

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles.
Autor: Rosenberg, H. / Roussarie, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34674>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles

par H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE

Soit V une variété compacte, de dimension n , supérieure ou égale à 2, de classe C^∞ , munie d'un feuilletage F de codimension 1. On dit qu'une feuille L de F est *exceptionnelle* si :

- L n'est nulle part dense dans V
- la topologie de L en tant que variété de dimension $n-1$ est strictement plus fine que la topologie induite sur L par V .

La notion de feuille exceptionnelle a été introduite pour la première fois par A. Denjoy pour l'étude des feuilletages définis sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, transverses à l'un des facteurs S^1 [1]. Dans ce cas particulier l'existence de feuilles exceptionnelles est liée à la classe de différentiabilité du feuilletage: ainsi, dans [1], A. Denjoy donne un exemple de feuilletage de classe C^1 présentant quelques feuilles exceptionnelles et montre au contraire, qu'aucun feuilletage de classe supérieure ou égale à 2 ne possède de feuille exceptionnelle. Dans [4], G. Reeb a étendu les résultats de A. Denjoy au cas des feuilletages de la variété $T^2 \times [0, 1]$, transverses au facteur $[0, 1]$ et conjectura qu'il devrait en être de même pour tout feuilletage défini dans une variété de dimension 3, fibrée sur une variété de dimension 2, à la condition que le feuilletage soit transverse aux fibres. R. Sacksteder, dans [5], donne un contre-exemple à cette conjecture en construisant un feuilletage de classe C^∞ présentant quelques feuilles exceptionnelles, défini dans la variété $M_2 \times S^1$, où M_2 désigne la surface fermée orientable de genre 2. (Ce feuilletage étant transverse au facteur S^1 .)

Nous nous proposons ici de généraliser ce résultat, en montrant que :

THÉORÈME: *Toute variété de dimension 3, fermée, orientable et de classe C^∞ , possède des feuilletages de classe C^∞ contenant quelques feuilles exceptionnelles.*

Signalons tout d'abord qu'il suffit de prouver le théorème dans le cas de la sphère S^3 . En effet, à partir d'un feuilletage défini sur S^3 , on obtient des feuilletages sur toute autre variété orientable par tourbillonnement et modification le long de transversales fermées. Cependant, la construction donnée plus loin étant la même pour toutes les variétés, nous n'avons pas jugé bon de privilégier la sphère S^3 dans l'énoncé du théorème.

L'intérêt du résultat réside évidemment dans la classe de différentiabilité du feuilletage construit: en effet, il est facile de construire un feuilletage de classe C^1 de S^3 possédant quelques feuilles exceptionnelles, en prenant une suspension du feuilletage de classe C^1 du tore T^2 cité plus haut, puis en opérant des tourbillonnements et modifications le long de transversales fermées. *L'existence de feuilles exceptionnelles*

dans un feuilletage de variété orientable de dimension 3, est donc indépendante en général de la classe de différentiabilité du feuilletage; la situation, dans ce cas, est donc bien différente de celle décrite par A. Denjoy dans le cas du tore T^2 .

Les feuilles exceptionnelles des feuilletages définis par le théorème ne sont pas contenues en général dans un ensemble minimal. Il serait d'un grand intérêt de connaître quelles sont les variétés sur lesquelles peuvent être définies des feuilletages possédant des ensembles minimaux exceptionnels. On peut conjecturer raisonnablement, par exemple, que la sphère S^3 n'est pas de ce type: il en résulterait, grâce au théorème de Novikov [2], que les seuls ensembles minimaux des feuilletages de S^3 sont les feuilles compactes, toutes difféomorphes au tore T^2 .

Nous rappelons tout d'abord quelques résultats permettant d'obtenir n'importe quelle variété V , fermée orientable de dimension 3, par modification de $M_2 \times S^1$. On construit ensuite des feuilletages de V par tourbillonnement et modification de feuilletages de $M_2 \times S^1$, d'un type analogue au feuilletage décrit par R. Sacksteder dans [5].

