Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 45 (1970)

Artikel: Sur les actions à deux points fixes de groupes finis sur les sphères.

Autor: Sebastiani, Marcos

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34669

Sur les actions à deux points fixes de groupes finis sur les sphères

MARCOS SEBASTIANI

Quand on essaye de classifier (dupoint de vue différentiable) les actions d'un groupe fini G sur les sphères homotopiques on trouve comme premier invariant le type de difféomorphisme de l'ensemble des points fixes: deux actions équivalentes ont des ensembles de points fixes difféomorphes. Dans ce travail on aborde le probléme de la classification des actions semilibres pour lesquelles l'ensemble des points fixes est non-vide et de dimension 0. Par un théorème de P. A. Smith on sait que cet ensemble contient alors exactement deux points. Le résultat central est le théorème de finitude du § 6 et de l'appendice. On prouve que si $G=Z_2$ alors il n'existe qu'un nombre fini d'actions non-équivalentes en dimension paire $\geqslant 6$. Si G est cyclique fini d'ordre quelconque on prouve que le même ennoncé est conséquence d'une conjecture *algébrique* de C. T. C. Wall.

Les methodes de ce travail peuvent être appliqués, dans une certaine mesure, au cas où l'ensemble des points fixes est de dimension $\geqslant 1$. Voir aussi [23] où le problème de la classification est abordé dans une situation beaucoup plus générale.

Dans le § 1 on introduit les notions de α-sphère homotopique (définition 1), α étant une représentation linéaire $\alpha: G \to SO(m)$ d'un groupe fini G, et de $G-h$-cobordisme (definition 3). On prouve que les classes de $G-h$-cobordisme de α-sphéres homotopiques forment un groupe, noté $\Theta_m(\alpha)$, avec l'opération de somme connexe.

Dans le § 2 on étudie la relation entre le $G-h$-cobordisme et l'isomorphisme de α-sphères homotopiques. On prouve, en particulier, qu'il n'y a qu'un nombre fini de α-sphères homotopiques non-isomorphes et $G-h$-cobordantes à une α-sphère homotopique donnée.

Dnas le § 3 on fait une version équivariante de la construction de Pontrjagyn-Thom et on prouve que Θ_m (α) contient un sous-groupe d'indice fini $\Lambda_m(\alpha)$ avec la propriété que tout élement de $\Lambda_m(\alpha)$ est la classe d'une α-sphère homotopique M qui est le bord d'une G-variété W $\alpha-s$-parallelisable (définitions 1, 2, 3, 4).

Dans le § 4 on prouve, par une construction appropriée, qu'on peut rendre l'ensemble des points fixes de W difféomorphe à [0,1].

Dans le § 5 on introduit les modifications sphériques et on prouve que $\Lambda_m(\alpha)$ contient un sous-groupe d'indice fini $\Phi_m(\alpha)$ qui satisfait: tout élement de $\Phi_m(\alpha)$ est la classe d'une α-sphère homotopique M qui est le bord d'une G-variété $\alpha-s$-parallelisable $(n-1)$-connexe W avec $H_n(W, Z)$ fini $(n=m/2)$.

Dans le § 6 et l'appendice on applique les résultats de C. T. C. Wall [15] pour obtenir les théorèmes de finitude.

Les résultats du présent traveil ont été annoncés, en partie, dans deux notes aux C. R. Acad. Sc. Paris [Sér. A] *267* (1968), 980–982 et *268* (1969), 15–17.

Je remercie mon directeur de thèse M. René Thom par ses critiques, ses conseils et ses/orientations qui ne m'ont jamais fait défaut, même quand j'étais loin à l'étranger. Je suis heureux d'exprimer ici ma reconnaissance à M. et Mme. Thom par leur assistance morale et materielle pendant mon séjour en France durant lequel ce travail a été réalisé.

Je remercie M. H. Cartan et M. J. Cerf pour avoir accepté d'integrer le jury de cette thèse, et M. E. Brieskorn pour m'avoir donné le sujet de la deuxième thèse.

Mon ami Alfredo Jones m'a expliqué avec patience inlassable beaucoup de choses d'Algèbre dont j'avais besoin pour la réalisation de ce travail. Je lui en suis très reconnaissant.

M. C. T. C. Wall a eu l'amabilité de lire une première version de ce travail et de me donner des indications qui m'ont permis d'améliorer la présentation en divers points (en particulier, la démonstration du lemme 5 du § 1). Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie Mme. Nicole Giardino pour avoir tapé à la machine avec beaucoup de soin le manuscrit de ce travail.

