

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1970)

**Artikel:** Beiträge zum potentialtheoretischen Aspekt des Verheftungssatzes von A.D. Alexandrow.  
**Autor:** Leutwiler, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34644>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Beiträge zum potentialtheoretischen Aspekt des Verheftungssatzes von A. D. Alexandrow

von HEINZ LEUTWILER, Zürich

## Einleitung

1. Auf einer Riemannschen Fläche  $R$  sei ein konform invariantes Linienelement

$$ds = e^{u(z)} |dz| \quad (0.1)$$

( $z$  Ortsuniformisierende) definiert. (Ein konformer Parameterwechsel  $z=f(\zeta)$  soll also die Transformation

$$\tilde{u}(\zeta) = u(f(\zeta)) + \log |f'(\zeta)| \quad (0.2)$$

bewirken, sodass

$$ds = e^{u(z)} |dz| = e^{\tilde{u}(\zeta)} |d\zeta|$$

invariant bleibt.) Dabei wird vorausgesetzt, dass  $u$  eine  $\delta$ -subharmonische Funktion ist, das heisst sich lokal als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lässt

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z). \quad (0.3)$$

Mit dem Differential (0.1) definieren wir auf  $R$  die Metrik

$$\varrho(p, q) = \inf_L \int_L e^{u(z)} |dz| \quad (0.4)$$

( $p, q \in R$ ).  $L$  durchlaufe dabei die Gesamtheit aller stückweise analytischen Kurven, welche  $p$  mit  $q$  verbinden.

Wir bezeichnen im folgenden den Raum, bestehend aus  $R$  und der Metrik (0.4), mit  $(R, ds)$ .

2. Ist die  $\delta$ -subharmonische Funktion  $u$  dreimal stetig differenzierbar, so stellt  $(R, ds)$  eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit dar. Die Grössen  $x = \operatorname{Re} z$  und  $y = \operatorname{Im} z$  heissen dann isotherme Parameter; die Gauss'sche Integralkrümmung berechnet sich nach der Formel

$$K(U) = - \int \int_{|z| < 1} \Delta u(z) dx dy \quad (0.5)$$

( $z = x + iy$ ,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ). Dabei bezeichnet  $U \subset R$  eine konforme Parameterzelle.



3. A. D. Alexandrow hat die Theorie der zweidimensionalen Riemannschen Räume verallgemeinert, indem er rein geometrisch die sogenannten *zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (M.b.K.) einführte.<sup>1)</sup>

Wie J. G. Reschetnjak [18] und A. Huber [9] gezeigt haben, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den M.b.K. und den in Abschnitt 1 eingeführten Räumen  $(R, ds)$ . Es gilt nämlich der Satz (A. Huber [9], Satz A):

*Jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung ist isometrisch einem Raum  $(R, ds)$  und umgekehrt stellt jeder Raum  $(R, ds)$  eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung dar.*

Den subharmonischen Funktionen  $u_i(z)$  sind positive Massenbelegungen  $\mu_i = (1/2\pi) \Delta u_i$  ( $i=1, 2$ ) zugeordnet. (Der Laplaceoperator  $\Delta$  ist hierbei im Sinne der Distributionen aufzufassen). Die Differenz

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \quad (0.6)$$

ist unabhängig davon, welche Darstellung (0.3) und welche Ortsuniformisierende  $z$  man wählt. Sie ist also eine auf der Riemannschen Fläche  $R$  definierte, vollständig additive Mengenfunktion.

Die Mengenfunktion  $\mu$  steht in engem Zusammenhang mit der Alexandrowschen Krümmung  $K$ . Die Formel (0.5) bleibt nämlich noch in der verallgemeinerten Form

$$K(e) = -2\pi\mu(e) \quad (0.7)$$

für jede Borelmenge  $e$  richtig (siehe z.B. [9]).

4. Für die Theorie der Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung ist der sogenannte Verheftungssatz von Bedeutung. Dieser Satz sagt aus, dass die Verheftung zweier von Kurven beschränkter Schwenkung<sup>1)</sup> berandeter M.b.K.-Bereiche  $U$  und  $\tilde{U}$  wieder eine M.b.K. erzeugt. Die Verheftung geschieht so, dass man auf den Rändern  $\partial U$  und  $\partial \tilde{U}$  die Endpunkte gleich langer (von festen Punkten aus gemessener) Teilbogen identifiziert.

Zur Vorbereitung auf eine potentialtheoretische Behandlung dieses Verheftungssatzes, geben wir im ersten Paragraphen eine Definition der Schwenkung in  $(R, ds)$ .<sup>2)</sup>

Im zweiten Paragraphen betrachten wir die Kurven von beschränkter Schwenkung. Diese charakterisieren wir unter Heranziehung einer zweiten – zu der im ersten Paragraphen gegebenen äquivalenten – Definition der Schwenkung (Satz 1).

Als Anwendung ergibt sich im dritten Paragraphen eine Ungleichung (Satz 2), die zum Teil mit einem Resultat von A. D. Alexandrow [3] übereinstimmt.

<sup>1)</sup> Für Begriffe und Resultate aus der Theorie der M.b.K. verweisen wir auf [1] und [2].

<sup>2)</sup> Eine andere – für unsere Zwecke weniger geeignete – Definition stammt von J. G. Reschetnjak [19].

Im vierten Paragraphen geben wir zunächst die potentialtheoretische Formulierung des Verheftungssatzes (Sätze 3, 4). Anschliessend zeigen wir, wie man, allerdings mit einer zusätzlichen Annahme, diesen Satz mit funktionentheoretischen Methoden beweisen kann.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Fortführung der bereits erwähnten Arbeit [9] von A. Huber dar und ist auf dessen Anregung entstanden. Wir möchten an dieser Stelle Herrn Professor Huber für diese Anregung und die vielen wertvollen Hinweise zu dieser Arbeit bestens danken.

## 1. Definition der Schwenkung einer Kurve

1.1. Sei  $U$  eine Parameterzelle in  $(R, ds)$ , und sei  $\gamma \subset U$  ein Jordanbogen mit Halbtangenten in den Endpunkten, dem in der  $z$ -Ebene ein Bogen  $\gamma_z = \{z(t), 0 \leq t \leq 1\}$  entspricht. Wir definieren zunächst die Schwenkung unter der Annahme, dass  $\gamma$  *analytisch* ist.

Für dreimal stetig differenzierbare Funktionen  $u$  ist die geodätische Integralkrümmung

$$\tau(\gamma) = \int_{\gamma_z} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + k \right) |dz|. \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet  $k$  die euklidische Krümmung der ebenen Kurve  $\gamma_z$  und  $\partial/\partial n$  die Ableitung in Richtung der Normalen, genauer in Richtung von  $\arg(-i(dz/dt))$ .

Die Formel (1.1) enthält die Ableitung der Funktion  $u$  und kann nicht ohne weiteres auf beliebige subharmonische Funktionen übertragen werden, da bei diesen die Normalableitung nirgends zu existieren braucht. Deshalb stützen wir uns auf den von B. Fuglede [8] eingeführten Begriff der *symmetrischen Normalableitung*

$$\frac{\delta u}{\delta n}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z + hv) - u(z - hv)}{2h} \quad (1.2)$$

( $v$  sei die Normale von  $\gamma_z$ ). Fuglede hat gezeigt, dass  $\delta u/\delta n$  auf jedem analytischen Bogen fast überall existiert und eine im Lebesgueschen Sinn integrierbare Funktion darstellt. Wir definieren also als *mittlere Schwenkung*  $\tau$  (verallgemeinerte geodätische Integralkrümmung) *eines analytischen Bogens*  $\gamma$ :

$$\tau(\gamma) = \int_{\gamma_z} \left( \frac{\delta u}{\delta n} + k \right) |dz| \quad (1.3)$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn das Integral hängt nicht von der speziellen Wahl der Ortsuniformisierenden  $z$  ab.

1.2. Wir wollen nun den Begriff der Schwenkung auf beliebige *Jordanbögen*  $\gamma$  mit *Halbtangenten in ihren Endpunkten* ausdehnen. Dazu betrachten wir eine Folge von stückweise analytischen Jordanbögen  $\gamma_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), welche, links von der orientierten Kurve  $\gamma$  liegend, die Endpunkte  $a$  und  $b$  von  $\gamma$  miteinander verbinden – sonst aber keine Punkte mit  $\gamma$  und unter sich gemeinsam haben – und gegen  $\gamma$  konvergieren. Die Konvergenz ist so zu verstehen, dass das zwischen  $\gamma_n$  und  $\gamma$  liegende Gebiet gegen die leere Menge strebt. Wir verlangen noch, dass die von  $\gamma_n$  und  $\gamma$  in  $a$  und  $b$  eingeschlossenen Winkel gegen Null konvergieren, und dass in den Eckpunkten der  $\gamma_n$  keine Punktmassen liegen. Dann existiert, wie anschliessend gezeigt wird, der Grenzwert

$$\tau_l(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{v=0}^{N_n} \tau(\gamma_n^v) + \sum_{v=1}^{N_n} (\pi - \varphi_n^v) \right\}. \quad (1.4)$$

Dabei bezeichnen wir mit  $\varphi_n^v$  ( $v=1, 2, \dots, N_n$ ) die links von  $\gamma_n$  liegenden Winkel in den Eckpunkten  $p_n^v$  und mit  $\gamma_n^v$  ( $v=0, 1, \dots, N_n$ ) die analytischen Teilbögen  $\widehat{ap_n^1}$ ,  $\widehat{p_n^1 p_n^2}, \dots, \widehat{p_n^{N_n-1} p_n^{N_n}}, \widehat{p_n^{N_n} b}$  der Kurve  $\gamma_n$ . Wir nennen  $\tau_l(\gamma)$  die *linke Schwenkung des offenen Jordanbogens*  $\gamma$ .

Analog, d.h. mit Hilfe einer von rechts gegen  $\gamma$  konvergierenden Folge, definiert man die *rechte Schwenkung*  $\tau_r(\gamma)$ .

Für *Jordankurven* definieren wir die linke (rechte) Schwenkung mit Hilfe einer Folge von geschlossenen Kurven  $\gamma_n$ , welche mit  $\gamma$  und unter sich keine Punkte gemeinsam haben und von links (rechts) gegen  $\gamma$  konvergieren. In diesem Falle ist eine Voraussetzung über die Existenz von Halbtangenten überflüssig.