I. Quelques résultats standards relatifs aux variétés orientables de dimension 3

Toute variété fermée, orientable, de dimension 3 peut être obtenue par modification de la sphère S^3 , comme l'indique le résultat suivant, dû à H. Wallace [6]:

LEMME 1: *Soit V une variété orientable fermée de dimension 3. Il existe des ensembles de tores solides disjoints (T_1, \dots, T_n) et (τ_1, \dots, τ_n) plongés respectivement dans V et S^3 , tels que $V - \bigcup_{i=1}^n T_i$ soit difféomorphe à $S^3 - \bigcup_{i=1}^n \tau_i$.*

Supposons que V et V' soient deux variétés orientables, fermées, de dimension 3. Désignons par (T_1, \dots, T_n) et (τ_1, \dots, τ_n) les tores plongés dans V et S^3 d'une part, et par $(T'_{n+1}, \dots, T'_{n+k})$ et $(\tau'_{n+k}, \dots, \tau'_{n+k})$ les tores plongés dans V' et S^3 d'autre part, définis dans le lemme 1.

Soient φ et φ' des difféomorphismes de $V - \bigcup_{i=1}^n T_i$ dans $S^3 - \bigcup_{i=1}^n \tau_i$ et de $V' - \bigcup_{i=1}^k T'_{n+i}$ dans $S^3 - \bigcup_{i=1}^k \tau'_{n+i}$ respectivement.

Dans S^3 , il existe une isotopie envoyant l'ensemble de tores plongés $\bigcup_{i=1}^k \tau'_{n+i}$ dans la complémentaire de $\bigcup_{i=1}^n \tau_i$. Désignons encore par $(\tau'_{n+1}, \dots, \tau'_{n+k})$ les nouveaux tores obtenus après cette isotopie et par φ' le difféomorphisme en résultant.

Posons: $T_{n+j} = \varphi^{-1}(\tau'_{n+j})$ pour $1 \leq j \leq k$
et $T'_i = \varphi'(\tau_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Alors $\varphi' \circ \varphi$ définit un difféomorphisme de $V - \bigcup_{i=1}^{n+k} T_i$ sur $V' - \bigcup_{i=1}^{n+k} T'_i$. On a donc le résultat suivant:

COROLLAIRE 1: *Soient V et V' deux variétés fermées, orientables de dimension 3. Il existe des ensembles de tores solides disjoints (T_1, \dots, T_m) et (T'_1, \dots, T'_m) plongés respectivement dans V et V' tels que $V - \bigcup_{i=1}^m T_i$ soit difféomorphe à $V' - \bigcup_{i=1}^m T'_i$.*

Clairement les tores solides T_i et T'_i intervenant dans le corollaire 1 peuvent être choisis d'être des voisinages tubulaires arbitraires de systèmes de lacets disjoints $P = (p_1, \dots, p_m)$ et $P' = (p'_1, \dots, p'_m)$ plongés respectivement dans V et V' .

Supposons maintenant que $V = M \times S^1$ où M est une surface fermée orientable. Désignons par F_0 le feuilletage dont les feuilles sont les sous-variétés $M \times \{\theta\}$ pour $\theta \in S^1$. On peut alors préciser le corollaire 1 de la façon suivante:

LEMME 2: *le système de lacets $P \subset V$, défini ci-dessus, peut être choisi transverse au feuilletage F_0 .*

Ce lemme est à rapprocher d'un résultat de J. Wood (lemme 4.3 de [7]) concernant l'obtention des variétés de dimension 3, fermées, non-orientables par modification de E , fibré non trivial sur S^1 de fibre S^2 : J. Wood montre que le système de lacets de E , le long desquels se font les modifications, peut être choisi transverse aux fibres S^2 . La méthode se transpose sans changement aucun si E est remplacé par n'importe quel fibré sur S^1 de fibre une surface fermée de dimension 2. Aussi le lecteur doit se reporter à l'article de Wood cité plus haut, et faire la transcription évidente pour obtenir la démonstration du lemme 2.

II. Construction de feuilletages possédant des feuilles exceptionnelles

Dorénavant $V = M_2 \times S^1$ où M_2 désigne la surface fermée, orientable de genre 2. Soit V' une variété quelconque, fermée, orientable, de dimension 3. Soit P le système de lacets transverses au feuilletage F_0 de V , relatif à V et V' comme il a été défini dans le lemme 2.

