

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1970)

**Artikel:** Eine Bemerkung zu dichten Unterräumen reeller quadratischer Räume.  
**Autor:** Gross, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34671>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eine Bemerkung zu dichten Unterräumen reeller quadratischer Räume

von H. GROSS (Zürich)

## Einleitung

In [3] zeigt Kaplansky, dass in abzählbardimensionalen Vektorräumen  $E$  mit nicht ausgearteter alternierender Form  $\Phi$  die Kodimension  $\dim E/V$  von dichten Teilräumen  $V$  ein vollständiges System „orthogonaler Invarianten“ für  $V$  bildet. Das heisst: ist  $\dim E/V_1 = \dim E/V_2$  für zwei dichte Teilräume  $V_i$  in  $E$ , dann gibt es eine Isometrie  $\varphi$  von  $E$  mit  $\varphi(V_1) = V_2$  ( $\varphi$  ist ein Isomorphismus, der die vorgelegte Form  $\Phi$  respektiert). „dicht“ bezieht sich hier auf die von  $\Phi$  in der gewohnten Weise auf  $E$  induzierte schwache linearen Topologie; die abgeschlossene Hülle eines Teilraumes  $V$  ist dabei gerade der Biorthogonalraum  $V^{\perp\perp}$ , und  $V$  ist somit genau dann dicht in  $E$ , wenn  $V^\perp = (0)$  ist (da ja  $V^{\perp\perp\perp} = V^\perp$ ).

Schwieriger als die alternierenden Formen sind die symmetrischen Formen zu behandeln. Der angegebene Satz gilt für grosse Klassen von Grundkörpern aber auch bei symmetrischen Formen [2], beispielsweise für den Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen als Grundkörper: *jede* Einbettung eines dichten Teilraumes  $V$  in  $E$  zerfällt, viz.  $E$  zerfällt in  $\dim E/V$  orthogonale Summanden  $E_i$ , derart, dass  $V = \bigoplus_i (V \cap E_i)$  und  $V \cap E_i$  dichte Hyperebene in  $E_i$  ist. Man kann dann kanonische Basen einführen &c.

Die weiter unten bewiesenen Sätze zeigen, dass viel verwickeltere Verhältnisse vorliegen, wenn der Grundkörper etwa ein Teilkörper der reellen Zahlen ist. Ist z.B.  $\Phi$  positiv definit, dann bildet die Kodimension  $\dim E/V$  eines dichten Teilraumes  $V$  kein vollständiges System orthogonaler Invarianten mehr. Ist der Grundkörper der Körper  $\mathbf{R}$  aller reellen Zahlen, dann gibt es bei definitem  $\Phi$  zur Kodimension  $\dim E/V = 2$  genau *drei* Einbettungen, die nicht durch orthogonale Automorphismen auseinander hervorgehen. Jede dieser Einbettungen zerfällt aber immer noch in der oben beschriebenen Art. Wählt man dagegen echte Teilkörper von  $\mathbf{R}$  zum Grundkörper, etwa den Körper der reellen algebraischen Zahlen oder der rationalen Zahlen, dann gibt es zur Kodimension  $\dim E/V = 2$  immer *unendlich* viele Einbettungen dichter  $V$ , die nicht durch Automorphismen auseinander hervorgehen. Unter ihnen gibt es unendlich viele ( $2^{\aleph_0}$ ), die nicht zerfallen. Zu jeder Einbettung gibt es aber wenigstens eine einfache Körpererweiterung, die die Einbettung zum Zerfall bringt. Das allgemeinste Resultat in diesem Zusammenhang lautet: Zu jeder Einbettung  $V \subset E$ ,  $V$  dicht,  $\dim E/V = 2$  über dem Grundkörper  $k \subset \mathbf{R}$  gehört eine *reelle* symmetrische Form  $\Psi_{11}X_1^2 + 2\Psi_{12}X_1X_2 + \Psi_{22}X_2^2$  in zwei Variablen  $X_1, X_2$  ( $\Psi_{ij} \in k$ ). Hat man eine weitere Einbettung  $\bar{V} \subset E$ ,  $\bar{V}$  dicht,  $\dim E/\bar{V} = 2$ , dann gibt es eine Isometrie von  $E$  die  $V$  auf  $\bar{V}$  abbildet dann und nur dann, wenn die beiden Formen  $\sum \Psi_{ij}X_iX_j$  und  $\sum \bar{\Psi}_{ij}X_iX_j$  sich

über  $k$  ineinander transformieren lassen; die Einbettung  $V \subset E$  zerfällt genau dann in der angegebenen Art, wenn die Form  $\sum \Psi_{ij} X_i X_j$  sich durch eine Variablentransformation über  $k$  auf Diagonalform bringen lässt (Sätze 3, 4). Das wird in Kap. I weiter unten bewiesen. In Kap. II wird die Voraussetzung über die Definitheit der Form fallengelassen. Dieser Fall ist viel umständlicher. Schliesslich wird in einem letzten Kapitel<sup>1)</sup> gezeigt, was für Sätze sich im Falle beliebiger endlicher Kodimension dichter  $V$  in  $E$  ergeben. Über die Zusammenhänge siehe man den Anfang von Kap. III.

Komplikationen der hier beschriebenen Art scheinen der Grund dafür zu sein, dass im „klassischen“ Fall definiter Formen über reellen Körpern eine Verallgemeinerung des bekannten Wittschen Theorems auf unendliche Dimensionen bisher noch nicht bekannt ist.

## I.0 Bezeichnungen und Voraussetzungen

Es sei  $\Phi: E \times E \rightarrow k$  eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem  $k$ -Vektorraum  $E$ . Das Paar  $(E, \Phi)$  nennen wir einen quadratischen Raum. Wie üblich schreiben wir „ $x \perp y$ “, wenn  $\Phi(x, y) = 0$  ist ( $x, y \in E$ ), ferner „ $\|x\|$ “ für das Körperelement  $\Phi(x, x)$ .

Im folgenden sei  $k$  immer ein Teilkörper des Körpers  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen mit der Eigenschaft:

*es gibt eine nur von  $k$  abhängige natürliche Zahl  $m$  derart, dass jede quadratische Form in  $m$  Variablen über  $k$  die Zahlen  $+1$  oder  $-1$  (oder beide) darstellt.*

Beispiele für solche  $k$  sind der Körper  $\mathbf{Q}$  der rationalen Zahlen mit  $m=4$ ; allgemeiner, alle reellen algebraischen Oberkörper von  $\mathbf{Q}$  mit genau einer Anordnung, wobei dann  $m \leq 4$  ist. Schliesslich auch  $\mathbf{R}$  selbst mit  $m=1$ . Die Bedeutung dieser Körper liegt hier darin, dass jeder quadratische Raum  $(E, \Phi)$  von abzählbar unendlicher (algebraischer) Dimension eine Orthogonalbasis  $(v_i)_{i \geq 1}$  mit  $\|v_i\| = \pm 1$  besitzt.  $(E, \Phi)$  ist also durch zwei „Trägheitsindices“ bis auf Isometrie vollständig charakterisiert ([3], theorem 4).

Jeder Körper mit der angegebenen Eigenschaft besitzt übrigens eine einzige Anordnung, also nur die von  $\mathbf{R}$  induzierte.

In der Folge sei durchwegs  $\dim E = \aleph_0$  und  $k$  von der angegebenen Art.

$V$  sei in den Kapiteln I, II ausnahmslos ein Teilraum der Kodimension 2 in  $E$  und dicht in  $E$ . Da wir hier keine andern Einbettungen studieren, wird kurz von Einbettungen  $V \subset E$ ,  $\bar{V} \subset \bar{E}$  die Rede sein.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Einer freundlichen Aufforderung des Referenten folgend.

<sup>2)</sup> „ $V \subset E$ “ ist eigentlich die Beschreibung eines mengentheoretischen Sachverhaltes, kann hier aber ohne ernstliche Gefahr von Verwechslungen anstelle von idiosynkratischen Hieroglyphen wie „ $\subset : V \rightarrow E$ “ zur Bezeichnung des intendierten injektiven Homomorphismus verwendet werden.

Enthält  $V$  einen unendlichdimensionalen Teilraum  $W$ , auf dem die Form verschwindet ( $W \subset W^\perp$ ), dann enthält [2] die Lösung unserer Frage. Enthält  $V$  nur endlichdimensionale Teilräume  $W$ , auf denen die Form verschwindet, dann können unsere Fragen ohne Schwierigkeiten auf den Fall reduziert werden, dass die Form auf  $V$  definit ist. Wir werden aus diesem Grunde im folgenden immer voraussetzen, dass

$$\Phi(x, x) > 0 \text{ für alle } x \neq 0 \text{ aus } V.$$

Nach der Bemerkung über die zugelassenen Grundkörper  $k$  besitzt  $V$  daher immer eine orthonormierte Basis. Ist  $(v_i)_{i \geq 1}$  irgend eine orthonormierte Basis von  $V$ , und sind  $f, g$  irgend zwei orthonormierte Vektoren, die ein algebraisches Komplement von  $V$  in  $E$  aufspannen, dann heisst die Basis  $\mathcal{B} = (v_i) \cup \{f, g\}$  von  $E$  eine Standardbasis zur Einbettung  $V \subset E$ . Unter unseren Voraussetzungen besitzt jede Einbettung  $V \subset E$  (unendlich viele) Standardbasen.

Bezüglich einer festen Standardbasis  $\mathcal{B}$  setzen wir  $\alpha_i = \Phi(v_i, f)$  und  $\beta_i = \Phi(v_i, g)$  ( $i \geq 1$ ). Die Summen  $\sum_1^\infty \alpha_i^2$ ,  $\sum_1^\infty \beta_i^2$  und  $\sum_1^\infty \alpha_i \beta_i$  können konvergent oder divergent ausfallen. Da  $V^\perp = \{0\}$  ist, kann es kein  $m$  geben, sodass die Folgen  $(\alpha_i)_{i \geq m}$ ,  $(\beta_i)_{i \geq m}$  proportional sind. Insbesondere ist daher für alle genügend grossen  $n$  immer  $D_n = (\sum_1^n \alpha_i^2) \cdot (\sum_1^n \beta_i^2) - (\sum_1^n \alpha_i \beta_i)^2 > 0$ .  $D_n$  ist monoton wachsend mit  $n$  und es ist  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n < \infty$  genau dann, wenn sowohl  $\sum_1^\infty \alpha_i^2 < \infty$  als auch  $\sum_1^\infty \beta_i^2 < \infty$  ist.

Wir behandeln die Fälle „ $D < \infty$ “ und „ $D = \infty$ “ getrennt. Zu den erstenen gehört der Fall, dass  $\Phi$  auf ganz  $E$  positiv definit ist. Dieser Fall wird weiter unten im Kap. I behandelt. Der allgemeinste Fall mit  $D < \infty$  kann ohne Mühe auf den definiten Fall reduziert werden und soll deshalb nicht besprochen werden. Kap. II behandelt den Fall „ $D = \infty$ “. Wie zu erwarten ist, hängen diese Fallunterscheidungen nicht von der gewählten Basis  $\mathcal{B}$  ab. Auf Grund der Untersuchungen in den Kap. I, II kann in Kap. III ohne Mühe der Fall beliebiger endlicher Kodimension  $\dim E/V$  erledigt werden. Die dazu neu eingeführten Bezeichnungen werden am Anfang von Kap. III erklärt.

