ d'une variété différentiable M^n, close orientée, q impair $\geqslant 3$, une classe de cohomologie $w_f \in H^{q-1}(M^n, \mathbf{Z})$ qui ne dépend que de la classe d'isotopie de f. La réduction modulo 2 de w_f est la $(q-1)$ème classe de Stiefel-Whitney normale de M^n. On montre en particulier que si M^n est k-connexe et $q=n-k$, la classe w_f caractérise complètement la classe d'isotopie de f.

La seconde partie est consacrée à la démonstration du résultat principal:

THÉORÈME (5.1). *Soit $f: M^{4k} \to \mathbf{R}^{6k+1}$ un plongement semi-différentiable d'une variété différentiable M^{4k} connexe, close, orientée. On désigne par $\bar{p}_k$ la k-ème classe de Pontrjagin normale de M^{4k}, par w_f^2 le cup-carré de la classe $w_f \in H^{2k}(M^{4k}, \mathbf{Z})$ associée à f et par $[M]$ la classe fondamentale de M^{4k}. On a la formule;*

$$\omega_f = \pm\left(\tfrac{1}{8}\langle w_f^2, [M]\rangle + \tfrac{1}{24}\langle \bar{p}_k, [M]\rangle\right).$$

Pour démontrer ce résultat, on introduit les groupes de cobordisme orienté de plongements semi-différentiables $\tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1}$, analogues des groupes Ω_{4k}^{2k+1} de Thom, et on montre que les correspondances $f \mapsto \omega_f$, $f \mapsto \langle w_f^2, [M]\rangle$ et $f \mapsto \langle \bar{p}_k, [M]\rangle$ définissent des homomorphismes de $\tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1}$ dans les entiers.

Cette interprétation permet de démontrer que ω_f est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\langle w_f^2, [M]\rangle$ et de $\langle \bar{p}_k, [M]\rangle$. La détermination des coefficients se fait en examinant des exemples particuliers.

Comme application, on déduit le théorème suivant qui prolonge partiellement le le théorème de Haefliger-Hirsch (cf. [5]) une dimension en dessous du métastable.

THÉORÈME (7.1). *Soit M^{4k} une variété différentiable close orientable, $(2k-2)$-connexe, dont la forme quadratique d'intersection est indéfinie ou de rang $\leqslant 16$. M^{4k} se plonge différentiablement dans $\mathbf{R}^{6k+1}$ si et seulement si sa classe de Stiefel-Whitney normale entière $\bar{w}^{2k+1}$ est nulle.*

Mes plus vifs remerciements s'adressent à mon directeur de thèse, le Professeur A. Haefliger, pour ses nombreux conseils et ses encouragements constants. Le cas des plongements de variétés de dimension 4 dans $\mathbf{R}^7$ avait été traité en collaboration avec lui dans un précédent travail et une grande partie des idées utilisées ici sont des généralisations naturelles de celles utilisées dans ce cas particulier (cf. [1]).

Je remercie également le Professeur O. Burlet qui m'a communiqué certains de ses résultats non publiés qui ont permis une simplification de la démonstration du lemme 5.4, le Professeur C. Weber pour de nombreuses conversations enrichissantes et les Professeurs G. de Rham et R. C. Kirby qui ont bien voulu faire partie du jury de thèse.

Première partie: Classe caractéristique pour un plongement $f: M^n \to \mathbf{R}^{n+q}$ d'une variété orientée close, q impair

1. *Notations et conventions*

1.1. On désigne par $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des suites $(x_j)_{j\geqslant 0}$ de nombres réels, telles que $x_j=0$ pour $j\geqslant n$; si $x=(x_j)_{j\geqslant 0}\in\mathbf{R}^n$, on désigne par $\|x\|$ la norme euclidienne $(\sum_j x_j^2)^{1/2}$. D^{n+1} et $S^n=\partial D^{n+1}$ sont les disques et sphères unité, c'est-à-dire respectivement $\{x\in\mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|\leqslant 1\}$ et $\{x\in\mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$. On pose encore $\mathbf{R}^n_+=\{(x_j)_{j\geqslant 0}\in\mathbf{R}^n \mid x_0\geqslant 0\}$ et $D^{n+1}_+=\{(x_j)_{j\geqslant 0}\in D^{n+1} \mid x_n\geqslant 0\}$. On désigne par $u_k (k\geqslant 0)$ la suite $(\delta_{kj})_{j\geqslant 0}$ où $\delta_{kj}=0$ si $k\neq j$ et $\delta_{kk}=1$. On choisit sur S^n l'orientation définie par la base $u_1, \ldots, u_n$ de l'espace tangent en $u_0\in S^n$. D^n_+ et $D^n_-=\overline{S^n-D^n_+}$ sont munis de l'orientation induite par celle de S^n. On remarque que l'homéomorphisme $D^n_+\approx D^n$ induit par la projection $\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^n$ respecte l'orientation si n est pair, la renverse si n est impair; on a le résultat inverse pour D^n_-. Enfin, I désigne l'intervalle unité [0, 1].

1.2. Soient M^n et X^{n+q} des variétés topologiques de dimension n et $n+q$, avec ou sans bord. Rappelons qu'un plongement $f: M^n\to X^{n+q}$ est dit localement plat si, pour tout $x\in M^n$, il existe un voisinage U de fx dans X^{n+q}, tel que $(U, U\cap f\,M^n, fx)$ soit homéomorphe à $(\mathbf{R}^{n+q}, \mathbf{R}^n, 0)$ si $x\in M^n-\partial M^n$ et à $(\mathbf{R}^{n+q}, \mathbf{R}^n_+, 0)$ si $x\in\partial M^n$; en particulier $f^{-1}\,\partial X^{n+q}=\partial M^n$.

Dans ce travail, toutes les variétés seront orientées, munies d'une structure semi-linéaire, et les plongements seront supposés semi-linéaires, localement plats. Rappelons que deux plongements $f_i: M^n\to X^{n+q}$, $i=0, 1$ sont concordants s'il existe un plongement $F: M^n\times I\to X^{n+q}\times I$ tel que $F(x, i)=(f_i(x), i)$ pour tout $x\in M^n$, $i=0, 1$.

1.3. On désigne par SG_q l'espace des applications $S^{q-1} \to S^{q-1}$ de degré 1 et par SF_{q-1} le sous-espace de SG_q formé des applications qui laissent fixe le point u_0. Par suspension, on identifie SG_{q-1} à un sous-espace de SF_{q-1}. On désigne par BSG_q le classifiant pour les fibrés sphériques orientés de rang q et par BSF_{q-1} le classifiant pour les fibrés sphériques orientés de rang q et de «groupe» structural SF_{q-1}. Les inclusions $SG_{q-1} \subset SF_{q-1} \subset SG_q$ induisent des applications $BSG_{q-1} \to BSF_{q-1} \to BSG_q$ que nous supposerons remplacées par des fibrations. On désigne par SG(resp. BSG) la limite inductive de SG_q(resp. BSG_q) par suspensions. De la même manière, on désignera par BSO_q l'espace classifiant pour les fibrés vectoriels orientés de rang q et par SO (resp. BSO) la limite inductive des groupes SO_q (resp. des BSO_q) par suspensions. SO_q est un «sous-groupe» de SG_q et SO est identifié à un «sous-groupe» de SG.

1.4. Tous les groupes d'homologie et de cohomologie considérés sont à coefficients entiers, sauf mention expresse du contraire.

1.5. Nous dirons qu'une paire $(B, \partial B)$ est une paire de Poincaré en dimension n s'il existe une classe $[B, \partial B] \in H_n(B, \partial B)$ (dite classe fondamentale) telle que $\cap [B, \partial B]$ définisse des isomorphismes $H^k(B) \approx H_{n-k}(B, \partial B)$ et $H^k(B, \partial B) \approx H_{n-k}(B)$ pour tout k.

2. *Fibrés normaux*

2.1. Pour tout fibré sphérique ν, on désigne par $E_0(\nu)$ l'espace total de ν et par $E(\nu)$ l'espace total du fibré de fibre contractible associé à ν.

A tout plongement $f: M^n \subset X^{n+q}$ est associé son fibré normal $\nu(f)$; c'est un fibré sphérique orienté de rang q. Nous choisirons pour $\nu(f)$ le modèle explicite suivant (cf. Fadell [4]): $E_0(\nu(f))$ est l'espace des chemins $\omega: I \to X^{n+q}$ pour lesquels $\omega(t) \in fM_n$ si et seulement si $t=0$; $E(\nu(f))$ est la réunion de $E_0(\nu(f))$ et des chemins constants $\omega: I \to fM^n$; la projection est définie par $\omega \mapsto \omega(0)$. Si $\partial M^n \neq \emptyset$, f définit un plongement $f \mid \partial M^n: \partial M^n \to \partial X^{n+q}$; le fibré normal $\nu(f \mid \partial M^n)$ a même type d'homotopie fibrée que la restriction $\nu(f) \mid \partial M^n$, et peut lui être substitué dans la plupart des raisonnements classiques. Ainsi, si on pose $E = E(\nu(f))$, $E_0 = E_0(\nu(f))$, $E' = E(\nu(f \mid \partial M^n))$, $E_0' = E_0(\nu(f \mid \partial M^n))$, il y a un isomorphisme de Thom relatif $H_k(E, E_0 \cup E') \approx$ $\approx H_{k-q}(M^n, \partial M^n)$ pour tout k. Quand nous envisagerons une section σ de $\nu(f)$, nous supposerons toujours, sans restreindre la généralité que $\sigma \mid \partial M^n$ est une section de $\nu(f \mid \partial M^n)$ (toute section de $\nu(f)$ est homotope à une section de ce type).

2.2. Avec les notations de 2.1, on désignera par α les différentes applications définies par $\omega \mapsto \omega(1)$; parmi celles-ci, il y a $\alpha: (E, E_0) \to (X^{n+q}, X^{n+q} - M^n)$, (E', E_0') $\to (\partial X^{n+q}, \partial X^{k+q} - \partial M^1)$ et $(E, E_0 \cup E') \to (X^{n+q}, (X^{n+q} - M^n) \cup \partial X^{n+q})$; ces trois applications induisent des isomorphismes $\alpha_*: H_k(E, E_0) \approx H_k(X^{n+q}, X^{n+q} - M^n)$,

$H_k(E', E_0') \approx H_k(\partial X^{n+q}, \partial X^{n+q} - \partial M^n)$ et $H_k(E, E_0 \cup E') \approx H_k(X^{n+q}, (X^{n+q} - M^n) \cup \partial X^{n+q})$ pour tout k.

Le deuxième isomorphisme est donné par le théorème (7.4) de [4]; le premier isomorphisme s'obtient en ajoutant des cols ouverts à M^n et à X^{n+q}, en appliquant le théorème cité, puis en rétractant les cols; le troisième isomorphisme s'obtient à partir des deux premiers et du lemme des cinq.

