Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 45 (1970)

Artikel: Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34672

Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen

Herrn Andreas Speiser zum 85. Geburtstag von HEINZ HUBER (Basel)

1. Es sei $\mathscr{H}_l$ der Vektorraum über $\mathbf{C}$ der homogenen harmonischen Polynome l-ten Grades des $\mathbf{R}^3$. Jede Drehung $T \in SO(3, \mathbf{R})$ induziert eine lineare Abbildung $[T]_l : \mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$, definiert durch

$$[T]_l\, u = u \circ T^{-1}, \quad u \in \mathscr{H}_l.$$

Es sei nun Γ eine endliche Drehgruppe des $\mathbf{R}^3$. Dann ist die Abbildung

$$T \to [T]_l, \quad T \in \Gamma,$$

eine Darstellung von Γ vom Grade $\dim \mathscr{H}_l = 2l+1$. Wir wollen die Zerlegung dieser Darstellung in irreduzible Komponenten untersuchen. Wir müssen deshalb zuerst ihre Spur

$$\sigma_l(T) = \mathrm{Spur}\,[T]_l$$

berechnen. Dazu führen wir folgende Grösse ein:

$$\vartheta(T) = \operatorname*{Max}_{p \in \Sigma} \varrho(p, Tp);$$

dabei bezeichnet $\varrho(p, q)$ die sphärische Distanz der Punkte p, q auf der Einheitssphäre Σ des $\mathbf{R}^3$. Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

$$\vartheta(T^{-1}) = \vartheta(T), \quad \vartheta(S^{-1}TS) = \vartheta(T) \quad \forall S, T \in SO(3, \mathbf{R}).$$

Jetzt zeigen wir:

$$\sigma_l(T^r) = \sum_{k=-l}^{+l} \exp(ikr\vartheta(T)). \tag{1}$$

Beweis: $\mathscr{H}_l$ besitzt bekanntlich folgende ausgezeichnete Basis ([1], ch. IV):

$$\left.\begin{aligned} u_l^{(k)}(x, y, z) = {} & (x+iy)^k (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(|k|-k)} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}(l-|k|)} \\ & \times P_l^{(|k|)}\left(z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right), \\ & -l \leqslant k \leqslant +l; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dabei ist $P_l^{(|k|)}$ die $|k|$-te Ableitung des l-ten Legendre-Polynoms.

Sei nun $p \in \Sigma$ ein Fixpunkt von T. Dann gibt es ein $S \in SO(3, \mathbf{R})$ so, dass $Sp = (0, 0, 1)$. Setzen wir $R = STS^{-1}$, so gilt

$$R: \begin{cases} x+iy \to e^{i\alpha}(x+iy), & 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \\ z \to z \end{cases} \tag{3}$$

$$\vartheta(T) = \vartheta(R) = \mathrm{Min}(\alpha, 2\pi - \alpha). \tag{4}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich sofort

$$[R^r]_l\, u_l^{(k)} = u_l^{(k)} \circ R^{-r} = e^{-irk\alpha} u_l^{(k)}, \; -l \leqslant k \leqslant +l.$$

Somit wird

$$\sigma_l(T^r) = \sigma_l(S^{-1}R^rS) = \mathrm{Spur}\,[S^{-1}R^rS]_l = \mathrm{Spur}\,[R^r]_l = \sum_{k=-l}^{l} e^{-irk\alpha}.$$

Daraus und aus (4) folgt die Behauptung (1).

Die Reduktion der Darstellung $T \to [T]_l$ von Γ ist geleistet, wenn es gelingt, für jeden irreduziblen Charakter χ von Γ den Mittelwert

$$n(l, \chi) = M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma) = \frac{1}{\mathrm{Ord}\,\Gamma} \sum_{T \in \Gamma} \sigma_l(T)\, \overline{\chi(T)} \tag{5}$$

zu berechnen; nach der Darstellungstheorie ist $n(l, \chi) \geqslant 0$ ganz, und es gilt

$$\sigma_l = \sum_{\chi} n(l, \chi) \cdot \chi,$$

wobei über alle irreduziblen Charaktere von Γ zu summieren ist. Wir leiten nun eine Mittelwertformel für Klassenfunktionen auf Γ her und wenden sie nachher auf die Berechnung von (5) an.