Pendant la préparation de ce travail l'auteur a bénéficié de l'ambiance favorable de l'Instituto de Matemática de Montevideo et de l'IHES de Bures-sur-Yvette.

1. Définition des groupes $\Theta_n(\alpha)$

Dans tout cet article G désignera un groupe fini non-trivial et α une représentation $\alpha: G \to SO(m)$ telle que pour tout $g \in G, g \neq 1$, $\alpha(g)$ ne possède pas la valeur propre 1. (Ceci implique que m est pair [14] § 7.3.) Dans ce § 1 on supposera de plus G d'ordre impair. On considérera toujours B^m comme G-variété au moyen de α.

Sauf mention expresse du contraire le mot «variété» voudra toujours dire «variété différentiable (C^∞) compacte et orientée» et toute action de G sur une variété sera supposée différentiable et conservant l'orientation. Si M est une variété on notera ∂M son bord.

DÉFINITION 1. Une *α-sphère homotopique* est la donnée d'une sphère homotopique (au sens de [7]) M de dimension m et d'une action de G sur M qui satisfait aux propriétés suivantes:

a) Elle admet deux points fixes distincts x_1, x_0 et G opère librement dans $M - \{x_0, x_1\}$.

b) Les représentations de G qu'elle induit dans les espaces tangents à M aux points x_0 et x_1 sont équivalentes à α en tant qui représentations linéaires.

Remarque. Si G opère sur une sphère homotopique en laissant deux points fixes et librement dans le complémentaire de ces deux points, alors on a une α-sphère homotopique pour une α convenable ([1] § 3). (Voir aussi § 6.)

DÉFINITION 2. Deux α-sphères homotopiques M et N sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme de M sur N qui soit équivariant et compatible avec les orientations.

DÉFINITION 3. Deux α-sphères homotopiques M et N sont *$G-h$-cobordantes* s'il existe une variété W sur laquelle G opère et telle que son bord ∂W est réunion disjointe de deux variétés V_0 et V_1, stables par G, qui sont des rétractes par déformation de W, et qui admettent des difféomorphismes équivariants $f_0: V_0 \to M$ et $f_1: V_1 \to N$
f_0 conserve l'orientation et f_1 change l'orientation.
où Il est évident que deux α-sphères homotopiques isomorphes sont $G-h$-cobordantes.

LEMME 1. *La relation de $G-h$-*cobordisme *est une relation d'équivalence.*
La démonstration suit la même marche que dans le cas classique, compte tenu du lemme suivant relatif à l'existance d'un collier équivariante.

LEMME 2. *Soit W une variété et soit $V = \partial W$. Supposons que G opère sur W. Alors il existe un voisinage U de V dans W et un difféomorphisme $f: U \to V \times [0, 1]$ tel que $f(y) = (y, 0)$ si $y \in V$, et pour tout $x \in U$ et tout $g \in G$, $f(x) = (y, t)$ implique $f(gx) = (gy, t)$.*

Démonstration. Voir [4] theor. 21.2.

LEMME 3. *Soir M une α-sphère homotopique et soient x_0, x_1 les points fixes de M. Soient T_0 et T_1 les espaces tangents à M dans x_0 et x_1 respectivement. Alors il n'existe aucun isomorphisme linéaire équivariant de T_0 sur T_1 qui soit compatible avec les orientations.* (C'est-à-dire, les représentations induites de G dans T_0 et T_1 ne sont pas équivalentes sous $GL^+(m, R)$, groupe de matrices à determinant positif.)

Démonstration. Soient W_0, W_1 voisinages disjoints de x_0, x_1 stables par G et difféomorphes de façon équivariante à la boule B^m (sur laquelle G opère au moyen de α). Soit $V_0 = \partial W_0$ et $V_1 = \partial W_1$. Orientons V_0 et V_1 comme bords de W_0, W_1. On sait que l'adhérence W de $M - (W_0 \cup W_1)$ est un h-cobordisme entre V_0 et V_1. (Cf. [8] § 9.) Donc, W est une sphère homologique de dimension $m-1$. La suite spectrale des espaces avec un groupe fini d'opérateurs ([2] exp. 12) appliquée à V_0, V_1, W nous donne des homomorphismes *surjectifs*

$$\varphi_a: H^{m-1}(V_a, Z) \to H^m(G, Z) \quad (a = 0, 1)$$
$$\varphi: H^{m-1}(W, Z) \to H^m(G, Z)$$

et $H^m(G, Z)$ est cyclique d'ordre égal à l'ordre de G.