L'application α permet d'interprèter directement les sections de $\nu(f)$ comme des déplacements de M^n dans la variété ambiante X^{n+q}; plus précisement, soient σ une section de $\nu(f)$, non nulle au-dessus de $A \subset M^n$ et $B \subset A \cap \partial M^n$; la composition $\alpha \circ \sigma$ définit une application $f_\sigma : (M^n, \partial M^n) \to (X^{n+q} - f(A), \partial X^{n+q} - f(B))$ que nous appellerons le déplacement de $(M^n, \partial M^n)$ en dehors de (A, B) associé à σ.

2.3. Soit ν un fibré sphérique orienté de rang $q \geqslant 2$, de base une paire de Poincaré en dimension n, $(B, \partial B)$. Posons $E = E(\nu)$, $E_0 = E_0(\nu)$, $E' = E(\nu \mid \partial B)$, $E_0' = E_0(\nu \mid \partial B)$, désignons par p la projection et par $U \in H^q(E, E_0)$ la classe de Thom de ν. Soit $\eta \in H_{n+q}(E, E_0 \cup E')$ défini par $p_*(U \cap \eta) = [B, \partial B]$. η est une classe fondamentale pour $(E, E_0 \cup E')$, c'est-à-dire qu'il y an diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & H_{k+1}(E, E_0 \cup E') & \xrightarrow{\partial} & H_k(E_0, E_0') & \longrightarrow & H_k(E, E') & \longrightarrow \cdots \\
 & \cap\eta \uparrow \wr\wr & & \cap\partial\eta \uparrow \wr\wr & & \cap\eta \uparrow \wr\wr & \\
\cdots \to & H^{n+q-k-1}(E) & \longrightarrow & H^{n+q-k-1}(E_0) & \to & H^{n+q-k}(E, E_0) & \to \cdots
\end{array}$$

Si σ est une section non nulle de ν, on désignera par w_σ l'élément de $H^{q-1}(E_0)$ défini par $w_\sigma \cap \partial\eta = \sigma_*[B, \partial B]$. En utilisant le diagramme commutatif adequat on vérifie que $\delta w_\sigma = U$; on dira que w_σ est le relèvement de U associé à σ.

On appellera classe d'Euler de σ l'élément $\chi_\sigma = \sigma^*(w_\sigma) \in H^{q-1}(B)$. Si on choisit pour $(B, \partial B)$ une variété semi-linéaire close $(M^n, \partial M^n)$ et si on désigne par K_j le j-squelette de M^n pour une triangulation fixe de M^n, on peut définir encore la classe d'Euler χ_σ pour toute section σ de ν, non nulle au-dessus de K_q. Pour cela on choisit un voisinage régulier $(M_0, \partial M_0)$ de K_q dans M_n; on suppose sans restriction de généralité que σ est non nulle au-dessus de M_0; on applique alors la construction décrite avant avec $(B, \partial B) = (M_0, \partial M_0)$ et ν remplacé par $\nu \mid M_0$. On obtient ainsi un élément $\chi_\sigma \in H^{q-1}(M_0) = H^{q-1}(M)$. Une interprétation de χ_σ est fournie par le lemme suivant:

2.4. LEMME. *Soient $(M^n, \partial M^n)$ une variété semi-linéaire close, ξ un fibré sphérique orienté de rang $q \leqslant 2$ sur M^n, σ une section de ν, non nulle au-dessus de K_q. La réduction modulo 2 $\varrho_2 \chi_\sigma \in H^{q-1}(M^n, \mathbf{Z}_2)$ est la classe de Stiefel-Whitney w^{q-1} de ν.*

2.5. Pour démontrer ce lemme, nous allons développer quelques préliminaires.

Soit ν un fibré sphérique orienté de rang $q \geqslant 2$, de base un CW-complexe B. On appelle désuspension de ν tout fibré sphérique orienté ξ, de rang $q-1$, tel que ν ait

même type d'homotopie fibrée que $\xi \oplus \varepsilon^1$, ε^1 étant le fibré trivial de rang 1. Soit $\varphi: B \to BSG_q$ une application classifiante pour ν, les désuspensions de ν correspondent aux relèvements $\tilde{\varphi}$ de φ dans BSG_{q-1}. D'autre part, les sections non nulles de ν correspondent aux relèvements $\hat{\varphi}$ de φ dans BSF_{q-1}. Comme $BSG_{q-1} \to BSG_q$ se factorise en $BSG_{q-1} \to BSF_{q-1} \to BSG_q$ il résulte qu'à toute désuspension correspond une section non nulle. L'inverse n'est pas vrai en général, c'est-à-dire que toute section non nulle ne provient pas nécessairement d'une désuspension. On sait que la fibre de $BSG_{q-1} \to BSF_{q-1}$ est $(2q-5)$-connexe (cf. [7]), d'autre part $\pi_0(SG_1, SF_1)=0$; on en déduit alors le résultat suivant: Si ν est un fibré sphérique orienté de rang q sur un CW-complexe de dimension $\leqslant q-1$, et si $q \geqslant 2$, alors toute section non nulle σ de ν provient d'une désuspension ξ de ν et le type d'homotopie fibrée de $\xi \mid (q-2)$-squelette de la base ne dépend que de la classe d'homotopie de la restriction de σ au $(q-2)$-squelette de la base.

2.6. Soient ν un fibré sphérique de rang $q \geqslant 2$, orienté, sur un CW-complexe B, ξ une désuspension de ν, σ la section non nulle associée à ξ. Posons $E=E(\nu)$, $E_0=E_0(\nu)$ et soit $U \in H^q(E, E_0)$ la classe de Thom de ν. On peut construire un relèvement $w_\xi \in H^{q-1}(E_0)$ de U (c'est-à-dire que $\delta w_\xi = U$) tel que $\sigma^*(w_\xi)$ soit la classe d'Euler de ξ.

La classe w_ξ est naturelle dans le sens suivant: soient A un CW-complexe $f: A \to B$ une application, $f^{-1}\nu$ et $f^{-1}\xi$ les fibrés sphériques induits par f, $f_1: f^{-1}E_0 = E_0(f^{-1}\nu) \to E_0$ l'application définie par f, alors la classe $w_{f^{-1}\xi} \in H^{q-1}(f^{-1}E_0)$ est égale à $f_1^* w_\xi$. Enfin, dans le cas où B est un complexe de Poincaré, $w_\xi = w_\sigma$ où w_σ est le relèvement de U associé à σ défini dans 2.3.

Ces diverses affirmations se démontrent toutes facilement en utilisant les diagrammes commutatifs appropriés. Nous n'explicitons pas les détails et nous nous contentons d'indiquer la construction de w_ξ: Posons $E'=E(\xi)$ et $E_0'=E_0(\xi)$; on peut remplacer E_0 par l'espace obtenu en suspendant E_0' fibre par fibre. On peut alors identifier E_0' au sous-espace «équateur» de E_0 et E' au sous-espace «hémisphère supérieure» de E_0, σ étant donné par les pôles nords des diverses fibres. Par excision, on a un isomorphisme $\varphi^*: H^{q-1}(E_0, E_-) \xrightarrow{\approx} H^{q-1}(E', E_0')$, E_- étant le sous-espace «hémisphère inférieur» de E_0. Si $U' \in H^{q-1}(E', E_0')$ est la classe de Thom de ξ, on définira $w_\xi \in H^{q-1}(E_0)$ comme restriction de $\varphi_*^{-1}(U')$.

2.7. *Démonstration du lemme* 2.4. Soit $i: M_0 \to M^n$ l'inclusion dans M d'un voisinage régulier de K_{q-1}. Comme $i^*: H^{q-1}(M^n) \to H^{q-1}(M_0)$ et $i^*: H^{q-1}(M^n, \mathbf{Z}_2) \to H^{q-1}(M_0, \mathbf{Z}_2)$ sont injectifs, il suffira de prouver que $\varrho_2(i^*\chi_\sigma) = i^* w^{q-1}(\nu)$. Soient $\nu' = \nu \mid M_0$ et $\sigma' = \sigma \mid M_0$; il est évident que $i^* w^{q-1}(\nu) = w^{q-1}(\nu')$ et il est facile de voir que $i^*\chi_\sigma = \chi_{\sigma'}$. Selon la remarque finale de 2.4, il existe une désuspension ξ' de ν', à laquelle σ' est associée et selon 2.6, $\chi_{\sigma'} = \xi_{\xi'}$ est la classe d'Euler de ξ'. La restriction modulo 2 de $\chi_{\sigma'}$, est donc la classe de Stiefel-Whitney $w^{q-1}(\xi') = w^{q-1}(\xi' \oplus \varepsilon^1) = w^{q-1}(\nu')$, c.q.f.d.

3. *Classes d'enlacement*

3.1. Nous allons considérer la situation suivante: $(M^n, \partial M^n) \subset (X^{n+q}, \partial X^{n+q})$ est un plongement, de fibré normal $\nu(f)$, $H_{n+1}(X, \partial X)=0$ et l'image de $H_n(M, \partial M)$ dans $H_n(X, \partial X)$ est nulle; il s'ensuit que la classe d'Euler de $\nu(f)$, $\chi(\nu(f))$, est nulle. Puisque $\chi(\nu(f))$ s'interprète comme première obstruction à construire une section non nulle, on peut construire des sections de $\nu(f)$, non nulles sur le q-squelette K_q de M^n; soit σ une telle section et soit $f_\sigma:(M^n, \partial M^n) \to (X-K_q, \partial X-L_q)$ le déplacement associé à σ (cf. 2.2), où $L_q = K_q \cap \partial M^n$ est le q-squelette de ∂M^n. Les hypothèses faites sur X^{n+q} montrent que l'homomorphisme $\partial: H_{n+1}(X, (X-M) \cup \partial X) \to H_n(X-M, \partial X - \partial M)$ associé à la «paire de paires» $((X, \partial X), (X-M, \partial X-\partial M))$ est injectif et que, $\varphi_*: H_n(X-M, \partial X-\partial M) \xrightarrow{\approx} H_n(X-K_q, \partial X-L_q)$ étant l'isomorphisme induit par l'inclusion, $\varphi_*^{-1} f_{\sigma *}[M, \partial M]$ est dans l'image de ∂. On appelle classe d'enlacement de la section σ, l'élément $\lambda_\sigma = D\partial^{-1}\varphi_*^{-1} f_\sigma[M, \partial M]$, $D: H_{n+1}(X, (X-M) \cup \partial X) \approx$ $\approx H^{q-1} \times (M)$ étant la dualité d'Alexander.