2. Es sei $\nu = \mathrm{Ord}\,\Gamma \geqslant 2$ und F die Fixpunktmenge der Gruppe Γ auf Σ. Γ wirkt als Permutationsgruppe auf F. Zwei Punkte $p, q \in F$ sollen aequivalent heissen, wenn es ein $T \in \Gamma$ gibt, sodass $q = Tp$. F zerfällt dann in h Aequivalenzklassen $F_1, \ldots, F_h$. Wir wählen in jeder Fixpunktklasse F_j einen festen Repräsentanten p_j und definieren:

$$\Gamma_j = \{T \in \Gamma \mid Tp_j = p_j\}, \qquad \nu_j = \mathrm{Ord}\,\Gamma_j \geqslant 2, \qquad (j = 1, \ldots, h).$$

Nun ist $F_j = \{Tp_j \mid T \in \Gamma\}$, und zwar gilt $Tp_j = \mathrm{Sp}_j$ genau dann, wenn $S^{-1}T \in \Gamma_j$. Folglich ergibt sich für die Anzahl f_j der Fixpunkte der Klasse F_j die Gleichung

$$f_j = \nu / \nu_j. \tag{1}$$

Nun beweisen wir folgenden

MITTELWERTSATZ: *Für jede Klassenfunktion φ auf Γ gilt:*

$$2M(\varphi, \Gamma) = \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j) - (h-2)\, \varphi(E).$$

Beweis: F enthält mit jedem Punkt p auch den Antipoden $\bar{p}$. Deshalb gibt es eine Zerlegung

$$F = F_0 \cup \bar{F}_0, \qquad F_0 \cap \bar{F}_0 = \emptyset.$$

Setzen wir

$$\Gamma_p = \{T \in \Gamma \mid Tp = p\}, \quad \Gamma'_p = \Gamma_p - \{E\}, \qquad p \in F,$$

so sind offenbar

$$\Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p, \qquad \Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p$$

zwei Zerlegungen von $\Gamma' = \Gamma - \{E\}$ in disjunkte Teilmengen. Somit wird

$$\begin{aligned} M(\varphi, \Gamma) &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma' p} \varphi(T) \\ &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} 2M(\varphi, \Gamma) &= 2v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T) = \\ &= v^{-1}\varphi(E)\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nun gibt es zu jedem $p \in F_j$ ein $S \in \Gamma$, sodass $Sp = p_j$. Dann ist $\Gamma_p = S^{-1}\Gamma_j S$ und somit

$$\sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{T \in \Gamma_j} \varphi(T) = v_j M(\varphi, \Gamma_j) \qquad \forall p \in F_j.$$

Daher wird

$$\sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} \sum_{p \in F_j} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} f_j v_j M(\varphi, \Gamma_j),$$

also wegen (1):

$$v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j).$$

Somit folgt aus (2):

$$2M(\varphi, \Gamma) = v^{-1}\varphi(E)\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + \sum_{j=1}^{h} M(\varphi, \Gamma_j). \tag{3}$$

Wählen wir speziell $\varphi = 1$, so kommt:

$$2 = v^{-1}\Big(2 - \sum_{j=1}^{h} f_j\Big) + h. \tag{4}$$

Daraus und aus (3) ergibt sich der Mittelwertsatz.

