

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen.
Autor: Huber, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34672>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Darstellung der endlichen Drehgruppen durch Kugelfunktionen

Herrn Andreas Speiser zum 85. Geburtstag von HEINZ HUBER (Basel)

1. Es sei \mathcal{H}_l der Vektorraum über \mathbf{C} der homogenen harmonischen Polynome l -ten Grades des \mathbf{R}^3 . Jede Drehung $T \in \text{SO}(3, \mathbf{R})$ induziert eine lineare Abbildung $[T]_l: \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{H}_l$, definiert durch

$$[T]_l u = u \circ T^{-1}, \quad u \in \mathcal{H}_l.$$

Es sei nun Γ eine endliche Drehgruppe des \mathbf{R}^3 . Dann ist die Abbildung

$$T \rightarrow [T]_l, \quad T \in \Gamma,$$

eine Darstellung von Γ vom Grade $\dim \mathcal{H}_l = 2l + 1$. Wir wollen die Zerlegung dieser Darstellung in irreduzible Komponenten untersuchen. Wir müssen deshalb zuerst ihre Spur

$$\sigma_l(T) = \text{Spur } [T]_l$$

berechnen. Dazu führen wir folgende Grösse ein:

$$\vartheta(T) = \text{Max}_{p \in \Sigma} \varrho(p, Tp);$$

dabei bezeichnet $\varrho(p, q)$ die sphärische Distanz der Punkte p, q auf der Einheitssphäre Σ des \mathbf{R}^3 . Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

$$\vartheta(T^{-1}) = \vartheta(T), \quad \vartheta(S^{-1}TS) = \vartheta(T) \quad \forall S, T \in \text{SO}(3, \mathbf{R}).$$

Jetzt zeigen wir:

$$\sigma_l(T^r) = \sum_{k=-l}^{+l} \exp(ikr\vartheta(T)). \quad (1)$$

Beweis: \mathcal{H}_l besitzt bekanntlich folgende ausgezeichnete Basis ([1], ch. IV):

$$\left. \begin{aligned} u_l^{(k)}(x, y, z) &= (x + iy)^k (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(|k|-k)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}(l-|k|)} \\ &\quad \times P_l^{(|k|)}(z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}), \\ &\quad -l \leq k \leq +l; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dabei ist $P_l^{(|k|)}$ die $|k|$ -te Ableitung des l -ten Legendre-Polynoms.

Sei nun $p \in \Sigma$ ein Fixpunkt von T . Dann gibt es ein $S \in \text{SO}(3, \mathbf{R})$ so, dass $Sp = (0, 0, 1)$. Setzen wir $R = STS^{-1}$, so gilt

$$R: \begin{cases} x + iy \rightarrow e^{i\alpha}(x + iy), & 0 \leq \alpha < 2\pi, \\ z \rightarrow z \end{cases} \quad (3)$$

$$\vartheta(T) = \vartheta(R) = \text{Min}(\alpha, 2\pi - \alpha). \quad (4)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich sofort

$$[R^r]_l u_l^{(k)} = u_l^{(k)} \circ R^{-r} = e^{-irk\alpha} u_l^{(k)}, \quad -l \leq k \leq +l.$$

Somit wird

$$\sigma_l(T^r) = \sigma_l(S^{-1}R^rS) = \text{Spur}[S^{-1}R^rS]_l = \text{Spur}[R^r]_l = \sum_{k=-l}^l e^{-irk\alpha}.$$

Daraus und aus (4) folgt die Behauptung (1).

Die Reduktion der Darstellung $T \rightarrow [T]_l$ von Γ ist geleistet, wenn es gelingt, für jeden irreduziblen Charakter χ von Γ den Mittelwert

$$n(l, \chi) = M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma) = \frac{1}{\text{Ord } \Gamma} \sum_{T \in \Gamma} \sigma_l(T) \overline{\chi(T)} \quad (5)$$

zu berechnen; nach der Darstellungstheorie ist $n(l, \chi) \geq 0$ ganz, und es gilt

$$\sigma_l = \sum_{\chi} n(l, \chi) \cdot \chi,$$

wobei über alle irreduziblen Charaktere von Γ zu summieren ist. Wir leiten nun eine Mittelwertformel für Klassenfunktionen auf Γ her und wenden sie nachher auf die Berechnung von (5) an.