3.2. LEMME. *Dans les conditions décrites ci-dessus, si σ, σ' sont deux sections de $\nu(f)$, non nulles au-dessus de K_q, on a les formules suivantes:*

(a) $\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'} = \pm d(\sigma, \sigma')$

(b) $\chi_\sigma - \chi_{\sigma'} = \pm 2(\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'})$ *si q est impair*

où $d(\sigma, \sigma')$ désigne la première obstruction à construire une homotopie de σ vers σ' (en tant que sections non nulles au-dessus de K_q) et χ_σ, $\chi_{\sigma'}$ sont les classes d'Euler de σ, σ' définies dans 2.3.

3.3. Dans une étape préliminaire, nous allons montrer qu'on peut supposer σ et σ' non nulles partout. Choississons un voisinage régulier M_0 de K_q dans M_n et soit X_1 un voisinage régulier de $M = \overline{M - M_0}$ dans X; posons $X_0 = \overline{X - X_1}$. On a donc un plongement $f_0: (M_0, \partial M_0) \subset (X_0, \partial X_0)$.

En les remplacant par des sections homotopes si nécessaire, on peut supposer que σ et σ' sont non nulles au-dessus de M_0, que les déplacements associés envoient M_0 dans $X_0 - M_0$, ∂M_0 dans $\partial X_0 - \partial M_0$ et M_1 dans X_1, en bref on peut supposer que $\sigma \mid M_0 = \sigma_0$ et $\sigma' \mid M_0 = \sigma_0$ sont des sections non nulles de $\nu(f_0)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $H_{n+1}(X_0, \partial X_0) = 0$ et que l'image par f_{0*} de $[M, \partial M_0]$ dans $H_n(X_0, \partial X_0)$ est nulle; on peut donc définir les classes d'enlacement λ_{σ_0} et $\lambda_{\sigma'_0} \in H^{q-1}(M_0)$ et il est immédiat qu'elles correspondent à λ_σ et $\lambda_{\sigma'} \in H^{q-1}(M)$ par l'isomorphisme canonique $H^{q-1}(M) \approx H^{q-1}(M_0)$.

3.4. Nous allons donner de $\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'}$ une expression en terme des relèvements w_σ et $w_{\sigma'}$ de la classe de Thom $U \in H^q(E(\nu), E_0(\nu))$ introduit dans 2.3, et en déduire la formule (b). Grâce à 3.3, on supposera que σ et σ' sont partout non nulles. Posons comme d'habitude $E = E(\nu(f))$, $E_0 = E_0(\nu(f))$, $E' = E(\nu(f \mid \partial M))$ et $E'_0 =$

$E_0(\nu(f \mid \partial M))$, p la projection et $\eta \in H_{n+q}(E, E_0 \cup E')$ la classe définie par $p_*(U \cap \eta) = [M, \partial M]$. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{q-1}(E) \arrow[r, "\cap\eta", "\approx"'] \arrow[d] & H_{n+1}(E, E_0 \cup E') \arrow[r, "\alpha_*", "\approx"'] \arrow[d, "\partial"] & H_{n+1}(X, (X-M) \cup \partial X) \arrow[d, "\partial_1"] \\
H^{q-1}(M) \arrow[ur, "p^*"] & H^{q-1}(E_0) \arrow[l, "\sigma^*, \sigma'^*"] \arrow[r, "\cap\partial\eta", "\approx"'] \arrow[d, "\delta"] & H_n(E_0, E_0') \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma'^*, \sigma_*"] & H_n(X-M, \partial X - \partial M) \\
 & H^q(E, E_0) \arrow[r, "\cap\eta", "\approx"'] & H_n(E, E') \arrow[r, "\approx", "p^*"'] & H_n(M, \partial M) \arrow[u, "f_{\sigma^*}, f_{\sigma'^*}"']
\end{tikzcd}$$

les homomorphismes α_* sont ceux décrits dans 2.2. La dualité d'Alexander est obtenue. du moins au signe près, en suivant les flèches α_*^{-1}, $(\bigcap\eta)^{-1}$, p^{*-1}. Désignons par $v_\sigma \in H^{q-1}(E_0)$ l'élément tel que $v_\sigma \cap \partial\eta = \partial\alpha_*^{-1}\partial_1^{-1} f_{\sigma*}[M, \partial M]$ et de manière analogue $v_{\sigma'}$.

Rappelons que $w_\sigma \in H^{q-1}(E_0)$ est caractérisé par $w_\sigma \cap \partial\eta = \sigma_*[M, \partial M]$ et de manière analogue $w_{\sigma'}$. Ces formules ainsi que l'injectivité de ∂_1, permettent de montrer que $w_\sigma - w_{\sigma'} = v_\sigma - v_{\sigma'}$. En comparant avec la définition de λ_σ, $\lambda_{\sigma'}$ on voit que $\lambda_\sigma = \sigma^*(v_\sigma)$, $\lambda_{\sigma'} = \sigma'^*(v_{\sigma'})$. D'autre part, domme v_σ et $v_{\sigma'}$, proviennent de $H^{q-1}(E)$, on a $\sigma^*(v_\sigma) = \sigma'^*(v_\sigma)$ et $\sigma^*(v_{\sigma'}) = \sigma'^*(v_{\sigma'})$. On en déduit la formule

(c) $\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'} = \sigma^*(w_\sigma - w_{\sigma'}) = \sigma'^*(w_\sigma - w_{\sigma'})$

3.5. Démonstration de la formule (b). Supposons q impair. Nous allons montrer que $\sigma^*(w_{\sigma'}) = \sigma'^*(w_\sigma)$. Soit $i: (E_0, E_0') \subset (E, E')$ l'inclusion. On a $p_* i_* \sigma_* = p_* i_* \sigma'_*$. Il nous suffit de montrer que

$$\sigma^*(w_{\sigma'}) \cap [M, \partial M] = \sigma'^*(w_\sigma) \cap [M, \partial M]$$
$$\sigma^*(w_{\sigma'}) \cap [M, \partial M] = p_* i_* \sigma_*(\sigma^*(w_{\sigma'}) \cap [M, \partial M])$$
$$= p_* i_*(w_{\sigma'} \cap \sigma_*[M, \partial M]) = p_* i_*(w_{\sigma'}, \cap (w_\sigma \cap \partial\eta)) = p_* i_*((w_{\sigma'} \cup w_\sigma) \cap \partial\eta).$$

On a de même $\sigma'^*(w_\sigma) \cap [M, \partial M] = p_* i_*((w_\sigma \cup w_{\sigma'}) \cap \partial\eta)$. Le résultat provient donc de l'égalité $w_\sigma \cup w_{\sigma'} = w_{\sigma'} \cup w_\sigma$ puisque $q-1$ est pair.

En ajoutant membre à membre les formules

$\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'} = \sigma^*(w_\sigma) - \sigma^*(w_{\sigma'})$ et $\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'} = \sigma'\varrho(w_\sigma) - \sigma'^*(w_{\sigma'})$

on obtient $2(\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'}) = \sigma^*(w_\sigma) - \sigma'^*(w_{\sigma'})$. Selon la définition de χ_σ (voir 2.2), c'est la formule (b).

3.6. Démonstration de la formule (a). Soit M_0 un voisinage régulier du $(q-1)$-squelette K_{q-1} de M^n dans M^n. Soit $i: M_0 \to M$ l'inclusion. Il suffit de prouver que $i^*(\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'}) = \pm i^* d(\sigma, \sigma')$. Répétant le procédé décrit au n° 3.3, en remplaçant K_q par K_{q-1}, on se ramène à des classes $d(\sigma_0, \sigma'_0)$, λ_{σ_0}, $\lambda_{\sigma'_0} \in H^{q-1}(M_0)$ qui sont précisement égales à $i^* d(\sigma, \sigma')$, $i^*\lambda_\sigma$, $i^*\lambda_{\sigma'}$. Cela montre qu'on peut supposer $H^i(M) = 0$

pour $i \geqslant q$. Dans ce cas, selon les remarques terminales de 2.5, σ et σ' correspondent à des désuspensions ξ, ξ' de $\nu(f)$ et selon la formule (c) du n° 3.4, on a $\lambda_\sigma - \lambda_{\sigma'} = \sigma^*(w_\sigma - w_{\sigma'}) = \sigma^*(w_\xi - w_{\xi'})$ où w_ξ et $w_{\xi'}$ sont les classes définies dans 2.6.

La démonstration de la formule (a) se réduit donc à celle du lemme suivant:

3.7. *Soient ν un fibré sphérique orienté de rang $q \geqslant 2$ sur un* CW-*complexe K de dimension $\leqslant q-1$, ξ, ξ' deux désuspensions de ν, σ, σ' les sections non nulles associées à ξ, ξ' et $d(\sigma, \sigma') \in H^{q-1}(K)$ la première obstruction à construire une homotopie de σ vers σ'. Alors, $w_{\xi'}$ et $w_\xi \in H^{q-1}(E_0(\nu))$ étant les classes définies dans* 2.6, *on a la formule*

$$\sigma^*(w_\xi - w_{\xi'}) = \pm\, d(\sigma, \sigma')$$

La démonstration de ce lemme s'effectue en deux étapes: D'abord on le réduit au cas où ν est un fibré trivial sur $K = S^{q-1}$, ensuite on démontre la formule dans ce cas particulier. La réduction est très facile et utilise simplement les propriétés de naturalité des classes $d(\sigma, \sigma')$, w_ξ, $w_{\xi'}$ et le fait que les deux sections (et les deux désuspensions) sont isomorphes au-dessus du $(q-2)$-squelette de K. Nous omettons les détails. Pour le cas particulier, $(S^{q-1}, \emptyset)$ étant une paire de Poincaré, on peut de nouveau utiliser w_σ au lieu de w_ξ et on est donc ramené à démontrer que $\sigma^*(w_\sigma - w_{\sigma'}) = \pm d(\sigma, \sigma')$ avec $E_0(\nu) = S^{q-1} \times S^{q-1}$. Supposons σ (resp σ') donnée par $x \mapsto (x, f(x))$ (resp. $x \mapsto (x, g(x))$) alors $\langle d(\sigma, \sigma'), [S] \rangle = \pm(\deg f - \deg g)$. Choisissons des générateurs a (pour la base) et b (pour la fibre) de $H_{q-1}(S^{q-1} \times S^{q-1})$ et soient α, β leurs duaux par Poincaré. On a $\langle \alpha, a \rangle = \langle \beta, b \rangle = 0$ et $\langle \alpha, b \rangle = (-1)^{q-1} \langle \beta, a \rangle = \pm 1$. On a $\sigma_*[S] = a + \deg f b$, $\sigma_*[S] = a + \deg g b$, donc $w_\sigma = \alpha + \deg f \beta$, $w_{\sigma'} = \alpha + \deg g \beta$ et $w_\sigma - w_{\sigma'} = (\deg d - \deg g)\beta$ enfin $\langle \sigma^*(w_\sigma - w_{\sigma'}), [S] \rangle = \langle w_\sigma - w_{\sigma'}, a + \deg f b \rangle = \langle (\deg f - \deg g)\, \beta, a \rangle = \pm(\deg f - \deg g)$ c.q.f.d.