## I.1 Die Invarianten im Falle einer definiten Form $\Phi$

Es sei  $(v_i)_{i \geq 1} \cup \{f, g\}$  eine Standardbasis einer Einbettung  $V \subset E$ .  $\alpha_i = \Phi(v_i, f)$ ,  $\beta_i = \Phi(v_i, g)$ . Wir definieren  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \alpha_i^2$ ,  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \beta_i^2$ ,  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \alpha_i \beta_i$ . Da  $\Phi$  in Kap. I positiv definit vorausgesetzt wird, folgt

$$\therefore A \leq 1, \quad B \leq 1;$$

also sind  $A$ ,  $B$ ,  $C$  Elemente von  $\mathbb{R}$  und es ist  $AB - C^2 > 0$ . Es erweist sich später als zweckmässig, folgende reelle Zahlen einzuführen:

$$\Psi_{11} = A - 1, \quad \Psi_{22} = B - 1, \quad \Psi_{12} = \Psi_{21} = C.$$

Die Tatsache, dass für jeden Vektor  $x \neq 0$  stets  $\|x\| > 0$  ist impliziert, dass  $\det(\Psi_{ij}) \geq 0$  ist: es sei nämlich  $\Psi(\xi_1, \xi_2)$  die reelle Form<sup>3)</sup>  $\Psi_{11}\xi_1^2 + 2\Psi_{12}\xi_1\xi_2 + \Psi_{22}\xi_2^2$ . Ist  $x = \xi_1 f + \xi_2 g + \sum \lambda_i v_i$  ein beliebiger Vektor aus  $E$ , so ist  $\sum_1^\infty (\lambda_i + \xi_1 \alpha_i + \xi_2 \beta_i)^2 = \|x\|^2 + \Psi(\xi_1, \xi_2)$ . Gesetzt, für  $\xi_1$  und  $\xi_2$  wäre  $\Psi(\xi_1, \xi_2) = 2\epsilon > 0$ . Man wähle  $N$  so gross, dass  $\sum_N^\infty (\xi_1 \alpha_i + \xi_2 \beta_i)^2 < \epsilon$  ausfällt; ferner setze man  $\lambda_i = 0$  ( $i \geq N$ ) und  $\lambda_i = -\xi_1 \alpha_i - \xi_2 \beta_i$  ( $1 \leq i < N$ ). Für diese Wahl der Komponenten  $\xi_i, \lambda_j$  von  $x$  müsste  $\|x\| < -\epsilon$  sein, was nicht geht. Also ist die Form  $\Psi$  nie positiv. Ist umgekehrt  $\Psi$  nie positiv, dann folgt natürlich, dass  $\|x\| \geq 0$  ist für alle  $x$ ; ist ferner  $\|x\| = 0$ , dann ist  $\sum_1^\infty (\lambda_i + \xi_1 \alpha_i + \xi_2 \beta_i)^2 = \Psi(\xi_1, \xi_2) \leq 0$ , also  $\xi_1 \alpha_i + \xi_2 \beta_i = 0$  für fast alle  $i$ . Da  $V^\perp = \{0\}$  ist, müssen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  Null sein, also muss auch  $x = 0$  sein. Wir haben also den

**SATZ 1.**  $\{\Psi_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2$ ) sei die Form einer Einbettung  $V \subset E$  bez. irgend einer Standardbasis.  $\Phi$  ist genau dann positiv definit, wenn  $\Psi$  nie positiv ist.

Wir bemerken noch, dass die Grössen  $A, B$  und  $C$  und somit die  $\Psi_{ij}$  von der Wahl der Basis  $\{v_i\}$  in  $V$  unabhängig sind. Für eine zweite orthonormierte Basis  $(\bar{v}_i)$  von  $V$  ist nämlich  $\bar{v}_i = \sum \gamma_{ij} v_j$  und daher  $\bar{\alpha}_i = \sum \gamma_{ij} \alpha_j$ , wo die Matrix  $(\gamma_{ij})$  orthogonal und zeilenfinit ist. Sie definiert daher eine orthogonale Abbildung im gewöhnlichen Hilbertschen Folgenraum und dabei bleibt die Norm  $A$  von  $(\alpha_i)_{i \geq 1}$  erhalten. Wie verhalten sich aber die Grössen  $A, B$  und  $C$ , wenn man die Basisvektoren  $f$  und  $g$  anders wählt?

Es sei  $\tilde{f} = v_{11}f + v_{12}g + \sum \zeta_i v_i$ ,  $\tilde{g} = v_{21}f + v_{22}g + \sum \mu_i v_i$ ,  $\|\tilde{f}\| = 1$ ,  $\|\tilde{g}\| = 1$ ,  $\tilde{f} \perp \tilde{g}$  und natürlich  $\det(v_{ij}) \neq 0$ . Definiert man  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  bezüglich der Standardbasis  $(v_i) \cup \{\tilde{f}, \tilde{g}\}$ , so zeigt eine kurze Rechnung, dass

$$\begin{aligned}\tilde{A} - 1 &= v_{11}^2(A - 1) + v_{12}^2(B - 1) + 2v_{11}v_{12}C \\ \tilde{B} - 1 &= v_{21}^2(A - 1) + v_{22}^2(B - 1) + 2v_{21}v_{22}C \\ \tilde{C} &= v_{11}v_{21}(A - 1) + v_{12}v_{22}(B - 1) + (v_{11}v_{22} + v_{12}v_{21})C\end{aligned}$$

So transformiert sich gerade ein symmetrischer Tensor. Führen wir noch die  $\Psi_{ij}$  ein, so erhält man einfach

$$\bar{\Psi}_{ij} = \sum v_{ir}v_{js}\Psi_{rs}, \quad \det(v_{ij}) \neq 0, \quad v_{ij} \in k. \quad (1)$$

Unsere Bemerkungen über Basiswechsel können in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

**SATZ 2.**  $V \subset E$ ,  $\bar{V} \subset \bar{E}$  seien zwei Einbettungen,  $\Psi = \{\Psi_{ij}\}$  und  $\bar{\Psi} = \{\bar{\Psi}_{ij}\}$  seien die zugehörigen (reellen) Formen, definiert bezüglich irgendwelcher Standardbasen. Falls

<sup>3)</sup> Wir sprechen oft von der Form  $\Psi$  oder auch von der Matrix  $\{\Psi_{ij}\}$  oder einfach von den Grössen  $\Psi_{ij}$  einer Einbettung. Wie Satz 3 zeigt, sind dann die Formenklassen über dem Grundkörper von solchen Formen  $\Psi$  nur noch von der Einbettung abhängig und nicht von den gewählten Basen  $\mathcal{B}$ .

es eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  gibt, dann stimmen  $\bar{\Psi}$  und  $\Psi$  bis auf eine Transformation (über dem Grundkörper  $k$ ) gemäss (1) überein.

Von diesem Satz gilt nun auch die Umkehrung. Als Vorbereitung zum Beweis benötigen wir zwei Hilfssätze.

1. HILFSSATZ. Sind die Formen  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  zweier Einbettungen  $V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  nach (1) ineinander transformierbar, dann kann man in beiden Räumen Standardbasen einführen, sodass bezüglich dieser Basen sogar  $\Psi_{ij} = \bar{\Psi}_{ij}$  gilt ( $i, j = 1, 2$ ).

*Beweis.* Es sei  $\bar{\Psi}_{ij} = \sum v_{ir} v_{js} \Psi_{rs}$  für gewisse  $v_{ij} \in k$ . Die  $\Psi_{rs}$  seien definiert bezüglich der Basis  $(v_i) \cup \{f, g\}$ . Um die neue Basis zu finden, setzen wir zunächst  $f_0 = v_{11}f + v_{12}g + \sum_1^n \xi_i v_i$ ,  $g_0 = v_{21}f + v_{22}g + \sum_1^n \mu_i v_i$ , wobei wir  $n$  und die  $\xi_i, \mu_i$  so bestimmen wollen, dass  $\|f_0\| \leq 1$ ,  $\|g_0\| \leq 1$  und  $f_0 \perp g_0$  ausfällt. Die drei Bedingungen lassen sich auf die Form bringen:

$$\sum_1^n \lambda_i^2 = \bar{A} - \varepsilon_1, \quad \sum_1^n \eta_i^2 = \bar{B} - \varepsilon_2, \quad \sum_1^n \lambda_i \eta_i = \bar{C} - \varepsilon_3 \quad (2)$$

wobei

$$\lambda_i = \xi_i + v_{11}\alpha_i + v_{12}\beta_i, \quad \eta_i = \mu_i + v_{21}\alpha_i + v_{22}\beta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sum_{n+1}^{\infty} (v_{11}\alpha_i + v_{12}\beta_i)^2, & \varepsilon_2 &= \sum_{n+1}^{\infty} (v_{21}\alpha_i + v_{22}\beta_i)^2, \\ \varepsilon_3 &= \sum_{n+1}^{\infty} (v_{11}\alpha_i + v_{12}\beta_i)(v_{21}\alpha_i + v_{22}\beta_i) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für hinreichend grosses  $n$  werden  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  beliebig klein. Also ist für genügend grosses  $n$  immer noch  $(\bar{A} - \varepsilon_1)(\bar{B} - \varepsilon_2) - (\bar{C} - \varepsilon_3)^2 > 0$ . Ferner ist  $\bar{A} - \varepsilon_1 = 1 - v_{11}^2(1 - \sum_1^n \alpha_i^2) - v_{12}^2(1 - \sum_1^n \beta_i^2) + 2v_{11}v_{12} \sum_1^n \alpha_i \beta_i$  und liegt somit im Grundkörper  $k$ ; ebenso sieht man, dass auch  $\bar{B} - \varepsilon_2$  und  $\bar{C} - \varepsilon_3$  in  $k$  liegen. Auf alle Fälle gibt es für genügend grosses  $n$  immer reelle Lösungen  $\lambda_i, \eta_i$  von (2), also nach (3) auch reelle Lösungen  $\xi_i, \mu_i$  unseres Problems. Es bleibt der Fall, dass  $k \neq \mathbb{R}$  ist. Wählt man die reellen Zahlen  $A'$  und  $B'$  nahe genug bei  $\bar{A} - \varepsilon_1$  und  $\bar{B} - \varepsilon_2$ , ferner  $A' < \bar{A} - \varepsilon_1, B' < \bar{B} - \varepsilon_2$ , dann existieren nach dem Vorangehenden jedenfalls wieder reelle Lösungen der Gleichungen (2) mit  $A', B'$  anstelle von  $\bar{A} - \varepsilon_1$  und  $\bar{B} - \varepsilon_2$  respektive. Man wähle darauf  $\lambda'_i, \eta'_i$  in  $k$  derart, dass  $\sum_1^n \lambda'^2 = A'$ ,  $\sum_1^n \mu'^2 = B'$  und  $\sum_1^n \lambda'_i \eta'_i = \bar{C} - \varepsilon_3$  ist, wobei  $A'$  und  $B'$  nahe genug bei  $A'$  und  $B'$  sind. Die  $\xi'_i$  und  $\mu'_i$ , die gemäss (3) zu  $\lambda'_i$  und  $\eta'_i$  gehören ( $1 \leq i \leq n$ ), liegen im Grundkörper und für die Vektoren  $f_0$  und  $g_0$  mit den so bestimmten Komponenten gilt  $\|f_0\| \leq 1$ ,  $\|g_0\| \leq 1$  und  $f_0 \perp g_0$ . Schliesslich wählt man im Raum  $k(f_0, g_0, v_1, \dots, v_n)^\perp \cap V$  zwei zueinander orthogonale Vektoren  $u, v$  mit  $\|u\| = 1 - \|f_0\|$ ,  $\|v\| = 1 - \|g_0\|$ . (Hier verwenden wir die Tatsache, dass positive Formen in genügend vielen Variablen über unsrern Körpern  $k$  jedes positive Körp-

element darstellen). Setzt man  $f' = f_0 + u$ ,  $g' = g_0 + v$ ,  $v'_i = v_i$  ( $i \geq 1$ ), dann ist  $(v'_i) \cup \{f', g'\}$  eine Standardbasis zur Einbettung  $V \subset E$  und es gilt  $\Psi'_{ij} = \bar{\Psi}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Q.E.D.

Bezüglich einer festen Standardbasis und für jedes natürliche  $n$  setzen wir  $A_n = \sum_1^n \alpha_i^2$ ,  $B_n = \sum_1^n \beta_i^2$ ,  $C_n = \sum_1^n \alpha_i \beta_i$ ,  $D_n = A_n B_n - C_n^2$ . Da  $V^\perp = (0)$  ist, gibt es ein  $n_0$  derart, dass  $D_n > 0$  ist für  $n \geq n_0$ .  $\xi_1, \dots, \xi_m$  seien Elemente aus  $R$ ; wir setzen  $\alpha = \sum_1^m \xi_i \alpha_i$ ,  $\beta = \sum_1^m \xi_i \beta_i$ . Für festes  $n \geq n_0$  und festes  $m \leq n$  betrachten wir die Funktion

$$\vartheta_{m,n}(\xi_1, \dots, \xi_m) = D_n^{-1}(\alpha^2 B_n - 2\alpha\beta C_n + \beta^2 A_n)$$

auf der reellen Sphäre  $S: \sum_1^m \xi_i^2 = 1$ . Dort ist immer  $\alpha^2 < A$ ,  $\beta^2 < B$  und daher  $\vartheta_{m,n}$  beschränkt. Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $\vartheta_{m,n}$  gleichmässig auf  $S$  zu  $\vartheta_{m,\infty}(\xi_1, \dots, \xi_m) = D^{-1}(\alpha^2 B - 2\alpha\beta C + \beta^2 A)$ . Wir behaupten nun:

2. HILFSSATZ. Es sei  $n \geq n_0$ ,  $n \geq m$ . Dann gilt: (i)  $\max_S \vartheta_{m,n} \leq 1$ , (ii)  $\max_S \vartheta_{n,n} = 1$ , (iii) zu jedem  $m$  existiert ein  $n$  derart, dass  $\max_S \vartheta_{m,n} < 1$ , (iv)  $\max_S \vartheta_{m,\infty} < 1$ .