1.3. Wir haben jetzt zu zeigen, dass der Grenzwert (1.4) existiert und von der Wahl der Kurven  $\gamma_n$  unabhängig ist. Wir schreiben von nun an kurz  $\gamma$  für  $\gamma_z$ . Gemäss B. Fuglede ([8], p. 93) gilt:

$$\int_{\gamma_m} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| - \int_{\gamma_n} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| = 2\pi\mu(\Omega_{mn}) + \pi\mu(\gamma'_m \cup \gamma'_n) + \alpha_{mn}\mu(a) + \beta_{mn}\mu(b). \quad (1.5)$$

Dabei bezeichnen  $\Omega_{mn}$  das von  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$  ( $m > n$ ) berandete Gebiet,  $\gamma'_m$  und  $\gamma'_n$  die um ihre Endpunkte reduzierten Bogen  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$ ,  $\alpha_{mn}$  ( $\beta_{mn}$ ) den Winkel zwischen  $\gamma_m$  und  $\gamma_n$  im Endpunkt  $a$  ( $b$ ) und  $\mu$  das Mass (0.6). Die rechte Seite von (1.5) kann aber, infolge der Stetigkeit von  $\mu$  und der Voraussetzung betreffend die Winkel in  $a$  und  $b$ , für genügend grosse  $m$  und  $n$  beliebig klein gemacht werden.

Hiermit ist die Existenz des Grenzwertes (1.4) gezeigt, denn für den euklidischen Anteil der Schwenkung folgt die Existenz des Grenzwertes unmittelbar aus der Voraussetzung betreffend die Winkel in den Endpunkten  $a$  und  $b$ .

Der Beweis für die Unabhängigkeit von der Wahl der Kurvenfolge verläuft analog.

1.4. Wir erwähnen vier Eigenschaften der Schwenkung.

E 1: Sei  $\gamma$  eine Jordankurve oder ein offener Jordanbogen mit Halbtangenten in den Endpunkten. Dann gilt:

$$\tau_l(\gamma) + \tau_r(\gamma) = -2\pi\mu(\gamma).$$

Nach Definition ist nämlich

$$\tau_l(\gamma) + \tau_r(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{\gamma_n^{(l)}} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| - \int_{\gamma_n^{(r)}} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| \right]. \quad (1.6)$$

Durch Aufstellen der (1.5) entsprechenden Beziehung für  $\gamma_n^{(l)}$  und  $\gamma_n^{(r)}$  wird ersichtlich, dass der Grenzwert (1.6) den Wert  $-2\pi\mu(\gamma)$  besitzt.

Ebenso zeigt man:

E 2: Die Jordankurve  $\gamma$  sei in einem kreishomöomorphen Gebiet von  $R$  enthalten und berande im positiven Sinne ein Gebiet  $U$ . Dann gilt (Formel von Gauss-Bonnet):

$$\tau_l(\gamma) = 2\pi + 2\pi\mu(U).$$

Bevor wir die Additivität der Schwenkung nachweisen können, müssen wir die Schwenkung eines Punktes  $p \in \gamma$  definieren. Dieser Begriff kann nur dann sinnvoll erklärt werden, wenn die Kurve  $\gamma$  in  $p$  Halbtangenten besitzt. Bezeichnen wir mit  $\varphi_p^{(l)}$  ( $\varphi_p^{(r)}$ ) den links (rechts) von  $\gamma$  liegenden Winkel der beiden Halbtangenten von  $\gamma$  im Punkte  $p$ , so verstehen wir unter der *linken (rechten) Schwenkung* von  $p \in \gamma$  die Grösse:

$$\left. \begin{aligned} \tau_p^{(l)} &= \pi - \varphi_p^{(l)} - \varphi_p^{(l)} \cdot \mu(p), \quad \text{bzw.} \\ \tau_p^{(r)} &= \pi - \varphi_p^{(r)} - \varphi_p^{(r)} \cdot \mu(p). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

E 3: Der offene Jordanbogen  $\gamma$  besitze in den Endpunkten  $a$  und  $b$  sowie in einem innern Punkt  $p \in \gamma$  Halbtangenten. Dann gilt für die offenen Teilbogen  $\widehat{ap}$  und  $\widehat{pb}$  die Beziehung (Additivität der Schwenkung):

$$\left. \begin{aligned} \tau_l(\gamma) &= \tau_l(\widehat{ap}) + \tau_p^{(l)} + \tau_l(\widehat{pb}) \\ \tau_r(\gamma) &= \tau_r(\widehat{ap}) + \tau_p^{(r)} + \tau_r(\widehat{pb}). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

*Beweis.* Es genügt, die erste Gleichung von (1.8) zu beweisen, da sich daraus mit Hilfe von E 1 die zweite ergibt. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} \tau_l(\gamma) - \tau_l(\widehat{ap}) - \tau_l(\widehat{pb}) &= \pi - \varphi_p^{(l)} \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{\gamma_n} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| - \int_{\gamma'_n} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| - \int_{\gamma''_n} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| \right]. \end{aligned}$$

Dabei konvergieren die  $\gamma'_n, \gamma''_n$  von links gegen die Bogen  $\widehat{ap}, \widehat{pb}$ . Wendet man auf den Ausdruck in eckiger Klammer wiederum die mit (1.5) durchgeführte Überlegung an, so erhält man die Beziehung (1.8). Wir erwähnen noch:

E 4: *Die oben eingeführten linken und rechten Schwenkungen einer Kurve stimmen mit den von A. D. Alexandrow (rein geometrisch) definierten Begriffen „linke (rechte) Schwenkung einer Kurve“ überein.*

J. G. Reschetnjak [19] hat bereits früher den Begriff der Schwenkung – auf andere Weise – potentialtheoretisch definiert und gezeigt, dass seine Definition mit der Alexandrowschen äquivalent ist. Wir werden später die Äquivalenz unserer Definition mit der Reschetnjakschen – und damit der Alexandrowschen – beweisen (siehe Anmerkung am Schluss von Abschnitt 2.4).

## 2. Kurven von beschränkter Schwenkung

2.1. Besitzt der in  $(R, ds)$  liegende Jordanbogen  $\gamma$  in jedem Punkt Halbtangenten nach beiden Richtungen, so sind für jeden Teilbogen  $\gamma_t = \{p(\theta), 0 \leq \theta \leq t \leq 1\}$  die Begriffe linke und rechte Schwenkung  $\tau_l(\gamma_t)$  und  $\tau_r(\gamma_t)$  definiert.

Wir nennen  $\gamma$  eine *Kurve von beschränkter Schwenkung*, falls die Funktion  $t \rightarrow \tau_l(\gamma_t)$  auf dem Intervall  $0 \leq t \leq 1$  von beschränkter Variation ist. Aus der Eigenschaft E 1 in Abschnitt 1.4 folgt, dass dann auch die Funktion  $t \rightarrow \tau_r(\gamma_t)$  von beschränkter Variation ist, und umgekehrt.

2.2. Zur Charakterisierung der Kurven von beschränkter Schwenkung benötigen wir eine zweite – zu der im ersten Paragraphen gegebenen äquivalente – Definition der Schwenkung. Da wir von jeder Kurve voraussetzen, dass sie in einem kreishomöomorphen Gebiet von  $R$  enthalten ist, können wir die folgenden Überlegungen in der  $z$ -Ebene durchführen.

Es sei also  $\Gamma$  eine Jordankurve, welche ein ebenes Gebiet  $G$  so berandet, dass dasselbe links von  $\Gamma$  liegt. Sei  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  die im Differential (0.1) auftretende  $\delta$ -subharmonische Funktion, welche auf einem  $G$  enthaltenden, ebenen Gebiet definiert ist. Mit  $H_1(z)$  und  $H_2(z)$  bezeichnen wir die besten harmonischen Majoranten von  $u_1(z)$  bzw.  $u_2(z)$  in Bezug auf das Gebiet  $G$  und setzen  $H(z) = H_1(z) - H_2(z)$ . Mit Hilfe der Greenschen Funktion  $g(z, \zeta)$  von  $G$  und dem Mass  $\mu$  aus (0.6) kann dann  $u(z)$  wie folgt dargestellt werden<sup>3)</sup>:

$$u(z) = H(z) - \int_G g(z, \zeta) d\mu(\zeta). \quad (2.1)$$

<sup>3)</sup> siehe z.B. T. Radó [17]

Wir betrachten jetzt einen Teilbogen  $\gamma$  von  $\Gamma$ , in dessen Endpunkten  $\Gamma$  Halbtangenten nach beiden Richtungen besitzt. Sei  $\{\gamma_n\}$  eine von links gegen  $\gamma$  konvergierende Folge stückweise analytischer Kurven wie sie in der Definition (1.4) eingeführt wurde. Aus (2.1) folgt:

$$\int_{\gamma_n} \frac{\delta u}{\delta n} |dz| = \int_{\gamma_n} \frac{\partial H}{\partial n} |dz| - \int_{\gamma_n} \frac{\delta}{\delta n} \left[ \int g(z, \zeta) d\mu(\zeta) \right] |dz|. \quad (2.2)$$

Für die Behandlung des ganz rechts stehenden Integrals erweist es sich als zweckmässig, eine weitere gegen  $\gamma$  konvergierende Kurvenfolge  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  einzuführen. Wir betrachten eine konforme Abbildung  $z=f(\zeta)$  des Einheitskreises  $|\zeta|<1$  auf  $G$ . Diese führt einen Teilbogen  $B$  von  $|\zeta|=1$  in  $\gamma$  über<sup>4)</sup>. Wir definieren  $\{\tilde{\gamma}_n\}$  als Bild einer Folge von Kreisbogen, welche die Endpunkte von  $B$  miteinander verbinden und für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $B$  streben.

LEMMA 1: Sei  $v(z)$  eine in einem  $G$  enthaltenden Gebiet definierte,  $\delta$ -subharmonische Funktion. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{\delta v}{\delta n} |dz|. \quad (2.3)$$

2.3. Beweis von Lemma 1. Nach einem Resultat von C. Caratheodory [6] besitzen die Kurven  $\tilde{\gamma}_n$  in ihren Endpunkten  $a$  und  $b$  Halbtangenten, welche für  $n \rightarrow \infty$  gegen die entsprechenden Halbtangenten von  $\gamma$  streben. Zu jedem Index  $n$  gibt es folglich eine Zahl  $N$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $m > N$  die Kurven  $\gamma_n$  und  $\tilde{\gamma}_m$  miteinander ein Jordangebiet  $\Omega_{mn}$  beranden. Es bezeichne  $\Omega_{mn}^{(r)} = \Omega_{mn} \cap \{z, |z-a| > r \wedge |z-b| > r\}$ . Seien ferner  $A_{mn}^{(r)} = \Omega_{mn} \cap \{z, |z-a|=r\}$  und  $B_{mn}^{(r)} = \Omega_{mn} \cap \{z, |z-b|=r\}$ .

Nach B. Fuglede [8, p. 93] und wegen der Stetigkeit des Masses  $\mu$  ist

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_{mn}^{(r)}} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = 2\pi\mu(\Omega_{mn}) + \pi\mu(\gamma'_n \cup \tilde{\gamma}'_m), \quad (2.4)$$

wobei  $\gamma'_n$  und  $\tilde{\gamma}'_m$  die um ihre Endpunkte reduzierten Kurven  $\gamma_n$  und  $\tilde{\gamma}_m$  bezeichnen.