3.8. Nous disons, dans les conditions de 3.1, que la section σ est non enlacée si $\lambda_\sigma = 0$; la formule (a) du lemme 3.2. permet de déduire la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit $(M^n, \partial M^n) \subset (X^{n+q}, \partial X^{n+q})$ un plongement satisfaisant aux conditions de* 3.1. *Il existe toujours des sections non enlacées.*

Démonstration. Soit σ_0 une section quelconque de $\nu(f)$, non nulle au-dessus de K_q, et choisissons une section $\sigma: K_{q-1} \to E_0(\nu(f))$ telle que $d(\sigma_0 \mid K_{q-1}, \sigma) = \pm \lambda_{\sigma_0}$, le signe étant celui de la formule (a) de 3.2. Comme λ_{σ_0} est un élément de $H^{q-1}(K_q)$ et non simplement de $H^{q-1}(K_{q-1})$, on peut appliquer le théorème (37.4) de [19]. On peut donc prolonger σ en une section de $\nu(f)$ non nulle au-dessus de K_q. De $d(\sigma_0, \sigma) = \pm \lambda_{\sigma_0}$ et de la formule (a), il découle que σ est non enlacée.

3.9. *La classe w_f.* Soit $f: (M^n, \partial M^n) \subset (X^{n+q}, \partial X^{n+q})$ un plongement satisfaisant

aux conditions de 3.1, q impair. Nous désignerons par $w_f \in H^{q-1}(M^n)$ la classe d'Euler d'une section de $\nu(f)$, non nulle au-dessus de K_q, non enlacée. La formule (b) de 3.2 montre que w_f est indépendant du choix de la section non enlacée. Nous dirons que w_f est la classe caractéristique du plongement f. Il découle de 2.4 que la reduction modulo 2 de w_f est la classe de Stiefel-Whitney $w^{q-1}(\nu(f))$.

3.10. Supposons, en plus des conditions de 3.1 que l'on ait $H_n(\partial X)=0$. Dans ce cas, le plongement $f \mid \partial M : \partial M \to \partial X$ satisfait aussi aux conditions de 3.1; on vérifie immédiatement que pour une section σ de $\nu(f)$ non nulle au-dessus de K_q, la restriction de λ_0 (resp. χ_σ) à $H^{q-1}(\partial M)$ est égale à $\lambda_{\sigma \mid \partial M}$ (resp. $\chi_{\sigma \mid \partial M}$) on en déduit que si σ est non enlacée pour $(M, \partial M) \subset (X, \partial X)$, alors $\sigma \mid \partial M$ est non enlacée pour $\partial M \subset \partial X$; en particulier, la restriction de w_f à $H^{q-1}(\partial M)$ est égale à $w_{f \mid \partial M}$.

3.11. Enoncons encore le résultat suivant qui s'obtient par une méthode analogue à celle utilisée pour le lemme 3.2.

LEMME. *Soit ν un fibré sphérique orienté de rang q, q impair $\geqslant 3$, sur une paire de Poincaré $(B, \partial B)$, et soient σ, σ' deux sections non nulles de ν. Si $d(\sigma, \sigma') \in H^{q-1}(B)$ est la première obstruction à construire une homotopie de σ vers σ' et si χ_σ et $\chi_{\sigma'}$ sont les classes d'Euler de σ et σ' alors*

$$\chi_\sigma - \chi_{\sigma'} = \pm 2d(\sigma, \sigma')$$

Remarquons que cette formule se déduit des formules du lemme 3.2 lorsque ν est le fibré normal d'un plongement $(M^n, \partial M^n) \subset (X^{n+q}, \partial X^{n+q})$ de codimension impaire $q \geqslant 3$.

4. *Application à la classification des plongements*

4.1. Les plongements $f: M^n \to S^{n+q}$ (ou $M^n \to \mathbf{R}^{n+q}$) pour $q \geqslant 2$ satisfont à toutes les conditions posées en 3.1. Supposons q impair $\geqslant 3$; on voit facilement que la classe w_f ne dépend que de la classe de concordance de f. Si on désigne par $\varrho_2^{-1}\, \bar{w}^{q-1}(M)$ l'ensemble des éléments de $H^{q-1}(M)$ dont la restriction modulo 2 est la $(q-1)$ième classe de Stiefel-Whitney normale de M et par $\mathrm{Pl}(M^n, S^{n+q})$ l'ensemble des classes de concordance de plongements $M^n \to S^{n+q}$, la correspondance $f \mapsto w_f$ induit une application $\Phi: \mathrm{Pl}(M^n, S^{n+q}) \to \varrho_2^{-1}\, \bar{w}^{q-1}(M)$.

4.2. THÉORÈME. *Supposons $n-k$ impair $\geqslant 3$. Si M^n est $(k-1)$-connexe, l'application Φ est surjective:* $\mathrm{Pl}(M^n, S^{2n-k}) \to \varrho_2^{-1}\, \bar{w}^{n-k-1}(M^n)$. *Si M^n est k-connexe, Φ est bijective.*

4.3. *Préliminaires.* La démonstration se fait suivant les mêmes lignes que celle

des théorèmes 2.3 et 2.4 de [5] en utilisant les techniques semi-linéaires correspondantes. Les conditions de métastabilité peuvent être évitées, en remplacant les théorèmes (3.2) a et b de [5] par les théorèmes d'Irwin [12] et de Hudson [10] qui sont valables sans ces conditions. On utilisera les résultats suivants:

M^n étant $(k-1)$-connexe et $M_0 = M^n - \operatorname{int}(D)$, D étant un disque plongé.

(a) *Si* $\bar{w}^{n-k}=0$ *(coefficients entiers !)* M_0 *se plonge dans* $\mathbf{R}^{2n-k}$ *et le fibré sphérique normal de ce plongement admet une section non nulle.*

(b) *Si* M^n *est k-connexe, deux plongements de* M_0 *dans* $\mathbf{R}^{2n-k}$ *sont toujours isotopes.*

Dans ces énoncés, on suppose toujours $n-k$ impair $\geqslant 3$. (b) est conséquence des théorèmes 10.3 de [11], et (a) vient du fait que M_0 se plonge dans $\mathbf{R}^{2n-k}$ (cf. théorème 8.3 de [11]) et que $\bar{w}^{n-k}$ s'interprète alors comme première obstruction à construire une section du fibré sphérique normal.

4.4. *Démonstration de* 4.2. L'image de $\bar{w}^{n-k-1}$ par le cobord associé à la suite exacte $0 \to Z \to Z \to Z_2 \to 0$ est la classe entière $\bar{w}^{n-k}$. Ainsi $\varrho_2^{-1}\, \bar{w}^{n-k-1}(M) \neq \emptyset$ si et seulement si $\bar{w}^{n-k}=0$. D'autre part, il est bien connu que $\bar{w}^{n-k}=0$ est une condition nécessaire pour l'existence d'un plongement $M^n \to \mathbf{R}^{2n-k}$. Le théorème est donc démontré pour $\bar{w}^{n-k} \neq 0$. Supposons maintenant $\bar{w}^{n-k}=0$, et soit $w \in H^{q-1}(M^n)$ un élément de $\varrho_2^{-1}\bar{w}^{n-k-1}(M^n)$. Par (a) ci-dessus, il existe un plongement $f_0 : M_0 \to \mathbf{R}^{2n-k}$ et $\nu(f_0)$ admet une section non nulle. Choisissons une section non nulle σ telle que $\chi_\sigma = w$ (c'est possible en vertu de la formule du lemme 3.11). Pour conclure, il reste à prolonger f_0 en un plongement de M^n dans $\mathbf{R}^{2n-k}$, de manière que σ soit non enlacée. On procède comme suit.

Choisissons un voisinage régulier $(X, \partial X)$ de M_0 dans $\mathbf{R}^{2n-k}$, tel que $\partial M_0 \subset \partial X$ (voisinage régulier relatif) et modifions σ si nécessaire, de manière que le déplacement f_σ associé envoie M_0 dans ∂X et soit l'identité sur ∂M_0. Posons $Y = \overline{\mathbf{R}^{2n-k} - X}$, $\Sigma = f_0(\partial M_0) \approx S^{n-1}$ et $\alpha = f_{\sigma *}[M_0, \partial M_0] \in H_n(Y, \Sigma)$.

Par position générale et dualité d'Alexander, la paire (Y, Σ) est $(n-2)$-connexe et l'homomorphisme d'Hurewicz $\pi_n(Y, \Sigma) \to H_n(Y, \Sigma)$ est donc surjectif; on peut alors représenter α par une application $\varphi : (D^n, S^{n-1}) \to (Y, \Sigma)$. Par Irwin (cf. [12]) on peut supposer que φ est un plongement coïncidant avec f_0 sur $S^{n-1} = \partial M_0$. En recollant f_0 et φ on obtient un plongement $f : M^n \to \mathbf{R}^{2n-k}$ et en utilisant les suites de Mayer-Vietoris, on vérifie que σ est non enlacée pour f.

Il reste à démontrer que Φ est injectif si M^n est k-connexe. Soient f, $f' : M^n \to \mathbf{R}^{2n-k}$ deux plongements tels que $w_f = w_{f'}$. Par (b) du n° 4.3, on peut supposer que $f \mid M_0 = f' \mid M_0$. Construisons un voisinage régulier relatif X de M_0 dans $\mathbf{R}^{2n-k}$ comme dans la 1ère partie de la démonstration et soient σ, σ' des sections non enlacées pour f, f', des fibrés $\nu(f)$, $\nu(f')$. Comme $\chi_\sigma = \chi_{\sigma'}$, on a $d(\sigma, \sigma') = 0$; il s'ensuit que l'on peut supposer $\sigma \mid M_0 = \sigma' \mid M_0$. Choisissons de nouveau $\sigma_0 = \sigma \mid M_0$ de manière que le déplacement associé à σ_0 envoie M_0 dans ∂X et soit fixe sur ∂M_0; en utilisant les

mêmes notations, la condition que σ_0 est non enlacée pour f et pour f' implique que

$$f \mid (D^n, S^{n-1}) : (D^n, S^{n-1}) \to (Y, \Sigma) \quad \text{et} \quad f' \mid (D^n, S^{n-1}) : (D^n, S^{n-1}) \to (Y, \Sigma)$$

envoient $[D^n, S^{n-1}]$ sur le même élément $\alpha \in H_n(Y, \Sigma)$. Comme maintenant (Y, Σ) est $(n-1)$-connexe, il s'ensuit que $f \mid (D^n, S^{n-1})$ et $f' \mid (D^n, S^{n-1})$ sont homotopes. Mais alors, selon Hudson [10], $f \mid (D^n, S^{n-1})$ et $f' \mid (D^n, S^{n-1})$ sont isotopes modulo S^{n-1}. On en déduit que f et f' sont isotopes, c.q.f.d.