*Beweis.*  $\vartheta_{m,n}$  besitzt ein Maximum auf  $S$ . Man kann daher die Lagrangesche Multiplikatorenregel auf die Funktion  $H = \vartheta_{m,n}(\xi_1, \dots, \xi_m) - \lambda(\sum_1^m \xi_i^2 - 1)$  anwenden. Die Bedingungen  $\partial H / \partial \xi_i = 0$  liefern

$$D_n \lambda \xi_i = \alpha \alpha_i B_n - (\alpha_i \beta + \alpha \beta_i) C_n + \beta \beta_i A_n \quad (1 \leq i \leq m) \quad (5)$$

Multipliziert man (5) mit  $\xi_i$  und addiert die  $m$  Gleichungen, so erhält man gerade  $\lambda = \vartheta_{m,n}$  in den Punkten  $(\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$ , in denen ein Extremum angenommen wird. Also sind die Lösungen  $\lambda$ , die (5) und der Bedingung  $\sum \xi_i^2 = 1$  genügen, die Extremwerte von  $H$  im Innern von  $\mathbb{R}^m$ . Berechnet man in diesen Punkten auch noch  $(D_n \lambda \xi_i)^2$  aus (5) und addiert die  $m$  Quadrate, so zeigt eine Rechnung, dass

$$\lambda^2 - \lambda = -D_n^{-2} G_n \quad (6)$$

wo  $G_n = \sum_{m+1}^n [\alpha \alpha_i B_n - (\alpha_i \beta + \alpha \beta_i) C_n + \beta \beta_i A_n]^2$  ist ( $G_n = 0$  im Falle  $m = n$ ). Wegen  $G_n \geq 0$  ergeben sich die Behauptungen (i) und (ii) unmittelbar aus (6); um (iii) zu beweisen zeigen wir, dass  $G_n > 0$  ist für geeignetes  $n$ . In der Tat, wäre  $G_n = 0$  für fast alle  $n$ , dann wäre

$$\alpha_i(\alpha B_n - \beta C_n) = \beta_i(\alpha C_n - \beta A_n) \quad \text{für fast alle } i. \quad (7)$$

Nun können die Koeffizienten von  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  in (7) nicht beide Null sein, denn sonst wäre  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$  da  $D_n \neq 0$  ist für hinreichend grosse  $n$ . In den Punkten, wo ein Maximum vorliegt, ist aber nicht  $\alpha = \beta = 0$ . Wir können daher aus (7) schliessen, dass die  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  proportional sind. Daraus folgt, dass  $\dim V^\perp \geq 1$  ist, was nicht geht. Damit ist gezeigt, dass sogar  $G_n > 0$  ist für alle hinreichend grossen  $n$ . (iii) ist damit auch bewiesen. Die Behauptung (iv) über die Funktion  $\vartheta_{m,\infty}$  auf  $S$  ergibt sich in analoger Weise.

## I.2 Isometrie

Es mögen jetzt zwei Einbettungen  $V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  vorliegen. Voraussetzung sei, dass es Standardbasen  $\mathcal{B} = (v_i) \cup \{f, g\}$  und  $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{v}_i) \cup \{\bar{f}, \bar{g}\}$  gibt, bezüglich derer  $\Psi_{ij} = \bar{\Psi}_{ij}$  ist ( $i, j = 1, 2$ ). Wir zeigen, dass es eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  gibt mit  $\varphi(V) = \bar{V}$ . Eine solche Isometrie  $\varphi$  ist durch schrittweises Erweitern von Isometrien zwischen endlichdimensionalen Teilräumen von  $E$  und  $\bar{E}$  zu konstruieren. Das Verfahren wurde z.B. in [1] im Detail dargestellt und soll hier nicht wiederholt werden; es führt auch hier zum Ziel, falls man das folgende Problem allgemein lösen kann:

Gegeben sei ein Vektor  $\bar{x} \in \bar{V}$  mit  $\|\bar{x}\| = 1$ . Gesucht wird ein Vektor  $x \in V$  mit  $\|x\| = 1$  derart, dass  $\Phi(x, f) = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{f})$  und  $\Phi(x, g) = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{g})$ .

Um ein solches  $x$  zu finden setzen wir – mit einem noch zu bestimmenden natürlichen  $n$  –  $x_n = \sum_1^n \xi_i v_i$  wo (für  $1 \leq i \leq n$ ):

$$\xi_i = D_n^{-1}(\bar{\alpha}B_n - \bar{\beta}C_n) + D_n^{-1}(\bar{\beta}A_n - \bar{\alpha}C_n), \bar{\alpha} = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{f}), \bar{\beta} = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{g}).$$

Man findet  $\Phi(x_n, f) = \bar{\alpha}$  und  $\Phi(x_n, g) = \bar{\beta}$  wie verlangt. Wir behaupten, dass für geeignetes  $n$  die Länge  $\|x_n\| \leq 1$  ausfällt. Es ist  $\|x_n\| = \sum_1^n \xi_i^2 = D_n^{-1}(\bar{\alpha}^2 B_n - 2\bar{\alpha}\bar{\beta}C_n + \bar{\beta}^2 A_n)$  und somit existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ . Hat der vorgelegte Vektor  $\bar{x}$  eine Darstellung  $\bar{x} = \sum_1^m \xi_i \bar{v}_i$ , so folgt nach Hilfssatz 2, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = D^{-1}(\bar{\alpha}^2 B - 2\bar{\alpha}\bar{\beta}C + \bar{\beta}^2 A) = \bar{D}^{-1}(\bar{\alpha}^2 \bar{B} - 2\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{C} + \bar{\beta}^2 \bar{A}) = \vartheta_{m, \infty}(\xi_1, \dots, \xi_m) \leq \max_S \vartheta_{m, \infty} < 1$  ist. Man findet daher ein  $x_n$  mit  $\|x_n\| < 1$ . Wählt man schliesslich im Raum  $k(f, g, x_n)^\perp \cap V$  einen Vektor  $w$  mit  $\|w\| = 1 - \|x_n\|$ , dann ist  $x = x_n + w$  ein Vektor der gesuchten Art.

Wie schon erwähnt, lässt sich jetzt eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  konstruieren mit  $\varphi(V) = \bar{V}$ . Zusammen mit Hilfssatz 1 ergibt sich die Umkehrung von Satz 2 und somit:

**SATZ 3.**  *$V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  seien zwei Einbettungen. Es gibt eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  genau dann, wenn die zugehörigen (reellen) binären Formen  $\Psi = \{\Psi_{ij}\}$  und  $\bar{\Psi} = \{\bar{\Psi}_{ij}\}$ , definiert bezüglich irgendwelcher Standardbasen, gemäss (1) über dem Grundkörper  $k$  ineinander transformierbar sind.*

## I.3 Orthogonale Zerlegungen

Wir sagen, dass eine Einbettung  $V \subset E$  zerfällt, wenn es Teileräume  $E_1$  und  $E_2$  von  $E$  gibt mit

$$E = E_1 \oplus E_2, V = (V \cap E_1) + (V \cap E_2), E_1 \perp E_2 \\ \dim [E_i / E_i \cap V] = 1, \quad E_i \cap V \text{ dicht in } E_i \quad (i = 1, 2)$$

Falls es zu  $V \subset E$  eine Standardbasis gibt, für die  $\alpha_i \beta_i = 0$  ist für alle  $i$ , dann ist  $\Psi_{12} = 0$ , und offenbar zerfällt die Einbettung. Es gilt aber allgemeiner der

**SATZ 4.** Eine Einbettung  $V \subset E$  zerfällt genau dann, wenn sich die  $\Psi_{ij}$  nach (1) so transformieren lassen, dass  $\Psi'_{12} = 0$  wird.

$V \subset E$  zerfällt also genau dann, wenn die (reelle) binäre Form  $\Psi$  sich über dem Grundkörper  $k$  auf Diagonalform transformieren lässt. In der Tat, man wähle einen Raum  $\bar{E}$  über  $k$  und definiere eine Einbettung  $\bar{V} \subset \bar{E}$  mit  $\bar{\Psi}_{11} = \bar{\Psi}'_{11}$ ,  $\bar{\Psi}_{22} = \bar{\Psi}'_{22}$  und  $\bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i = 0$  ( $i \geq 1$ ) bezüglich einer Standardbasis. (Das ist auf viele Arten möglich). Es ist dann  $\bar{\Psi}_{ij} = \bar{\Psi}'_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), und aufgrund von Satz 3 gibt es eine Isometrie  $\varphi$  zwischen  $E$  und  $\bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$ . Also zerfällt auch die Einbettung  $V \subset E$ .

Für die Anwendung nützlich ist noch der folgende

**SATZ 5.** Im Körper  $k$  sei jedes positive Element Quadrat. Eine Einbettung  $V \subset E$  mit den Invarianten  $\Psi_{ij}$  zerfällt genau dann, wenn  $\Psi_{11}$ ,  $\Psi_{22}$ ,  $\Psi_{12}$  über  $k$  linear abhängig sind.

**Beweis.** Zerfällt die Einbettung, dann gibt es nach Satz 4 eine Transformation  $(v_{ij})$  über  $k$  derart, dass  $\Psi'_{12} = \sum v_{1r} v_{2s} \Psi_{rs} = 0$  ist. Das ist eine Relation der verlangten Art. Es sei also jetzt umgekehrt  $\alpha \Psi_{11} + \beta \Psi_{22} + \gamma \Psi_{12} = 0$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $k$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ . Wegen Satz 4 bleibt der Fall, dass  $\Psi_{12} \neq 0$  ist. Ist  $\gamma = 0$ , dann ist  $\alpha \neq 0$  und  $\beta \neq 0$  und wir setzen  $v_{11} = -(-\alpha\beta)^{1/2} \beta^{-1}$ ,  $v_{12} = 1$ ,  $v_{21} = (-\alpha\beta)^{1/2} \alpha^{-1}$ ,  $v_{22} = \beta\alpha^{-1}$ . Es ist  $\det(v_{ij}) \neq 0$  und  $\Psi'_{12} = \sum v_{1r} v_{2s} \Psi_{rs} = 0$ . Wir zitieren Satz 4. Ist hingegen  $\gamma \neq 0$ , etwa  $\gamma = 1$ , dann setzen wir  $v_{11} = \sigma$ ,  $v_{12} = 1$ ,  $v_{21} = \alpha\sigma^{-1}$ ,  $v_{22} = \beta$  wobei  $\sigma$  eine von 0 verschiedene Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2\beta - x + \alpha = 0$  ist (ihre Diskriminante ist positiv, wie sich aus der linearen Abhängigkeit und  $\Psi_{11}\Psi_{22} - \Psi_{12}^2 \geq 0$  ergibt). Man überzeugt sich, dass  $\det(v_{ij}) \neq 0$  ist. Transformation mit  $(v_{ij})$  ergibt wieder  $\Psi'_{12} = 0$ . Q.E.D.

Über  $k = \mathbf{R}$  zerfällt also jede Einbettung  $V \subset E$  und es ist eine leichte Aufgabe, aus unseren Sätzen zu folgern, dass es über  $\mathbf{R}$  genau drei Einbettungen  $V \subset E$  gibt ( $E$  anisotrop), die nicht durch metrische Automorphismen auseinander hervorgehen. Sie werden repräsentiert durch  $(\Psi_{11}, \Psi_{22}, \Psi_{12}) = (0, 0, 0), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (0, -\frac{1}{2}, 0)$ .

Ist dagegen  $k \neq \mathbf{R}$ , dann kann man aufgrund von Satz 3 immer unendlich viele Einbettungen  $V \subset E$  angeben, die nicht durch metrische Automorphismen auseinander hervorgehen; zudem kann man unendlich viele unter ihnen so wählen, dass sie *nicht* zerfallen. Das folgt aus Satz 5 und der Artin-Schreierschen Charakterisierung der Körper von endlicher Codimension in algebraisch abgeschlossenen Körpern, wonach  $[\mathbf{R}:k] = 1$  oder  $[\mathbf{R}:k] \geq \aleph_0$  ist (für beliebige Teilkörper  $k \subset \mathbf{R}$ ):

Zunächst bemerken wir, dass es zu irgendwelchen Zahlen  $\Psi_{11} = A - 1$ ,  $\Psi_{22} = B - 1$  und  $\Psi_{12} = C$  eine zugehörige Einbettung gibt, sofern die notwendige Bedingung  $AB > C^2$  erfüllt ist (Schwarzsche Ungleichung und  $V^\perp = (0)$ ). Wir dürfen etwa  $A > |C|$  annehmen. Man wähle ein rationales  $\lambda$  nahe genug bei  $\sqrt{A}/\sqrt{B}$  sodass  $A - \lambda|C| > 0$  &  $B - |C|/\lambda > 0$  ist; dann wähle man in  $k$  Folgen  $(\pi_i)$ ,  $(\varrho_i)$ ,  $(\sigma_i)$  mit  $\sum_1^\infty \pi_i^2 = |C|/\lambda$ ,  $\sum_1^\infty \varrho_i^2 = A - \lambda|C|$ ,  $\sum_1^\infty \sigma_i^2 = B - |C|/\lambda$ . Erklärt man jetzt eine Basis

$\{v_i\} \cup \{f_1, f_2\}$  zur Standardbasis mit  $\alpha_{3i-2} = \varrho_i$ ,  $\alpha_{3i-1} = 0$ ,  $\alpha_{3i} = \operatorname{sgn} C \cdot \lambda \cdot \pi_i$  für  $i \geq 1$ ,  $\beta_{3i-2} = 0$ ,  $\beta_{3i-1} = \sigma_i$ ,  $\beta_{3i} = \pi_i$  ( $i \geq 1$ ), so hat die Einbettung die gewünschte Form  $\Psi_{11}$ ,  $\Psi_{22}$ ,  $\Psi_{12}$ .