Seien  $\alpha_{mn}$  und  $\beta_{mn}$  die Winkel zwischen  $\gamma_n$  und  $\tilde{\gamma}_m$  in den Endpunkten  $a$  und  $b$ . Wir beweisen nun, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{A_{mn}^{(r)}} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = \alpha_{mn}\mu(a) \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_{mn}^{(r)}} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = \beta_{mn}\mu(b). \quad (2.5)$$

Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Radius  $r_\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft, dass die

<sup>4)</sup>  $f(\zeta)$  lässt sich stetig auf den Rand fortsetzen.

totale Variation des Masses  $\mu$  in der punktierten Kreisscheibe  $K'(a, r_\varepsilon)$  vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r_\varepsilon$  kleiner als  $\varepsilon$  ist. In dieser Kreisscheibe stellen wir  $v(z)$  als Summe einer harmonischen Funktion  $h(z)$  und eines logarithmischen Potentials dar (siehe z.B. T. Radó [17]) und erhalten nach B. Fuglede [8, p. 93] für  $r < r_\varepsilon$  die Beziehung

$$\int_{A_{mn}^{(r)}} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = \alpha_{mn}^{(r)} \mu(a) + \int_{K'(a, r_\varepsilon)} \left[ \int_{A_{mn}^{(r)}} \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| |dz| \right] d\mu(\zeta) + \int_{A_{mn}^{(r)}} \frac{\partial h}{\partial n} |dz|,$$

wobei  $\alpha_{mn}^{(r)}$  den zum Bogen  $A_{mn}^{(r)}$  gehörigen Zentriwinkel bezeichnet. Die in eckiger Klammer stehende Funktion von  $\zeta$  ist dem Betrage nach  $\leq 2\pi$ . Lassen wir nun  $r \rightarrow 0$  streben, so konvergieren die beiden auf der rechten Seite stehenden Integrale gegen Null. Da ferner  $\alpha_{mn}^{(r)} \rightarrow \alpha_{mn}$ , ist damit (2.5) bewiesen.

Aus (2.4) und (2.5) schliessen wir, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}_m} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| - \int_{\gamma_n} \frac{\delta v}{\delta n} |dz| = 2\pi\mu(\Omega_{mn}) + \pi\mu(\gamma'_n \cup \tilde{\gamma}'_m) + \alpha_{mn}\mu(a) + \beta_{mn}\mu(b). \quad (2.6)$$

Da für genügend grosse  $m$  und  $n$  die rechte Seite von (2.6) beliebig klein wird, folgt daraus die Gültigkeit von Lemma 1.

2.4. Die Funktionen, über welche in (2.2) längs  $\gamma_n$  integriert wird, können sämtliche über  $\bar{G}$  hinaus  $\delta$ -subharmonisch fortgesetzt werden. Für  $u = u_1 - u_2$  ist dies nach Voraussetzung erfüllt. Um die erwähnte Eigenschaft für  $H = H_1 - H_2$  zu beweisen, betrachten wir die Funktionen  $v_i$ , definiert durch  $v_i(z) = H_i(z)$  für  $z \in G$ ,  $v_i(z) = u_i(z)$  sonst ( $i = 1, 2$ ). Diese sind in ihrem ganzen Definitionsgebiet subharmonisch (siehe z.B. [17], S. 39), und somit ist  $v = v_1 - v_2$  eine  $\delta$ -subharmonische Fortsetzung von  $H$ . Schliesslich gilt dasselbe auch für den dritten – als Differenz der beiden andern darstellbaren – Integranden. Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der Integranden folgt mit (1.4), dass die drei Integrale in (2.2) für  $n \rightarrow \infty$  endlichen Grenzwerten zustreben.

Nach Lemma 1 kann in jedem der drei Integrale von (2.2)  $\gamma_n$  durch  $\tilde{\gamma}_n$  ersetzt werden, ohne dass sich dadurch für  $n \rightarrow \infty$  der betreffende Grenzwert ändert. Diese Tatsache nützen wir beim dritten Integral aus. Bei diesem hat nämlich der Übergang zur Kurve  $\tilde{\gamma}_n$  den Vorteil, dass sich dann die Vertauschbarkeit der beiden Integrationen leicht beweisen lässt.

Wir ersetzen also beim dritten Integral von (2.2)  $\gamma_n$  durch  $\tilde{\gamma}_n$  und ändern die Reihenfolge der Integration. Dies ist – wie B. Fuglede ([8], S. 91–93) ausführlich bewiesen hat – sicher erlaubt, sofern wir die Kurve  $\tilde{\gamma}_n$  durch einen kompakten, in  $G$  liegenden Teilbogen ersetzen. Wählen wir demzufolge auf  $\tilde{\gamma}_n$  zwei Folgen  $\{z_n^k\}$  und  $\{\tilde{z}_n^k\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) von Punkten, welche für  $k \rightarrow \infty$  gegen die Endpunkte  $a$  und  $b$  von  $\tilde{\gamma}_n$  konvergieren, so gilt für die Teilbogen  $\tilde{\gamma}_n^k = \widehat{z_n^k \tilde{z}_n^k}$  von  $\gamma_n$ :

$$\int_{\tilde{\gamma}_n^{k_n}} \frac{\delta}{\delta n_z} \left[ \int_G g(z, \zeta) d\mu(\zeta) \right] |dz| = \int_G \left[ \int_{\tilde{\gamma}_n^{k_n}} \frac{\partial}{\partial n_z} g(z, \zeta) |dz| \right] d\mu(\zeta). \quad (2.7)$$

Die in  $G$  definierten Funktionen

$$f_k^{(n)}(\zeta) = \int_{\tilde{\gamma}_n^{k_n}} \frac{\partial}{\partial n_z} g(z, \zeta) |dz| \quad (2.8)$$

konvergieren für  $k \rightarrow \infty$  gegen die Grenzfunktion (siehe z.B. [12], S. 31)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{(n)}(\zeta) = \begin{cases} -2\pi\omega(\zeta, \gamma, G), & \zeta \in G - \bar{\Omega}_n \\ \pi - 2\pi\omega(\zeta, \gamma, G), & \zeta \in \tilde{\gamma}_n \\ 2\pi - 2\pi\omega(\zeta, \gamma, G), & \zeta \in \Omega_n \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $\omega(\zeta, \gamma, G)$  das harmonische Mass von  $\gamma$  in Bezug auf  $G$  und  $\Omega_n$  das von  $\tilde{\gamma}_n$  und  $\gamma$  berandete Gebiet. Die Funktionen (2.8) sind gleichmässig beschränkt. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Kurven  $\tilde{\gamma}_n$  und der konformen Invarianz der Grössen (2.8). Somit können wir auf der rechten Seite von (2.7) den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  unter dem Integralzeichen durchführen, d.h. es gilt

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{\delta}{\delta n_z} \left[ \int_G g(z, \zeta) d\mu(\zeta) \right] |dz| \\ &= -2\pi \int_G \omega(\zeta, \gamma, G) d\mu(\zeta) + 2\pi\mu(\Omega_n) + \pi\mu(\tilde{\gamma}_n \cap G). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{\delta}{\delta n_z} \left[ \int_G g(z, \zeta) d\mu(\zeta) \right] |dz| = -2\pi \int_G \omega(\zeta, \gamma, G) d\mu(\zeta). \quad (2.10)$$

Aus (1.4), (2.2) und (2.10) ergibt sich schliesslich mit der erwähnten Anwendung von Lemma 1 folgende (äquivalente) *zweite Definition der linken Schwenkung*:

$$\tau_l(\gamma) = 2\pi \int_G \omega(\zeta, \gamma, G) d\mu(\zeta) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\gamma_n} \left( \frac{\partial H}{\partial n} + k \right) |dz| + \sum_{v=1}^{N_n} (\pi - \varphi_n^v) \right\}. \quad (2.11)$$

Dabei bezeichnen  $\varphi_n^1, \varphi_n^2, \dots, \varphi_n^{N_n}$  die Winkel in den Eckpunkten der stückweise analytischen Kurve  $\gamma_n$ .

*Anmerkung.* Ersetzt man im obigen Beweis das Greensche Potential durch das logarithmische, so gelangt man zu der von J. G. Reschetnjak [19] eingeführten Defini-



tion der Schwenkung<sup>5)</sup>. Somit ist unsere erste Definition zur Reschetnjakschen – und damit auch zur Alexandrowschen – äquivalent.

2.5. Sei  $\gamma$  eine Jordankurve, welche in einem kreishomöomorphen Gebiet von  $R$  enthalten ist und in jedem Punkt Halbtangenten nach beiden Richtungen besitzt.

Wir betrachten eine konforme Abbildung des von  $\gamma$  berandeten Gebietes auf den Einheitskreis  $\Delta = \{\zeta, |\zeta| < 1\}$ . Diese lässt sich stetig auf den Rand fortsetzen: Jeder Kreisbogen  $B_t = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq t \leq 2\pi\}$  ist Bild eines Teilbogens  $\gamma_t$  von  $\gamma$ .

In  $\Delta$  wird die Metrik von  $(R, ds)$  erzeugt durch ein Differential (0.1) mit einer  $\delta$ -subharmonischen Funktion  $u(\zeta) = u_1(\zeta) - u_2(\zeta)$ . Es bezeichne  $\mu$  das Mass (0.6) und  $h_i(\zeta)$  die kleinste harmonische Majorante von  $u_i(\zeta)$  in  $\Delta$  ( $i=1, 2$ ). Wir setzen  $h(\zeta) = h_1(\zeta) - h_2(\zeta)$ .

**SATZ 1:** Die Jordankurve  $\gamma$  sei von beschränkter Schwenkung und besitze keine Nullwinkel und keine Punkte  $p$  mit  $\mu(p) \leq -1$ . Dann gilt:

a) Es gibt eine Konstante  $C$ , sodass für alle  $r < 1$ :

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial h(re^{i\theta})}{\partial r} \right| d\theta < C. \quad (2.12)$$

b) Die Schwenkung  $\tau_t$  des Bogens  $\gamma_t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) ist, mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler  $t$ -Werte<sup>6)</sup>

$$\tau_t(\gamma_t) = 2\pi \int_{\Delta} \omega(\zeta, B_t, \Delta) d\mu(\zeta) + \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^t \left( \frac{\partial h(re^{i\theta})}{\partial r} + 1 \right) d\theta. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet  $\omega(\zeta, B_t, \Delta)$  das harmonische Mass von  $B_t$  in Bezug auf  $\Delta$ .

c) Die Kurve  $\gamma$  ist in der Metrik (0.4) rektifizierbar und für die Länge des Teilbogens  $\gamma_t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) gilt

$$l(\gamma_t) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^t e^{h(re^{i\theta})} d\theta < \infty. \quad (2.14)$$

**Anmerkung.** Mit der Bezeichnung  $h^*(\zeta)$  für eine zu  $h(\zeta)$  konjugiert harmonische Funktion, lässt sich die Eigenschaft (2.12) auch so formulieren: Die analytische Funktion

$$F(\zeta) = \int_0^{\zeta} e^{h(\zeta) + ih^*(\zeta)} d\zeta \quad (2.15)$$

<sup>5)</sup> Wir verzichten auf eine ausführliche Wiedergabe dieses ganz analog verlaufenden Beweises

<sup>6)</sup> Wir setzen voraus, dass der Anfangspunkt von  $\gamma_t$  keine Masse trägt und – als Punkt von  $\gamma$  – eine Tangente besitzt.

bildet  $\Delta$  konform auf ein (nicht notwendigerweise schlichtes) Gebiet beschränkter Randdrehung im Sinne von V. Paatero [14] ab. Aus (2.12) folgt nämlich ( $\zeta = r e^{i\theta}$ ):

$$\int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} \left( 1 + \zeta \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} \right) \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \left| 1 + r \frac{\partial h}{\partial r} \right| d\theta < 2\pi + C.$$

**Beweis von Satz 1:** Die Jordankurve  $\gamma$  ist nach Voraussetzung in einem kreis-homöomorphen Gebiet von  $R$  enthalten. Dieses bilden wir konform in die  $z$ -Ebene ab; sei  $G$  das Bild des Innern von  $\gamma$ . Es ist damit auch eine konforme Abbildung  $z=f(\zeta)$  des Einheitskreises  $\Delta$  auf das Gebiet  $G$  festgelegt.