Soient $i_a\colon V_a \to W$ les inclusions ($a=0, 1$). Comme elles sont équivariantes il resulte de la fonctorialité de la suite spectrale le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & H^m(G, Z) \\ H^{m-1}(W, Z) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "(i_a)^*"] & H^{m-1}(V_a, Z) \arrow[u, "\varphi_a"'] \end{tikzcd} \qquad (a=0, 1)$$

Mais il est facile de prouver que si $\mu_a \in H^{m-1}(V_a, Z)$ est la classe fondamentale de V_a ($a=0, 1$) alors:

$$(i_0^*)^{-1}(\mu_0) = -(i_1^*)^{-1}(\mu_1).$$

Donc, $\varphi_0(\mu_0) = -\varphi_1(\mu_1)$. Ceci implique qu'il n'existe pas de difféomorphisme équivariante de V_0 sur V_1 qui conserve l'orientation, parce que dans ce cas on aurait aussi $\varphi_0(\mu_0) = \varphi_1(\mu_1)$, donc $2\varphi_0(\mu_0) = 0$ ce qui contredit le fait que G est d'ordre impair et $\neq 1$. Le lemme s'en suit immédiatement.

Il résulte du lemme 3 qu'on peut distinguer l'un de l'autre entre les deux points fixes d'une α-sphère homotopique.

On adoptera dorénavant la notation suivante: Si une α-sphère homotopique est representée par une lettre capitale telle que M, les deux points fixes seront designes par la minuscule correspondante m affectée des indices 0, 1, *où m_0 est le point où la representation tangente de G est équivalente à α par un isomorphisme compatible avec les orientations, en supposant R^m muni de l'orientation canonique.*

DÉFINITION 4. Soient M et N deux α-sphères homotopiques. Alors la *somme connexe* $M \# N$ est une α-sphère homotopique obtenue de la façon suivante:

On choisit deux plongements équivariants et compatibles avec les orientations:

$$f_1\colon B^m \to -M \quad \text{et} \quad f_2\colon B^m \to N$$

(le lemme 3 donne $f_1(0) = m_1$ et $f_2(0) = n_0$). On considère la somme disjointe

$$(M - m_1) + (N - n_0)$$

et on prend le quotient par l'identification de $f_1(tu)$ avec $f_2((1-t)\,u)$ pour tout $u \in S^{m-1}$ et tout t, $0 < t < 1$.

On doit prouver que cette opération est bien définie. Ceci résulte du lemme suivant.

LEMME 4. *Soit X une variété sans bord laquelle G opère. Supposons que $x_0 \in X$ est un point fixe et qu'il existe deux plongements équivariants $f, g\colon B^m \to X$ compatibles avec les orientations tels que $f(0) = g(0) = x_0$. Alors il existe un difféomorphisme équivariant h de X sur X qui conserve l'orientation tel que $h \circ f = g$.*

La démonstration est analogue à celle du lemme de Palais-Cerf dans [10] et [11]. Il suffit d'utiliser le lemme suivant.

LEMME 5. *Soit*

$$H = \{x \in GL(m, R) \mid x\alpha(g) = \alpha(g)\, x \quad \textit{pour tout} \quad g \in G\}.$$

Alors H est un sous-groupe connexe de $GL(m, R)$.

Démonstration. En décomposant R^m en ses composantes irréductibles on peut écrire $R^m = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ comme $R[G]$-module, où chaque W_i est somme de composantes irréductibles isomorphes et W_i, W_j ne contiennent pas de composantes irréductibles isomorphes pour $i \neq j$. Alors $\mathrm{Hom}_G(W_i, W_j) = 0$ pour $i \neq j$ par le lemme de Schur et donc

$$\mathrm{End}_G(R^m) = \mathrm{End}_G(W_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}_G(W_k)$$

Alors

$$H = U(\mathrm{End}_G(W_1)) \times \cdots \times U(\mathrm{End}_G(W_k))$$

où U indique le groupe des unités de l'algèbre. Il suffit donc, pour prouver le lemme, de prouver que $U(\mathrm{End}_G(W))$ est connexe si $W = V \otimes \overset{r}{\cdots} \otimes V$ où V est un $R[G]$-module irréductible tel que G opère librement sur $V - \{0\}$.

De nouveau par le lemme de Schur on sait que $\mathrm{End}_G(V)$ est un corps gauche K où $K = R$, C où H. Alors $U(\mathrm{End}(W)) = GL(r, K)$. I. suffira donc de prouver que $K \neq R$.

Comme G est d'ordre impair on sait qu'il est métacyclique; c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe cyclique normal G_0 tel que G/G_0 est cyclique. Soit g_0 un générateur de G_0 et g_1 un générateur de G modulo G_0. Soit G_1 le sous-groupe de G engendré par g_1.