On considère tout feuilletage de V comme la donnée d'une section C^∞ , complètement intégrable, du fibré des 2 plans au-dessus de V . On munit l'ensemble $\mathfrak{F}(V)$ des feuilletages de V de la C^0 -topologie de la convergence uniforme des sections. Il existe alors un ouvert U de F_0 dans $\mathfrak{F}(V)$, tel que pour tout feuilletage $F \in U$, le système P soit transverse à F . La méthode classique du tourbillonnement [4], y permet de modifier F en un feuilletage F' de V' , possédant une composante de Reeb le long de chaque lacet p' de P' . Le but de ce qui suit est de montrer qu'il existe de tels feuilletages F avec des feuilles exceptionnelles. Le feuilletage F' possèdera également des feuilles exceptionnelles provenant de celles de F , et nous aurons fini.

Nous nous appuyons sur l'article de R. Sacksteder déjà cité, article dont nous conservons d'ailleurs les notations.

a) Difféomorphismes de S^1

Dans [5], R. Sacksteder construit un couple de difféomorphismes de S^1 : (f_1, g_1) tel que le groupe de difféomorphismes engendré, $G(f_1, g_1)$, admette pour ensemble

minimal un *ensemble de Cantor* C_1 . Rappelons brièvement la construction de C_1, f_1 et g_1 .

S^1 est représentée comme $[0, 2]$ avec les extrémités identifiées. L'ensemble C_1 est défini comme suit: à la première étape les intervalles $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(1, \frac{4}{3})$ et $(\frac{5}{3}, 2)$ sont enlevés de $[0, 2]$. A la $k_{\text{ième}}$ étape, le tiers-moyen de chaque intervalle fermé qui reste après la $(k-1)_{\text{ième}}$ étape est enlevé, comme dans la construction usuelle d'un ensemble de Cantor. L'ensemble C_1 est l'ensemble restant quand toutes les étapes ont été accomplies. C_1 est parfait et nulle part dense. On définit maintenant:

$$f_1(x) = x + \frac{2}{3} \pmod{2}$$

$$g_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

$$g_1(x) = 3x - \frac{10}{3} \quad \text{si } \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$g_1(x)$ est défini ailleurs sur $[0, 2]$ de façon à être un difféomorphisme de classe C^∞ avec $g(2)=2$.

On peut alors démontrer que C_1 est un ensemble minimal du groupe $G(f_1, g_1)$. (voir [5]).

Désignons maintenant par $\pi_n, n \geq 1$, l'application de revêtement de degré n de S^1 sur S^1 définie par:

$$\pi_n(x) = nx \pmod{2}.$$

Désignons par $C_n = \pi_n^{-1}(C_1)$ et par f_n, g_n les difféomorphismes de S^1 tels que:

$$\pi_n f_n = f_1 \pi_n, \quad \pi_n g_n = g_1 \pi_n$$

astreints aux conditions:

$$f_n(0) = \frac{2}{3n} \quad \text{et} \quad g_n(0) = 0.$$

Comme π_n est une application de revêtement, f_n et g_n sont définis et uniques, par les conditions ci-dessus.

Désignons enfin par $G_n = G(f_n, g_n)$ le groupe de difféomorphismes engendrés par f_n et $g_n, n \geq 1$.

LEMME 3: C_n est un ensemble de Cantor minimal pour l'action du groupe G_n . De plus (f_n, g_n) tend vers $(\text{Id}_{S^1}, \text{Id}_{S^1})$ dans la topologie C^0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration: le groupe des transformations du revêtement π_n est engendré par la translation $\alpha(x) = x + 2/n \pmod{2}$.

Notons que $\alpha = f_n^3$. Cela signifie que G_n contient comme sous-groupe, le groupe des transformations de revêtement de π_n . Il en résulte que si $x_0 \in S^1$ et $x \in \pi_n^{-1}(x_0)$,

alors :

$$G_n(x) = \pi_n^{-1}(G_1(x_0)) \quad (1)$$

où $G_n(y)$ désigne la G_n -orbite de y , pour $y \in S^1$ et $n \geq 1$.