Sei  $\{\gamma_n^{(t)}\}$  eine im Sinne der Definition (1.4) gegen  $\gamma_t$  konvergierende Folge von stückweise analytischen Kurven. Diese liefert, in (2.11) eingesetzt, die Schwenkung  $\tau_t(\gamma_t)$ . Übertragen wir diese Definition in die  $\zeta$ -Ebene, so geht zunächst das erste Integral in (2.11) in das erste Integral in (2.13) über, denn  $\omega$  und  $\mu$  sind konform invariante Grössen. Es ist nun noch zu zeigen, dass die Grenzwerte in (2.11) und (2.13) einander entsprechen.

Sei  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$  eine gegen 1 konvergierende Folge von Radien. Die Bilder  $\tilde{\gamma}_n^{(t)}$  der Kurven, welche aus den Kreisbogen  $\{r_n e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq t\}$  und den daran anschliessenden Strecken  $\{r, r_n \leq r \leq 1\}$  und  $\{r e^{it}, r_n \leq r \leq 1\}$  bestehen, sind stückweise analytisch in  $G$  und besitzen in ihren Endpunkten  $z_0=f(1)$  und  $z_t=f(e^{it})$  Halbtangenten (C. Carathéodory [6]).

Für alle  $t$  mit Ausnahme von höchstens abzählbar unendlich vielen Werten gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n^{(t)}} \frac{\partial H}{\partial n} |dz| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_n^{(t)}} \frac{\partial H}{\partial n} |dz|. \quad (2.16)$$

Tragen nämlich die Endpunkte  $z_0$  und  $z_t$  keine Masse, so ist diese Beziehung aus dem Beweis von Lemma 1 (siehe insbesondere (2.6)) ersichtlich.

Einer Arbeit von A. Ostrowski [13, Satz V] entnehmen wir folgendes Resultat über das Randverhalten der (oben eingeführten) konformen Abbildung  $z=f(\zeta)$ :

$$\arg f'(\zeta) = \left( \frac{\alpha_t}{\pi} - 1 \right) \arg(\zeta - e^{it}) + C + \varepsilon(\zeta - e^{it}) \quad (2.17)$$

( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Dabei bezeichnen  $\alpha_t$  den Winkel zwischen den beiden Halbtangenten an  $\gamma$  im Punkte  $f(e^{it})$  und  $\varepsilon(\zeta - e^{it})$  eine Grösse, welche gegen Null konvergiert, wenn  $\zeta$  im Winkel gegen  $e^{it}$  strebt.

Dieser Satz besagt, dass die Tangentenrichtung von  $\tilde{\gamma}_n^{(t)}$  in den Endpunkten eine stetige Funktion des Kurvenparameters ist. Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{\gamma_n^{(t)}} k |dz| + \sum_{v=1}^{N_n} (\pi - \varphi_n^v) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_n^{(t)}} k |dz| \quad (2.18)$$

für alle  $t$  mit der Eigenschaft, dass in  $z_t$  die Tangente an  $\gamma$  existiert (siehe Fussnote 6)). Letztere ist jedoch höchstens in abzählbar unendlich vielen Punkten nicht erfüllt, da nach J. G. Reschetnjak ([19], Satz 10)  $\gamma$  von beschränkter (euklidischer) Schwenkung ist.

Durch Transformation auf die  $\zeta$ -Ebene erhalten wir wegen der konformen Invarianz des Differentials  $(\partial H/\partial n + k) |dz|$  aus (2.11), (2.16) und (2.18) die Beziehung (2.13).

Wie aus dem Beweis ersichtlich ist, entsprechen die höchstens abzählbar unendlich vielen  $t$ -Werte, für die (2.13) nicht mit (2.11) übereinstimmt, den Sprungstellen der Funktion  $t \rightarrow \tau_t(\gamma_t)$ . In diesen Ausnahmewerten liefert (2.13) das *arithmetische Mittel der Grenzwerte*  $\tau_t(\gamma_{t+0})$  und  $\tau_t(\gamma_{t-0})$ .

Um (2.12) zu beweisen, betrachten wir eine konjugiert harmonische Funktion  $h^*(\zeta)$  von  $h(\zeta)$ . Die Funktion

$$t \rightarrow \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^t \left( \frac{\partial h(r e^{i\theta})}{\partial r} + 1 \right) d\theta$$

ist von beschränkter Variation, denn in (2.13) sind sowohl  $\tau_t(\gamma_t)$  als auch das erste Integral der rechten Seite Funktionen von beschränkter Variation. (Das harmonische Mass  $\omega(\zeta, B_t, \Delta)$  ist als Funktion von  $t$  monoton wachsend). Also existieren die radialen Grenzwerte  $h^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} h^*(r e^{it})$  auf dem ganzen Interwall  $[0, 2\pi]$  und bilden eine Funktion von beschränkter Variation. Wir behaupten nun, dass  $h^*(\zeta)$  gleich dem Poissonintegral dieser Randwerte ist,

$$h^*(r e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)} d\theta. \quad (2.19)$$

Zum Beweise genügt es, die Beschränktheit der Funktion  $h^*(\zeta) = H^*(f(\zeta)) + \arg f'(\zeta)$  zu verifizieren. Aus Satz 10 von J. G. Reschetnjak [19] folgt, dass – in der Terminologie von A. Ostrowski [13] –  $\gamma$  in jedem Punkt sogenannte  $L$ -Halbtangenten besitzt. Deshalb (A. Ostrowski [13], Satz VII) gilt (2.17) sogar bei allseitiger Annäherung aus dem Innern von  $\Delta$ . Man kann hiermit eine Konstante  $M$  so angeben, dass  $\limsup_{\zeta \rightarrow e^{it}} |h^*(\zeta)| < M$  ist. Aus dem Maximumprinzip folgt dann die Beschränktheit der Funktion  $h^*(\zeta)$ . Durch Differentiation und anschliessende partielle Integration erhalten wir aus (2.19):

$$\frac{\partial h^*(r e^{it})}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)} dh^*(e^{i\theta}).$$

Daraus folgt (siehe z.B. [12], S. 197) die Existenz einer Konstanten  $C$ , sodass für alle  $r < 1$  gilt:

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial h(r e^{it})}{\partial r} \right| dt = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial h^*(r e^{it})}{\partial t} \right| dt < C, \quad \text{qed.}$$

Die Beziehung (2.14) ist ein Korollar des folgenden Resultates von A. Huber [9, Satz B]:

*Der (stets existierende) Grenzwert<sup>7)</sup>*

$$l_t = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^t e^{h(r e^{i\theta})} d\theta$$

ist gleich der Länge von  $\gamma_t$  in der Metrik (0.4) nach der Alexandrowschen Definition [1, S. 69].

Um (2.14) zu beweisen, müssen wir noch zeigen, dass  $l_{2\pi} < \infty$  ist. Nach Voraussetzung weist  $\gamma$  keine Nullwinkel und keine Punkte  $p$  mit  $\mu(p) \leq -1$  auf. Deshalb besitzt die Funktion  $t \rightarrow \tau_t(\gamma_t)$  gemäss (1.7) und der Eigenschaft E 3 keine Sprünge  $\geq \pi$ . Damit folgt aus (2.13) wegen der Stetigkeit von  $t \rightarrow \omega(\zeta, B_t, \Delta)$ , dass auch  $t \rightarrow h^*(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} h^*(r e^{it})$  keine Sprünge  $\geq \pi$  besitzt.

Wir betrachten die Funktion  $F(\zeta)$  aus (2.15) und beachten, dass  $\lim_{r \rightarrow 1} \arg F'(r e^{it}) = h^*(e^{it})$ . Gemäss V. Paatero können wir schliessen, dass die Funktion  $F(\zeta)$  in  $|\zeta| \leq 1$  stetig [14, S. 67] und die Randkurve  $\{F(e^{it}), 0 \leq t \leq 2\pi\}$  rektifizierbar [15, S. 6] ist. Hiermit gilt (siehe z.B. [21], S. 41)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |F'(r e^{i\theta})| d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} e^{h(r e^{i\theta})} d\theta = l_{2\pi} < \infty, \quad (2.20)$$

womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

### 3. Eine Ungleichung

LEMMA 2: Die analytische Funktion  $F(\zeta)$  sei in  $|\zeta| < 1$  definiert und es gehöre  $F'(\zeta)$  der Hardyklasse  $H_1$  an. Nach F. und M. Riesz [21] kann dann  $F(\zeta)$  stetig auf  $|\zeta| \leq 1$  erweitert werden, und  $F(e^{i\theta})$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ist absolut stetig. Wir setzen voraus, dass es Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ ,  $0 \leq \beta - \alpha < \pi$ , gibt mit der Eigenschaft, dass die (fast überall existierende) Ableitung  $(d/d\theta) F(e^{i\theta})$  im Intervall  $[0, \pi]$  der Bedingung

$$\alpha \leq \arg \frac{d}{d\theta} F(e^{i\theta}) \leq \beta \quad (\text{f.ü.}) \quad (3.1)$$

genügt.

<sup>7)</sup> Der Wert  $+\infty$  kann angenommen werden.

Dann gilt die Ungleichung

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^\pi |F'(r e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{|\cos((\beta + \alpha)/2 - \varphi)|}{\cos(\beta - \alpha)/2} |F(1) - F(-1)|, \quad (3.2)$$

wobei  $\varphi = \arg(F(1) - F(-1))$ .

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\arg(d/d\theta) F(e^{i\theta})$  fast überall gleich  $\alpha$  oder  $\beta$  ist.