Deuxième partie: obstruction à lisser un plongement semi-différentiable $f: M^{4k} \to S^{6k+1}$

Dans cette partie, toutes les variétés sont supposées différentiables et orientées.

Préliminaires. Rappels sur la théorie du lissage.

Nous adoptons le point de vue exposé dans [8]. Soit BSD_q le produit fibré des applications naturelles $BSO \to BSG$ et $BSG_q \to BSG$, rempacées par des fibrations. Les applications naturelles $BSO_q \to BSO$ et $BSO_q \to BSG_q$ définissent une application $\pi: BSO_q \to BSD_q$ que nous remplacons aussi par une fibration.

Un plongement $f: M^n \to V^{n+q}$ est dit semi-différentiable s'il est localement plat et semi-linéaire relativement à des triangulations C^∞ de M^n et de V^{n+q}. Un plongement semi-différentiable $f: M^n \to S^{n+q}$ détermine une application $\varphi: M^n \to BSD_q$, définie par les applications $M^n \to BSG_q$ et $M^n \to BSO$ qui classifient respectivement le fibré sphérique normal de f et le fibré vectoriel normal stable de M^n.

Un lissage de f est un plongement différentiable $g: M^n \to S^{n+q}$ qui est semi-différentiablement isotope à f.

Le théorème principal de la théorie du lissage peut s'énoncer (cf. [8]) f peut être lissé si et seulement s'il existe un relèvement $\tilde{\varphi}: M^n \to BSO_q$ de l'application $\varphi: M^n \to BSD_q$ définie par f.

Lorsque $q \geqslant 3$, le groupe d'homotopie $\pi_i(SD_q/SO_q)$ de la fibre de π est isomorphe au groupe C_i^q des classes d'isotopie de plongements différentiables de S^i dans S^{i+q}. Selon Haefliger [7] (voir aussi James [13]) $C_i^q = 0$ si $i < 2q-3$ et $C_{4k-1}^{2k+1} \approx \mathbf{Z}$ si $k \geqslant 1$. En conséquence, pour lisser un plongement $f: M^{4k} \to S^{6k+1}$, on rencontre une unique obstruction, qui est un élément de $H^{4k}(M^n, \mathbf{Z})$; plus précisement, soit $\gamma \in H^{4k}(BSO_{2k+1}, Z)$ la première obstruction à construire une section de π et soit $\varphi: M^{4k} \to BSO_{2k+1}$ l'application associée à f, on appellera obstruction à lisser f l'entier $\omega_f = \langle \varphi^* \gamma, [M] \rangle$. Le résultat principal de ce travail est le suivant:

5.1. THÉORÈME. *L'obstruction ω_f à lisser un plongement semi-linéaire $f: M^{4k} \to S^{6k+1}$ d'une variété différentiable orientée M^{4k} est donnée par la formule*

$$\omega_f = \pm \left(\tfrac{1}{8} \langle w_f^2, [M] \rangle + \tfrac{1}{24} \langle \bar{p}_k, [M] \rangle\right)$$

où $w_f \in H^{2k}(M^n)$ est la classe caractéristique définie dans la première partie et $\bar{p}_k$ est la k-ème classe de Pontrjagin normale de M^n.

Posons pour abréger $\tilde{w}_f^2 = \langle w_f^2, [M]\rangle$ et $\tilde{p}_k = \langle \bar{p}_k, [M]\rangle$. Le plan général de la démonstration de 5.1 est le suivant. Nous introduisons d'abord des groupes de cobordisme de plongements semi-différentiables $\tilde{\Omega}_n^q$ et nous interprètons l'obstruction comme un homomorphisme $\tilde{\Omega}_{4k+1}^{2k} \to \mathbf{Z}$. Des résultats généraux sur les groupes de cobordisme permettent de montrer que ω_f est une combinaison linéaire rationnelle de $\tilde{w}_f^2$ et $\tilde{p}_k$. Il reste à déterminer la valeur des coefficients de cette combinaison linéaire, ce que nous faisons en choisissant des exemples particuliers.

5.2. *Cobordisme semi-différentiable.* On définit $\tilde{\Omega}_n^q$ le groupe de cobordisme (orienté) de plongements semi-différentiables $f: M^n \to S^{n+q}$ de la manière suivante: un élément de $\tilde{\Omega}_n^q$ est représenté par une paire (M^n, f) où M^n est une variété close connexe différentiable orientée et f un plongement semi-différentiable $M^n \to S^{n+q}$. Deux paires (M_i, f_i) $i=0, 1$ représentent le même élément s'il existe une variété différentiable compacte orientée W^{n+1} de bord $\partial W = M_1 \cup (-M_0)$ (réunion disjointe de M_1 et M_0, M_0 étant munie de l'orientation opposée) et un plongement semi-différentiable $F: (W^{n+1}, \partial W) \to (S^{n+q} \times I, S^{n+q} \times \partial I)$ tel que $F(x) = (f(x), i)$ $\forall x \in M_i$ et $i=0, 1$.

En remplacant partout dans cette définition semi-différentiable par différentiable on retrouve les groupes de cobordisme Ω_n^q de Thom (cf. [20]). Dans les deux cas l'opération d'addition est donnée par la somme connexe des plongements. Il y a un homomorphisme évident $\Omega_n^q \to \tilde{\Omega}_n^q$.

5.3. LEMME. *Les correspondances $(M^{4k}, f) \mapsto \omega_f$, $\tilde{w}_f^2$, $\tilde{p}_k$ définissent des homomorphismes ω, w^2, p: $\tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1} \to \mathbf{Z}$.*

En effet, pour p le résultat est bien connu, pour ω il découle directement de la définition de ω_f comme première obstruction et pour w^2, il provient de la remarque finale de 3.10.

5.4. LEMME. *Il existe des nombres rationnels α_k et β_k tels que*

$$\omega_f = \alpha_k \tilde{w}_f^2 + \beta_k \tilde{p}_k$$

La démonstration commence par une série de remarques.

1. Ω_n étant le groupe de cobordisme des variétés abstraites de dimension n, il y a des homomorphismes naturels $\Omega_n^q \to \Omega_n$ et $\tilde{\Omega}_n^q \to \Omega_n$. L'homomorphisme p du lemme 5.3 est en fait défini sur Ω_{4k}. L'homomorphisme w^2 est aussi défini sur Ω_{4k}^{2k+1}.

2. Il y a une involution $\varphi: \Omega_n^q \to \Omega_n^q$ définie par $(M, f) \mapsto (-M, f)$ (on change l'orientation de M, mais pas le plongement). Lorsque $q > n+1$. $\Omega_n^q \approx \Omega_n$ et on a $\varphi(x) = -x$ $\forall x \in \Omega_n^q$. D'autre part, si $x \in \Omega_{4k}^{2k+1}$, on a $w^2(\varphi(x)) = -w^2(x)$; en effet, il suffit

de revenir à la définition de $\tilde{w}_f^2$: l'opération $(M,f)\to(-M,f)$ ne change pas w_f^2 mais il faut ensuite évaluer sur $-[M]$ au lieu de $[M]$.

3. En composant le plongement $f: M^n \to S^{n+q}$ avec l'inclusion $i: S^{n+q} \subset S^{n+q+1}$ on définit un homomorphisme $\Omega_n^q \to \Omega_n^{q+1}$. On remarque que $w_{i\circ f}=0$: en effet, on peut choisir pour section non enlacée la section donnée par les vecteurs normaux à S^{n+q}, pointant vers le pôle nord.

Le fibré $\nu(f)$ est alors une désuspension de $\nu(i\circ f)$ correspondant à cette section; $w_{i\circ f}$ s'interprétant comme classe d'Euler de $\nu(f)$ est donc nul. On déduit de cette remarque que w^2 s'annule sur l'image de Ω_{4k}^{2k} dans Ω_{4k}^{2k+1}.

4. La suite $\Omega_{4k}^{2k+1} \to \tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1} \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}$ est exacte puisque ω_f est l'unique obstruction à lisser f. Nous utiliserons les deux résultats suivants, (cf. O. Burlet [3]).

(A) La suite $\Omega_{4k}^{2k}\oplus\mathbf{Q} \to \Omega_{4k}\otimes\mathbf{Q} \xrightarrow{p\otimes id_{\mathbf{Q}}} \mathbf{Q}$ est exacte.

(B) Compte tenu des isomorphismes bien connus $\Omega_{4k}^{2k+1} \approx \pi_{6k+1}(MSO_{2k+1})$ et $\Omega_k^{2k+1} \approx \pi_{3k+1}(MSO_{2k+1})$ où MSO_{2k+1} est l'espace de Thom du fibré vectoriel universel de rang $2k+1$ sur BSO_{2k+1}, les éléments du noyau N de $\Omega_{4k}^{2k+1}\otimes\mathbf{Q} \to \Omega_4 k\otimes\mathbf{Q}$ s'interprètent comme produits de Whitehead d'éléments de $\Omega_k^{2k+1}\otimes\mathbf{Q}$.

5. w^2 s'annule sur le noyau N. En effet, si $x\in N$ alors par (B) $x=[a, b]$ où a, b sont dans $\Omega_k^{2k+1}\approx\Omega_k$. Selon la remarque 2, $\varphi(a)=-a$ et $\varphi(b)=-b$ d'où $\varphi(x)= =[\varphi(a), \varphi(b)]=[-a, -b]=[a, b]=x$; il s'ensuit, toujours par la remarque 2, que $w^2(x)=0$.

5.5. *Démonstration de* 5.4. Montrons que si $x\in\tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1}\otimes\mathbf{Q}$ et $(\omega\otimes id)(x)= =(p\otimes id)(x)=0$, alors $(w^2\otimes id)(x)=0$. Pour cela on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{4k}^{2k}\otimes\mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega_{4k}^{2k+1}\otimes\mathbf{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1}\otimes\mathbf{Q} \arrow[r, "\omega\otimes id"] \arrow[dl] & \mathbf{Q} \\
& \Omega_{4k}\otimes\mathbf{Q} \arrow[d, "p\otimes id"] & & \\
& \mathbf{Q} & &
\end{tikzcd}$$

en vertu de 4, x provient d'un élément $y\in\Omega_{4k}^{2k+1}\otimes\mathbf{Q}$ tel que $(p\otimes id)(y)=0$.

Par (A) y est somme d'un élément de N et d'un élément qui provient de $\Omega_{4k}^{2k}\otimes\mathbf{Q}$; selon les remarques 3 et 5, $(w^2\otimes id)(x)=(w^2\otimes id)(y)=0$. Il découle de ce résultat que w^2 est une combinaison linéaire rationnelle de ω et de p. On connait des exemples pour lesquels $\omega\neq 0$, $w^2\neq 0$ et $p=0$, (voir ci-dessous le lemme (6.3) pour les détails), le lemme 5.4 s'en déduit aussitôt.