3. Aus (**2**.1) und (**2**.4) folgt noch die Gleichung

$$2(1 - 1/v) = \sum_{j=1}^{h} (1 - 1/v_j). \tag{1}$$

Daraus und aus den Nebenbedingungen $2 \leqslant \nu_j \leqslant \nu$ ergibt sich sofort die wohlbekannte Tatsache, dass nur die folgenden Fälle auftreten können:

I: $h=2$, $\nu_1=\nu_2=\nu\geqslant 2$ (zyklische Gruppe)
II: $h=3$, $2=\nu_1\leqslant\nu_2\leqslant\nu_3$, $\nu_2\leqslant 3$:
1) $\nu_1=\nu_2=2$, $\nu_3=\nu/2$, $\nu\equiv 0 \bmod 2$ (Diedergruppe)
2) $\nu_1=2$, $\nu_2=\nu_3=3$, $\nu=12$ (Tetraedergruppe)
3) $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=4$, $\nu=24$ (Oktaedergruppe)
4) $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$, $\nu=60$ (Ikosaedergruppe).

4. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes können wir nun den gesuchten Mittelwert $n(l,\chi)=M(\sigma_l\bar{\chi},\Gamma)$ in eine aufschlussreichere Gestalt bringen:

SATZ 1: (a) *Zu jedem irreduziblen Charakter χ von Γ gibt es ein System von h Funktionen auf* $\mathbf{Z}$:

$$k\in\mathbf{Z}\to m(j,k,\chi),\qquad (j=1,\ldots,h),$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) $2n(l,\chi)=\sum\limits_{j=1}^{h}\sum\limits_{k=-l}^{l} m(j,k,\chi)-(h-2)(2l+1)\chi(E)$,

2) $m(j,k,\chi)\geqslant 0$ *ganz*, $m(j,k,\chi)=m(j,k',\chi)$ *für* $k\equiv k' \bmod \nu_j$,

3) $\sum\limits_{k \bmod \nu_j} m(j,k,\chi)=\chi(E)$

4) $\sum\limits_{j=1}^{h}\sum\limits_{k \bmod \nu_j} m^2(j,k,\chi)=2+(h-2)\chi^2(E)$.

(b) *Zum Hauptcharakter χ_0 gehört insbesondere folgendes System:*

$$m(j,k,\chi_0)=\begin{cases}1 & \textit{für } k\equiv 0 \bmod \nu_j,\\ 0 & \textit{sonst}.\end{cases}$$

Beweis: Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Klassenfunktion $\varphi=\sigma_l\bar{\chi}$ an und erhalten

$$2n(l,\chi)=2M(\sigma_l\bar{\chi},\Gamma)=\sum_{j=1}^{h} M(\sigma_l\bar{\chi},\Gamma_j)-(h-2)(2l+1)\chi(E). \tag{1}$$

Nun ist Γ_j eine zyklische Drehgruppe der Ordnung ν_j; sie besitzt daher eine Erzeugende T_j mit $\vartheta(T_j)=2\pi/\nu_j$. Somit wird nach (**1.1**):

$$M(\sigma_l\bar{\chi},\Gamma_j)=\nu_j^{-1}\sum_{r \bmod \nu_j}\sigma_l(T_j^r)\,\overline{\chi(T_j^r)}=\nu_j^{-1}\sum_{r \bmod \nu_j}\left(\sum_{k=-l}^{l}\exp(kr\cdot 2\pi i/\nu_j)\right)\overline{\chi(T_j^r)}=$$
$$=\sum_{k=-l}^{l}\nu_j^{-1}\sum_{r \bmod \nu_j}\chi(T_j^r)\exp(-kr\cdot 2\pi i/\nu_j).$$

Somit folgt aus (1):

$$2n(l,\chi)=\sum_{j=1}^{h}\sum_{k=-l}^{l} m(j,k,\chi)-(h-2)(2l+1)\,\chi(E) \tag{2}$$

mit

$$m(j,k,\chi)=\nu_j^{-1}\sum_{r \bmod \nu_j}\chi(T_j^r)\exp(-\,kr\cdot 2\pi i/\nu_j). \tag{3}$$