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, dass  $F(1) - F(-1)$  reell, also  $\varphi = 0$  oder  $\pi$ , ist. Trifft dies nicht zu, so betrachte man die Funktion  $e^{-i\varphi} F(\zeta)$  an Stelle von  $F(\zeta)$ .

Die Bedingung (3.1) schreiben wir in der symmetrischen Form

$$-(\beta - \alpha)/2 \leq \arg(d/d\theta) w(\theta) \leq (\beta - \alpha)/2 \quad (\text{f.ü.})$$

mit  $w(\theta) = F(e^{i\theta}) \cdot \exp(-i(\alpha + \beta)/2)$ . Daraus folgt ( $\dot{\phantom{x}} = \partial/\partial\theta$ )

$$|\dot{w}(\theta)| = \frac{\operatorname{Re} \dot{w}(\theta)}{\cos(\arg \dot{w}(\theta))} \leq \frac{\operatorname{Re} \dot{w}(\theta)}{\cos(\beta - \alpha)/2} \quad (\text{f.ü.})$$

und durch Integration, unter Berücksichtigung der absoluten Stetigkeit von  $w(\theta)$ :

$$\int_0^\pi \left| \frac{d}{d\theta} F(e^{i\theta}) \right| d\theta \leq \frac{1}{\cos(\beta - \alpha)/2} \int_0^\pi \operatorname{Re} \dot{w}(\theta) d\theta = \frac{\cos(\beta + \alpha)/2}{\cos(\beta - \alpha)/2} (F(-1) - F(1)).$$

Die linke Seite dieser Abschätzung ist aber nach F. Riesz [20] gleich dem Limes von (3.2), womit diese Ungleichung für  $\varphi = 0$  oder  $\pi$  bewiesen ist. Gleichheit in (3.2) ist nur dann möglich, wenn in dieser Herleitung überall das Gleichheitszeichen steht.

3.2. Sei  $\gamma_1 = \{p(t), 0 \leq t \leq \pi\} \subset (R, ds)$  ein *Jordanbogen von beschränkter Schwenkung*, welcher keine Nullwinkel besitzt. Sei ferner  $\gamma_2$  ein in der Metrik (0.4) *rektifizierbarer Jordanbogen*, welcher die Endpunkte von  $\gamma_1$  miteinander verbindet und links von  $\gamma_1$  liegt. Dabei soll das von der geschlossenen Kurve  $\gamma_1 - \gamma_2$  berandete Gebiet  $U$  in einem kreishomöomorphen Bereich enthalten sein. Es bezeichne  $|\mu|$  die totale Variation der Massenbelegung (0.6) auf  $U$ .

Sei  $\gamma_t = \{p(\theta), 0 \leq \theta \leq t \leq \pi\}$  ein Teilbogen von  $\gamma_1$ . Die Funktion  $t \rightarrow \tau_t(\gamma_t)$  ist beschränkt; seien  $\tau_m = \inf_{0 \leq t \leq \pi} \tau_t(\gamma_t)$  und  $\tau_M = \sup_{0 \leq t \leq \pi} \tau_t(\gamma_t)$ .

**SATZ 2:** *Ist*

$$\tau_M - \tau_m + 2\pi|\mu| < \pi, \quad (3.3)$$

*dann erfüllen die Längen der Bogen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Ungleichung*

$$l(\gamma_1) \leq \frac{l(\gamma_2)}{\cos(\tau_M - \tau_m + 2\pi|\mu|)/2} \quad (3.4)$$

*Bemerkung:* 1) Diese Ungleichung ist scharf: Ist nämlich  $U$  ein ebenes gleichschenkliges Dreieck mit  $\gamma_2$  als Basis, so gilt in (3.4) das Gleichheitszeichen.

2) Eine verwandte Ungleichung ist auf ganz anderem – geometrischen – Wege von A. D. Alexandrow und W. W. Strelzow ([3], theorem 5, p. 92) bewiesen worden. Das Resultat dieser Autoren impliziert das unsrige nicht, ist aber auch nicht im unsrigen enthalten. Die Alexandrowsche Ungleichung unterscheidet sich von (3.4) dadurch, dass an der Stelle von  $\tau_M - \tau_m + 2\pi|\mu|$  der Ausdruck  $\tau_+ + 2\pi\mu_-$  steht. Dabei bezeichnen  $\tau_+$  die positive Variation der Funktion  $t \rightarrow \tau_t(\gamma_t)$  auf  $[0, \pi]$  und  $\mu_-$  die negative Variation des Masses  $\mu$  auf  $U$ .

*Beweis von Satz 2:* Wie im Beweis von Satz 1 – von dem wir die Bezeichnungen übernehmen – bilden wir das Gebiet  $U$  konform auf den Einheitskreis  $\Delta = \{\zeta, |\zeta| < 1\}$  ab. Dabei soll  $\gamma_1$  in die obere Halbkreislinie übergehen.

Wir führen zunächst den Beweis unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass der Anfangspunkt von  $\gamma_1$  keine Masse trägt und als Punkt von  $\gamma_1 - \gamma_2$  eine Tangente besitzt. In diesem Falle darf die Schwenkung  $\tau_t(\gamma_t)$  für alle  $t$  aus  $[0, \pi]$  mit Ausnahme von höchstens abzählbar unendlich vielen Werten aus (2.13) berechnet werden. (Die Kurve  $\gamma_2$  erfüllt zwar nicht alle in Satz 1 gestellten Anforderungen. Der Beweis von (2.13) macht jedoch von den fehlenden Voraussetzungen keinen Gebrauch). Setzen wir in (2.13) für das Mass  $\mu$  dessen Jordansche Zerlegung  $\mu = \mu_+ - \mu_-$  ( $\mu_+ + \mu_- = |\mu|$ ) ein, so erhalten wir für die Funktion

$$\kappa(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^t \left( \frac{\partial h(r e^{i\theta})}{\partial r} + 1 \right) d\theta \quad (3.5)$$

die Abschätzung

$$\tau_m - 2\pi\mu_+ \leq \kappa(t) \leq \tau_M + 2\pi\mu_- . \quad (3.6)$$

Sei  $F(\zeta)$  die durch (2.15) definierte analytische Funktion. Für alle  $t \in [0, \pi]$  ist offenbar

$$\lim_{r \rightarrow 1} \arg F'(r e^{it}) = \kappa(t) - t + C, \quad (3.7)$$

wobei  $C = \lim_{r \rightarrow 1} h^*(r)$ . Ausserdem liegt  $F'(\zeta)$  in der Hardyklasse  $H_1$ . Letzteres kann folgendermassen eingesehen werden:

Die Kurve  $\gamma_1$  ist rektifizierbar. Verbindet man nämlich die Endpunkte von  $\gamma_1$  durch eine links von  $\gamma_1$  liegende stückweise analytische Kurve  $\gamma'_2$ , so ist die geschlossene Kurve  $\gamma_1 - \gamma'_2$  von beschränkter Schwenkung und somit nach (2.14) in der Metrik (0.4) rektifizierbar. Da nach Voraussetzung auch  $\gamma_2$  rektifizierbar ist, gilt nach A. Huber ([9], Satz B):

$$l(\gamma_1 - \gamma_2) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} e^{h(r e^{i\theta})} d\theta < \infty . \quad (3.8)$$

Da  $e^{h(\zeta)} = |F'(\zeta)|$ , ist damit gezeigt, dass  $F'(\zeta)$  in  $H_1$  liegt.

Nach F. und M. Riesz [21] kann die Funktion  $F(\zeta)$  stetig auf den Rand fortgesetzt werden, und es gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \arg F'(r e^{it}) + t + \frac{\pi}{2} = \arg \frac{d}{dt} F(e^{it}) \quad (\text{f.ü.}) \quad (3.9)$$

Setzen wir  $\alpha = \tau_m - 2\pi\mu_+ + C + \pi/2$  und  $\beta = \tau_M + 2\pi\mu_- + C + \pi/2$ , so folgt aus (3.6), (3.7) und (3.9), dass

$$\alpha \leq \arg \frac{d}{dt} F(e^{it}) \leq \beta$$

für fast alle  $t$  aus  $[0, \pi]$ . Nach (3.3) ist  $\beta - \alpha = \tau_M - \tau_m + 2\pi|\mu| < \pi$ .

Die Funktion  $F(\zeta)$  erfüllt sämtliche Voraussetzungen von Lemma 2. Es gilt also (3.2). Der auf der linken Seite dieser Ungleichung stehende Grenzwert ist nach dem im Beweis von Satz 1 erwähnten Resultat von A. Huber gleich  $l(\gamma_1)$ . Ferner gilt

$$|F(1) - F(-1)| \leq l(\gamma_2),$$

womit (3.4) bewiesen ist.

Wir haben noch zu zeigen, dass die im Beweis benützte zusätzliche Annahme, wonach der Anfangspunkt von  $\gamma_1$  keine Masse trägt und als Punkt von  $\gamma_1 - \gamma_2$  eine Tangente besitzt, unwesentlich ist: Sei also  $\gamma_1$  ein Bogen, welcher diese Bedingung nicht erfüllt. Da  $\gamma_1$  von beschränkter Schwenkung ist, existiert, wie aus dem Beweis von (2.13) ersichtlich ist, zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Teilbogen  $\gamma_1^*$ , dessen Anfangspunkt die erwähnte zusätzliche Voraussetzung erfüllt und dessen Länge  $l(\gamma_1^*)$  grösser als  $l(\gamma_1) - \varepsilon$  ist. Aus der Ungleichung (3.4), angewandt auf  $\gamma_1^*$  und  $\gamma_2^* = \gamma_2 \cup (\gamma_1 \setminus \gamma_1^*)$ , folgt durch Grenzübergang ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) die Gültigkeit von (3.4) für  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , q.e.d.

#### 4. Der Verheftungssatz

4.1. Im zweiten Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit einem potentialtheoretischen Beweis des in der Einleitung erwähnten Verheftungssatzes von A. D. Alexandrow. Da das Problem des Verheftens ein lokales ist, beschränken wir uns auf den Fall von zwei Jordangebieten, welche längs ihrer Randkurven verheftet werden: Wir betrachten zwei kreishomöomorphe Gebiete  $D$  und  $\tilde{D}$  in zwei Räumen  $(R, ds)$  bzw.  $(\tilde{R}, \tilde{ds})$  und zwei orientierte Jordankurven  $\gamma \subset D$  und  $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}$ . Die Orientierung der Kurven sei so gewählt, dass das von  $\gamma$  berandete Gebiet links von  $\gamma$  und das von  $\tilde{\gamma}$  berandete rechts von  $\tilde{\gamma}$  liegt.