6. *Détermination des coefficients α_k et β_k*

6.1. Nous allons utiliser une description plus géométrique de l'obstruction à

lisser. Soient M^{4k} une variété connexe close, D_0^{4k} un disque plongé différentiablement dans M^{4k} (en respectant l'orientation) et $M_0 = M^{4k} - \operatorname{int} D_0^{4k}$. Tout plongement semi-différentiable $f: M^{4k} \to S^{6k+1}$ est isotope à un plongement semi-différentiable $g: M^{4k} \to S^{6k+1}$ différentiable sur M_0 (en vertu du théorème général du lissage rappelé en début de la 2ème partie). Plus précisement, on peut supposer que $g(M_0) \subset D_+^{6k+1}$ et $g(D_0) \subset D_-^{6k+1}$. L'obstruction à lisser f est alors l'élément du groupe C_{4k-1}^{2k+1} défini par $g \mid \partial D_0 : \partial D_0 = S^{4k-1} \to S^{6k} = D_+^{6k+1} \cap D_-^{6k-1}$. Cette définition de l'obstruction coïncide avec la définition précédente (du moins au signe près); en fait il y a un isomorphisme naturel $C_{4k-1}^{2k+1} \approx \pi_{4k-1}(SD_{2k+1}/SO_{2k+1})$ et pour définir l'obstruction comme un entier, il faut convenir d'un isomorphisme $C_{4k-1}^{2k+1} \approx \mathbf{Z}$, c'est-à-dire choisir un générateur de C_{4k-1}^{2k+1}. Nous conviendrons de choisir le plongement $S^{4k-1} \to S^{6k}$ décrit par Haefliger dans [6] (p. 463); ce plongement sera dénommé «noeud standard» dans la suite.

6.2. Plus précisement, Haefliger décrit dans [6] un plongement différentiable de $M_0 = S^{2k} \times S^{2k} - \operatorname{int}(D_0^{4k})$ dans D_+^{6k+1}, avec un champ de repères normal et dont la restriction à $\partial M_0 = S^{4k-1}$ est exactement le noeud standard.

Ainsi, selon nos conventions, en prolongeant «coniquement» ce plongement dans D^{6k+1} on obtient un plongement semi-différentiable $S^{2k} \times S^{2k}$ dans S^{6k+1} pour lequel l'obstruction ω est $+1$. Ce plongement est décrit suffisamment explicitement pour permettre un calcul de l'entier $\tilde{w}_f^2$. Plus précisement la classe λ introduite dans [6] (p. 457) correspond au signe près et à torsion près à la classe d'enlacement λ_e, de la section e de $\nu(f)$ définie par le premier vecteur du champ de repères normal. Si σ est une section non enlacée pour f, on a d'après la formule (b) du lemme 3.2 $2(\lambda_e - \lambda_\sigma) = \pm(\chi_e - \chi_\sigma)$ d'où $2\lambda_e = \pm\chi_\sigma = w_f$. On en déduit que $\frac{1}{8}\tilde{w}_f^2 = \langle w_f^2/8, [M]\rangle = \langle \lambda_e^2/2, [M]\rangle = \langle \lambda^2/2, [M]\rangle$ et Haefliger montre que $\langle \lambda^2/2, [M]\rangle = \pm 1$. En reprenant ses arguments en tenant compte de nos conventions d'orientation, on obtient -1. (Nous ne décrivons pas les détails, il faut surtout choisir sur M_0 une orientation qui induise sur $\partial M_0 = S^{4k-1}$, l'orientation opposée à l'orientation convenue, pour que ∂M_0 soit orientée comme bord de D_0^{4k} et non comme bord de M_0). Enfin puisque $M^{4k} = S^{2k} \times S^{2k}$, $\bar{p}_k(M^{4k}) = 0$. En résumé:

6.3. LEMME. *Il existe un élément de* $\tilde{\Omega}_{4k}^{2k+1}$ *pour lequel* $\omega = 1$, $w^2 = -8$, $p = 0$. On en déduit aussitôt

6.4. COROLLAIRE. $\alpha_k = -\frac{1}{8}$.

6.5. Pour calculer β_k, nous allons nous servir d'un diagramme auxiliaire que nous allons décrire avec soin. On désigne par FC_{4k-1}^{2k+1} le groupe des classes d'isotopie

de plongements différentiables de $S^{4k-1} \to S^{6k}$ avec champ de repères normal, c'est-à-dire des classes d'isotopie de plongements différentiables de $S^{4k-1} \times D^{2k+1} \to S^{6k}$.

Il y a un homomorphisme évident $l: FC_{4k-1}^{2k+1} \to C_{4k-1}^{2k+1}$ qui consiste à oublier le champ de repères. Il y a d'autre part un homomorphisme $\pi_{4k-1}(SO_{2k+1}) \to FC_{4k-1}^{2k+1}$ décrit comme suit. A la classe d'homotopie de $r: S^{4k-1} \to SO_{2k+1}$, qu'on suppose différentiable, on fait correspondre la classe d'isotopie du plongement obtenu en composant $S^{4k-1} \times D^{2k+1} \xrightarrow{\tilde{r}} S^{4k-1} \times D^{2k+1} \xrightarrow{\varphi} S^{6k}$ où $\tilde{r}(x, y) = (x, r(x)\, y)$ et φ est le plongement standard défini par

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, \ldots, x_{4k}), (y_1, \ldots, y_{2k+1})) \\ = (\sqrt{(1 - y^2/2)}\, x_1, \ldots, \sqrt{(1 - y^2/2)}\, x_{4k}, y_1/\sqrt{2}, \ldots, y_{2k+1}/\sqrt{2})\end{aligned}$$

on a posé $y^2 = \sum y_i^2$.

La suite

$$\pi_{4k-1}(SO_{2k+1}) \to FC_{4k-1}^{2k+1} \xrightarrow{l} C_{4k-1}^{2k+1} \to 0$$

est exacte (voir [7] et utiliser le fait que le fibré normal d'un plongement $S^{4k-1} \to S^{6k}$ est toujours trivial selon [15]). On définit un homomorphisme $FC_{4k-1}^{2k+1} \to \Pi_{4k-1}(S^{2k})$ de la manière suivante: si $f: S^{4k-1} \times D^{2k+1} \to S^{6k}$ est un plongement, l'application $f': S^{2k} = \partial D^{2k+1} \to S^{6k} - f(S^{4k-1})$ définie par $f'(y) = f(u_0, y)$ est une équivalence d'homotopie. A la classe d'isotopie de f on fait correspondre la classe d'homotopie de l'application $g \circ f''$ où $f'': S^{4k-1} \to S^{6k} - f(S^{4k-1})$ est définie par $f''(x) = f(x, u_0)$ et g est un inverse homotopique de f'. Définissons encore un homomorphisme $FC_{4k-1}^{2k+1} \to \Pi_{4k-1}(SO)$. Soient $f: S^{4k-1} \to S^{6k}$ un plongement avec champ de repères normal et $j: S^{6k} \subset S^{6k+1}$ l'inclusion. Le plongement $j \circ f$ est isotope au plongement standard, ce qui implique qu'on peut le prolonger en un plongement $F: D^{4k} \to D^{6k+2}$. Choisissons une trivialisation $T: N \to D^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+2}$ du fibré normal N de F; le champ de repères normal de f, augmenté du champ des vecteurs normaux à S^{6k} dans S^{6k+1} pointés vers le pôle nord, définit une application $S^{4k-1} \times \mathbf{R}^{2k+2} \to T(N \mid S^{4k-1})$ de la forme $(x, y) \mapsto (x, \alpha(x)(y))$ avec $\alpha(x) \in SO_{2k+2}$ (en choisissant une métrique riemannienne convenable). L'homomorphisme à définir associe à la classe d'isotopie de f la suspension stable dans $\Pi_{4k-1}(SO)$ de la classe d'homotopie de l'application $\alpha: S^{4k-1} \to SO_{2k+2}$.

On définit encore un homomorphisme $\Pi_{4k-1}(SO) \to \mathbf{Z}$ en associant à la classe d'homotopie de $\alpha: S^{4k-1} \to SO_N$, N grand, le nombre de Pontrjagin $\langle p_k, [S^{4k}] \rangle$ du fibré vectoriel de rang N sur S^{4k} obtenu en recollant $D_+^{4k} \times \mathbf{R}^N$ et $D_-^{4k} \times \mathbf{R}^N$ le long de $S^{4k-1} \times \mathbf{R}^N$ par identification pour chaque $x \in S^{4k-1}$ de $(x, y) \in D_-^{4k} \times \mathbf{R}^N$ avec $(x, \alpha(x)\, y) \in D_+^{4k} \times \mathbf{R}^N$. Les groupes et homomorphismes que nous avons décrit prennent place dans le diagramme suivant, dont il est facile de vérifier la commutativité: $\Pi_{4k-1}(SO_{2k+1}) \to \Pi_{4k-1}(S^{2k})$ est induit par la fibration standard $SO_{2k+1} \to S^{2k}$,

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{Z} \\
 & & \Pi_{4k-1}(S^{2k}) \arrow[ur, "H"] & \\
\Pi_{4k-1}(SO_{2k+1}) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uurr, bend left, "h'"] \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend right, "k'"'] & FC_{4k-1}^{2k+1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[uurr, bend right, "h"'] & C_{4k-1}^{2k+1} \arrow[r] & 0 \\
 & \Pi_{4k-1}(SO) \arrow[dr] \arrow[uurr, bend right, "k"'] & & \\
 & & & \mathbf{Z}
\end{tikzcd} \tag{I}$$

$\Pi_{4k-1}(SO_{2k+1}) \to \Pi_{4k-1}(SO)$ est l'homomorphisme de suspension, H est l'invariant de Hopf, h, h', k, k' sont définis par composition des autres applications.

6.6. LEMME. *Pour tout* $x \in \Pi_{4k-1}(SO_{2k+1})$, $k'(x) = -4h'(x)$.

Démonstration. Choisissons $\varphi : S^{4k-1} \to SO_{2k-1}$, représentant x. $h'(x)$ est l'entier $\langle p_k(\xi), [S^{4k}] \rangle$, où ξ est le fibré vectoriel de rang $2k+1$ obtenu en recollant $D_+^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$ et $D_-^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$ en identifiant, pour chaque $x \in S^{4k-1}$, le point $(x, y) \in \in D_+^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$ au point $(x, \varphi(x)\, y) \in D_-^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$. Il revient au même, remplaçant S^{4k} par S^{4k}/D_+^{4k}, de considérer le fibré ξ' sur S^{4k} obtenu en recollant $D^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$ à $\mathbf{R}^{2k+1}$ en identifiant pour chaque $x \in S^{4k-1}$, $(x, y) \in D^{4k} \times \mathbf{R}^{2k+1}$ à $\varphi(x)\, y \in \mathbf{R}^{2k+1}$, à condition toutefois d'évaluer $p_k(\xi)$ sur $-[S^{4k}]$ au lieu de $[S^{4k}]$ (on a en effet échangé les rôles de D_+ et D_-). On a donc $k'(x) = -\langle p_k(\xi), [S^{4k}] \rangle$.