Soit $V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_s$ la décomposition de V en facteurs irréductibles sur $R[G_0]$, en regroupant les composantes isomorphes. G_1 opère de façon transitive sur $\{V_0, \ldots, V_s\}$ et on peut supposer $g_1^i(V_0) = V_i$. L'endomorphisme $f\colon V \to V$ défini par $f \mid V_i = g_1^i\, g_0\, g_1^{-i}$ est un G-endomorphisme et donc $\mathrm{End}_G(V) \neq R$ parce qu'il contient f qui n'est pas la multiplication par un scalaire.

LEMME 6. *Si M, M', N, N', sont des α-sphères homotopiques, M $G-h$*-cobordante *avec M' et N $G-h$-cobordante avec N', alors $M \# N$ est $G-h$-cobordante avec $M' \# N'$.*

La démonstration est analogue à celle de [7] compte tenu du lemme suivant.

LEMME 7. *Soit W un $G-h$-cobordisme entre deux α-sphères homotopiques M et N. Alors l'ensemble F des points fixes de G dans W est la réunion disjointe de deux sous-*

variétés F_0 et F_1 *difféormorphes à* $[0, 1]$ *telles que* $\partial F_0 = \{m_0, n_0\}$ *et* $\partial F_1 = \{m_1, n_1\}$ *et* G *opère librement dans le complémentaire de* F.

Démonstration. Evidemment F est une sous-variété fermée de W et $\partial F \subset \partial W$. Soit $g \in G$ d'ordre premier $p \neq 1$. Alors, comme W est une sphère cohomologique de dimension m, $H^0(F_g, Z_p) = Z_p$ ou $H^0(F_g, Z_p) = Z_p \oplus Z_p$ $(F_g = \{x \in W \mid gx = x\})$. ([16] chap. III § 4.)

Dans le premier cas F_g serait connexe ce qui est impossible parce que $\{m_0, m_1, n_0, n_1\} \subset F_g$. Donc, F_g possède deux composantes connexes F_0 et F_1, et $\dim(F_0) = \dim(F_1) = 1$. G opère sur la variété topologique W' obtenue de W en identifiant M à un point a et N à un point b. Il est facile à voir, puisque $W - (M \cup N)$ s'applique homéomorphiquement sur $W' - \{a, b\}$, que W' est une sphère cohomologique sur Z_p de dimension $m+1$. Donc l'ensemble de points fixes pour g dans W', qui est l'image de F_g, est aussi une sphère cohomologique sur Z_p. Supposons $\partial F_0 = \{m_0, m_1\}$. Alors $\partial F_1 = \{n_0, n_1\}$ et l'image de F dans W' serait la réunion disjointe de deux cercles, ce qui ne peut pas être une sphère cohomologique sur Z_p. Donc, par [16] chap. III § 4, on a $\partial F_0 \cap M \neq \emptyset$ et $\partial F_0 \cap N \neq \emptyset$.

Posons $\partial F_0 = \{u, v\}$. Alors, comme l'action d'un groupe fini au voisinage d'un point fixe est équivalente à une action linéaire, les représentations induites du sous-groupe engendré par g dans les espaces tangents à M dans u et à N dans v sont équivalentes par un isomorphisme qui conserve l'orientation. Donc, on peut supposer par exemple $\partial F_0 = \{m_0, n_0\}$ et $\partial F_1 = \{m_1, n_1\}$.

F est une sous-variété fermée de F_g qui contient des voisinages de m_0, m_1, n_0, n_1. Donc, $F = F_g$. Il reste à prouver que G opère librement dans $W - F$. Soit $g \in G$, $g \neq 1$ et supposons $gx = x$ pour un $x \in W$. Soit k l'ordre de g et soit p un diviseur premier de k. Alors $g' = g^{k/p}$ est d'ordre premier et, d'après ce qui précède, $F_{g'} = F$. Mais $g'x = g^{k/p}x = x$, ce qui implique $x \in F$.

PROPOSITION 1. *L'opération de somme connexe de α-sphères homotopiques passe au quotient par la relation de $G-h$-cobordisme et définit un groupe qui sera noté $\Theta_m(\alpha)$. L'élément neutre est la classe de la sphère S^m sur laquelle G opère au moyen de la représentation $\beta: G \to S0(m+1)$ où*

$$\beta(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout $g \in G$. L'inverse de M est $-M$. (Ceci se prouve comme dans [7]). *On a un homomorphisme évident*

$$\Theta_m(\alpha) \to \Theta_m$$

où Θ_m est le groupe défine dans [7].