2. Es sei $v = \text{Ord } \Gamma \geq 2$ und F die Fixpunktmenge der Gruppe Γ auf Σ . Γ wirkt als Permutationsgruppe auf F . Zwei Punkte $p, q \in F$ sollen äquivalent heißen, wenn es ein $T \in \Gamma$ gibt, sodass $q = Tp$. F zerfällt dann in h Äquivalenzklassen F_1, \dots, F_h . Wir wählen in jeder Fixpunktklasse F_j einen festen Repräsentanten p_j und definieren:

$$\Gamma_j = \{T \in \Gamma \mid Tp_j = p_j\}, \quad v_j = \text{Ord } \Gamma_j \geq 2, \quad (j = 1, \dots, h).$$

Nun ist $F_j = \{Tp_j \mid T \in \Gamma\}$, und zwar gilt $Tp_j = Sp_j$ genau dann, wenn $S^{-1}T \in \Gamma_j$. Folglich ergibt sich für die Anzahl f_j der Fixpunkte der Klasse F_j die Gleichung

$$f_j = v/v_j. \quad (1)$$

Nun beweisen wir folgenden

MITTELWERTSATZ: Für jede Klassenfunktion φ auf Γ gilt:

$$2M(\varphi, \Gamma) = \sum_{j=1}^h M(\varphi, \Gamma_j) - (h-2)\varphi(E).$$

Beweis: F enthält mit jedem Punkt p auch den Antipoden \bar{p} . Deshalb gibt es eine Zerlegung

$$F = F_0 \cup \bar{F}_0, \quad F_0 \cap \bar{F}_0 = \emptyset.$$

Setzen wir

$$\Gamma_p = \{T \in \Gamma \mid Tp = p\}, \quad \Gamma'_p = \Gamma_p - \{E\}, \quad p \in F,$$

so sind offenbar

$$\Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p, \quad \Gamma' = \bigcup_{p \in F_0} \Gamma'_p$$

zwei Zerlegungen von $\Gamma' = \Gamma - \{E\}$ in disjunkte Teilmengen. Somit wird

$$\begin{aligned} M(\varphi, \Gamma) &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T) \\ &= v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F_0} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} 2M(\varphi, \Gamma) &= 2v^{-1}\varphi(E) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T) = \\ &= v^{-1}\varphi(E) \left(2 - \sum_{j=1}^h f_j\right) + v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma'_p} \varphi(T). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nun gibt es zu jedem $p \in F_j$ ein $S \in \Gamma$, sodass $Sp = p_j$. Dann ist $\Gamma_p = S^{-1}\Gamma_j S$ und somit

$$\sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{T \in \Gamma_j} \varphi(T) = v_j M(\varphi, \Gamma_j) \quad \forall p \in F_j.$$

Daher wird

$$\sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^h \sum_{p \in F_j} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^h f_j v_j M(\varphi, \Gamma_j),$$

also wegen (1):

$$v^{-1} \sum_{p \in F} \sum_{T \in \Gamma_p} \varphi(T) = \sum_{j=1}^h M(\varphi, \Gamma_j).$$

Somit folgt aus (2):

$$2M(\varphi, \Gamma) = v^{-1}\varphi(E) \left(2 - \sum_{j=1}^h f_j\right) + \sum_{j=1}^h M(\varphi, \Gamma_j). \quad (3)$$

Wählen wir speziell $\varphi = 1$, so kommt:

$$2 = v^{-1} \left(2 - \sum_{j=1}^h f_j\right) + h. \quad (4)$$

Daraus und aus (3) ergibt sich der Mittelwertsatz.

3. Aus (2.1) und (2.4) folgt noch die Gleichung

$$2(1 - 1/v) = \sum_{j=1}^h (1 - 1/v_j). \quad (1)$$

Daraus und aus den Nebenbedingungen $2 \leq v_j \leq v$ ergibt sich sofort die wohlbekanntete Tatsache, dass nur die folgenden Fälle auftreten können:

- I: $h=2, v_1=v_2=v \geq 2$ (zyklische Gruppe)
 II: $h=3, 2=v_1 \leq v_2 \leq v_3, v_2 \leq 3$:
 1) $v_1=v_2=2, v_3=v/2, v \equiv 0 \pmod{2}$ (Diedergruppe)
 2) $v_1=2, v_2=v_3=3, v=12$ (Tetraedergruppe)
 3) $v_1=2, v_2=3, v_3=4, v=24$ (Oktaedergruppe)
 4) $v_1=2, v_2=3, v_3=5, v=60$ (Ikosaedergruppe).

4. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes können wir nun den gesuchten Mittelwert $n(l, \chi) = M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma)$ in eine aufschlussreichere Gestalt bringen:

SATZ 1: (a) Zu jedem irreduziblen Charakter χ von Γ gibt es ein System von h Funktionen auf \mathbf{Z} :

$$k \in \mathbf{Z} \rightarrow m(j, k, \chi), \quad (j = 1, \dots, h),$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^h \sum_{k=-l}^l m(j, k, \chi) - (h-2)(2l+1)\chi(E),$
- 2) $m(j, k, \chi) \geq 0$ ganz, $m(j, k, \chi) = m(j, k', \chi)$ für $k \equiv k' \pmod{v_j},$
- 3) $\sum_{k \pmod{v_j}} m(j, k, \chi) = \chi(E)$
- 4) $\sum_{j=1}^h \sum_{k \pmod{v_j}} m^2(j, k, \chi) = 2 + (h-2)\chi^2(E).$

(b) Zum Hauptcharakter χ_0 gehört insbesondere folgendes System:

$$m(j, k, \chi_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \equiv 0 \pmod{v_j}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wir wenden den Mittelwertsatz auf die Klassenfunktion $\varphi = \sigma_l \bar{\chi}$ an und erhalten

$$2n(l, \chi) = 2M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma) = \sum_{j=1}^h M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma_j) - (h-2)(2l+1)\chi(E). \quad (1)$$

Nun ist Γ_j eine zyklische Drehgruppe der Ordnung v_j ; sie besitzt daher eine Erzeugende T_j mit $\vartheta(T_j) = 2\pi/v_j$. Somit wird nach (1.1):

$$\begin{aligned} M(\sigma_l \bar{\chi}, \Gamma_j) &= v_j^{-1} \sum_{r \pmod{v_j}} \sigma_l(T_j^r) \overline{\chi(T_j^r)} = v_j^{-1} \sum_{r \pmod{v_j}} \left(\sum_{k=-l}^l \exp(kr \cdot 2\pi i/v_j) \right) \overline{\chi(T_j^r)} = \\ &= \sum_{k=-l}^l v_j^{-1} \sum_{r \pmod{v_j}} \chi(T_j^r) \exp(-kr \cdot 2\pi i/v_j). \end{aligned}$$

Somit folgt aus (1):

$$2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^h \sum_{k=-l}^l m(j, k, \chi) - (h-2)(2l+1)\chi(E) \quad (2)$$

mit

$$m(j, k, \chi) = v_j^{-1} \sum_{r \bmod v_j} \chi(T_j^r) \exp(-kr \cdot 2\pi i/v_j). \quad (3)$$

Die zyklische Gruppe Γ_j besitzt genau die folgenden v_j irreduziblen Charaktere:

$$\chi_{jk}: T_j^r \rightarrow \varepsilon_j^{kr}, \quad \varepsilon_j = \exp(2\pi i/v_j), \quad (k \bmod v_j).$$

Damit können wir (3) folgendermassen schreiben:

$$m(j, k, \chi) = M(\chi \bar{\chi}_{jk}, \Gamma_j). \quad (4)$$

Nun ist aber die Restriktion von χ auf Γ_j die Spur einer (i.a. reduziblen) Darstellung von Γ_j ; daher folgt aus (4) nach der Darstellungstheorie:

$$\begin{aligned} m(j, k, \chi) &\geq 0 \text{ ganz,} \\ \chi &= \sum_{k \bmod v_j} m(j, k, \chi) \cdot \chi_{jk} \text{ auf } \Gamma_j, \end{aligned} \quad (5)$$

also insbesondere

$$\chi(E) = \sum_{k \bmod v_j} m(j, k, \chi).$$

Weiter folgt aus (5):

$$\chi \bar{\chi} = \sum_{k, k' \bmod v_j} m(j, k, \chi) m(j, k', \chi) \chi_{jk} \bar{\chi}_{jk'} \text{ auf } \Gamma_j,$$

und somit

$$M(\chi \bar{\chi}, \Gamma_j) = \sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi). \quad (6)$$

Andererseits ist aber $M(\chi \bar{\chi}, \Gamma) = 1$. Daraus und aus (6) folgt nach dem Mittelwertsatz

$$\sum_{j=1}^h \sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi) = 2 + (h-2)\chi^2(E).$$

Endlich folgt aus (4) noch

$$m(j, k, \chi_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \equiv 0 \pmod{v_j}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Wir wollen jetzt einige unmittelbare Folgerungen aus Satz 1 besprechen. Zunächst ergibt sich sofort