Soit E_0 l'espace total du fibré en sphères associé à ξ' et $\pi : E_0 \to S^{4k}$ la projection. Soient encore $f : S^{4k-1} \to S^{2k}$ l'application associée à φ, X_f le CW-complexe obtenu en attachant un disuqe D^{4k} à S^{2k} au moyen de f, et $p : X_f \to S^{4k}$ l'application obtenue en collapsant S^{2k} en un point. On voit facilement que p se relève en une application $g : X_f \to E_0$, qui envoie le sous complexe S^{2k} homéomorphiquement sur la fibre au-dessus de $p(S^{2k})$; g est même une inclusion de sorte qu'on peut considérer X_f comme un sous-espace de E_0, identifiant ainsi p à $\pi \mid X_f$. Soit τ le fibré sur E_0 formé des vecteurs tangents aux fibres de π. On a $\pi^{-1}(\xi') = \tau \oplus \varepsilon^1$, ε^1 étant un fibré trivial de rang 1 sur E_0. On vérifie que $(\pi \mid X_f)_* [X_f] = [S]$, $[X_f]$ étant le générateur de $H_{4k}(X_f)$ correspondant à $[S] \in H_{4k}(S^{4k})$ par l'application p. On a $p_k(\tau) = (\chi(\tau))^2$. D'autre part la classe d'Euler de $\tau \mid X_f$ est $\pm 2u$, u étant un générateur de $H^{2k}(X_f, \mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$. On peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
-k'(x) &= \langle p_k(\xi'), [S] \rangle = \langle p_k(\xi'), (\pi \mid X_f)_* [X_f] \rangle \\
&= \langle (\pi \mid X_f)^* p_k(\xi'), [X_f] \rangle = \langle p_k((\pi \mid X_f)^{-1} \xi'), [X_f] \rangle \\
&= \langle p_k(\tau \mid X_f), [X_f] \rangle = \langle 4u^2, [X_f] \rangle = 4 \langle u^2, [X_f] \rangle
\end{aligned}$$

et par définition $\langle u^2, [X_f] \rangle$ est l'invariant de Hopf de f. c.q.f.d.

6.7. *Principe d'utilisation du diagramme* (I)

On considère un plongement $f: M^{4k} \to S^{6k+1}$ pour lequel $f(M_0) \subset D_+^{6k+1}$, $f(D_0) \subset \subset D^{6k+1}$, f est différentiable sur M_0, et $f(M_0)$ est muni d'un champ de repères normal (voir 6.1 pour les notations). Dans une telle situation, on peut définir un élément $x \in FC_{4k-1}^{2k+1}$ par restriction de f et du champ de repères normal à $\partial D_0 = S^{4k-1}$. On a l'interprétation suivante: $l(x)$ est l'obstruction ω_f à lisser f et $k(x)$ est le nombre de Pontrjagin normal $\bar{p}_k(M^n)$ (pour ce dernier point, cf [14]). C'est en utilisant ce principe que nous allons démontrer les deux lemmes suivants:

6.8. LEMME. *Il existe $x_0 \in FC_{4k-1}^{2k+1}$ tel que $l(x_0) = +1$, $k(x_0) = 0$, $h(x_0) = -6$.*

6.9. LEMME. *Il y a un élément $x_1 \in FC_{4k-1}^{2k+1}$, associé à un plongement f du type décrit dans 6.7, et pour lequel on a:*

$$k(x_1) \neq 0, \quad h(x_1) = 0, \quad \text{avec} \quad w_f = 0$$

Avant de démontrer ces lemmes, nous allons montrer comment le théorème 5.1 s'en déduit.

6.10. *Démonstration de* 5.1. Pour l'élément x_1 décrit dans 6.9, on a $l(x_1) = \omega_f = = \beta_k \tilde{p}^k = \beta_k k(x_1)$. Considérons alors l'élément $y = x_1 - \beta_k\, k(x_1)\, x_0$, x_0 étant l'élément décrit dans le lemme 6.8. On a $l(y) = 0$, donc g provient de $\Pi_{4k-1}(SO_{2k+1})$. Par 6.6, on a donc $-k(y) = 4h(y)$. Mais $k(y) = k(x_1) \neq 0$ et $h(y) = -\beta_k k(x_1)\, h(x_0) = 6\beta_k k(x_1)$. D'où $\beta_k = -\frac{1}{24}$.

6.11. *Démonstration de* 6.8. On reprend l'exemple de Haefliger déjà utilisé pour le lemme 6.3. Il suffit de montrer que $h(x) = -6$, x étant l'élément de FC_{4k-1}^{2k+1} défini par le noeud standard. Rappelons la construction de ce noeud. $(x, y, z) = (x_1 \dots x_{2k}, y_1 \dots y_{2k}, z_1 \dots z_{2k})$ désignant un point général dans $\mathbf{R}^{6k} = S^{6k} - \infty$, on envisage les trois sphères S^{4k-1} plongées dans $\mathbf{R}^{6k}$ de la façon suivante:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^{6k} \mid x = 0; \quad y^2/\alpha^2 + z^2/\beta^2 = 1\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^{6k} \mid y = 0; \quad z^2/\alpha^2 + x^2/\beta^2 = 1\}$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^{6k} \mid z = 0; \quad x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1\}, \quad \alpha > \beta > 0$$

Ces trois sphères sont reliées par deux tubes joignant l'un S_1 à S_2 et l'autre S_2 à S_3; on obtient ainsi un plongement de $S^{4k-1} = S_1 \divideontimes S_2 \divideontimes S_3$ dans $\mathbf{R}^{6k}$, $\divideontimes$ désignant la somme connexe. Le noeud standard est complété par un champ de repères normal tel que sur S_1, le 1er vecteur du champ de repère soit donné par le vecteur normal à S_1 dans $\{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^{6k} \mid x, y \in \mathbf{R}^{2k}\}$, et de façon analogue sur S_2 et S_3. Soit S_i', $i = 1, 2, 3$, la sphère S_i poussée dans $S^{6k} - S_1 \divideontimes S_2 \divideontimes S_3$ le long du 1er vecteur du champ de repère. Il nous faut calculer l'invariant de Hopf de l'application $S^{4k-1} = S_1' \divideontimes S_2' \divideontimes S_3' \to S^{2k}$

définie en composant l'inclusion $S_1' \divideontimes S_2' \divideontimes S_3' \subset S^{6k} - S_1 \divideontimes S_2 \divideontimes S_3$ avec une équivalence d'homotopie de $S^{6k} - S_1 \divideontimes S_2 \divideontimes S_3$ avec S^{2k} respectant les conventions d'orientation indiquées dans 6.5 concernant l'application $FC_{4k-1}^{2k+1} \to \Pi_{4k-1}(S^{2k})$. Cette application $S^{4k-1} \to S^{2k}$ est la somme des trois applications $S^{4k-1} \to S^{2k}$ obtenues en composant les inclusions de S_1', S_2' et S_3' dans $S^{6k} - S_1 \divideontimes S_2 \divideontimes S_3$ avec l'équivalence d'homotopie précédente.

Par symétrie, il nous suffira de calculer l'invariant de Hopf de l'une de ces trois applications, par exemple celle relative à S_3', et de multiplier le résultat par 3.

Désignons pas $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ le sous-espace de S^{6k} obtenu en réunissant S_1, S_2 et S_3 par deux arcs joignant l'un S_1 à S_2, l'autre S_2 à S_3. $S^{6k} - S_1 \circ S_2 \circ S_3$ a le type d'homotopie d'un wedge de trois sphères S^{2k}, $S_1^{2k} \vee S_2^{2k} \vee S_3^{2k}$. L'application de S_3' dans S^{2k} dont il faut calculer l'invariant de Hopf peut aussi être obtenu en composant l'inclusion $S_3' \to S^{6k} - S_1 \circ S_2 \circ S_3$ avec une équivalence homotopique de $S^{6k} - S_1 \circ S_2 \circ S_3$ avec $S_1^{2k} \vee S_2^{2k} \vee S_3^{2k}$ et avec l'application de $S_1^{2k} \vee S_2^{2k} \vee S_3^{2k} \to S^{2k}$ qui est l'identité sur chaque exemplaire S_i^{2k} («folding map»). Il est clair que S_3' est homotope à 0 dans $S^{6k} - S_1 \circ S_3$ et $S^{6k} - S_2 \circ S_3$, de sorte qu'on peut encore décrire l'application $f: S_3' \to S^{2k}$ comme composée de l'inclusion $i: S_3' = S_3 \to S^{6k} - S_1 \circ S_2$, d'une équivalence homotopique $\varphi: S^{6k} - S_1 \circ S_2 \to S_1^{2k} \vee S_2^{2k}$ et de l'application $F: S_1^{2k} \vee S_2^{2k} \to S^{2k}$ qui est l'identité sur chaque exemplaire S_i^{2k}. Il faut donc calculer $H(F \circ \varphi \circ i)$. Pour tenter un tel calcul, il faut avoir une description aussi explicite que possible de φ; à cette fin nous introduisons les boules B_1, B_2 dans S^{6k} définies dans $\mathbf{R}^{6k} \simeq S^{6k} - (\infty)$ par les équations

$$B_1: x = 0, \qquad y^2/\alpha^2 + z^2/\beta^2 \leqslant 1$$
$$B_2: y = 0, \qquad z^2/\alpha^2 + x^2/\beta^2 \geqslant 1.$$

B_2 est completé dans S^{6k} par le point à l'infini. On a donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $\partial B_1 = S_1$ et $\partial B_2 = S_2$.

Soient A_1 et A_2 des épaississements (voisinages tubulaires) de B_1 et B_2 allant en s'amincissant vers les bords ∂B_1 et ∂B_2, de manière que $A_i - \partial B_i$ soit fibré en disques fermés D^{2k} au-dessus de $B_i - \partial B_i$, $i = 1, 2$. On choisit aussi A_1 et A_2 tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et on choisit le segment joignant S_1 à S_2 de manière qu'il ne rencontre pas $A_i - \partial B_i$, $i = 1, 2$.

On définit φ en imitant la construction de Thom-Pontrjagin: φ envoie $S^{6k} - (A_1 \cup A_2)$ sur le point base de $S_1^{2k} \vee S_2^{2k}$ et $A_i - \partial B_i$ sur S_i^{2k}, $i = 0, 1$, de manière que sur chaque fibre D^{2k}, φ soit l'application surjective $D^{2k} \to S^{2k}$ qui identifie ∂D_i^{2k} au point base. Il est facile de vérifier que φ est une équivalence homotopique conforme aux conventions d'orientation.