2. Le $G-h$-cobordisme en dimension $\geqslant 6$.

On conserve les notations et conventions du § 1. *On supposera toujours dans ce paragraphe que G est un groupe cyclique.* On appellera G-variété une variété sur laquelle G opère. On appellera isomorphisme entre deux G-variétés à un difféomorphisme équivariant de l'une sur l'autre. Si M est une G-variété, on considérera $M \times I$ ($\mathrm{I}=[0, 1]$) comme G-variété au moyen de

$$g(x, t) = (gx, t) \quad \text{pour} \quad g \in G, x \in M \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 .$$

R^m, B^m et S^{m-1} seront considérées comme G-variétés au moyen de la représentation α.

La démonstration du lemme 1 ci-dessous est analogue à celle du lemme 6.1 de [17]. Le lemme 2 est un corollaire du lemme 1.

LEMME 1. *Soit M une G-variété compacte. Soit W un voisinage ouvert stable de $M \times \{0\}$ dans $M \times I$ et soit $f: W \to M \times I$ un plongement équivariant qui est l'identité sur $M \times \{0\}$. Alors, il existe un plongement équivariant $g: W \to M \times I$ qui est l'identité dans un voisinage de $M \times \{0\}$ et qui coïncide avec f dans un voisinage du complémentaire de W.*

DÉFINITION 1. Soient V, V' deux G-variétés et soient f, $g: V \to V'$ deux isomorphismes. On dira que f et g sont *G-pseudo-isotopes* s'il existe un isomorphisme $h: V \times I \to V' \times I$ tel que $h(x, 0) = (f(x), 0)$ et $h(x, 1) = (g(x), 1)$ pour tout $x \in V$.

LEMME 2. *Soient X, Y deux G-variétés. Supposons que $X = X_0 \cup X_1$ où X_0 et X_1 sont des sous-variétés stables de X, de la même dimension qui X, d'intérieurs disjoints, et telles que $X_0 \cap X_1 \cap (\partial X) = \emptyset$. Supposons donnée une décomposition analogue de Y: $Y = Y_0 \cup Y_1$. Soient $V = X_0 \cap X_1$ et $V' = Y_0 \cap Y_1$. Soient $f: X_0 \to Y_0$, $g: X_1 \to Y_1$ deux isomorphismes tels que $f \mid V$ et $g \mid V: V \to V'$ soient G-pseudo-isotopes. Alors on peut modifier f et g au voisinage de V de façon à ce qu'ils se recollent et donnent un isomorphisme de X sur Y.*

On se propose maintenant de définir la torsion d'un $G-h$-cobordisme.

Soit W un $G-h$-cobordisme entre les α-sphères homotopiques M et N, avec $\dim(W) = m+1 \geqslant 7$. D'après le lemme 7 du § 1, l'ensemble des points fixes de W est la réunion disjointe de deux sous-variétés F_0, F_1 de dimension 1 et $\partial F_0 = \{m_0, n_0\}$, $\partial F_1 = \{m_1, n_1\}$; et G opère librement dans $W - (F_0 \cup F_1)$. Soit W_0 un voisinage tubulaire stable de F_0 isomorphe à $F_0 \times B^m$. Soit $T_0 \subset W_0$ l'espace fibré en sphères correspondant, isomorphe à $F_0 \times S^{m-1}$. On définit de même W_1 et T_1 pour F_1, et on suppose $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Soient

$$U_0 = W_0 \cap M \qquad V_0 = W_0 \cap N \qquad U_1 = W_1 \cap M \qquad V_1 = W_1 \cap N$$
$$M' = M - ((\mathrm{int}(U_0)) \cup (\mathrm{int}(U_1))$$

$N' = N - ((\text{int}(V_0)) \cup (\text{int}(V_1))$
$W' = (W - (W_0 \cup W_1)) \cup T_0 \cup T_1$

Il est facile devoir que $M - \{m_0, m_1\}$ est rétracte par déformation de $W - (F_0 \cup F_1)$. Comme la paire (W', M') est rétracte par déformation de la paire $(W - (F_0 \cup F_1), M - \{m_0, m_1\})$ on a que M' est rétracte par déformation de W'. Donc, $\tilde{W}' = W'/G$ est un h-cobordisme *relatif* entre les variétés à bord $\tilde{M}' = M'/G$ et $\tilde{N}' = N'/G$ (relatif veut dire qu'il est trivial entre les bords de $\tilde{M}'$ et $\tilde{N}'$). Soit

$$\tau = \tau(\tilde{W}', \tilde{M}') \in \text{Wh}(G)$$

la torsion de cet h-cobordisme [9].