Die zyklische Gruppe Γ_j besitzt genau die folgenden ν_j irreduziblen Charaktere:

$$\chi_{jk}\colon T_j^r\to\varepsilon_j^{kr},\qquad \varepsilon_j=\exp(2\pi i/\nu_j),\qquad (k \bmod \nu_j).$$

Damit können wir (3) folgendermassen schreiben:

$$m(j,k,\chi)=M(\chi\bar{\chi}_{jk},\Gamma_j). \tag{4}$$

Nun ist aber die Restriktion von χ auf Γ_j die Spur einer (i.a. reduziblen) Darstellung von Γ_j; daher folgt aus (4) nach der Darstellungstheorie:

$$\left.\begin{aligned} &m(j,k,\chi)\geqslant 0 \text{ ganz},\\ &\chi=\sum_{k \bmod \nu_j} m(j,k,\chi)\cdot\chi_{jk} \text{ auf } \Gamma_j, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

also insbesondere

$$\chi(E)=\sum_{k \bmod \nu_j} m(j,k,\chi).$$

Weiter folgt aus (5):

$$\chi\bar{\chi}=\sum_{k,k' \bmod \nu_j} m(j,k,\chi)\,m(j,k',\chi)\,\chi_{jk}\bar{\chi}_{jk'} \text{ auf } \Gamma_j,$$

und somit

$$M(\chi\bar{\chi},\Gamma_j)=\sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j,k,\chi). \tag{6}$$

Andererseits ist aber $M(\chi\bar{\chi},\Gamma)=1$. Daraus und aus (6) folgt nach dem Mittelwertsatz

$$\sum_{j=1}^{h}\sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j,k,\chi)=2+(h-2)\,\chi^2(E).$$

Endlich folgt aus (4) noch

$$m(j,k,\chi_0)=\begin{cases}1 & \text{für } k\equiv 0 \bmod \nu_j,\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Wir wollen jetzt einige unmittelbare Folgerungen aus Satz 1 besprechen. Zunächst ergibt sich sofort

SATZ 2: *Für den Hauptcharakter* χ_0 *von* Γ *gilt*

$$n(l, \chi_0) = 1 + \sum_{j=1}^{h} [l/\nu_j] - (h-2)\, l.$$

Ferner zeigen wir

SATZ 3: *Es sei* ν_0 *das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von* $\nu_1, \ldots, \nu_h$. *Dann gilt*

$$n(l+\nu_0, \chi) = n(l, \chi) + 2\frac{\nu_0}{\nu}\chi(E).$$

In der Tat folgt aus Satz 1:

$$\begin{aligned} 2n(l+\nu_0, \chi) - 2n(l, \chi) &= \sum_{j=1}^{h} 2\frac{\nu_0}{\nu_j}\chi(E) - 2(h-2)\,\nu_0\chi(E) \\ &= 2\nu_0\chi(E)\left(2 - \sum_{j=1}^{h}(1 - 1/\nu_j)\right). \end{aligned}$$

Daraus und aus (**3.**1) folgt aber die Behauptung.

Es bezeichne nun $\bar{l}$ den kleinsten nichtnegativen Rest von $l \bmod \nu_0$. Dann folgt aus Satz 3:

$$n(l, \chi) = n(\bar{l}, \chi) + 2\frac{\nu_0}{\nu}\chi(E)\frac{l-\bar{l}}{\nu_0} = \frac{2}{\nu}\chi(E)\, l + 0(1).$$

Somit haben wir

SATZ 4: *Für jeden irreduziblen Charakter* χ *von* Γ *gilt*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{n(l,\chi)}{l} = \frac{2}{\nu}\chi(E).$$

Das Überraschendste ist nun aber, dass man mit dem ersten Satz $n(l, \chi)$ tatsächlich vollständig berechnen kann, und zwar *ohne die irreduziblen Charaktere von* Γ *a priori zu kennen*; diese lassen sich vielmehr ebenfalls mit Hilfe von Satz 1 auffinden und beschreiben. Wir werden das im folgenden für die Ikosaedergruppe zeigen; die übrigen endlichen Drehgruppen können ganz analog behandelt werden.