Wir nehmen im folgenden an, dass die Kurven  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  keine Punkte  $p$  bzw.  $\tilde{p}$  mit Schwenkungen  $|\tau_p^{(l)}| \geq \pi$  bzw.  $|\tau_{\tilde{p}}^{(r)}| \geq \pi$  besitzen. Daraus folgt insbesondere, wie

aus (1.7) ersichtlich ist, dass  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  keine Nullwinkel und auch keine Punkte  $p$  bzw.  $\tilde{p}$  mit  $\mu(p) \leq -1$  bzw.  $\tilde{\mu}(\tilde{p}) \leq -1$  aufweisen. (Mit  $\mu$  und  $\tilde{\mu}$  bezeichnen wir wiederum die den  $\delta$ -subharmonischen Funktionen (0.3) der Räume  $(R, ds)$  bzw.  $(\tilde{R}, \tilde{ds})$  zugeordneten Massen (0.6)). Gemäss Behauptung c) von Satz 1 besitzen dann  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  endliche Länge.

Unter der Voraussetzung, dass die Kurven  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  gleiche Länge besitzen, können wir folgendermassen eine *Beziehung*  $\Phi$  zwischen den Punkten  $p \in \gamma$  und  $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$  herstellen: Wir fixieren zwei Punkte  $p_0$  und  $\tilde{p}_0$  und erklären die Zuordnung  $\tilde{p} = \Phi(p)$  mit Hilfe der Längen  $l$  und  $\tilde{l}$  der Bogen  $\widehat{p_0 p} \subset \gamma$  bzw.  $\widehat{\tilde{p}_0 \tilde{p}} \subset \tilde{\gamma}$  durch die Beziehung

$$l(\widehat{p_0 p}) = \tilde{l}(\widehat{\tilde{p}_0 \tilde{p}}) \quad (\tilde{p} = \Phi(p)), \quad (4.1)$$

sowie durch die Forderung, dass einem positiven Umlauf von  $\gamma$  ein ebensolcher von  $\tilde{\gamma}$  entspricht.

Durch die Zuordnung  $\Phi$  werden die Ränder der von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  berandeten Gebiete  $U$  und  $\tilde{U}$  topologisch aufeinander bezogen. Indem wir nun einander zugeordnete Punkte identifizieren, erhalten wir eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $R^*$  (vom Typus der Kugel), über die der *Verheftungssatz* folgendes aussagt:

*Unter der Voraussetzung, dass  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  Kurven von beschränkter Schwenkung sind, gilt:*

- I)  $R^*$  ist eine (abstrakte) Riemannsche Fläche.
- II) Auf  $R^*$  existiert ein Differential  $ds^*$  mit den Eigenschaften (0.1) bis (0.3), welches auf  $U$  bzw.  $\tilde{U}$  mit dem Differential  $ds$  bzw.  $\tilde{ds}$  übereinstimmt.

Die Behauptung I lässt sich auch so formulieren:

**SATZ 3:** *Wir setzen voraus, dass die Jordankurven  $\gamma \subset (R, ds)$  und  $\tilde{\gamma} \subset (\tilde{R}, \tilde{ds})$ , welche die Gebiete  $U$  bzw.  $\tilde{U}$  beranden,*

- a) *von beschränkter Schwenkung sind und*
- b) *gleiche Länge besitzen.*

*Dann existieren ein Jordangebiet  $G$  der  $z$ -Ebene<sup>8)</sup> und zwei Abbildungen  $z = f(p)$  und  $z = \tilde{f}(\tilde{p})$ , welche  $U$  bzw.  $\tilde{U}$  so konform auf  $G$  bzw. dessen Komplement<sup>9)</sup> abbilden, dass für ihre stetigen Erweiterungen auf  $\bar{U}$  bzw.  $\bar{\tilde{U}}$  die Gleichung*

$$f(p) = \tilde{f}(\Phi(p)) \quad (4.2)$$

*für alle  $p \in \gamma$  erfüllt ist. Dabei bezeichnet  $\Phi$  die mit (4.1) definierte Zuordnung.*

<sup>8)</sup> Aus dem geometrischen Beweis des Verheftungssatzes kann man – gemäss einem Resultat von J. G. Reschetnjak [19, Satz 10] – schliessen, dass  $G$  von beschränkter Randdrehung ist. Es ist uns jedoch nicht gelungen, dies funktionentheoretisch zu beweisen.

<sup>9)</sup> In Bezug auf die Riemannsche Kugel.



*Beweis.* Damit wir die Resultate von Satz 1 anwenden können, bilden wir die Gebiete  $U \subset R$  und  $\tilde{U} \subset \tilde{R}$  konform auf den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  bzw. dessen Äusseres  $|\zeta| > 1$  ab. Bezeichnen wir die dem Differential (0.1) entsprechenden  $\delta$ -subharmonischen Funktionen wieder mit  $u(\zeta)$  bzw.  $\tilde{u}(\zeta)$  und die zugehörigen harmonischen Funktionen mit  $h(\zeta)$  bzw.  $\tilde{h}(\zeta)$ , so gilt gemäss Satz 1

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial h(r e^{i\theta})}{\partial r} \right| d\theta < C \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{h}(\varrho e^{i\theta})}{\partial \varrho} \right| d\theta < \tilde{C} \quad (4.3)$$

( $r < 1$ ,  $\varrho > 1$ ;  $C, \tilde{C}$  Konstanten). Die Gleichheit der Längen  $l(\gamma)$  und  $\tilde{l}(\tilde{\gamma})$  ergibt nach (2.14) die Beziehung

$$\int_0^{2\pi} e^{h(e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\tilde{h}(e^{i\theta})} d\theta, \quad (4.4)$$

sofern man mit  $h(e^{i\theta})$  und  $\tilde{h}(e^{i\theta})$  die zufolge (2.20) nach F. und M. Riesz [21] fast überall existierenden Grenzwerte  $\lim_{r \uparrow 1} h(r e^{i\theta})$  bzw.  $\lim_{\varrho \downarrow 1} \tilde{h}(\varrho e^{i\theta})$  bezeichnet.

Der Zuordnung  $\Phi$  aus (4.1) entspricht eine topologische Abbildung der Kreislinie  $|\zeta| = 1$  auf sich selbst, welche wir wiederum mit  $\Phi$  bezeichnen wollen. Bildet man die Gebiete  $U$  und  $\tilde{U}$  konform so auf  $|\zeta| < 1$  bzw.  $|\zeta| > 1$  ab, dass dabei die Punkte  $p_0$  und  $\tilde{p}_0$  aus (4.1) in  $\zeta = 1$  übergehen, so erfüllt  $\Phi: e^{it} \rightarrow e^{i\alpha(t)}$  die Gleichung

$$\int_0^t e^{h(e^{i\theta})} d\theta = \int_0^{\alpha(t)} e^{\tilde{h}(e^{i\theta})} d\theta. \quad (4.5)$$

Aus Satz 1 – insbesondere aus dessen Anmerkung – ist ersichtlich, dass die analytischen Funktionen

$$\zeta \rightarrow \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{h(\zeta) + ih^*(\zeta)} d\zeta \quad \text{und} \quad \zeta \rightarrow \int_{\tilde{\zeta}_0}^{\zeta} e^{\tilde{h}(\zeta) + i\tilde{h}^*(\zeta)} d\zeta$$

den Einheitskreis  $\Delta$  bzw. dessen Äusseres konform auf zwei (nicht notwendigerweise schlichte) Gebiete beschränkter Randdrehung abbilden. Die Randkurven dieser Gebiete sind rektifizierbar, gleich lang, und besitzen keine Eckpunkte, deren Winkel gleich Null oder grösser gleich  $2\pi$  sind.

Hiermit ist Satz 3 zurückgeführt auf das folgende Resultat<sup>10)</sup>, welches A. Huber mit Hilfe eines Verheftungssatzes von A. Pfluger [16] bewiesen hat:

<sup>10)</sup> Noch nicht publiziert.

*Durch isometrische Verheftung von Kurven beschränkter Drehung längs Bogen, welche keine Nullwinkel enthalten, entsteht eine Riemannsche Fläche.*

Somit existieren ein Jordangebiet  $G$  der  $z$ -Ebene und zwei analytische Funktionen  $z=F(\zeta)$  und  $z=\mathfrak{F}(\zeta)$ , welche  $|\zeta| < 1$  bzw.  $|\zeta| > 1$  so konform auf  $G$  bzw. dessen Komplement abbilden, dass ihre stetigen Erweiterungen auf  $|\zeta| \leq 1$  bzw.  $|\zeta| \geq 1$  die Gleichung

$$F(e^{it}) = \mathfrak{F}(e^{i\alpha(t)}) \quad (4.6)$$

erfüllen. Dabei bezeichnet  $\alpha(t)$  die mit (4.5) definierte Funktion.

Kennt man die Funktionen  $z=F(\zeta)$  und  $z=\mathfrak{F}(\zeta)$ , so verfügt man auch über die Funktionen  $z=f(p)$  bzw.  $z=\tilde{f}(\tilde{p})$ , welche gemäss (4.6) den Bedingungen von Satz 3 genügen, q.e.d.

4.2. Der Beweis von Behauptung II stützt sich auf

LEMMA 3: *Sei  $G$  ein Jordangebiet und sei  $g(z, t)$  die Greensche Funktion von  $G$ . Sei  $\mu$  ein Mass auf  $G$  mit endlicher totaler Variation.*

*Dann existiert eine  $\delta$ -subharmonische Funktion, welche ausserhalb der abgeschlossenen Hülle  $\bar{G}$  gleich Null ist und in  $G$  mit dem Greenschen Potential*

$$z \rightarrow V(z) = - \int_G g(z, t) d\mu(t) \quad (4.7)$$

*übereinstimmt.*

*Beweis.* Wir betrachten den linearen Raum  $D$  (siehe L. Schwartz, [22], p. 24) aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und definieren durch

$$\varphi \rightarrow T \cdot \varphi = \iint_{z\text{-Ebene}} \bar{V}(z) \varphi(z) dx dy \quad (\varphi \in D) \quad (4.8)$$

( $z=x+iy$ ) eine Distribution  $T$ . Dabei ist  $\bar{V}(z)$  per definitionem in  $G$  mit  $V(z)$  identisch und ausserhalb  $G$  gleich Null. Mit Hilfe dieser Distribution lässt sich die Behauptung des Lemmas auch so formulieren (siehe z.B. M. Brelot [5], p. 43–44, théorème de représentation de Riesz):

*Die Distribution  $\Delta T$  (Laplaceoperator im Sinne der Distributionen) ist ein Mass.*

In dieser Formulierung wollen wir das Lemma 3 beweisen. Zunächst zeigen wir, dass das Integral in (4.8) existiert. Hierfür genügt es, festzustellen, dass die Funktion  $V(z)$  in  $G$  integrierbar ist.

Sei  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  die Jordansche Zerlegung von  $\mu$ . Nach Definition ist  $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$ , wobei

$$V_i(z) = - \int_G g(z, t) d\mu_i(t) \quad (i = 1, 2).$$

Die Funktion  $V$  bleibt also undefiniert auf der Menge  $A = \{z, V_1(z) = V_2(z) = -\infty\}$ . Diese ist aber von der Kapazität Null und somit für uns nicht von Belang (vgl. dazu [4]).