DÉFINITION 2. Cet élément $\tau \in \text{Wh}(G)$ sera appéllé la *torsion du* $G-h$-cobordisme et sera noté $\tau_G(W, M)$. En effet, on a le

LEMME 3. *L'élément τ de* Wh(G) *ainsi défini ne dépend pas du choix des voisinages tubulaires de F_0 et F_1.*

Démonstration du lemme 3. Le lemme 3 se déduit facilement du lemme suivant.

LEMME 4. *Soit $f: R^m \times I \to R^m \times I$ un plongement équivariant, compatible avec les orientations, tel que*

$$f(0, t) = (0, t), 0 \leqslant t \leqslant 1$$

et soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un isomorphisme $g: R^m \times I \to R^m \times I$ et un $\delta > 0$ tels que

a) $g(x, t) = (x, t)$ si $\|x\| > \varepsilon$
b) $g_0 f(x, t) = (x, t)$ si $\|x\| < \delta$.

Démonstration. Observons d'abord que si $A \in GL(m, R)$ ne possède pas la valeur propre 1, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} \in GL(m+1, R)$$

(où $X \in GL(m, R)$, Y est une matrice $1 \times m$ et 0 est une matrice $m \times 1$, commute avec $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $Y=0$ et X commute avec A. Alors, tenant compte du lemme 5 du § 1, le lemme 4 peut se démontrer par des raisonnements tout à fait analogues à ceux de [10] § 5.

LEMME 5. $\tau_G(W, M) = \tau_G(W, M')$.

Démonstration. Voir [9] § 10 et observer que $\dim W = 0 \bmod 2$.

LEMME 6. Si $\tau_G(W, M) = 0$ *et* $\dim M \geqslant 6$, *alors* M *est isomorphe à* N.

Démonstration. Par le théorème du s-cobordisme, voir [18] et [19], on a un difféomorphisme $\tilde{F}: \tilde{W}' \to \tilde{M}' \times I$. Cet difféomorphisme se relève en un isomorphisme $F: W' \to M' \times I$ qui donne par restriction un isomorphisme

$$f: M' \to N'.$$

Les isomorphismes $W_0 \cong F_0 \times U_0$ et $W_1 \cong F_1 \times U_1$ nous induisent des isomorphismes

$$g_i: U_i \to V_i \quad i = 0, 1.$$

Par construction il existe un isomorphisme

$$\varphi: T_0 \to \partial U_0 \times I$$

tel que $\varphi(x) = (x, 0)$ si $x \in \partial U_0$ et $\varphi(x) = (f^{-1}(x), 1)$ si $x \in \partial V_0$; et un isomorphisme

$$\Psi: T_0 \to \partial U_0 \times I$$

tel que $\Psi(x) = (x, 0)$ si $x \in \partial U_0$ et $\Psi(x) = (g_0^{-1}(x), 1)$ si $x \in \partial V_0$. Alors, l'isomorphisme

$$\varphi \circ \Psi^{-1}: \partial U_0 \times I \to \partial U_0 \times I$$

nous dit que $f^{-1} \circ g_0 \mid \partial U_0$ est G-pseudo-isotope à l'identité. Donc, $f \mid \partial U_0$ est G-pseudo-isotope à $g_0 \mid \partial U_0$. De même, $f \mid \partial U_1$ est G-pseudo-isotope à $g_1 \mid \partial U_1$. Par le lemme 2 on peut modifier convenablement f, g_0, g_1 de façon à ce qu'ils se recollent et donnent un isomorphisme de M sur N.

LEMME 7. *Si* τ *est un élément de* $\mathrm{Wh}(G)$ *et* M *est une* α*-sphère homotopique de dimension* $\geqslant 6$, *il existe un* $G-h$*-cobordisme* $(W; M, N)$ *tel que* $\tau = \tau_G(W, M)$.

Démonstration. Soient U_0, U_1 des voisinages stables de m_0, m_1 respectivement, isomorphes à B^m et disjoints. Soit M' l'adhérence de $M - (U_0 \cup U_1)$. Soit $\tilde{M}' = M'/G$. Par le théorème de Stallings [9] th. 11.1 il existete un h-cobordisme relatif $(\tilde{W}'; \tilde{M}', \tilde{N}')$ tel que $\tau(\tilde{W}', \tilde{M}') = \tau$. Soit W' le revêtement universel de $\tilde{W}'$. On a des plongements équivariants évidents

$$g_i: \partial U_i \times I \to W' \quad i = 0, 1$$

tels que $g_i(x, 0) = x$ pour tout $x \in \partial U_i$, $i = 0, 1$. Alors il est facile de voir que

$$W = W' \cup_{g_0} (\partial U_0 \times I) \cup_{g_1} (\partial U_1 \times I)$$

est le $G-h$-cobordisme cherché.