6. Es sei jetzt Γ die Ikosaedergruppe. Dann gilt nach **3**: $h=3$, $\nu_1=2$, $\nu_2=3$, $\nu_3=5$, und Satz 1 liefert folgende Aussagen:

$$2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=-l}^{l} m(j, k, \chi) - (2l+1)\,\chi(E) \tag{1}$$

$$\sum_{k \bmod 2} m(1, k, \chi) = \sum_{k \bmod 3} m(2, k, \chi) = \sum_{k \bmod 5} m(3, k, \chi) = \chi(E),$$

$$m(j, k, \chi) \geqslant 0 \text{ ganz}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) = 2 + \chi^2(E). \tag{3}$$

	$l \equiv 0\,(2)$	$l \equiv 1\,(2)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(1, k, \chi)$	$l\chi(E)$ $+m(1, 0, \chi)$	$(l+1)\,\chi(E)$ $-m(1, 0, \chi)$

	$l \equiv 0\,(3)$	$l \equiv 1\,(3)$	$l \equiv 2\,(3)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(2, k, \chi)$	$\frac{2}{3}l\chi(E)$ $+m(2, 0, \chi)$	$\frac{1}{3}(2l+1)\,\chi(E)$	$\frac{2}{3}(l+1)\,\chi(E)$ $-m(2, 0, \chi)$

	$l \equiv 0\,(5)$	$l \equiv 1\,(5)$	$l \equiv 2\,(5)$	$l \equiv 3\,(5)$	$l \equiv 4\,(5)$
$\sum_{k=-l}^{l} m(3, k, \chi)$	$\frac{2}{5}l\chi(E)$ $+m(3, 0, \chi)$	$\frac{2}{5}(l-1)\,\chi(E)$ $+\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi)$	$\frac{1}{5}(2l+1)\,\chi(E)$	$\frac{2}{5}(l+2)\,\chi(E)$ $-\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi)$	$\frac{2}{5}(l+1)\,\chi(E)$ $-m(3, 0, \chi)$

Aus (2) ergeben sich zunächst die Tabellen auf Seite 38.

Somit folgt aus (1), dass $n(l,\chi)$ für alle l berechnet werden kann, sobald die fünf Grössen $\chi(E)$, $m(j,0,\chi)$, $\sum_{k=-1}^{1} m(3,k,\chi)$ bekannt sind.

Wir werden nun zeigen:

SATZ 5: (a) Die Ikosaedergruppe besitzt ausser dem Hauptcharakter χ_0 genau vier irreduzible Charaktere $\chi_1,\ldots,\chi_4$, die folgendermassen beschrieben werden können:

1. χ_1 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T\to[T]_1 : \chi_1=\sigma_1$
2. χ_2 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T\to[T]_2 : \chi_2=\sigma_2$
3. Die Darstellung $T\to[T]_3$ zerfällt in zwei irreduzible Komponenten mit den Charakteren $\chi_3, \chi_4 : \sigma_3=\chi_3+\chi_4$.

(b) Für diese Charaktere gilt folgende Tabelle:

	$\chi(E)$	$m(1,0,\chi)$	$m(2,0,\chi)$	$m(3,0,\chi)$	$\sum_{k=-1}^{1} m(3,k,\chi)$
χ_1	3	1	1	1	3
χ_2	5	3	1	1	3
χ_3	3	1	1	1	1
χ_4	4	2	2	0	2