Jetzt hat man im  $k$ -Vektorraum  $\mathbf{R}$  lediglich  $2^{\aleph_0}$  3-dimensionale Räume  $R_i$ , anzugeben mit  $R_i \cap R_\kappa = \{0\}$  für  $i \neq \kappa$ ; je drei linear unabhängige Vektoren  $\Psi_{11}^i$ ,  $\Psi_{22}^i$ ,  $\Psi_{12}^i \in R_i$  definieren dann eine Einbettung  $V_i \subset E_i$ , die nicht zerfällt, und Formen  $\Psi^i$ ,  $\Psi^\kappa$  mit  $i \neq \kappa$  können trivialerweise nicht ineinander transformiert werden über dem Grundkörper  $k$ . Die Wahl solcher Räume  $R_i$  ist leicht: Falls  $\dim_k \mathbf{R} = 2^{\aleph_0}$  ist, kann man eine Basis von  $\mathbf{R}$  in Trios antreten lassen. Falls  $\dim_k \mathbf{R} < 2^{\aleph_0}$  ist, dann ist  $\operatorname{card}(k) = 2^{\aleph_0}$  (da in jedem unendlichdimensionalen  $k$ -Vektorraum  $\mathbf{R}$  gilt  $\operatorname{card} \mathbf{R} = \dim \mathbf{R} \cdot \operatorname{card}(k)$ ). Man kann etwa  $\mathbf{R}$  in drei unendlichdimensionale Teilräume  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  (direkt) zerlegen; darauf wähle man  $2^{\aleph_0}$  linear unabhängige Vektoren  $\Psi_{11}^i$  in  $\mathbf{R}_1$ ,  $2^{\aleph_0}$  linear unabhängige  $\Psi_{22}^i$  in  $\mathbf{R}_2$  und  $2^{\aleph_0}$  linear unabhängige  $\Psi_{12}^i$  in  $\mathbf{R}_3$ . Damit hat man in jedem Falle  $2^{\aleph_0}$  Einbettungen gefunden, die weder zerfallen noch durch Isometrie auseinander hervorgehen. Es ist übrigens auch klar, dass es modulo Isometrie mehr als  $2^{\aleph_0}$  Einbettungen gar nicht geben kann.

## II.1 Die Invarianten im Falle $D = \infty$ .

In den Fällen, wo die Summen  $A$ ,  $B$  und  $C$  divergieren können, müssen neue Invarianten eingeführt werden. Um später die Gedankengänge nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir ein paar triviale Bemerkungen über Folgen voraus. Es seien  $(x_i)_i$ ,  $(y_i)_i$  beliebige reelle Zahlenfolgen. Wir setzen  $X_n = \sum_1^n x_i^2$ ,  $Y_n = \sum_1^n y_i^2$ ,  $Z_n = \sum_1^n x_i y_i$ ,  $D_n = X_n Y_n - Z_n^2$ . Vorausgesetzt werde: Es gibt ein  $n_0$  sodass für alle  $n \geq n_0$  die Teilfolgen  $(x_i)_{i \geq n}$ ,  $(y_i)_{i \geq n}$  linear unabhängig sind. Insbesondere ist dann

$$D_n \neq 0 \quad \text{für } n \geq n_0. \quad (1)$$

Die Folgen

$$X_n D_n^{-1}, Y_n D_n^{-1}, (X_n + Y_n + 2Z_n) D_n^{-1}, (X_n + Y_n - 2Z_n) D_n^{-1} \quad (2)$$

sind mit wachsendem  $n$  ( $n \geq n_0$ ) monoton fallend und besitzen demzufolge wohlbestimmte, nichtnegative Grenzwerte. Es konvergieren also auch die Folgen  $Z_n D_n^{-1}$ . Divergiert mindestens eine von  $X_n$  und  $Y_n$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann divergiert auch  $D_n$  mit wachsendem  $n$ .

Wir setzen  $\alpha = \sum_1^m \xi_i x_i$ ,  $\beta = \sum_1^m \xi_i y_i$  und betrachten die beiden Funktionen

$$\vartheta_{m,n}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \beta^2 \cdot \frac{X_n}{D_n} + \alpha^2 \cdot \frac{Y_n}{D_n} - 2\alpha\beta \frac{Z_n}{D_n}$$

$$\vartheta_{m,\infty}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \beta^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{D_n} + \alpha^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{D_n} - 2\alpha\beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{D_n}$$

auf der reellen Sphäre  $S: \sum_1^m \xi_i^2 = 1$ .

Nach dem Beweis von Hilfssatz 2 gilt für  $n \geq n_0$  und  $n \geq m$

$$\left. \begin{aligned} \max_S \vartheta_{m,n} &\leq 1, \quad \max_S \vartheta_{n,n} = 1, \quad \text{für jedes } m \text{ ist} \\ &\quad \text{bei allen hinreichend grossen } n, \max_S \vartheta_{m,\infty} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Schliesslich bemerken wir, dass die Grenzwerte der Folgen (2) unverändert bleiben, wenn die Folgen  $(x_i)_i, (y_i)_i$  derselben (zeilenfiniten) „orthogonalen“ Transformation unterworfen werden:  $x'_i = \sum \gamma_{ij} x_j, y'_i = \sum \gamma_{ij} y_j, \sum \gamma_{rj} \gamma_{sj} = \sum \gamma_{jr} \gamma_{js} = \delta_{rs}$  (Kronecker) und bei festem  $i$  ist  $\gamma_{ij} \neq 0$  für nur endlich viele  $j$ . Die Beweise sind Routine.

Es sei nun also wieder  $(v_i)_i \cup \{f, g\}$  eine Standardbasis einer Einbettung  $V \subset E$ ,  $\alpha_i = \Phi(v_i, f)$  und  $\beta_i = \Phi(v_i, g)$ , ferner  $A_n = \sum_1^n \alpha_i^2, B_n = \sum_1^n \beta_i^2, C_n = \sum_1^n \alpha_i \beta_i$  und  $D_n = A_n B_n - C_n^2$ . Die Unabhängigkeitsforderung (1) ist für die Folgen der  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  erfüllt. Wir können daher *definieren*:

$$X_{11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{D_n}, \quad X_{22} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{D_n}, \quad X_{12} = X_{21} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{D_n} \quad (5)$$

Die  $X_{ij}$  sind nichtnegative Elemente aus  $\mathbf{R}$ ; sie sind von der Wahl der Basis  $(v_i)$  in  $V$  unabhängig. Da  $D_n$  divergiert, ist immer

$$\det(X_{ij}) = 0 \quad (6)$$

## II.2 Isometrie ( $D = \infty$ )

Es seien jetzt zwei Einbettungen  $V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  vorgelegt, die zugehörigen  $X_{ij}$  und  $\bar{X}_{ij}$  definiert bezüglich *irgendwelcher* Standardbasen  $\mathcal{B} = (v_i) \cup \{f, g\}$  und  $\bar{\mathcal{B}} = (\bar{v}_i) \cup \{\bar{f}, \bar{g}\}$  respective. Es gilt dann der folgende

**SATZ 6:** *Es existiert eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  dann und nur dann, wenn es eine nichtsinguläre  $2 \times 2$ -Matrix  $(v_{ij})$  über  $k$  gibt, derart dass*

$$\bar{X}_{ij} = \varrho^{-1} \cdot \sum_{r,s} v_{ir} v_{js} X_{rs} \quad (7)$$

und

$$\varrho = \sum v_{1i} v_{1j} X_{ij} + \sum v_{2i} v_{2j} X_{ij} + [1 - X_{11} - X_{22}] \cdot \det(v_{ij})^2 > 0$$

**ZUSATZ.** *Gibt es eine Isometrie  $\varphi$  von der angegebenen Art, dann existiert bezüglich geeigneter Standardbasen der Grenzwert der Folge  $\bar{D}_n D_n^{-1}$  und es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{D}_n D_n^{-1} = \varrho$ ;*

ferner ist

$$\varrho(1 - X_{11} - X_{22}) = (1 - X_{11} - X_{22}) \det(v_{ij})^2$$

Insbesondere gehören also mindestens zu den vier Fällen, wo  $1 - X_{11} - X_{22}$  gleich 1, zwischen 0 und 1, gleich 0 resp. zwischen 0 und  $-\infty$  ist, verschiedene Klassen von Einbettungen.

*Beweis.* A) Es möge ein  $\varphi$  der angegebenen Art existieren. Neben den beiden Standardbasen  $\mathcal{B}$  und  $\bar{\mathcal{B}}$  betrachten wir noch die Standardbasis  $\mathcal{B}' = (\bar{v}_i) \cup \{\varphi f, \varphi g\}$  zur Einbettung  $\bar{V} \subset \bar{E}$ . Für die  $X'_{ij}$  bezüglich dieser Basis gilt natürlich  $X'_{ij} = X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Drückt man  $\mathcal{B}'$  durch  $\mathcal{B}$  aus, dann erhält man – wie in I.1 – Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_n - 1 &= v_{11}^2 (A'_n - 1) + v_{12}^2 (B'_n - 1) + 2v_{11}v_{12}C'_n \\ \bar{B}_n - 1 &= v_{21}^2 (A'_n - 1) + v_{22}^2 (B'_n - 1) + 2v_{21}v_{22}C'_n \\ \bar{C}_n &= v_{11}v_{21} (A'_n - 1) + v_{12}v_{22} (B'_n - 1) + (v_{11}v_{22} + v_{12}v_{21}) C'_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

für alle hinreichend grossen  $n$  und eine nichtsinguläre  $2 \times 2$ -Matrix  $(v_{ij})$  mit  $v_{ij} \in k$ . Also gilt (etwa für  $n \geq n_0$ )  $(\bar{A}_n - 1)(\bar{B}_n - 1) - \bar{C}_n^2 = [(A'_n - 1)(B'_n - 1) - C'_n]^2 \Delta^2$ , wobei  $\Delta = \det(v_{ij})$  ist. M.a.W.:  $\bar{D}_n - \bar{A}_n - \bar{B}_n + 1 = [D'_n - A'_n - B'_n + 1] \Delta^2$ . Drückt man  $\bar{A}_n$  und  $\bar{B}_n$  mit Hilfe von (8) durch  $A'_n$ ,  $B'_n$  und  $C'_n$  aus, so ergibt sich die Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{D}_n D'^{-1}_n$  und man findet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{D}_n D'^{-1}_n = \varrho$ , da  $X'_{ij} = X_{ij}$  ist. Betrachtet man die Abbildung  $\varphi^{-1}$ , so ergibt sich analog die Existenz von  $\lim_{n \rightarrow \infty} D'_n \bar{D}_n^{-1}$ ; daher ist  $\varrho \neq 0$ , also positiv. Dividiert man jetzt die Gleichungen (8) durch  $\bar{D}_n$  und erweitert rechts mit  $D_n$ , so erhält man für  $n \rightarrow \infty$  die Transformationsgleichungen (7). Damit ist die eine Hälfte unseres Satzes und sein Zusatz bewiesen.