Supposons que $C_n = \pi_n^{-1}(C_1)$ ne soit pas G_n -minimal: il existe alors $F \subsetneq C_n$, F fermé, G_n -invariant, non vide, de même: $\pi_n(F) \subsetneq C_1$ est fermé, G_1 invariant, non vide et de plus: $\pi_n(F) \neq C_1$ car $\pi_n^{-1}[\pi_n(F)] = F$ d'après (1) puisque F est G_n -invariant.

Mais ceci est impossible puisque C_1 est minimal. Donc C_n est G_n -minimal.

La seconde assertion suit des considérations suivantes:

$$f_n(x) - x = \frac{2}{3n} \quad \text{d'une part}$$

et d'autre part $g_n(0) = 0$ entraîne que:

$$g_n(x) = \frac{1}{n} g_1(nx) \pmod{2}$$

d'où

$$g_n(x) - x = \frac{1}{n} (g_1(nx) - nx)$$

soit encore:

$$\|g_n - \text{Id}_{S^1}\| \leq \frac{1}{n} \|g_1 - \text{Id}_{S^1}\|$$

en notant:

$$\|f - g\| = \sup_{X \in S^1} |f(X) - g(X)|.$$

b) *Construction de feuilletages sur $M_2 \times S^1$:*

Suivant Sacksteder, nous allons associer maintenant à tout couple (f, g) de difféomorphismes de S^1 un feuilletage $\Phi(f, g)$ de $M_2 \times S^1$.

M_2 est une sphère S^2 avec 2 anses attachées et peut être considérée comme l'union disjointe de 3 ensembles: A , B et C , où A est une «bande» difféomorphe à $S^1 \times [0, 1]$ enlaçant 1 fois une des anses, B est une bande analogue enlaçant l'autre anse, et disjointe de A .

On pourra définir un feuilletage quelconque de $M_2 \times S^1$ par ses restrictions sur les 3 ensembles $T_A = A \times S^1$, $T_B = B \times S^1$ et $T_C = C \times S^1$. Soit φ une fonction de $v \in [0, 1]$ à valeurs réelles, avec les propriétés suivantes:

- (a) φ est croissante et C^∞ .
- (b) $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$.
- (c) Toutes les dérivées de φ s'annulent pour $v = 0$ et $v = 1$.

Si $(f, g) \in \text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1)$ on construit le feuilletage $\Phi(f, g)$ de la façon suivante:

On associe à (f, g) les fonctions h, k suivantes de $S^1 \times [0, 1]$ dans S^1 : ($S^1 = [0, 2]/0 \sim 2$)

$$\left. \begin{aligned} h(x, v) &= x + (f(x) - x) \varphi(v) \pmod{2} \\ k(x, v) &= x + (g(x) - x) \varphi(v) \pmod{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Notons que $h(x, 0) = x = h(x, 0)$

et que $h(x, 1) = f(x)$ et $k(x, 1) = g(x)$.

Si (u, v) , $u \in S^1$ et $v \in [0, 1]$ représente un point de A , (x, u, v) , avec $x \in S^1$, représente un point de T_A .

Nous définissons le feuilletage $\Phi(f, g)$ sur T_A par la convention que la feuille contenant le point $(x, u, 0)$ est formée de tous les points de la forme $(h(x, v), u', v)$. Le feuilletage $\Phi(f, g)$ est défini sur T_B de la même façon, en remplaçant h par k , et sur T_C par la condition que x est constant sur chaque feuille.

Il est aisé de voir que les feuilletages ainsi définis sur T_A, T_B, T_C se recollent pour définir un feuilletage $C^\infty: \Phi(f, g)$ sur $M_2 \times S^1$, dont les feuilles sont transverses en chaque point à S^1 dans le produit $M_2 \times S^1$. La propriété de transversalité que nous venons de noter a pour conséquence que tout lacet γ de M_2 , dont les extrémités sont en b, a un relèvement unique dans le feuilletage $\Phi(f, g)$ en un chemin commençant au point (b, x) ($x \in S^1$) contenu dans la feuille par (b, x) . Notons $(b, T(\gamma, x))$ l'autre extrémité de ce chemin.