Beweis: 0.) Für $l=0$ folgt aus (1):

$$2n(0,\chi)=\sum_{j=1}^{3} m(j,0,\chi)-\chi(E). \tag{4}$$

Die Darstellung $T\to[T]_0$ ist aber die Einsdarstellung von Γ, da $\mathscr{H}_0$ aus den konstanten Polynomen 0-ten Grades besteht. Daher ist $n(0,\chi)=0$ $\forall\chi\neq\chi_0$ und somit folgt aus (4):

$$\sum_{j=1}^{3} m(j,0,\chi)=\chi(E) \qquad \forall\chi\neq\chi_0. \tag{5}$$

1.) Für $l=1$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(1,\chi)=\sum_{k=-1}^{1} m(3,k,\chi)-m(1,0,\chi)\leqslant\chi(E). \tag{6}$$

Daher kann die Darstellung $T\to[T]_1$ keine irreduzible Komponente ersten Grades besitzen und ist deshalb wegen $\dim\mathscr{H}_1=3$ selbst irreduzibel.

Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_1, so gilt:

$$\chi_1(E)=3,\ n(1,\chi_1)=1,\ n(1,\chi)=0 \qquad \forall\chi\neq\chi_1.$$

Daraus und aus (6) ergibt sich:

$$\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi_1) = 2 + m(1, 0, \chi_1), \tag{7}$$

$$\sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi) = m(1, 0, \chi) \qquad \forall \chi \neq \chi_1 . \tag{8}$$

2.) Für $l=2$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(2, \chi) = m(1, 0, \chi) - m(2, 0, \chi) \leqslant \chi(E). \tag{9}$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T \to [T]_2$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades.

Wir zeigen überdies:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2.

Sonst muss es nämlich einen Charakter χ mit $\chi(E)=2$ und $n(2, \chi) \geqslant 1$ geben. Dann folgt aus (9) $m(1, 0, \chi)=2+m(2, 0, \chi) \geqslant 2$ und daher

$$\sum_{k \bmod 2} m^2(1, k, \chi) \geqslant 4 .$$

Ausserdem gilt

$$\sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) \geqslant \sum_{k \bmod \nu_j} m(j, k, \chi) = \chi(E) = 2 .$$

Somit wird

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{k \bmod \nu_j} m^2(j, k, \chi) \geqslant 4 + 2 + 2 .$$

Das widerspricht aber der Gleichung (3).

Wegen $\dim \mathscr{H}_2 = 5$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T \to [T]_2$ irreduzibel ist. Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_2, so gilt:

$$\chi_2(E) = 5, \qquad n(2, \chi_2) = 1, \qquad n(2, \chi) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_2 .$$

Daraus und aus (9) ergibt sich:

$$m(1, 0, \chi_2) = m(2, 0, \chi_2) + 2 \tag{10}$$

$$m(1, 0, \chi) = m(2, 0, \chi) \qquad \forall \chi \neq \chi_2 . \tag{11}$$

3.) Für $l=3$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - m(1, 0, \chi) + m(2, 0, \chi) - \sum_{k=-1}^{1} m(3, k, \chi). \tag{12}$$

Daraus und aus (7), (11) folgt $2n(3, \chi_1) = 1 - m(1, 0, \chi_1) \leqslant 1$; somit ist

$$n(3, \chi_1) = 0 \tag{13}$$

und $m(1,0,\chi_1)=1$. Daraus ergibt sich nach (11), (7) und (5) die erste Zeile unserer Tabelle.

Aus (12) und (8) folgt:

$$2n(3,\chi)=\chi(E)-2m(1,0,\chi)+m(2,0,\chi) \qquad \forall\chi\neq\chi_1\,. \tag{14}$$

Daraus folgt nach (10): $2n(3,\chi_2)=1-m(2,0,\chi_2)\leqslant 1$. Folglich ist $m(2,0,\chi_2)=1$. Daraus ergibt sich nach (10), (8) und (5) die zweite Zeile unserer Tabelle.