B) Es mögen umgekehrt die Bedingungen (7) erfüllt sein. Wir zeigen zunächst, dass sich zur Einbettung  $V \subset E$  eine Standardbasis  $\mathcal{B}'$  so finden lässt, dass  $X'_{ij} = X_{ij}$  gilt für  $i, j = 1, 2$ . Um  $\mathcal{B}'$  zu finden setzen wir vorerst  $v'_i = v_i$  ( $i \geq 1$ ) und  $f_0 = v_{11}f + v_{12}g + \sum_1^n \xi_i v_i$ ,  $g_0 = v_{21}f + v_{22}g + \sum_1^n \eta_i v_i$ . Es sollen nun  $n$  und die  $\xi_i, \eta_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) so bestimmt werden, dass  $\|f_0\| \leq 1$ ,  $\|g_0\| \leq 1$  und  $f_0 \perp g_0$  ausfällt. Setzt man  $\lambda_i = \xi_i + \alpha_i v_{11} + \beta_i v_{12}$ ,  $\mu_i = \eta_i + \alpha_i v_{21} + \beta_i v_{22}$  ( $1 \leq i \leq n$ ), mit später noch zu bestimmenden  $n$ , so ist das genau dann der Fall, wenn gilt

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n \lambda_i^2 &\leq 1 + [v_{11}^2 (A_n - 1) + v_{12}^2 (B_n - 1) + 2v_{11}v_{12}C_n] \\ \sum_1^n \mu_i^2 &\leq 1 + [v_{21}^2 (A_n - 1) + v_{22}^2 (B_n - 1) + 2v_{21}v_{22}C_n] \\ \sum_1^n \lambda_i \mu_i &= \dots [v_{11}v_{21} (A_n - 1) + v_{12}v_{22} (B_n - 1) + (v_{11}v_{22} + v_{12}v_{21}) C_n] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dieses System lässt sich nach dem Muster von I.1 über  $k$  lösen, wenn sich zeigen lässt, dass  $U_n V_n - W_n^2 > 0$  ist für hinreichend grosses  $n$ , wo  $U_n, V_n, W_n$  der Reihe nach die

rechten Seiten der drei Ungleichungen (9) sind. Setzen wir der Bequemlichkeit halber noch  $U_n = 1 + R_n$ ,  $V_n = 1 + S_n$ , dann ist  $R_n S_n - W_n^2 = [(A_n - 1)(B_n - 1) - C_n^2] \Delta^2$ . Also  $U_n V_n - W_n^2 = (R_n S_n - W_n^2) + R_n + S_n + 1 = [(A_n - 1)(B_n - 1) - C_n^2] \Delta^2 + R_n + S_n + 1$ . Man findet daher  $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n V_n - W_n^2) D_n^{-1} = (1 - X_{11} - X_{22}) \Delta^2 + \sum v_{1i} v_{1j} X_{ij} + \sum v_{2i} v_{2j} X_{ij} = \varrho$  und  $\varrho > 0$  nach Voraussetzung. Da  $D_n$  nie negativ ist, folgt in der Tat, dass  $U_n V_n - W_n^2 > 0$  ist für alle hinreichend grossen  $n$ . Für solche  $n$  ist also das System (9) über dem Körper  $k$  lösbar und somit  $\|f_0\| < 1$ ,  $\|g_0\| < 1$  und  $f_0 \perp g_0$ . Wir wählen in  $V \cap k (f_0, g_0)^\perp$  zwei orthogonale Vektoren  $u$ ,  $v$  mit  $\|u\| = 1 - \|f_0\|$ ,  $\|v\| = 1 - \|g_0\|$  und setzen  $\mathcal{B}' = (v_i) \cup \{f_0 + u, g_0 + v\}$ . Berechnet man jetzt die  $X'_{ij}$  bezüglich  $\mathcal{B}'$ , dann gilt  $X'_{ij} = \sigma^{-1} \sum v_{ir} v_{js} X_{rs}$ , wo  $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n' D_n^{-1} = \sum v_{1i} v_{1j} X_{ij} + \sum v_{2i} v_{2j} X_{ij} + (1 - X_{11} - X_{22}) \Delta^2 = \varrho$ . Also ist in der Tat  $X'_{ij} = X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ).

C) Im letzten Teil des Beweises ist folgender Satz herzuleiten:

**SATZ:** Ist  $X_{ij} = \bar{X}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), dann existiert eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$ .

Man habe zu diesem Zwecke bereits orthonormierte  $n$ -Beine  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ ,  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subset \bar{V}$  konstruiert mit  $\Phi(x_i, f) = \bar{\Phi}(\bar{x}_i, \bar{f})$  und  $\Phi(x_i, g) = \bar{\Phi}(\bar{x}_i, \bar{g})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Die lineare Abbildung  $\varphi_n$  mit  $\varphi_n f = \bar{f}$ ,  $\varphi_n g = \bar{g}$ ,  $\varphi_n x_i = \bar{x}_i$  ist eine Isometrie. Es sei  $x \in V$  ein Vektor mit  $\|x\| = 1$ ,  $x \perp x_i$  ( $i \leq n$ ). Es soll zunächst  $\varphi_n$  isometrisch auf  $x$  erweitert werden mit  $\bar{x} = \varphi x$  in  $\bar{V}$ . Es ist also in  $\bar{V}$  ein Vektor  $\bar{x}$  zu konstruieren mit  $\|\bar{x}\| = 1$ ,  $\bar{x} \perp \bar{x}_i$  ( $i \leq n$ ) und  $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{f}) = \Phi(x, f)$ ,  $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{g}) = \Phi(x, g)$ .

$\{x_1, \dots, x_n\}$  kann zu einer orthonormierten Basis  $(x_i)_{i \geq 1}$  von  $V$  erweitert werden, und man erhält eine Standardbasis  $\mathcal{B}' = (x_i) \cup \{f, g\}$  für die Einbettung  $V \subset E$ . Entsprechend  $\bar{\mathcal{B}'} = (\bar{x}_i) \cup \{\bar{f}, \bar{g}\}$ . Es ist  $X'_{ij} = X_{ij}$ ,  $\bar{X}'_{ij} = \bar{X}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Wir setzen  $V_* = k(x_i)_{i > n}$ ,  $\bar{V}_* = k(\bar{x}_i)_{i > n}$ ,  $E_* = V_* + k(f, g)$ ,  $\bar{E}_* = \bar{V}_* + k(\bar{f}, \bar{g})$ .  $V_*$ ,  $\bar{V}_*$  sind dicht in  $E_*$  bzw.  $\bar{E}_*$ . Wir behaupten, dass für die Einbettungen  $V_* \subset E_*$ ,  $\bar{V}_* \subset \bar{E}_*$  gilt  $X_{*ij} = \bar{X}_{*ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) und beweisen die Behauptung durch Induktion nach  $n$ . Es genügt offensichtlich, den Fall  $n = 1$  zu betrachten.

Da alle unsere Grössen nicht von der in  $V$  gewählten Basis abhängig sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $x_i = v_i$  ist ( $i \geq 1$ ). Es ist dann  $X_{*11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(A_n - \alpha_1^2)[(A_n - \alpha_1^2)(B_n - \beta_1^2) - (C_n - \alpha_1 \beta_1)^2]^{-1}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \alpha_1^2) D_n^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \vartheta_{1,n}(1))^{-1} = X_{11} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \vartheta_{1,n}(1)]^{-1}$ .

Der Grenzwert von  $\vartheta_{1,n}(1)$  ist eine Funktion der  $\alpha_1, \beta_1, X_{ij}$  allein. Da nun  $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$  und  $\beta_1 = \bar{\beta}_1$  ist nach Voraussetzung, folgt aus  $X_{ij} = \bar{X}_{ij}$ , dass auch  $X_{*11} = \bar{X}_{*11}$  ist. Entsprechendes folgt für die übrigen Indexpaare. Wir bemerken noch, dass die analoge Behauptung für die  $\Psi_{ij}$  im anisotropen Fall aufgrund der Definition der  $\Psi_{ij}$  dort trivialerweise richtig ist.

Die Aufgabe, die Abbildung  $\varphi_n$  auf ganz  $V$  zu erweitern, reduziert sich nun wieder auf die in I.2 formulierte Aufgabe, und die Argumentation von I.2 kann ohne Änderung übernommen werden.

Damit ist der Beweis unseres Satzes vollständig.

### II.3 Orthogonale Zerlegungen ( $D = \infty$ )

Entsprechend zu Satz 4 hat man hier den

**SATZ 7.** Eine Einbettung  $V \subset E$  zerfällt genau dann, wenn sich die  $X_{ij}$  nach (7) so transformieren lassen, dass  $X'_{12} = 0$  wird.

Ist nämlich  $X_{12} = 0$ , dann ist wegen (6) auch  $X_{11}X_{22} = 0$ , etwa  $X_{22} = 0$ . Wir definieren eine Einbettung  $\bar{V} \subset \bar{E}$  mit  $\bar{\alpha}_{2i} = \bar{\beta}_{2i-1} = 0$  ( $i \geq 1$ ),  $\sum_1^\infty \bar{\alpha}_{2i-1}^2 = \infty$  und  $\sum_1^\infty \bar{\beta}_{2i}^2 = X_{11}^{-1}$  falls  $X_{11} \neq 0$  ist,  $\sum_1^\infty \bar{\beta}_{2i}^2 = \infty$  falls  $X_{11} = 0$  ist. In jedem Falle ist  $\bar{X}_{ij} = X_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ). Also kann man den vorangehenden Satz zitieren.

**SATZ 8.**  $V \subset E$  zerfällt genau dann, wenn  $X_{12} = 0$  oder  $X_{11}X_{12}^{-1} \in k$  ist.

*Beweis.* Sei  $X_{12} \neq 0$ , also  $X_{11}X_{22} \neq 0$  nach (6). Falls nun die Einbettung zerfällt, dann gibt es nach (7) eine Gleichung  $0 = \sum v_{1r}v_{2s}X_{rs}$ . Multiplikation mit  $X_{11}$  ergibt  $0 = (v_{11}X_{11} + v_{12}X_{12})(v_{21}X_{11} + v_{22}X_{12})$ . Ergo  $X_{11}X_{12}^{-1} \in k$ . Sei umgekehrt  $X_{11}X_{12}^{-1} = \varepsilon \in k$ . Wir setzen  $v_{11} = 1$ ,  $v_{12} = \varepsilon$ ,  $v_{21} = \lambda$ ,  $v_{22} = -\lambda\varepsilon$  mit einem noch zu bestimmenden  $\lambda \neq 0$ . Es ist  $\Delta = -2\lambda\varepsilon$ . Für den Ausdruck von  $\varrho$  findet man  $\varrho = 4[X_{11} + \lambda^2 X_{11}X_{22}^{-1} \times (1 - X_{11} - X_{22})]$ . Sollte also  $1 - X_{11} - X_{22} < 0$  sein, dann ist  $\lambda^2$  hinreichend klein zu wählen. Die Transformation  $(v_{ij})$  erfüllt dann die Bedingungen von Satz 7 und liefert  $\bar{X}_{12} = 0$ . Wegen Satz 7 ergibt sich die Behauptung.

**KOROLLAR.** In  $k$  sei jedes positive Element Quadrat. Eine Einbettung  $V \subset E$  mit der Matrix  $X_{ij}$  zerfällt genau dann, wenn  $X_{11}, X_{22}, X_{12}$  über  $k$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Zerfällt die Einbettung, dann liefert Satz 7 den Beweis. Sei also umgekehrt  $\alpha X_{11} + \beta X_{22} + \gamma X_{12} = 0$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $k$  ( $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ ). Der Fall, dass  $X_{12} = 0$  ist, wird von Satz 7 erledigt. Sei daher  $X_{12} \neq 0$ , also  $X_{11}X_{22} \neq 0$ . Weil  $X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0$  ist, folgt aus der vorausgesetzten Relation, dass  $\gamma^2 - 4\alpha\beta$  ein Quadrat ist. Andererseits ergibt Division mit  $X_{11}$ , das  $\alpha + \beta(X_{12}X_{11}^{-1})^2 + \gamma(X_{12}X_{11}^{-1}) = 0$  ist, m.a.W.,  $X_{12}X_{11}^{-1}$  ist Lösung der quadratischen Gleichung  $\alpha + \gamma\xi + \beta\xi^2 = 0$ . Da ihre Diskriminante nicht negativ ist, liegen ihre Lösungen schon in  $k$ , insbesondere ist  $X_{12}X_{11}^{-1} \in k$ . Wir sind somit im Falle des vorangehenden Satzes.

Sei nun  $k = \mathbb{R}$ . Nach dem Korollar zerfällt jede Einbettung  $V \subset E$ . In diesem Spezialfall ergeben sich daher die verschiedenen Typen möglicher Einbettungen schon aus [1]: Für jeden orthogonalen Summanden hat man nämlich 4 Möglichkeiten entsprechend den Fällen, dass die Summe  $\sum_1^\infty \alpha_i^2 < 1$ ,  $= 1$ ,  $> 1$  und  $< \infty$  oder schliesslich  $= \infty$  ausfällt. In unserem Falle, wo die Diskriminante unendlich ist, muss einer der orthogonalen Summanden eine divergente Summe haben, somit muss es nach [1] insgesamt 4 Typen geben (mit  $D = \infty$ ). Das folgt aber ohne Mühe auch aus den viel allgemeineren Transformationsgleichungen (7): Es werde vorausgesetzt, dass zwei zerfallende Einbettungen  $V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  nach (7) ineinander transformierbar

seien. Da  $X_{12} = \bar{X}_{12} = 0$  ist, können wir so numerieren, dass  $X_{22} = \bar{X}_{22} = 0$  ist. Somit müssen drei Gleichungen:  $X_{11} = \varrho^{-1} v_{11}^2 X_{11}$ ,  $0 = v_{21} X_{11}$ ,  $0 = v_{11} v_{21} X_{11}$ , erfüllt sein. Ist  $X_{11} = 0$ , dann auch  $\bar{X}_{11}$  und umgekehrt. Es sei also  $X_{11} \neq 0$  vorausgesetzt. Dann ist  $\bar{X}_{11} \neq 0$ , also  $v_{11} \neq 0$ , und  $v_{21} = 0$ . Die allgemeinste Transformation, die in Frage kommt, hat eine Matrix  $(v_{ij})$  mit  $v_{21} = 0$  und  $v_{11} v_{22} \neq 0$ . Die Bedingung für  $\varrho$  lautet dann  $\varrho = v_{11}^2 X_{11} + [1 - X_{11}] v_{11}^2 v_{22}^2 > 0$ . Ist  $X_{11} = 1$ , dann ist  $\varrho = v_{11}^2 X_{11}$  also  $\bar{X}_{11} = \varrho^{-1} v_{11}^2 X_{11} = 1$ . Ist  $X_{11} < 1$ , dann ist  $\varrho > v_{11}^2 X_{11}$ , also  $\bar{X}_{11} < 1$ . Ebenso ist  $\bar{X}_{11} > 1$  falls  $X_{11} > 1$  ist. Wählt man in den beiden letzten Fällen  $v_{22}^2 = X_{11}(1 - \bar{X}_{11}^{-1}) \bar{X}_{11} (1 - X_{11})^{-1}$ , so sieht man, dass dabei  $\varrho > 0$  ist und alle drei Gleichungen erfüllt sind. Damit haben wir die 4 Typen wieder gefunden, sie werden repräsentiert durch die Tripel  $(X_{11}, X_{22}, X_{12}) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{3}{2}, 0, 0)$ . Noch anders ausgedrückt: sie entsprechen den vier Fällen  $1 - X_{11} - X_{22}$  gleich 1, gleich 0, zwischen 0 und 1, zwischen 0 und  $-\infty$ . Die vorangehende Diskussion zeigt übrigens, dass die Klasse der Einbettungen, repräsentiert durch  $(0, 0, 0)$ , dadurch charakterisiert ist, dass die Einbettungen zerfallen bezüglich aller Paare  $f, g$ , die überhaupt ein Komplement von  $V$  in  $E$  aufspannen.