Weil die Funktion  $t \rightarrow \iint_G g(z, t) dx dy$  in  $G$  beschränkt und die totale Variation von  $\mu$  endlich ist, existieren die Integrale

$$\int_G \left[ \iint_G g(z, t) dx dy \right] d\mu_i(t) < \infty \quad (i = 1, 2)$$

und nach dem Satz von Fubini folgt daraus, dass auch

$$\iint_G V_i(z) dx dy < \infty \quad (i = 1, 2), \quad (4.9)$$

q.e.d.

Nach Definition der Distribution  $\Delta T$  ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta T \cdot \varphi &= \iint_{z\text{-Ebene}} \bar{V} \Delta \varphi dx dy = - \iint_G \left[ \int_G g(z, t) d\mu(t) \right] \Delta \varphi(z) dx dy \\ &= - \int_G \left[ \iint_G g(z, t) \Delta \varphi(z) dx dy \right] d\mu(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

denn nach (4.9) darf die Reihenfolge der Integration vertauscht werden.

Für jeden Punkt  $t$  aus  $G$  und alle Zahlen  $r, 0 < r < 1$ , gilt

$$\iint_{G_r} g(z, t) \Delta \varphi(z) dx dy = -2\pi \varphi(t) + \int_{\Gamma_r} g \frac{\partial \varphi}{\partial n} |dz| - \int_{\Gamma_r} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} |dz|. \quad (4.11)$$

Dabei bezeichnen  $\Gamma_r$  die Niveaulinie  $\{z, g(z, t) = -\log r\}$ ,  $G_r$  das von  $\Gamma_r$  berandete Gebiet und  $\partial/\partial n$  die Ableitung in Richtung der äusseren Normalen. Ferner ist

$$\int_{\Gamma_r} g \frac{\partial \varphi}{\partial n} |dz| = -\log r \int_{\Gamma_r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} |dz| = -\log r \iint_{G_r} \Delta \varphi dx dy. \quad (4.12)$$

Für den Grenzwert des zweiten Integrals auf der rechten Seite von (4.11) erhalten wir unter Anwendung einer bekannten Eigenschaft der Greenschen Funktion (siehe z.B. [12], S. 31)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} |dz| = - \int_{\Gamma} \varphi(z) d\omega(t, e_z, G). \quad (4.13)$$

Dabei bezeichnet  $\omega(t, e_z, G)$  das harmonische Mass der Borelmenge  $e_z$  im Punkte  $t$  in Bezug auf das Gebiet  $G$ .

Definieren wir nun das Mass

$$\nu(e) = \int_G \omega(t, e, G) d\mu(t) \quad (e \text{ Borelmenge auf } \Gamma),$$

so erhalten wir aus (4.10) bis (4.13) die Beziehung

$$\Delta T \cdot \varphi = 2\pi \int_G \varphi(t) d\mu(t) - \int_\Gamma \varphi(z) d\nu(e_z).$$

Also ist die Distribution  $\Delta T$  ein Mass, qed.

4.3. Die Behauptung II des Verheftungssatzes beweisen wir unter der *zusätzlichen Annahme*, dass das (unter den Voraussetzungen von Satz 3 existierende) *Jordangebiet*  $G$  *von beschränkter Randdrehung* sei (vgl. hierzu Fussnote 8)). Zudem setzen wir voraus, dass die Sprünge  $\Delta(z_i)$  ( $z_i \in \partial G$ ), welche die Tangentenrichtung beim Durchlaufen von  $\Gamma = \partial G$  erfährt, der Bedingung<sup>11)</sup>

$$-(\pi + \tau_{\tilde{p}_i}^{(r)}) < 2\Delta(z_i) < \pi + \tau_{p_i}^{(l)} \quad (4.14)$$

genügen. Dabei bezeichnen  $p_i$  und  $\tilde{p}_i$  die Punkte, welche bei den in Satz 3 eingeführten Abbildungen in  $z_i \in \Gamma$  übergehen und  $\tau_{p_i}^{(l)}$  bzw.  $\tau_{\tilde{p}_i}^{(r)}$  die Schwenkungen der Punkte  $p_i$  bzw.  $\tilde{p}_i$  (siehe (1.7)).

**SATZ 4:** *Die Voraussetzungen von Satz 3 seien erfüllt und das dort eingeführte Gebiet  $G$  sei von beschränkter Randdrehung. Zudem gelte (4.14). Wir bezeichnen mit  $v(z)$  und  $\tilde{v}(z)$  die im Differentialausdruck  $ds$  bzw.  $\tilde{ds}$  auftretenden, in  $G$  bzw.  $CG$  definierten,  $\delta$ -subharmonischen Funktionen. Dann kann die (auf  $\Gamma = \partial G$  zunächst nicht definierte) Funktion*

$$V(z) = \begin{cases} v(z) & z \in G \\ \tilde{v}(z) & z \in CG \end{cases} \quad (4.15)$$

*auf die ganze  $z$ -Ebene  $\delta$ -subharmonisch fortgesetzt werden.*

*Beweis:* Wir gehen aus von den Rieszschen Zerlegungen

$$v(z) = H(z) - \int_G g(z, t) d\mu(t), \quad (4.16)$$

$$\tilde{v}(z) = \tilde{H}(z) - \int_{CG} g(z, t) d\tilde{\mu}(t). \quad (4.17)$$

<sup>11)</sup> Diese ist in allen Punkten, bis auf *höchstens endlich viele* erfüllt.

Dabei bezeichnen wir mit  $g(z, t)$  und  $\tilde{g}(z, t)$  die Greenschen Funktionen von  $G$  bzw.  $C\bar{G}$ , mit  $\mu$  und  $\tilde{\mu}$  die Massenverteilungen (0.6) von  $v$  bzw.  $\tilde{v}$  und mit  $H(z)$  und  $\tilde{H}(z)$  die harmonischen Majorantendifferenzen von  $v$  bzw.  $\tilde{v}$ . Diese sind folgendermassen definiert: Sei  $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$  eine Darstellung von  $v$  als Differenz subharmonischer Funktionen, und es sei  $H_i(z)$  die kleinste harmonische Majorante von  $v_i(z)$  ( $i = 1, 2$ ). Dann ist  $H(z) = H_1(z) - H_2(z)$ .

Aus Lemma 3 schliessen wir, dass es genügt, folgendes zu zeigen: Es gibt eine in der ganzen  $z$ -Ebene  $\delta$ -subharmonische Funktion, welche auf  $G \cup C\bar{G}$  übereinstimmt mit

$$\tilde{H}(z) = \begin{cases} H(z) & z \in G \\ 0 & z \in \partial G \\ \tilde{H}(z) & z \in C\bar{G}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Zum Beweis der Existenz dieser Funktion betrachten wir die Distribution

$$\varphi \rightarrow T \cdot \varphi = \int \int_{z\text{-Ebene}} \tilde{H}(z) \varphi(z) dx dy \quad (4.19)$$

und zeigen, dass

$$\varphi \rightarrow \Delta T \cdot \varphi = \int \int_{z\text{-Ebene}} \tilde{H} \Delta \varphi dx dy = \int \int_G H \Delta \varphi dx dy + \int \int_{C\bar{G}} \tilde{H} \Delta \varphi dx dy \quad (4.20)$$

ein Mass ist (vgl. Beweis von Lemma 3).

Zunächst beweisen wir, dass  $H(z)$  in  $G$  integrierbar ist und somit durch (4.19) eine Distribution definiert wird. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine konforme Abbildung  $\zeta \rightarrow F(\zeta)$  des Einheitskreises  $\{\zeta, |\zeta| < 1\}$  auf das Gebiet  $G$ . Es bezeichne  $\Gamma_r$  ( $0 \leq r < 1$ ) das Bild der Kreislinie  $\{\zeta, |\zeta| = r\}$ .

Nach Satz 1 ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} e^{H(z)} |dz| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\zeta|=r} e^{h(\zeta)} |d\zeta| < \infty, \quad (4.21)$$

wobei

$$h(\zeta) = H(F(\zeta)) + \log |F'(\zeta)|. \quad (4.22)$$

Daraus ergibt sich unter Anwendung der isoperimetrischen Ungleichung von T. Carleman [7] (siehe auch [10])

$$\int \int_G e^{2H(z)} dx dy \leq \frac{1}{4\pi} \left( \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} e^{H(z)} |dz| \right)^2 < \infty.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass auch

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} e^{-H(z)} |dz| < \infty, \quad (4.23)$$

so erhalten wir analog

$$\iint_G e^{-2H(z)} dx dy < \infty,$$

und damit die Integrierbarkeit von  $H(z)$ :

$$\iint_G |H(z)| dx dy \leq \frac{1}{4} \iint_G (e^{2H(z)} + e^{-2H(z)}) dx dy < \infty.$$

Zum Beweise von (4.23) stützen wir uns auf ein Resultat von Paatero [14]: Da die Funktion  $z = F(\zeta)$  den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$  konform auf ein Gebiet beschränkter Randdrehung abbildet, existiert der Grenzwert

$$\psi(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^\theta \operatorname{Re} \left( 1 + \zeta \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} \right) d\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (4.24)$$

( $\zeta = r e^{i\theta}$ ) und definiert eine Funktion beschränkter Variation. Dabei gilt die Darstellung

$$\log |F'(\zeta)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\zeta - e^{i\theta}|} d\psi(\theta). \quad (4.25)$$

Ebenso lässt sich die Funktion  $h(\zeta)$  als logarithmisches Potential

$$h(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\zeta - e^{i\theta}|} d\kappa(\theta) \quad (4.26)$$

darstellen, da nämlich nach Voraussetzung auch die in (2.15) definierte Funktion den Einheitskreis  $\{\zeta, |\zeta| < 1\}$  konform auf ein (nicht notwendigerweise schlichtes) Gebiet beschränkter Randdrehung abbildet. Die Funktion  $\kappa(\theta)$  ist dabei durch (3.5) definiert.

Aus (4.22), (4.25) und (4.26) erhalten wir die Darstellung

$$-H(F(\zeta)) + \log |F'(\zeta)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|\zeta - e^{i\theta}|} d(2\psi(\theta) - \kappa(\theta)). \quad (4.27)$$

Die Funktion  $2\psi(\theta) - \kappa(\theta)$  besitzt wegen (4.14) keine Sprünge  $\geq \pi$  und demzufolge (V. Paatero [14]) bildet

$$\zeta \rightarrow \int_0^\zeta \exp \{ -H(F(\zeta)) - iH^*(F(\zeta)) \} F'(\zeta) d\zeta$$

( $H^*$  konjugiert harmonische Funktion von  $H$ ) den Einheitskreis  $\{\zeta, |\zeta| < 1\}$  auf ein (nicht notwendigerweise schlichtes) endliches Gebiet beschränkter Randdrehung ab, dessen Randkurve rektifizierbar ([15], S. 6) ist. Daraus folgt (siehe z.B. F. und M. Riesz [21], S. 41)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\zeta|=r} e^{-H(F(\zeta))} |F'(\zeta)| |d\zeta| < \infty,$$

d.h. die Bedingung (4.23).