SATZ 2: Für den Hauptcharakter χ_0 von Γ gilt

$$n(l, \chi_0) = 1 + \sum_{j=1}^h [l/v_j] - (h-2)l.$$

Ferner zeigen wir

SATZ 3: Es sei v_0 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von v_1, \dots, v_h . Dann gilt

$$n(l + v_0, \chi) = n(l, \chi) + 2 \frac{v_0}{v} \chi(E).$$

In der Tat folgt aus Satz 1:

$$\begin{aligned} 2n(l + v_0, \chi) - 2n(l, \chi) &= \sum_{j=1}^h 2 \frac{v_0}{v_j} \chi(E) - 2(h-2)v_0\chi(E) \\ &= 2v_0\chi(E) \left(2 - \sum_{j=1}^h (1 - 1/v_j) \right). \end{aligned}$$

Daraus und aus (3.1) folgt aber die Behauptung.

Es bezeichne nun l den kleinsten nichtnegativen Rest von $l \bmod v_0$. Dann folgt aus Satz 3:

$$n(l, \chi) = n(l, \chi) + 2 \frac{v_0}{v} \chi(E) \frac{l-l}{v_0} = \frac{2}{v} \chi(E) l + 0(1).$$

Somit haben wir

SATZ 4: Für jeden irreduziblen Charakter χ von Γ gilt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{n(l, \chi)}{l} = \frac{2}{v} \chi(E).$$

Das Überraschendste ist nun aber, dass man mit dem ersten Satz $n(l, \chi)$ tatsächlich vollständig berechnen kann, und zwar *ohne die irreduziblen Charaktere von Γ a priori zu kennen*; diese lassen sich vielmehr ebenfalls mit Hilfe von Satz 1 auffinden und beschreiben. Wir werden das im folgenden für die Ikosaedergruppe zeigen; die übrigen endlichen Drehgruppen können ganz analog behandelt werden.

6. Es sei jetzt Γ die Ikosaedergruppe. Dann gilt nach 3: $h=3$, $v_1=2$, $v_2=3$, $v_3=5$, und Satz 1 liefert folgende Aussagen:

$$2n(l, \chi) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=-l}^l m(j, k, \chi) - (2l+1)\chi(E) \quad (1)$$

$$\sum_{k \bmod 2} m(1, k, \chi) = \sum_{k \bmod 3} m(2, k, \chi) = \sum_{k \bmod 5} m(3, k, \chi) = \chi(E),$$

$$m(j, k, \chi) \geq 0 \text{ ganz,} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi) = 2 + \chi^2(E). \quad (3)$$

	$l \equiv 0(2)$	$l \equiv 1(2)$
$\sum_{k=-l}^l m(1, k, \chi)$	$l\chi(E)$ $+m(1, 0, \chi)$	$(l+1)\chi(E)$ $-m(1, 0, \chi)$

	$l \equiv 0(3)$	$l \equiv 1(3)$	$l \equiv 2(3)$
$\sum_{k=-l}^l m(2, k, \chi)$	$\frac{2}{3}l\chi(E)$ $+m(2, 0, \chi)$	$\frac{1}{3}(2l+1)\chi(E)$	$\frac{2}{3}(l+1)\chi(E)$ $-m(2, 0, \chi)$

	$l \equiv 0(5)$	$l \equiv 1(5)$	$l \equiv 2(5)$	$l \equiv 3(5)$	$l \equiv 4(5)$
$\sum_{k=-l}^l m(3, k, \chi)$	$\frac{2}{5}l\chi(E)$ $+m(3, 0, \chi)$	$\frac{2}{5}(l-1)\chi(E)$ $+ \sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi)$	$\frac{1}{5}(2l+1)\chi(E)$	$\frac{2}{5}(l+2)\chi(E)$ $- \sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi)$	$\frac{2}{5}(l+1)\chi(E)$ $-m(3, 0, \chi)$

Aus (2) ergeben sich zunächst die Tabellen auf Seite 38.

Somit folgt aus (1), dass $n(l, \chi)$ für alle l berechnet werden kann, sobald die fünf Größen $\chi(E)$, $m(j, 0, \chi)$, $\sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi)$ bekannt sind.

Wir werden nun zeigen:

SATZ 5: (a) Die Ikosaedergruppe besitzt ausser dem Hauptcharakter χ_0 genau vier irreduzible Charaktere χ_1, \dots, χ_4 , die folgendermassen beschrieben werden können:

1. χ_1 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T \rightarrow [T]_1: \chi_1 = \sigma_1$
2. χ_2 ist Charakter der irreduziblen Darstellung $T \rightarrow [T]_2: \chi_2 = \sigma_2$
3. Die Darstellung $T \rightarrow [T]_3$ zerfällt in zwei irreduzible Komponenten mit den Charakteren $\chi_3, \chi_4: \sigma_3 = \chi_3 + \chi_4$.