Für beliebiges  $k$  liefert die vorangehende Diskussion den folgenden

**SATZ 9.** Seien  $V \subset E$ ,  $\bar{V} \subset \bar{E}$  zwei Einbettungen mit  $X_{12} = \bar{X}_{12} = 0$  (bez. geeigneter Basen); wir numerieren so, dass  $X_{22} = \bar{X}_{22} = 0$  ist. Dann gibt es eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  genau dann wenn gilt  $X_{11} = \bar{X}_{11} = 0$  oder  $X_{11} = \bar{X}_{11} = 1$  oder  $(X_{11}^{-1} - 1) \cdot (\bar{X}_{11}^{-1} - 1)^{-1}$  ist Quadrat in  $k$ .

Fällt in einer Einbettung  $V \subset E$  die Summe  $\sum_1^\infty \alpha_i^2$  bezüglich irgend einer Standardbasis  $(v_i) \cup \{f, g\}$  endlich aus, dann ist  $X_{11} = 0$ , also  $X_{12} = 0$  und die Einbettung zerfällt bezüglich  $f, g$ . Wir wollen hier noch zeigen, dass man in diesem Fall eine Anwendung von Satz 7 umgehen kann, indem man direkt eine orthogonale Zerlegung konstruiert.

Ist  $\sum_1^\infty \alpha_i^2$  endlich (und  $\sum_1^\infty \beta_i^2$  dann divergent), dann ist es eine leichte Übung zu zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n \cdot B_n^{-1/2} = 0$  ist und somit

$$X_{22} = \left( \sum_1^\infty \alpha_i^2 \right)^{-1}.$$

Um eine orthogonale Zerfällung konstruieren zu können, ist im Wesentlichen die Lösbarkeit der folgenden Aufgabe einzusehen: Zu einem vorgelegten Vektor  $v \in V$  ist eine Zerlegung

$$v = w + v_0, \quad w \in V, \quad v_0 \in V, \quad w \perp v_0, \quad v_0 \perp f, \quad w \perp g$$

zu finden.

Wir setzen  $v_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ , wobei  $n$  und die  $\xi_i$  so zu bestimmen sind, dass

$$(i) \sum_1^n \xi_i^2 - \sum_1^n \xi_i \Phi(v_i, v) = 0, \quad (ii) \sum_1^n \xi_i \alpha_i = 0, \quad (iii) \sum_1^n \xi_i \beta_i = \Phi(v, g)$$

erfüllt sind. Wir bemerken Folgendes: ersetzt man  $w$  und  $v_0$  durch  $w-u$  und  $v_0+u$  respektive, wo  $u \in V \cap k(f, g, w, v_0)^\perp$ , dann ändert sich für die neue Zerlegung von  $v$  an den Bedingungen (ii) und (iii) nichts, während man anstelle von (i) die Bedingung  $w-u \perp v_0+u$  d.h.  $\|v_0\| - \Phi(v_0, v) + \|u\| = 0$  zu erfüllen hat. Da man Vektoren  $u$  mit beliebig vorgeschriebener Länge  $\|u\| \geq 0$  über unsren Körpern immer finden kann, so sieht man, dass es genügt,  $n$  und die  $\xi_i$  derart zu bestimmen, dass (ii), (iii) und die Bedingung

$$(i') \sum_1^n \xi_i^2 - \sum_1^n \xi_i \Phi(v_i, v) \leq 0$$

anstelle von (i) erfüllt sind. Zu diesem Ende setzen wir – mit später festzulegendem  $n$  –

$$\left. \begin{aligned} 2\xi_i &= \Phi(v, v_i) + \lambda\alpha_i + \mu\beta_i \\ \lambda &= D_n^{-1} [-B_n\Phi(v, f) - C_n\Phi(v, g)] \\ \mu &= D_n^{-1} [A_n\Phi(v, g) + C_n\Phi(v, f)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Bedingungen (ii) und (iii) sind dann erfüllt. Ferner findet man

$$\sum_1^n \xi_i^2 - \sum_1^n \xi_i \Phi(v, v_i) = \frac{1}{4} [A_n\Phi^2(v, g) + B_n\Phi^2(v, f) + 2C_n\Phi(v, f)\Phi(v, g)] D_n^{-1} - \frac{1}{4}\|v\|^2$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_1^n \xi_i^2 - \sum_1^n \xi_i \Phi(v, v_i) \right] &= \frac{1}{4} \left[ \left( \sum_1^\infty \alpha_i^2 \right)^{-1} \Phi^2(v, f) - \|v\|^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \left( \sum_1^\infty \alpha_i^2 \right)^{-1} \left[ \|v\|^2 \sum_1^\infty \alpha_i^2 - \Phi^2(v, f) \right] < 0. \end{aligned}$$

Wählt man daher  $n$  hinreichend gross, so wird durch den Ansatz (10) auch die Bedingung (i') befriedigt. Durch Wiederholung dieses Verfahrens lässt sich eine ganze Basis von  $V$  bezüglich  $f$  und  $g$  orthogonal zerlegen.

Mit dieser Methode erhält man etwas allgemeiner den folgenden

**SATZ 10.**  *$V \subset E$  sei eine Einbettung.  $V$  sei orthogonale Summe,  $V = V_0 \oplus V_1$ , derart, dass für ein algebraisches Komplement  $G$  von  $V$  in  $E$  der Raum  $V_0$  dicht ist in  $E_0 = V_0 \oplus G$  und die Einbettung  $V_0 \subset E_0$  unendliche Diskriminante besitzt. Damit  $V \subset E$  zerfällt, ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend: (i) Die Summe  $A_0 = \sum_1^\infty \alpha_i^2$  bezüglich einer geeigneten Standardbasis  $\mathcal{B}_0$  von  $V_0 \subset E_0$  ist endlich. (ii) Die Einbettung  $V_0 \subset E_0$  zerfällt.*

*Beweis.* (i) Es sei zunächst  $V_1$  unendlichdimensional vorausgesetzt, und es sei  $(w_i)_{i \geq 1}$  eine orthonormierte Basis von  $V_1$ . Sei ferner  $\mathcal{B}_0 = (v_i) \cup \{f, g\}$  die Basis der Voraussetzung. Durch geeignetes Zerlegen der Basis  $(v_i)$  in abzählbar viele unend-

liche Teilstufen  $(v_{ji})_{i \geq 1}$  kann man immer eine orthogonale Zerlegung  $V_0 = \sum_{i=1}^{\infty} V_{0j}$  erhalten mit  $V_{0j}$  dicht in  $V_{0j} + G$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi^2(v_{ji}, f) < \infty$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi^2(v_{ji}, g) = \infty$ . (Eine divergente Reihe mit positiven Gliedern kann immer in unendlich viele divergente Teilreihen zerlegt werden). M.a.W., die Einbettungen  $V_{0j} \subset V_{0j} + G$  erfüllen alle die Voraussetzung (i). Dasselbe gilt dann auch noch für die Einbettungen  $[V_{0j} \oplus (w_j)] \subset [V_{0j} \oplus (w_j)] + k(f, g)$ ,  $j \geq 1$ , welche also bezüglich  $f, g$  zerfallen. Also zerfällt auch  $V = \sum_j [V_{0j} \oplus (w_j)] \subset V + k(f, g)$ . Q.E.D.

Sollte  $V_1$  endlichdimensional sein, dann kann man analog vorgehen.

(ii). Zerfällt  $V_0 \subset E_0$ , dann ist  $\alpha_1 \beta_1 = 0$  ( $i \geq 1$ ) bezüglich einer geeigneten Standardbasis  $\mathcal{B} = (v_i) \cup \{f, g\}$ . Fällt eine der Summen  $\sum_1^{\infty} \alpha_i^2$ ,  $\sum_1^{\infty} \beta_i^2$  endlich aus, dann ist man im Falle (i). Andernfalls zerlege man  $V_0 \subset E_0$  in unendlich viele Einbettungen unendlicher Diskriminante durch Zerlegen der Basis  $(v_i)$ . Jede dieser Einbettungen zerfällt bezüglich  $f, g$ . Jetzt schliesst man wieder wie im Beweise von (i).

### III Der Fall endlicher Kodimension

Es soll jetzt der Fall dichter  $V$  von beliebiger endlicher Kodimension in  $E$  behandelt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir wieder an, dass  $\Phi$  wenigstens auf  $V$  definit ist (cf. I.0). Man stellt dabei folgendes fest:

Erstens: Wenn der Grundkörper  $k$  der Körper der reellen Zahlen ist, dann enthalten die im Falle  $\dim E/V = 2$  bewiesenen Sätze 5, 7 und 10 bereits den Fall  $\dim E/V < \infty$ . Zweitens: Ist  $k$  beliebiger Teilkörper der reellen Zahlen, dann bringt der konvergente Fall ( $D < \infty$ ) keinerlei neue Schwierigkeiten. Drittens: Dagegen bringt die Verallgemeinerung des divergenten Falles ( $D = \infty$ ) neue Schwierigkeiten. Viertens: eine *einheitliche Behandlung* ist möglich (Satz 12), aber für die Anwendungen ist die Unterscheidung der beiden Fälle  $D < \infty, = \infty$  zweckmäßig.

Es sei also im Folgenden  $\{v_i\}$  eine orthonormierte Basis von  $V$ ,  $\{f_1, \dots, f_m\}$  sei orthonormierte Basis eines algebraischen Komplementes  $F$  von  $V$  in  $E$ . Wir setzen  $\alpha_i^r = \Phi(v_i, f_r)$  und betrachten für jedes  $n$  die Gramsche  $m \times m$  Matrix  $A_n = (A_n^{rs}) = (\sum_1^n \alpha_i^r \alpha_i^s)$ . Die quadratische Form  $\theta_n(\xi) = \sum_{i,j=1}^m A_n^{ij} \xi^i \xi^j$  ist also nicht negativ; bei festen  $\xi^1, \dots, \xi^m$  und wachsendem  $n$  ist die Folge der Werte  $\theta_n(\xi)$  monoton steigend und wegen der Voraussetzung  $V^\perp = \{0\}$  ist keine Restfolge in  $\theta_n(\xi)$  konstant. Die Matrizen  $(A_n^{rs} + \xi^r \xi^s)$ ,  $(A_n^{rs} - \xi^r \xi^s)$  sind Summen bzw. Differenzen Gramscher Matrizen und für ihre Determinanten findet man<sup>4)</sup>:  $\det(A_n^{rs} \pm \xi^r \xi^s) = \det(A_n^{rs}) \pm \sum (-1)^{i+j} \Delta^{ij} \times \xi^i \xi^j$ , wo  $\Delta^{ij}$  der Minor vom Grade  $m-1$  ist, der zu  $A_n^{ij}$  gehört. Die hier auftretende

<sup>4)</sup> Das folgt etwa aus dem Determinantsatz  $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & x_n \\ y_1 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = \Delta z - \sum (-1)^{i+j} \Delta_{ij} x_i y_j$  wo  $\Delta = \det(\alpha_{ij})$  und  $\Delta_{ij}$  der Minor vom Grade  $n-1$  ist, der zu  $\alpha_{ij}$  gehört.

quadratische Form in den  $\xi$  ist natürlich ebenfalls nicht negativ, also ist  $D_n = \det(A_n^{rs})$  mit  $n$  monoton steigend; zudem ist nicht  $D_n = 0$  für alle  $n$ , sonst wäre  $V^\perp \neq (0)$ , was nicht geht. Also ist auch keine Restfolge in  $D_n$  konstant. Insbesondere existiert für genügend hohes  $n$  die Matrix  $G_n = (G_n^{rs}) = (A_n^{rs})^{-1}$ .  $G_n$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Matrix  $G = (G^{rs})$ : Mit  $(A_n^{rs})$  definiert nämlich auch  $G_n$  eine nicht negative quadratische Form, ebenso gehört zu  $S_n^{rs} = A_{n+1}^{rs} - A_n^{rs}$  eine nicht negative Form wie wir gesehen haben; es folgt daher aus der Identität  $G_n - G_{n+1} = G_{n+1} [S_n + S_n G_n S_n] G_{n+1}$ , und weil hier alle Matrizen symmetrisch sind, dass auch  $G_n - G_{n+1}$  eine nicht negative quadratische Form definiert und somit bei festen  $\xi^1, \dots, \xi^m$  für  $n \rightarrow \infty$  die Werte  $\Gamma_n(\xi) = \sum G_n^{rs} \xi^r \xi^s$  monoton abnehmen. Da daraus insbesondere auch folgt, dass die Diagonalelemente  $G_n^{rr}$  mit  $n$  monoton fallen, zeigt man durch Induktion nach  $m$  ohne Mühe, dass  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(A_n^{rs}) < \infty$  genau dann statthat, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{rs} < \infty$  für alle  $1 \leq r, s \leq m$ .