Rappel de notations

a) S^m est considérée comme G-variété au moyen de la représentation

$$g \to \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

b) Si W est un $\mathrm{G}-h$-cobordisme entre M *et* M' on écrira $(W;\, M,\, M')$.

LEMME 8. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des $\tau \in \mathrm{Wh}(G)$ qui sont la torsion des $G-h$-cobordismes $(W;\, M,\, M')$ tels que M *et* M' sont isomorphes à S^m ($m \geqslant 6$). Alors $\mathscr{T}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Wh}(G)$ qui contient $2 \cdot \mathrm{Wh}(G)$.

Démonstration. Soient $(W;\, M,\, M')$ et $(W_1;\, N,\, N')$ deux $G-h$-cobordismes tels que $M \cong M' \cong N \cong N' \cong S^m$.

Montrons d'abord que $\mathscr{T}$ est un sous-groupe. Soit $f: M' \to N$ un isomorphisme. Alors $\tau_G(W, M) + \tau_G(W_1, N) = \tau_G(W \cup_f W_1, M)$.

Soit $(W_2;\, M,\, M_1)$ un $G-h$-cobordisme tel que $\tau_G(W_2, M) = -\tau_G(W, M)$ (lemme 7). Soit $g: M \to M$ l'application identique. Alors $\tau_G(-W \cup_g W_2, M_1) = 0$ (lemme 5). Donc, $M_1 \cong -M' \cong S^m$ (lemme 6).

On a prouvé que $\mathscr{T}$ est un sousgroupe de $\mathrm{Wh}(G)$.

Soit $\tau \in \mathrm{Wh}(G)$. Soit $(W;\, M,\, N)$ un $G-h$-cobordisme tel que $M \cong S^m$ et $\tau_G(W, M) = \tau$ (lemme 7). Soit $g: N \to N$ l'application identique. Alors

$$\tau_G(W \cup_g - W, M) = 2\tau.$$

Donc, $\mathscr{T} \supset 2.\ \mathrm{Wh}(G)$.

LEMME 9. *Soient* $(W;\, M,\, N)$ *et* $(X;\, K,\, L)$ *deux* $G-h$*-cobordismes entre des* α*-sphères homotopiques. Alors,*

$$\tau_G(W \# X, M \# K) = \tau_G(W, M) + \tau_G(X, K)$$

(La somme connexe $W \# X$ se fait le long des composantes des points fixes reliant m_1 avec n_1 et k_0 avec l_0).

Démonstration. On fait pour W et X la construction qui précède la définition 2. On obtient des h-cobordismes relatifs $(W';\, M',\, N')$ et $(X';\, K',\, L')$ sur lesquels G opère et qui donnent au quotient des h-cobordismes relatifs. Alors on voit que le h-cobordisme relatif correspondant à $W \# X$ est de la forme

$$(W' \cup_f X';\quad M' \cup_{g_1} K',\quad N' \cup_{g_2} L')$$

où f est un difféomorphisme équivariant convenable et g_1 et g_2 sont des restrictions de f.

Soit $(T_1;\, \partial U_1,\, \partial V_1)$ comme dans la construction qui précède la définition 2. On a alors la suite exacte:

$$0 \to C_*(T_1, \partial U_1; Z) \to C_*(W', M'; Z) \oplus C_*(X', K'; Z)$$
$$\to C_*(W' \cup_f X', M' \cup_{g_1} K'; Z) \to 0$$

où C_* indique les chaînes d'une décomposition cellulaire convenable invariante par G. Comme $(T_1/G; \partial U_1/G, \partial V_1/G)$ est par construction un h-corbordisme trivial, le théorème 3.1 de [9] nous donne

$$\tau((W' \cup_f X')/G, (M' \cup_{g_1} K')/G) = \tau(W'/G, M'/G) + \tau(X'/G, K'/G). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

LEMME 10. *Si $m \geqslant 6$, alors, pout toute α-sphère homotopique M, $M \# S^m \cong M$ et $M \# -M \cong S^m$.*

Démonstration. La première assertion est triviale et vaut pour tout m. Soit

$$f: B^m \to M$$

un plongement équivariant compatible avec les orientations. Alors, par définition:

$$M \# - M = (M - f(\dot{B}^m)) \cup_g - (M - f(\dot{B}^m))$$

où $\dot{B}^m = B^m - S^{m-1}$ et $g: f(S^{m-1}) \to f(S^{m-1})$ est l'application identique.