$T(\gamma, x)$, γ étant fixé est un difféomorphisme de S^1 , qui ne dépend que la de classe d'homotopie de γ dans $\pi_1(M_2, b)$. On a ainsi une représentation de $\pi_1(M_2, b)$ dans le groupe des difféomorphismes de S^1 . L'image de cette représentation est précisément le groupe $G(f, g)$. D'autre part, il est clair que 2 points $(x, b), (y, b)$ ($x, y \in S^1$) sont sur une même feuille de $\Phi(f, g)$ si et seulement si les deux points x et y appartiennent à la même orbite de $G(f, g)$. En particulier à tout ensemble minimal (respectivement exceptionnel) de $G(f, g)$ correspond biunivoquement un ensemble minimal (resp. exceptionnel) du feuilletage $\Phi(f, g)$ par l'application $x \in S^1 \rightarrow (b, x) \in \{b\} \times S^1 \subset M_2 \times S^1$.

On se reportera utilement à l'article de Sacksteder pour trouver les détails de ce qui précède.

On a le résultat suivant à propos de l'application Φ que nous venons de décrire:

LEMME 4: *l'application $\Phi: \text{Diff}(S^1) \times \text{Diff}(S^1) \rightarrow \mathfrak{Y}(M_2 \times S^1)$ décrite ci-dessus est continue lorsque $\text{Diff}(S^1)$ et $\mathfrak{Y}(M_2 \times S^1)$ sont munis de leurs C^0 -topologies. De plus $\Phi(\text{Id}_{S^1} \times \text{Id}_{S^1}) = F_0$.*

La dernière assertion est évidente par construction de Φ . Supposons que (f, g) soit un couple quelconque de difféomorphismes de S^1 . Soit (x, u, v) un point quel-

conque de T_A . En raison des formules (2), les 2 vecteurs suivants:

$$v_1(x, u, v) = (f(x) - x) \frac{d\varphi}{dv} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}$$

et

$$v_2(x, u, v) = \frac{\partial}{\partial u}$$

sont tangents à la feuille de $\varphi(f, g)$ au point (x, u, v) .

Si (f', g') est un autre couple auquel sont associés les vecteurs v'_1 et v'_2 comme ci-dessus, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \left| (v_1 - v'_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right| &\leq \|f - f'\| \cdot \sup_{v \in [0, 1]} |\varphi'(v)| \\ \left| (v_2 - v'_2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right| &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ces relations impliquent que le feuilletage $\Phi(f, g)$ restreint à T_A dépend continuellement de (f, g) . La même considération s'applique à $\Phi(f, g)|_{T_B}$ en remplaçant f par g . Enfin, par construction $\Phi(f, g)|_{T_C} = F_0|_C$. D'où le résultat.

c) Démonstration du théorème

Les lemmes 3 et 4 impliquent que le feuilletage $\Phi(f_n, g_n)$ tend vers F_0 dans la topologie C^0 , si $n \rightarrow +\infty$. Donc pour n assez grand $\Phi(f_n, g_n) \in U$ et est donc transverse au système de lacets P de la partie I. Chaque feuilletage $\Phi(f_n, g_n)$ possédant un ensemble minimal exceptionnel en vertu d'une remarque faite ci-dessus, les feuilletages de la variété V' obtenus par tourbillonnement le long de P posséderont également des feuilles exceptionnelles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DENJOY: *Sur les courbes définies par des équation différentielles à la surface du tore*, Journal de Math. Vol. 11 (1932).
- [2] S. P. NOVIKOV: *Topology of foliations*, Trudy Mosk. Math. Obshch. Vol. 14, No. 513.83.
- [3] G. REEB: *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sc. Ind. (1952).
- [4] G. REEB: *Sur les structures feuilletées de co-dimension un et sur un théorème de A. Denjoy*, Annales de l'Institut Fourier, 11 (1961) p. 185-200.
- [5] R. SACKSTEDER: *On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one*, Annales de l'Institut Fourier, Vol. 14 (1964) p. 221-226.
- [6] A. H. WALLACE: *Modifications and cobounding manifolds*, Canadian Journal of Math. 12 (1960) p. 503-528.
- [7] J. WOOD: *Foliations on 3-manifolds*, Ann. of Math. 89 (1969), 336-358.

Reçu le 15 avril 1970.