Für die Vektoren  $v \in V$  mit vorgeschriebenen Werten  $\Phi(v, f_r) = \eta_r$  findet man wieder  $\inf \|v\| = \Gamma(\eta) = \sum G^{rs} \eta_r \eta_s$ . Anderseits hat  $\Gamma(\eta)$  für  $\eta_r = \sum \xi_i \alpha_i^r$  auf der reellen Sphäre  $\sum \xi_i^2 = 1$  ein Maximum  $< 1$ . Das folgt genau gleich wie in §I.1.

### III.1 $\dim E/V < \infty, \quad D < \infty$

In diesem Falle sind die Summen  $A^{rs} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{rs}$  endlich. Wir setzen wieder  $\Psi^{rs} = A^{rs} - \delta^{rs}$  (Kronecker). Hat man zwei Räume  $E = V \oplus F$ ,  $\bar{E} = \bar{V} \oplus \bar{F}$  mit  $V^\perp = \bar{V}^\perp = (0)$  und  $\dim E/V = \dim \bar{E}/\bar{V} < \infty$ , dann seien  $\{\Psi^{rs}\}$ ,  $\{\bar{\Psi}^{rs}\}$  definiert bezüglich irgendwelcher Standardbasen zu den beiden Einbettungen. Entsprechend den Sätzen 2, 3, 4 gilt dann:

**SATZ 11.** *Es gibt eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  genau dann, wenn sich die reellen Formen  $\sum \Psi^{rs} \xi^r \xi^s$ ,  $\sum \bar{\Psi}^{rs} \xi^r \xi^s$  über dem Grundkörper  $k$  ineinander transformieren lassen. Insbesondere zerfällt eine Einbettung  $V \subset E$  genau dann, wenn sich die Form  $\Psi$  über  $k$  auf Diagonalform transformieren lässt. Falls  $k = \mathbf{R}$  ist, zerfallen also alle Einbettungen.*

**Beweis.** Die Sätze 2 und 3 lassen sich ohne Mühe übertragen, aber auch Hilfssatz 1: Sind die Formen  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  mittels der Matrix  $C$  ineinander transformierbar, so hat man wiederum einzusehen, dass für geeignete  $\xi_{iv}$  und geeignetes  $N$  die Vektoren  $f_i = \sum c_{ij} f_j - \sum_1^N \xi_{iv} v_v$  paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind. Diese Orthogonalitätsbedingungen lauten  $I = -C \mathcal{A}_N X^* - X \mathcal{A}_N^* C^* + X X^* + C C^*$  ( $\mathcal{A}_N^*$  die Transponierte der  $m \times N$  Matrix  $(\alpha_j^i) = \mathcal{A}_N$  und  $X^*$  die Transponierte der  $m \times N$  Matrix  $(\xi_{iv}) = X$ ). Die Substitution  $X = C \mathcal{A}_N - Y$  liefert die Bedingung  $Y Y^* - I = C (A_N - I) C^*$ . Da nach Voraussetzung  $\bar{A} - I = C (A - I) C^*$  ist, fällt die symmetrische Matrix  $C (A_N - I) C^* + I$  für hinreichend grosses  $N$  positiv definit aus, lässt sich somit für geeignetes  $N$  auf Diagonalform  $Y Y^*$  bringen.

### III.2. $\dim E/V < \infty, \quad D \leq \infty$

Es seien  $\mathcal{B} = \{v_i\} \cup \{f_i\}$  und  $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{v}_i\} \cup \{\bar{f}_i\}$  Standardbasen zu den Einbettungen  $V \subset E, \bar{V} \subset \bar{E}$ . Falls es eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  gibt, dann gibt es ja eine invertierbare  $m \times m$  Matrix  $C$  derart, dass bezüglich der Standardbasis  $\mathcal{B}^0 = \{\bar{v}_i\} \cup \{\varphi f_i\}$  gilt

$$\bar{A}_n^{rs} - I = C(A_n^{rs} - I) C^* \quad (n \geq n_0) \quad (1)$$

Wenn  $D = \infty$  ist, dann ist die Form  $\Psi$  von III.1 nutzlos. Aus (1) ergibt sich eine einfache Transformationsgleichung für die Matrix  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{rs}) / \det(A_n^{rs})$  (die immer existiert). Im Falle  $\dim E/V = 2$  führte dieser Trick zum Ziel wegen des einfachen Zusammenhangs von  $X$  und der Matrix  $G = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{rs})^{-1}$ , die ja bei der Konstruktion der gesuchten Isometrie explizit auftritt. Man hat daher im allgemeinen neben  $X$  auch  $G$  zu betrachten. Zunächst ist  $\tilde{G} = G$  und aus (1) folgt sofort ein Zusammenhang zwischen  $\tilde{G}$  und  $G$ :

$$G(CC^* - (CC^* - I)G^\wedge) = G^\wedge, \quad \text{wo} \quad G^\wedge = C^{*-1}GC^{-1} \quad \text{zur Abkürzung.} \quad (2)$$

Es scheint plausibel, dass im Falle  $\dim E/V = 3$  die Größen  $X$  und  $G$  die Einbettung bis auf Automorphismen vollständig festlegen, nicht aber im Falle beliebiger endlicher  $\dim E/V$ . Wenn man nämlich  $\varphi$  durch schrittweises Konstruieren definiert, wie das in I.2 geschehen ist, so müssen nach jedem Schritt die „Induktionsvoraussetzungen“ wieder erfüllt sein, insbesondere muss bei jedem Schritt  $\tilde{G} = G$  sein bezüglich der verwendeten Standardbasen. Am Schlusse von II.2 ist dieser nicht zu vernachlässigende Punkt vorgeführt. Um nun aber allgemein schliessen zu können, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{rs} - \xi^r \xi^s)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{A}_n^{rs} - \xi^r \xi^s)^{-1}$  ist, muss man Gleichheit entsprechender Limites von  $\Delta_n / \det A_n$  voraussetzen, wo  $\Delta_n$  irgend ein Minor vom Grade  $1 \leq t \leq m$  der Matrix  $A_n = (A_n^{rs})$  ist. (Diese Limites sind immer vorhanden bei hinreichend kleinen  $\xi$ ). Die Annahme solcher rechnerischer Voraussetzungen hat einen guten geometrischen Hintergrund:

Es seien  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  eine Isometrie mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  und  $\bar{\mathcal{B}}$  Bildbasis der Standardbasis  $\mathcal{B}$ . Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  kann man in  $V$  immer  $N$  paarweise orthogonale Einheitsvektoren  $w_1, \dots, w_N$  finden mit beliebig vorgeschriebenen „Winkeln“  $\Phi(w_i, f_r) = \eta_i^r, \sum_{r=1}^m (\eta_i^r)^2 < \varepsilon$ ; ebenso findet man in  $\bar{V}$  orthogonale Einheitsvektoren  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_N$  mit  $\Phi(\bar{w}_i, \bar{f}^r) = \eta_i^r$ . Es sei  $V_0$  der von den  $w_1, \dots, w_N$  aufgespannte Raum ferner  $V_1 = V_0^\perp \cap V$ . Entsprechend seien  $\bar{V}_0, \bar{V}_1$  erklärt. Die Restriktion  $\varphi|_F$  hat eine Erweiterung  $\varphi_1$  auf  $V_0 \oplus F$  mit  $\varphi_1(V_0) = \bar{V}_0$  und nach Voraussetzung natürlich die Erweiterung  $\varphi$  auf  $V \oplus F$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$ . Wir behaupten jetzt, dass  $\varphi_1$  eine Erweiterung  $\varphi_2$  auf  $V \oplus F$  besitzt mit  $\varphi_2(V_1) = \bar{V}_1$  (d.h. „man kann in  $\varphi: V_0 \oplus V_1 \oplus F \rightarrow \bar{V}_0 \oplus \bar{V}_1 \oplus (\varphi F)$  die Räume  $V_0$  und  $\bar{V}_0$  kürzen“). Zu diesem Ende konstruiert man einen metrischen Automorphismus  $\varphi_3$  von  $E$  mit den Eigenschaften  $\varphi_3|_F = \mathbf{1}_F, \varphi_3(V_0) = \varphi^{-1}(\bar{V}_0)$

und  $\varphi_3(V) = \bar{V}$ . Da die Räume  $V_0$  und  $\bar{V}_0$  endlichdimensional sind, lässt sich ein solches  $\varphi_3$  aufgrund des Wittschen Satzes in endlichen Dimensionen sofort angeben. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Durch Abändern von insgesamt endlich vielen Vektoren in  $\mathcal{B}$  kann man erreichen, dass  $w_1, \dots, w_N$  die ersten  $N$  Vektoren in  $\mathcal{B}$  sind und entsprechend in der Bildbasis  $\bar{\mathcal{B}}$ . Nach dem eben Bewiesenen über die Isometrie  $\varphi_2: V_1 \oplus F \rightarrow \bar{V}_1 \oplus \bar{F}$  folgt jetzt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{rs} - \eta_1^r \eta_1^s - \dots - \eta_N^r \eta_N^s)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{A}_n^{rs} - \eta_1^r \eta_1^s - \dots - \eta_N^r \eta_N^s)^{-1}$  ist. Aus der Gleichheit dieser Grenzwerte auf kleinen Kugeln  $\sum_{r=1}^m (\eta_t^r)^2 < \varepsilon$ , ( $1 \leq t \leq N$ ) folgt die Gleichheit der Grenzwerte für irgendwelche sinnvollen  $\eta_t^r \in \mathbb{R}$ , wenn nur  $N \geq m-1$  ist. Das ergibt sich aus dem zu Anfang von III genannten Entwicklungssatz für Determinanten.

Aufgrund dieser Vorbereitungen beweist man nun nach früherem Muster den

**SATZ 12.** *Es gibt eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  dann und nur dann, wenn es Standardbasen  $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$  gibt, bezüglich derer*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^{rs} - \xi_1^r \xi_1^s - \dots - \xi_{m-1}^r \xi_{m-1}^s)^{-1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{A}_n^{rs} - \xi_1^r \xi_1^s - \dots - \xi_{m-1}^r \xi_{m-1}^s)^{-1}, \quad m = \dim E/V = \dim \bar{E}/\bar{V}, \end{aligned}$$

für hinreichend kleine  $\xi$ .

**KOROLLAR:**  *$V \subset E$  sei eine Einbettung und  $A_n = (A_n^{rs})$  definiert bezüglich irgend einer Standardbasis. Die Einbettung zerfällt genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix  $C$  über  $k$  gibt mit der Eigenschaft: Für jede Folge  $\Delta_n$  von nicht-Hauptminoren der Matrix  $A'_n = C(A_n - I)C^* + I$ ,  $\Delta_n$  von irgend einem Grad zwischen 1 und  $m-1$ , aber für jedes  $n$  entsprechend gewählt, fällt der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / \det A_n = 0$  aus. Für hinreichend grosses  $n$  ist  $A'_n$  positiv definit.*

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass über  $\mathbb{R}$  jede Einbettung zerfällt.