Nun beweisen wir, dass die durch (4.20) definierte Distribution ein Mass ist.

Zunächst bemerken wir, dass

$$\iint_G H(z) \Delta \varphi(z) dx dy = \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \int_{\Gamma_r} H \frac{\partial \varphi}{\partial n} |dz| - \int_{\Gamma_r} \varphi \frac{\partial H}{\partial n} |dz| \right\}, \quad (4.28)$$

wobei  $\partial/\partial n$  die Ableitung in Richtung der äusseren Normalen von  $\Gamma_r$  bezeichnet. Wir behaupten, dass

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} H(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz| = \int_{\Gamma} H(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz|. \quad (4.29)$$

Dabei sind die im Integranden der rechten Seite auftretenden Funktionen für fast alle  $\theta$ ,  $e^{i\theta} = \check{F}(z)$ , als Grenzwerte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(F(r e^{i\theta})) \quad \text{und} \quad H(z) = \lim_{r \rightarrow 1} H(F(r e^{i\theta}))$$

definiert. Der erste Limes existiert nach einem Resultat von V. Paatero ([14], S. 57) für alle  $\theta$ , der zweite gemäss (4.21) nach F. und M. Riesz für fast alle  $\theta$ .

Zum Beweis von (4.29) führen wir die Kurvenbogen  $\Gamma_{rt} = \{F(r e^{i\theta}), 0 \leq \theta \leq t\}$  ein. Die auf  $[0, 2\pi]$  definierte Funktionenschar

$$t \rightarrow \int_0^t e^{h(re^{i\theta})} r d\theta = \int_{\Gamma_{rt}} e^{H(z)} |dz|,$$

deren Scharparameter  $r$  zwischen 0 und 1 variiert, ist zufolge (4.21) nach Satz III von

F. Riesz [20] gleichgradig absolut stetig. Aus (4.23) schliesst man analog, dass dasselbe für die Funktionenschar

$$t \rightarrow \int_{\Gamma_{rt}} e^{-H(z)} |dz| \quad (0 < r < 1)$$

zutrifft. Da

$$\int_{\Gamma_{rt}} |H(z)| |dz| \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{rt}} (e^{H(z)} + e^{-H(z)}) |dz|,$$

ist auch die Schar

$$t \rightarrow \int_{\Gamma_{rt}} |H(z)| |dz| \quad (0 < r < 1)$$

gleichgradig absolut stetig. Daraus folgt bekanntlich (siehe z.B. [11], theorem 18) die Beziehung (4.29), denn die Funktion  $(\partial\varphi/\partial n)(z)$  ist offenbar beschränkt.

Jetzt betrachten wir das zweite Integral der rechten Seite von (4.28). Mit Hilfe einer gegen 1 konvergierenden Folge von Radien  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$  definieren wir die Funktionenfolge

$$t \rightarrow \lambda_n(t) = \int_{\Gamma_{r_n t}} \frac{\partial H}{\partial n} |dz| = r_n \int_0^t \frac{\partial}{\partial r} (h(r_n e^{i\theta}) - \log |F'(r_n e^{i\theta})|) d\theta.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert diese gegen die Grenzfunktion

$$\lambda(t) = \kappa(t) - \psi(t). \quad (4.30)$$

Dies folgt aus (3.5), (4.24) und der Identität

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |F'(r e^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left( r e^{i\theta} \frac{F''(r e^{i\theta})}{F'(r e^{i\theta})} \right).$$

Die Funktionen  $\kappa(t)$  und  $\psi(t)$  sind von beschränkter Variation und somit besitzt auch  $\lambda(t)$  diese Eigenschaft. Aus dem der Funktion  $\lambda(t)$  zugeordneten Mass auf  $|\zeta|=1$  entsteht durch Verpflanzung ein auf  $\Gamma$  liegendes Mass, welches wir mit  $\lambda(e)$  ( $e$  Borelmenge) bezeichnen.

Da die Funktion  $\varphi(z)$  auf  $\bar{G}$  gleichmässig stetig ist, konvergiert die Funktionenfolge  $t \rightarrow \varphi(F(r_n e^{it}))$  für  $n \rightarrow \infty$  gleichmässig gegen die Grenzfunktion  $t \rightarrow \varphi(F(e^{it}))$ . Somit gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\Gamma_r} \varphi(z) \frac{\partial H}{\partial n}(z) |dz| = \int_{\Gamma} \varphi(z) d\lambda(e). \quad (4.31)$$



Aus (4.28), (4.29) und (4.31) erhalten wir schliesslich

$$\iint_G H(z) \Delta \varphi(z) dx dy = \int_\Gamma H(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz| - \int_\Gamma \varphi(z) d\lambda(e_z). \quad (4.32)$$

Analog kann der Funktion  $\tilde{H}(z)$  ein Mass  $\tilde{\lambda}$  auf  $\Gamma$  zugeordnet werden, so, dass

$$\iint_{c\bar{G}} \tilde{H}(z) \Delta \varphi(z) dx dy = - \int_\Gamma \tilde{H}(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz| + \int_\Gamma \varphi(z) d\tilde{\lambda}(e_z). \quad (4.33)$$

Es genügt, nun noch zu zeigen, dass

$$\int_\Gamma H(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz| = \int_\Gamma \tilde{H}(z) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(z) |dz|. \quad (4.34)$$

Aus (4.20), (4.32), (4.33) und (4.34) folgt dann nämlich

$$\Delta T \cdot \varphi = \int_\Gamma \varphi(z) d(\tilde{\lambda} - \lambda)(e_z), \quad (4.35)$$

womit gezeigt ist, dass  $\Delta T$  in der Tat durch ein (auf  $\Gamma$  liegendes) Mass erzeugt wird.

Um (4.34) zu beweisen, betrachten wir die harmonischen Funktionen  $h(\zeta)$  und  $\tilde{h}(\zeta)$ , welche nach Voraussetzung die Bedingungen (4.3) und (4.4) erfüllen. Die mit (4.5) definierte Funktion  $t \rightarrow \alpha(t)$  ist monoton zunehmend. Sie ist ferner absolut stetig, denn die inverse Funktion des rechten, unbestimmten Integrals von (4.5) ist absolut stetig (siehe z.B. [16], S. 410) und ebenso die Komposition desselben mit dem unbestimmten Integral der linken Seite von (4.5).

Aus (4.5) folgt durch Differentiation

$$e^{h(e^{it})} = e^{\tilde{h}(e^{i\alpha(t)})} \cdot \alpha'(t) \quad (\text{f.ü.})$$

Da  $\Gamma$  ein Gebiet beschränkter Randdrehung berandet, also gemäss V. Paatero [15] rektifizierbar ist, kann mit Hilfe eines Resultates von F. und M. Riesz ([21], S. 39) aus (4.6) geschlossen werden, dass

$$|F'(e^{it})| = |\mathfrak{F}'(e^{i\alpha(t)})| \cdot \alpha'(t) \quad (\text{f.ü.})$$

Nach einem Satz von Szegö (siehe [20], S. 91) ist  $\log |F'(e^{it})|$  integrierbar und somit  $|F'(e^{it})| \neq 0$  (f.ü.). Folglich ist

$$h(e^{it}) - \log |F'(e^{it})| = \tilde{h}(e^{i\alpha(t)}) - \log |\mathfrak{F}'(e^{i\alpha(t)})| \quad (\text{f.ü.}).$$

Daraus ergibt sich nach (4.6) und (4.22)

$$H(z) = \tilde{H}(z) \quad (\text{f.ü.}) \quad (4.36)$$

( $z = F(e^{it}) = \mathfrak{F}(e^{i\alpha(t)})$ ), womit (4.34) verifiziert ist.

Hiermit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. D. ALEXANDROW: *Die innere Geometrie der konvexen Flächen* (Akademie-Verlag, Berlin 1955).
- [2] A. D. ALEKSANDROV und V. A. ZALGALLER: *Two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov 63 (1962); English transl.: *Intrinsic geometry of surfaces* Transl. Math. Monographs, Vol 15 (Amer. Math. Soc., Providence R. I. 1967).
- [3] A. D. ALEKSANDROV und V. A. ZALGALLER: *Two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Proceedings of the Steklov Inst. of Mat. 76 (1965) (Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1967).
- [4] M. G. ARSOVE: *Functions representable as differences of subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 327–365.
- [5] M. BRELOT: *Eléments de la théorie classique du potentiel*, 3<sup>e</sup> édition (Centre de Documentation Universitaire, Paris 1965).
- [6] C. CARATHÉODORY: *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen*, Schwarz-Festschrift (1914), 19–41.
- [7] T. CARLEMAN: *Zur Theorie der Minimalflächen*, Math. Z. 9 (1921), 154–160.
- [8] B. FUGLEDE: *The symmetric normal derivative of a subharmonic function*, 13. Skand. Mat.-Kongr., Helsinki 1957 (1958), 90–101.
- [9] A. HUBER: *Zum potentialtheoretischen Aspekt der Alexandrowschen Flächentheorie*, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 99–126.
- [10] A. HUBER: *Zur isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen*, Acta Math. 97 (1957), 95–101.
- [11] J. E. LITTLEWOOD: *Lectures on the theory of functions* (Oxford University Press, 1944).
- [12] R. NEVANLINNA: *Eindeutige analytische Funktionen*, 2. Aufl. (Springer, 1953).
- [13] A. OSTROWSKI: *Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches*, Acta Math 64 (1935), 81–184.
- [14] V. PAATERO: *Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind*, Ann. Acad. Sci. Fennicae [A] 33, No. 9 (1931).
- [15] V. PAATERO: *Über Gebiete von beschränkter Randdrehung*, Ann. Acad. Sci. Fennicae [A] 37, No. 9 (1933).
- [16] A. PFLUGER: *Über die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung*, J. Indian Math. Soc. 24 (1961), 401–412.
- [17] T. RADÓ: *Subharmonic functions* (Springer, Berlin 1937). [Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V/I].
- [18] J. G. RESCHETNJAK: *Isotherme Koordinaten auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (Russisch), Sibirskii Mat. J. 1 (1960), 88–116 und 248–276.
- [19] J. G. RESCHETNJAK: *Die Schwenkung einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung mit isothermem Linienelement* (Russisch), Sibirskii Mat. J. 4 (1963), 879–910.
- [20] F. RIESZ: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Math. Z. 18 (1923), 87–95.
- [21] F. und M. RIESZ: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, 4. Congr. Math. Scand., Stockholm (1916), 27–44.
- [22] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions*, Tomes I/II, Act. sci. et ind. 1245/1122 (Paris 1957/59).

Eingegangen: den 8. April 1969