Pour calculer $H(F \circ \varphi \circ i)$ on sait qu'il faut calculer le coefficient d'enlacement des images inverses de deux valeurs régulières.

On peut choisir φ de telle manière que $F \circ \varphi$ soit différentiable au voisinage de $(B_1 - S_1) \cup (B_2 - S_2)$, et que $[(B_1 - S_1) \cup (B_2 - S_2)] \cap S_3$ soit l'image inverse d'une

valeur régulière que $F\circ\varphi\circ i$. On obtient ainsi une description très explicite de l'image inverse d'une valeur régulière et il n'est pas difficile de calculer le coefficient d'enlacement de E avec la sous-variété obtenue en poussant E en dehors de lui-même dans S_3. Le calcul donne la valeur -2 pour $H(F\circ\varphi\circ i)$.

6.12. *Démonstration de* 6.9. Nous commencons par décrire un homomorphisme $\Phi:\Pi_{4k}(SG, SO)\to FC^{2k+1}_{4k-1}$. Un élément γ de $\Pi_{4k}(SG, SO)$ peut être représenté par une application $D^{4k}\times S^N\to S^N$, pour N assez grand; on peut supposer que g est différentiable et que $u_0\in S^N$ est une valeur régulière. L'image inverse de u_0 est une sous-variété à bord $(M_0^{4k}, \partial M_0^{4k})$ orientée, de bord $\partial M_0^{4k}\approx S^{4k-1}$, plongée avec un champ de repères normal dans $(D^{4k}\times S^N, S^{4k-1}\times S^N)$, le champ de repères étant induit par une base orientée de l'espace tangent à S^N en u_0. En raisonnant comme dans le n° 3.3. de [7], on peut supposer que M_0 est l'union d'un disque D^{4k} et d'anses d'indices $>(2k-1)$. En considérant $D^{4k}\times S^N$ plongé dans $\mathbf{R}_+^{4k+N+1}$, on obtient un plongement $(M_0, \partial M_0)\subset(\mathbf{R}_+^{N+4k+1}, \partial\mathbf{R}_+^{N+4k+1})$ avec champ de repère normal d'une variété M_0 $(2k-1)$-connexe. Selon Hirsch (cf. [9]), ce plongement est isotope à un plongement $f:(M_0, \partial M_0)\to(\mathbf{R}_+^{N+4k+1}, \partial\mathbf{R}_+^{N+4k+1})$ avec champ de repères normal tel que $f(M_0)\subset\mathbf{R}_+^{6k}$, le champ de repères étant formé d'un champ de repères normal de $f(M_0)\subset\mathbf{R}_+^{6k}$ et du repère normal de $\mathbf{R}_+^{6k}$ dans $\mathbf{R}_+^{N+4k+1}$ formé des vecteurs $u_{6k}, \ldots, u_{N+4k}$. Nous ferons correspondre à γ la classe de concordance du plongement de $S^{4k-1}=\partial M_0$ dans $S^{6k}=(\partial\mathbf{R}_+^{6k+1})\cup(\infty)$ défini par $f\mid\partial M_0$, avec son champ de repères normal; cela définit l'homomorphisme Φ.

On vérifie que le diagramme suivant commute (au moins au signe près)

$$\begin{tikzcd}
 & FC^{2k+1}_{4k-1} \arrow[dr] & \\
\Pi_{4k}(SG, SO) \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[rr, "\partial"'] & & \Pi_{4k-1}(SO)
\end{tikzcd}$$

Comme $\partial\neq 0$, on en déduit qu'il y a des éléments x_1 de FC^{2k+1} qui proviennent de $\Pi_{4k}(SG, SO)$ par Φ et pour lesquels $k(x_1)\neq 0$. La description donnée ci-dessus de Φ montre qu'un tel x_1 est représenté par un plongement avec champ de repères normal $S^{4k-1}\to\mathbf{R}^{6k}=S^{6k}-(\infty)$ obtenu par restriction à ∂M_0 d'un plongement avec champ de repères normal $f:M_0^{4k}\to\mathbf{R}_+^{6k+1}$ d'une variété M_0^{4k} de bord $\partial M_0\approx S^{4k-1}$; de plus, toujours en vertu de la construction de Φ, on peut supposer que f est obtenu en composant un plongement $M_0^{4k}\to\mathbf{R}_+^{6k}$ avec l'inclusion $\mathbf{R}_+^{6k}\subset\mathbf{R}_+^{6k+1}$ et que le 1er vecteur du champ de repères normal est donné par le vecteur normal à $\mathbf{R}_+^{6k}$ dans $\mathbf{R}_+^{6k+1}$. La remarque du n° 3 de la démonstration de 9.4 montre que $w_f=0$; il est d'autre part évident que l'image de S^{4k-1} dans $\mathbf{R}^{6k}-f(S^{4k-1})$ obtenu en poussant S^{4k-1} en dehors de $f(S^{4k-1})$ le long du 1er vecteur du champ de repères normal est homotope à 0, ce qui montre que $h(x_1)=0$ et achève la démonstration du lemme.

7. *Une application*

Lorsque M^{4k} est $(2k-2)$-connexe, on vérifie que $\bar{w}^{2k}$ est une classe de Wu. En conséquence, désignant par H le groupe $H^{2k}(M)/\text{Torsion}$ et notant multiplicativement la forme quadratique d'intersection $H \otimes H \to \mathbf{Z}$ la condition que $w \in H$ provienne d'une représentation entière de $\bar{w}^{2k}$ peut aussi s'exprimer sous la forme $wx \equiv x^2 \pmod 2$ $\forall x \in H$. Cette remarque, combinée aux théorèmes 4.2 et 5.1 permet d'énoncer le critère suivant:

7.1. THÉORÈME. *Soit M^{4k} une variété différentiable orientée, $(2k-2)$-connexe. Soit $H = H^{2k}(M)/\text{Torsion}$ et notons multiplicativement la forme quadratique d'intersection $H \otimes H \to \mathbf{Z}$ de M^{4k}. Alors, M^{4k} peut être plongée différentiablement dans $\mathbf{R}^{6k+1}$ si et seulement si $\bar{w}^{2k+1} = 0$ (coefficients entiers) et s'il existe $w \in H$ tel que*

(i) $wx \equiv x^2 \pmod 2$ $\forall x \in H$

(ii) $w^2 = -\frac{1}{3}\langle \bar{p}_k, [M] \rangle$

7.2. Dans le cas particulier $k=1$, M^4 étant orientée on a $\bar{w}^3 = 0$ (cf. [17]); d'autre part $-\frac{1}{3}\langle \bar{p}_1, [M] \rangle = \tau$ (τ étant la signature de M^4). On retrouve ainsi le résultat annoncé dans [1] (une démonstration en est donnée dans [2]).

7.3. Pour une forme quadratique unimodulaire, non dégénérée quelconque, on peut toujours trouver w satisfaisant (i) et pour un tel w on a $w^2 \equiv \tau \pmod 8$, τ étant la signature de la forme quadratique. La conditions (ii) est plus délicate. Dans le cas des formes indéfinies, on dispose d'une classification complète (voir par exemple [18]) et en utilisant cette classification, on peut montrer que pour tout entier z, $z \equiv \tau \pmod 8$, on peut trouver w satisfaisant (i) et $w^2 = z$. Quant aux formes quadratiques définies positives, il existe une liste de celles qui sont de rang $\leqslant 16$ (voir Kneser [16]). On vérifie directement que chaque forme de cette liste possède aussi cette propriété. On obtient ainsi le corollaire suivant:

7.4. THÉORÈME. *Soit M^{4k} une variété différentiable close orientable $(2k-2)$-connexe, dont la forme quadratique d'intersection est indéfinie ou pour laquelle le rang de $H^2(M)$ est $\leqslant 16$. Alors M^{4k} peut être plongée différentiablement dans $\mathbf{R}^{6k+1}$ si et seulement si $\bar{w}^{2k+1} = 0$ (coefficients entiers).*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Boéchat et A. Haefliger, *Plongements différentiables des variétés de dimension* 4 *dans* $\mathbf{R}^7$, C. R. Acad. Sc. Paris [série A] *266* (1968), 1226–1228.

[2] J. Boéchat et A. Haefliger, *Plongements différentiables de variétés de dimension* 4 *dans* $\mathbf{R}^7$ dans *Essays on Topology and Related Topics* (Springer, 1970).

[3] O. Burlet, *Cobordismes de plongements et produits homotopiques* (à paraître).

[4] E. FADELL, *Generalised normal bundles for locally flat imbeddings*, Trans. Amer. Math. Soc. *114* (1965), 488–513.
[5] A. HAEFLIGER et M. W. HIRSCH, *On the existence and classification of differentiable embeddings*, Topology *2* (1963), 129–133.
[6] A. HAEFLIGER: *Knotted* $(4k-1)$*-spheres in* $6k$*-space*, Ann. of Math. *75* (1962), 452–466.
[7] ——, *Differentiable embeddings of* S^n *in* S^{n+q} *for* $q > 2$, Ann of Math. *83* (1966), 402–436.
[8] ——, *Knotted spheres and related geometric problems*, Proc. of the Intern. Congr. of Math. Moscow (1966).
[9] M. W. HIRSCH, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. *93* (1969), 242–276.
[10] J. E. P. HUDSON, *PL embeddings and isotopies*, Bull. Am. Math. Soc. *72* (1966), 536–537.
[11] ——, *Piecewise linear topology* (Benjamin, 1959).
[12] M. IRWIN, *Combinational embeddings of manifolds*, Bull. Am. Math. Soc. *68* (1962), 25–27.
[13] I. M. JAMES: *On the iterated suspension*, Quart. J. Math. Oxford *5* (1954), 1–10.
[14] M. A. KERVAIRE, *On the Pontrjagin classes of certain bundles over manifolds*, Am. Jour. of Math. *80* (1958), 632–638.
[15] ——, *An interpretation of Whitehead's generalization of Hopf's invariant*, Ann. Math. *69* (1959), 345–365.
[16] J. M. KNESER, *Klassenzahlen definiter quadratischer Formen*, Arch. Math. *8* (1957), 241–250.
[17] W. S. MASSEY and F. P. PETERSON, *On the dual Stefel-Whitney classes of a manifold*, Bull. Soc. Math. Mexicana *8* (1969), 1–13.
[18] J. P. SERRE, *Formes bilinéaires symétriques entières à discriminant* ± 1, Exp. 14 dans Sém. H. Cartan (1961–1962).
[19] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles* (Princeton University Press, 1951).
[20] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. *28* (1954) 17–85.

Reçu le 12 mai 1970