**Beweis.** Sei  $C$  eine solche Matrix. Wir setzen  $f_i = \sum c_{ij} f_j + \sum_1^n \xi_{iv} v_v$  und verlangen, dass die  $f_i$  ein orthonormiertes System bilden. Wie im Beweis von Satz 11 hat man dazu ein Gleichungssystem  $YY^* = I - CC^* + CA_n C^*$  nach  $Y$  aufzulösen für ein geeignetes  $n$ ; die Voraussetzung der Korollars garantiert eine solche Lösung. Damit ist gezeigt, dass es eine Standardbasis  $\bar{\mathcal{B}}$  gibt, sodass die bezüglich  $\bar{\mathcal{B}}$  definierte Matrix  $\bar{A}_n = (\bar{A}_n^{rs})$  die im Korollar genannten Eigenschaften von  $A'_n$  besitzt. Nehmen wir nun irgend eine zerfallende Einbettung  $V'' \subset E''$  her mit  $G'' = G$ , dann kann man Satz 12 anwenden. Das ist die eine Hälfte des Korollars, die andere ist selbstverständlich.

### III.3. $\dim E/V < \infty, \quad k = \mathbb{R}$

Ist der Grundkörper der Körper der reellen Zahlen, so beweisen wir zunächst den

**SATZ 13.** *Jede Einbettung zerfällt in eine orthogonale Summe vom Typ  $\dim E/V = 1$ .*

*Beweis.*  $V \subset E$  sei vorgelegt und  $\{v_i\}$  eine orthonormierte Basis von  $V$ . Wir beweisen die Richtigkeit des Satzes zunächst in zwei Spezialfällen.

**Fall I:** Es ist  $\sum_1^\infty (v_i, f)^2 < \infty$  für alle  $f \notin V$ . Wir zitieren Satz 11.

**Fall II:** Es ist  $\sum_1^\infty (v_i, f)^2 = \infty$  für alle  $f \notin V$ . Induktion nach  $m = \dim E/V$ . Für  $m = 1$  ist die Behauptung klar; es liege also eine Einbettung mit  $\dim E/V = m + 1$  vor.  $F$  sei ein  $m$ -dimensionaler Teilraum von  $E$  mit  $F \cap V = (0)$ . Die Einbettung  $V \subset V \oplus F$  zerfalle nach Induktionsvoraussetzung,  $V \oplus F = \bigoplus^\perp [V_j \oplus (f_j)]$ ,  $V_j$  dicht in  $V_j \oplus (f_j)$ .  $f_{m+1}$  sei Einheitsvektor,  $f_{m+1} \notin V \oplus F$  und  $f_{m+1} \perp f_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Man betrachte die Einbettungen  $V_j \subset V_j \oplus (f_j, f_{m+1})$ . Sie sind entweder vom Typ  $(0, 0, 0)$  (siehe II.3) und zerfallen bezüglich  $f_j$  und  $f_{m+1}$  oder aber es gibt eine orthonormierte Basis  $\{w_i\}$  von  $V_j$  derart, dass  $\sum_1^\infty (w_i, f_{m+1})^2 < \infty$  ausfällt, und dann zerfällt die Einbettung wiederum bezüglich  $f_j$  und  $f_{m+1}$  aufgrund von Satz 10. In jedem Falle ist  $V_j = V_{j0} \oplus^\perp V_{j1}$  mit  $f_{m+1} \perp V_{j0}, f_j \perp V_{j1}$ . Setzen wir  $V_{m+1} = \sum_{j=1}^m V_{j1}$ , so ist  $E = \sum_1^{m+1} (V_j \oplus (f_j))$  die gewünschte Zerlegung in diesem Fall.

Kehren wir jetzt zum allgemeinen Fall  $V \subset E$  zurück.  $F$  sei ein beliebiges aber festes lineares Komplement von  $V$  in  $E$ . Die Menge der Vektoren  $f \in F$  mit endlicher Summe  $\sum_1^\infty (v_i, f)^2$  ist ein linearer Teilraum  $F_0$  von  $F$ .  $F_0$  ist „modulo  $V$ “ durch die Einbettung eindeutig bestimmt, und für jedes  $f \notin V \oplus F_0$  ist  $\sum_1^\infty (v_i, f)^2 = \infty$ . Sei  $F_1 = F_0^\perp \cap F$ . Wir behaupten nun: Es gibt eine Zerlegung von  $V$ ,  $V = V_0 \oplus V_1$  derart dass

$$E = (V_0 \oplus F_0) \overset{\perp}{\oplus} (V_1 \oplus F_1), \quad V_i \text{ dicht in } V_i \oplus F_i \quad (3)$$

Wegen der schon behandelten Fälle I und II ergibt sich dann aus (3) die Behauptung des Satzes unmittelbar.

Für  $\dim E/V = 1$  ist die Behauptung (3) selbstverständlich; es sei also  $\dim E/V = m + 1$ ,  $F = F_0 \oplus F_1$  eine Zerlegung eines Komplementes  $F$  von  $V$  in der beschriebenen Art. Falls  $F_0 = (0)$  oder  $F_1 = (0)$  ist, hat man trivialerweise eine Zerlegung (3), diese Fälle mögen also nicht vorliegen. Wir wählen einen Einheitsvektor  $f$  in  $V \oplus F_0$ ,  $f \notin V$  und setzen  $F_{00} = f^\perp \cap F_0$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Zerlegung vom Typ (3) für die Einbettung  $V \subset V + (F_{00} + F_1)$ ,  $V \oplus (F_{00} \oplus F_1) = (V_0 \oplus F_{00}) \oplus^\perp (V_1 \oplus F_1)$  und für  $V_1 \oplus F_1$  nach Fall II eine orthogonale Zerlegung  $V_1 \oplus F_1 = \bigoplus^\perp [V_{1j} \oplus (f_j)]$ . Man betrachtet jetzt wieder die Einbettung  $V_{1j} \subset V_{1j} \oplus (f_j, f)$ , auf die man immer Satz 10 anwenden kann. So erhält man die gewünschte Zerlegung wie im Fall II. Damit ist Satz 13 bewiesen.

*Bemerkung:* Zerlegungen von der Art (3) über Körpern  $k \neq \mathbb{R}$  sind im Allgemeinen *nicht* invariant gegenüber Körpererweiterungen. Die einfachsten Gegenbeispiele liefert der Fall  $\dim E/V = 2$ . Auf  $V + (f_1, f_2)$  definieren wir eine Form  $\Phi$  indem wir eine Basis  $\{v_i\} \cup \{f_1, f_2\}$  als Standardbasis erklären mit  $\Phi(v_i, f_1) = 1$ ,  $\Phi(v_i, f_2) = \beta_i$  wobei wir für  $\beta_i$  eine gegen ein  $\beta \in \mathbb{R} - k$  konvergente Folge in  $k$  wählen, derart, dass  $\sum_1^\infty |\beta - \beta_i|$  in  $\mathbb{R}$  endlich ausfällt. Automatisch ist dann  $V^\perp = (0)$  und man findet

$X_{11}=1, X_{12}=\beta, X_{22}=\beta^2$ . Wegen Satz 8 zerfällt die Einbettung nicht, wegen Satz 10 liegt also eine Zerlegung der Art (3) vor (mit  $F_0=(0)$ ). Über  $k(\sqrt{\beta})$  zerfällt die Einbettung; sie kann nicht vom Typ  $(0, 0, 0)$  sein, sonst wäre die ursprüngliche Einbettung ebenfalls von diesem Typ aufgrund der allgemeinen Transformationsgleichungen; das ist aber unmöglich, da sie nicht zerfällt. Über  $k(\sqrt{\beta})$  zerfällt also die Einbettung nach (3), diesmal aber mit  $\dim F_0=\dim F_1=1$ . Das Beispiel zeigt ferner, dass man auch den Beweis im Fall II von Satz 13 für  $k \neq \mathbf{R}$  nicht führen kann.

Über den im Beweise eingeführten Raum  $F_0$  lässt sich noch Folgendes bemerken. Ist  $F_0$  zu einer Einbettung  $\bar{V} \subset \bar{E}$  analog definiert, so ist für die Existenz einer Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  jedenfalls notwendig, dass es eine Isometrie  $\varphi_0: V \oplus F_0 \rightarrow \bar{V} \oplus F_0$  gibt mit  $\varphi_0(V) = \bar{V}$ . Betrachten wir jetzt eine Zerlegung der beiden Einbettungen gemäss Satz 13,  $E = \bigoplus^{\perp} [V_j \oplus (f_j)]$ ,  $\bar{E} = \bigoplus^{\perp} [\bar{V}_j \oplus (\bar{f}_j)]$ ; die  $f_j, \bar{f}_j$  mögen als Einheitsvektoren gewählt sein. Zu jedem Raum  $V_j \oplus (f_j)$  gehört eine Quadratklasse  $(s_j - 1)\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$  nämlich  $s_j = \sum_1^{\infty} \Phi(w_i f_j)^3$  wo  $w_i$  irgend eine orthonormierte Basis von  $X_j$  ist. Diese Klasse fällt mit der zur Einbettung  $V \subset V \oplus (f_j)$  gebildeten Quadratklasse zusammen (da diese ja nicht von der Wahl der orthonormierten Basis in  $V$  abhängt). Entsprechend treten Quadratklassen  $(\bar{s}_j - 1)\mathbf{R}^2$  zur Zerlegung von  $\bar{E}$  auf. Nach der Bemerkung über die Räume  $F_0, \bar{F}_0$  muss bei einer Isometrie die Summe derjenigen  $V_j \oplus (f_j)$  mit  $s_j < \infty$  auf die Summe derjenigen  $\bar{V}_j \oplus (\bar{f}_j)$  mit  $\bar{s}_j < \infty$  abgebildet werden. Bezuglich unserer Zerlegungen haben also die Formen  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  im Satz 11 zu den Einbettungen  $V \subset V \oplus F_0, \bar{V} \subset \bar{V} \oplus \bar{F}_0$  Diagonalgestalt, und aus dem Satz von Sylvester folgt daher, dass die Anzahl der  $s_j < 1$ , diejenige der  $s_j = 1$  und diejenige der  $s_j$  mit  $1 < s_j < \infty$  mit den entsprechend gebildeten Anzahlen von  $\bar{s}_j$  übereinstimmt. Wenn umgekehrt diese Anzahlen übereinstimmen, dann existiert immer ein  $\varphi$  von der gewünschten Art (Satz 2 in [1]):

**KOROLLAR:** *Es seien  $E = \bigoplus^{\perp} [V_j \oplus (f_j)]$ ,  $\bar{E} = \bigoplus^{\perp} [\bar{V}_j \oplus (\bar{f}_j)]$  irgendwelche orthogonalen Zerlegungen zweier Einbettungen  $V \subset E, \bar{V} \subset \bar{E}$  mit  $\dim E/V = \dim E/\bar{V} = m < \infty$  über dem Körper  $\mathbf{R}$ . Es existiert eine Isometrie  $\varphi: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $\varphi(V) = \bar{V}$  dann und nur dann, wenn die Quadratklassen  $(s_j - 1)\mathbf{R}^2, (\bar{s}_j - 1)\mathbf{R}^2$  bis auf die Nummerierung übereinstimmen. Insbesondere gibt es also bis auf Isometrie genau  $\binom{m+3}{m}$  Einbettungen zu  $\dim E/V = m$  wenn  $D \leq \infty$ , genau  $\binom{m+2}{m}$  Einbettungen wenn  $D < \infty$  ist und genau  $\binom{m+1}{m}$  Einbettungen bei definitem  $\Phi$ .*

Bei definitem  $\Phi$  kommen nämlich nur die Quadratklassen von  $-1$  und  $0$  in Betracht.

Es ist klar, dass man aus unseren Resultaten auch etwa Eigenschaften von divergenten Reihen ableiten kann, z.B.: Sind  $(\xi_i^1), \dots, (\xi_i^m)$  irgendwelche Folgen reeller

Zahlen mit der Eigenschaft, dass für jede Linearkombination  $(\lambda^1 \xi_i^1 + \dots + \lambda^m \xi_i^m)$  die Summe  $\sum_1^\infty (\lambda^1 \xi_i^1 + \dots + \lambda^m \xi_i^m)^2$  divergiert, dann gibt es eine zeilenfinite orthogonale Matrix  $(\alpha_{ij}) = A$  ( $AA^* = I$ ), sodass die mit ihr transformierten Folgen  $(\eta_i^1) = (\sum \alpha_{ij} \xi_j^1)$ ,  $\dots$ ,  $(\eta_i^m) = (\sum \alpha_{ij} \xi_j^m)$  paarweise senkrecht stehen,  $\eta_i^r \eta_i^s = 0$  für alle  $i$  und alle  $r \neq s$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] GROSS, H., *Über isometrische Abbildungen in abzählbar dimensionalen Räumen über reellen Körpern*, Comment. Math. Helv. 43 (1968), 348–357.
  - [2] ——— *On Witt's theorem in the denumerably infinite case*, Math. Ann. 170 (1967), 145–165.
  - [3] KAPLANSKY, I., *Forms in infinite dimensional spaces*, Ann. Acad. Bras. Ci. 22 (1950), 1–17.
- Eingegangen den 9. Juni 1969, Kapitel III im Mai 1970.