(b) Für diese Charaktere gilt folgende Tabelle:

	$\chi(E)$	$m(1, 0, \chi)$	$m(2, 0, \chi)$	$m(3, 0, \chi)$	$\sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi)$
χ_1	3	1	1	1	3
χ_2	5	3	1	1	3
χ_3	3	1	1	1	1
χ_4	4	2	2	0	2

Beweis: 0.) Für $l=0$ folgt aus (1):

$$2n(0, \chi) = \sum_{j=1}^3 m(j, 0, \chi) - \chi(E). \quad (4)$$

Die Darstellung $T \rightarrow [T]_0$ ist aber die Einsdarstellung von Γ , da \mathcal{H}_0 aus den konstanten Polynomen 0-ten Grades besteht. Daher ist $n(0, \chi) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_0$ und somit folgt aus (4):

$$\sum_{j=1}^3 m(j, 0, \chi) = \chi(E) \quad \forall \chi \neq \chi_0. \quad (5)$$

1.) Für $l=1$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(1, \chi) = \sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi) - m(1, 0, \chi) \leq \chi(E). \quad (6)$$

Daher kann die Darstellung $T \rightarrow [T]_1$ keine irreduzible Komponente ersten Grades besitzen und ist deshalb wegen $\dim \mathcal{H}_1 = 3$ selbst irreduzibel.

Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_1 , so gilt:

$$\chi_1(E) = 3, \quad n(1, \chi_1) = 1, \quad n(1, \chi) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_1.$$

Daraus und aus (6) ergibt sich:

$$\sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi_1) = 2 + m(1, 0, \chi_1), \quad (7)$$

$$\sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi) = m(1, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_1. \quad (8)$$

2.) Für $l=2$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(2, \chi) = m(1, 0, \chi) - m(2, 0, \chi) \leq \chi(E). \quad (9)$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T \rightarrow [T]_2$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades. Wir zeigen überdies:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2.

Sonst muss es nämlich einen Charakter χ mit $\chi(E) = 2$ und $n(2, \chi) \geq 1$ geben. Dann folgt aus (9) $m(1, 0, \chi) = 2 + m(2, 0, \chi) \geq 2$ und daher

$$\sum_{k \bmod 2} m^2(1, k, \chi) \geq 4.$$

Ausserdem gilt

$$\sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi) \geq \sum_{k \bmod v_j} m(j, k, \chi) = \chi(E) = 2.$$

Somit wird

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k \bmod v_j} m^2(j, k, \chi) \geq 4 + 2 + 2.$$

Das widerspricht aber der Gleichung (3).

Wegen $\dim \mathcal{H}_2 = 5$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T \rightarrow [T]_2$ irreduzibel ist. Bezeichnen wir ihren Charakter mit χ_2 , so gilt:

$$\chi_2(E) = 5, \quad n(2, \chi_2) = 1, \quad n(2, \chi) = 0 \quad \forall \chi \neq \chi_2.$$

Daraus und aus (9) ergibt sich:

$$m(1, 0, \chi_2) = m(2, 0, \chi_2) + 2 \quad (10)$$

$$m(1, 0, \chi) = m(2, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_2. \quad (11)$$

3.) Für $l=3$ ergibt sich aus (1), (2):

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - m(1, 0, \chi) + m(2, 0, \chi) - \sum_{k=-1}^1 m(3, k, \chi). \quad (12)$$

Daraus und aus (7), (11) folgt $2n(3, \chi_1) = 1 - m(1, 0, \chi_1) \leq 1$; somit ist

$$n(3, \chi_1) = 0 \quad (13)$$

und $m(1, 0, \chi_1) = 1$. Daraus ergibt sich nach (11), (7) und (5) die erste Zeile unserer Tabelle.

Aus (12) und (8) folgt:

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - 2m(1, 0, \chi) + m(2, 0, \chi) \quad \forall \chi \neq \chi_1. \quad (14)$$

Daraus folgt nach (10): $2n(3, \chi_2) = 1 - m(2, 0, \chi_2) \leq 1$. Folglich ist $m(2, 0, \chi_2) = 1$. Daraus ergibt sich nach (10), (8) und (5) die zweite Zeile unserer Tabelle.