Aus (14) und (11) ergibt sich:

$$2n(3,\chi)=\chi(E)-m(1,0,\chi)\leqslant\chi(E) \qquad \forall\chi\neq\chi_1,\chi_2\,. \tag{15}$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T\to[T]_3$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades. Wir zeigen noch:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2. Andernfalls gäbe es einen Charakter χ mit $\chi(E)=2$ und $n(3,\chi)\geqslant 1$. Nach (15) wäre dann $m(1,0,\chi)=0$. Daraus ergäbe sich einerseits nach (11) und (5): $m(3,0,\chi)=2$, andererseits aber nach (8): $m(3,0,\chi)=0$.

Wegen $\dim\mathscr{H}_3=7$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T\to[T]_3$ entweder in zwei irreduzible Komponenten der Grade 3 und 4 zerfallen muss oder selbst irreduzibel ist. Letzteres ist aber wegen $7^2+\chi_2^2(E)>60$ unmöglich. Bezeichnen wir nun den Charakter der Komponente dritten Grades mit χ_3, denjenigen der Komponente vierten Grades mit χ_4, so gilt wegen (13)

$$\begin{aligned}&\chi_3(E)=3, \qquad n(3,\chi_3)=1, \qquad \chi_3\neq\chi_1\,,\\ &\chi_4(E)=4, \qquad n(3,\chi_4)=1\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt nach (15):

$$m(1,0,\chi_3)=1, \qquad m(1,0,\chi_4)=2\,.$$

Hieraus ergeben sich nach (11), (8) und (5) die beiden letzten Zeilen unserer Tabelle. Wegen

$$\sum_{r=0}^{4}\chi_r^2(E)=1+3^2+5^2+3^2+4^2=60$$

ist $\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_4$ das vollständige Charakterensystem der Ikosaedergruppe. Damit ist Satz 5 bewiesen.

7. Zum Schluss zeigen wir noch, dass sich aus unseren Überlegungen die Charakterentafel der Ikosaedergruppe mühelos als Nebenprodukt gewinnen lässt. Da $\vartheta(T)$ eine Klassenfunktion auf Γ ist, sind die folgenden 5 Elemente von Γ gewiss paarweise inkonjugiert:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
$\vartheta(T)$	0	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

(T_j = Erzeugende von Γ_j). (1)

Andererseits zerfällt aber Γ in genau 5 Klassen konjugierter Elemente, da es nach Satz 5 gerade 5 irreduzible Charaktere auf Γ gibt. Somit bilden die Elemente (1) ein volles Repräsentantensystem. Aus (**1**.1) ergibt sich sofort folgende Tabelle:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
σ_1	3	-1	0	$1+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}$
σ_2	5	1	-1	0	0
σ_3	7	-1	1	$-1-\varepsilon-\varepsilon^{-1}$	$-1-\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}$
σ_4	9	1	0	-1	-1

$\varepsilon=\exp(2\pi i/5)$

Nun ist aber nach Satz 5:

$$\sigma_1=\chi_1, \quad \sigma_2=\chi_2, \quad \sigma_3=\chi_3+\chi_4,$$

und man findet mit der Tabelle von Satz 5 sofort die Zerlegung $\sigma_4=\chi_2+\chi_4$. Daraus ergibt sich:

$$\chi_1=\sigma_1, \quad \chi_2=\sigma_2, \quad \chi_3=\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4, \quad \chi_4=\sigma_4-\sigma_2.$$

Somit erhalten wir folgende Charakterentafel für Γ:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
χ_1	3	-1	0	$1+\varepsilon+\varepsilon^{-1}$	$1+\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}$
χ_2	5	1	-1	0	0
χ_3	3	-1	0	$-\varepsilon-\varepsilon^{-1}$	$-\varepsilon^2-\varepsilon^{-2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1

(vergl. [2], p. 184).

LITERATUR

[1] E. W. HOBSON: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge 1931, University Press).

[2] A. SPEISER: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Basel und Stuttgart 1956, Birkhäuser).

Eingegangen den 17. April 1970.