Aus (14) und (11) ergibt sich:

$$2n(3, \chi) = \chi(E) - m(1, 0, \chi) \leq \chi(E) \quad \forall \chi \neq \chi_1, \chi_2. \quad (15)$$

Daraus folgt zunächst:

(a) Die Darstellung $T \rightarrow [T]_3$ besitzt keine irreduzible Komponente ersten Grades.

Wir zeigen noch:

(b) Sie besitzt auch keine irreduzible Komponente vom Grade 2. Andernfalls gäbe es einen Charakter χ mit $\chi(E) = 2$ und $n(3, \chi) \geq 1$. Nach (15) wäre dann $m(1, 0, \chi) = 0$. Daraus ergäbe sich einerseits nach (11) und (5): $m(3, 0, \chi) = 2$, andererseits aber nach (8): $m(3, 0, \chi) = 0$.

Wegen $\dim \mathcal{H}_3 = 7$ folgt jetzt aus (a) und (b), dass die Darstellung $T \rightarrow [T]_3$ entweder in zwei irreduzible Komponenten der Grade 3 und 4 zerfallen muss oder selbst irreduzibel ist. Letzteres ist aber wegen $7^2 + \chi_2^2(E) > 60$ unmöglich. Bezeichnen wir nun den Charakter der Komponente dritten Grades mit χ_3 , denjenigen der Komponente vierten Grades mit χ_4 , so gilt wegen (13)

$$\begin{aligned} \chi_3(E) &= 3, & n(3, \chi_3) &= 1, & \chi_3 &\neq \chi_1, \\ \chi_4(E) &= 4, & n(3, \chi_4) &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach (15):

$$m(1, 0, \chi_3) = 1, \quad m(1, 0, \chi_4) = 2.$$

Hieraus ergeben sich nach (11), (8) und (5) die beiden letzten Zeilen unserer Tabelle.

Wegen

$$\sum_{r=0}^4 \chi_r^2(E) = 1 + 3^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2 = 60$$

ist $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_4$ das vollständige Charakterensystem der Ikosaedergruppe. Damit ist Satz 5 bewiesen.

7. Zum Schluss zeigen wir noch, dass sich aus unseren Überlegungen die Charakterentafel der Ikosaedergruppe mühelos als Nebenprodukt gewinnen lässt. Da $\mathfrak{g}(T)$ eine Klassenfunktion auf Γ ist, sind die folgenden 5 Elemente von Γ gewiss paarweise inkonjugiert:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
$\mathfrak{J}(T)$	0	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

$(T_j = \text{Erzeugende von } \Gamma_j). \quad (1)$

Andererseits zerfällt aber Γ in genau 5 Klassen konjugierter Elemente, da es nach Satz 5 gerade 5 irreduzible Charaktere auf Γ gibt. Somit bilden die Elemente (1) ein volles Repräsentantensystem. Aus (1.1) ergibt sich sofort folgende Tabelle:

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
σ_1	3	-1	0	$1 + \varepsilon + \varepsilon^{-1}$	$1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}$
σ_2	5	1	-1	0	0
σ_3	7	-1	1	$-1 - \varepsilon - \varepsilon^{-1}$	$-1 - \varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}$
σ_4	9	1	0	-1	-1

$\varepsilon = \exp(2\pi i/5)$

Nun ist aber nach Satz 5:

$$\sigma_1 = \chi_1, \quad \sigma_2 = \chi_2, \quad \sigma_3 = \chi_3 + \chi_4,$$

und man findet mit der Tabelle von Satz 5 sofort die Zerlegung $\sigma_4 = \chi_2 + \chi_4$. Daraus ergibt sich:

$$\chi_1 = \sigma_1, \quad \chi_2 = \sigma_2, \quad \chi_3 = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4, \quad \chi_4 = \sigma_4 - \sigma_2.$$

Somit erhalten wir folgende Charakterentafel für Γ :

	E	T_1	T_2	T_3	T_3^2
χ_1	3	-1	0	$1 + \varepsilon + \varepsilon^{-1}$	$1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}$
χ_2	5	1	-1	0	0
χ_3	3	-1	0	$-\varepsilon - \varepsilon^{-1}$	$-\varepsilon^2 - \varepsilon^{-2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1

(vergl. [2], p. 184).

LITERATUR

[1] E. W. HOBSON: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge 1931, University Press).
 [2] A. SPEISER: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Basel und Stuttgart 1956, Birkhäuser).

Eingegangen den 17. April 1970.