Mais, puisque tout h-cobordisme entre des espaces lenticulaires est trivial [9] cor. 12–13, on voit immédiatement que $M - f(\dot{B}^m) = B^m$. Donc,

$$M \# - M = B^m \cup_h B^m = S^m$$

où $h: S^{m-1} \to S^{m-1}$ est l'application identique.

PROPOSITION 1. *Soit $\Xi = \mathrm{Wh}(G)/\mathscr{T}$ (voir lemme 8). Soit M une α-sphère homotopique de dimension $\geqslant 6$. Pour chaque α-sphère homotopique N $G-h$-cobordante avec M soit $\sigma(N)$ l'image dans Ξ de $\tau_G(W, M) \in \mathrm{Wh}(G)$, où W est un $G-h$-cobordisme entre M et N. Alors,*

a) *$\sigma(N)$ ne dépend que de N.*

b) *Si N' est une autre α-sphère homotopique $G-h$-cobordante avec M, alors $\sigma(N) = \sigma(N')$ si et seulement si $N \cong N'$.*

c) *Si $\sigma \in \Xi$ alors il existe une α-sphère homotopique N $G-h$-cobordante avec M telle $\sigma(N) = \sigma$.*

Démonstration. (cf. [9] § 11). Soient $(W; M, N)$ et $(W'; M, N)$ deux $G-h$-cobordismes. Soit $f: N \to N$ l'application identique. Alors $W_1 = W \cup_f - W'$ est un $G-h$-cobordisme entre M et M et $\tau_G(W_1, M) = \tau_G(W, M) + \tau_G(W', M)$. Soit $W_0 = M \times I$ le $G-h$-cobordisme trivial. Alors

$$\tau_G(W_1 \# W_0, M \# - M) = \tau_G(W_1, M)$$

d'après le lemme 9. Alors $\tau_G(W_1, M) \in \mathscr{T}$, puisque $M \# -M \cong S^m$ (lemme 10). Comme Ξ est un 2-groupe (lemme 8) on a prouvé (a). Supposons $\sigma(N) = \sigma(N')$. Soient $(W; M, N)$ et $(W'; M, N')$ $G-h$-cobordismes. Soient $\tau = \tau_G(W, M)$ et $\tau' = \tau_G(W', M)$. Alors $\tau - \tau' \in \mathscr{T}$. Soit $(W_1; S^m, S^m)$ un $G-h$-cobordisme tel que $\tau_G(W_1, S^m) = \tau - \tau'$. Soit $W_0 = M \times I$ le $G-h$-cobordisme trivial et soit $W_2 = W_0 \# W_1 \cdot W_2$ est un $G-h$-cobordisme entre M et M et $\tau(W_2, M) = \tau - \tau'$ (lemmes 9 et 10). Soit finalement $(W_3; M, P)$ un $G-h$-cobordisme tel que $\tau(W_3, M) = -\tau$ (lemme 7). Alors le $G-h$-cobordisme

$$-W_3 \cup W_2 \cup W'$$

est de torsion nulle. Donc, $N' \cong -P$. D'autre part le $G-h$-cobordisme

$$-W_3 \cup W$$

est aussi de torsion nulle et donc $N \cong -P$. Finalement, $N \cong N'$. La partie (c) se déduit du lemme 7.

COROLLAIRE 1. *Si $m \geqslant 6$ les classes d'isomorphismes des α-sphères homotopiques forment un groupe avec l'opération de somme connexe. Le noyau de l'homomorphisme naturel de ce groupe sur $\Theta_m(\alpha)$ est un sous-groupe central isomorphe à Ξ; il est, donc, fini et de 2-torsion.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les lemmes 8 et 10, la proposition 1 et le fait que $\mathrm{Wh}(G)$ est de type fini.

COROLLAIRE 2. *Il n'y a qu'un nombre fini de α-sphères homotopiques non-isomorphes et $G-h$-cobordantes à une α-sphère homotopique donnée M. Ce nombre ne dépend pas de M.*

PROPOSITION 2. *Supposons que $G \cong Z_3$ opère sur B^{m+1}, $m \geqslant 6$ et soit F l'ensemble des points fixes. Supposons que l'ensemble $F \cap S^m$ est constitué par deux points. Alors l'action induite de G sur S^m est différentiablement équivalente à une action linéaire.*

Démonstration. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui de la démonstration du lemme 7 du § 1 on prouve que F est connexe et de dimension 1. Soit $p \in F$, $p \notin S^m$. Il existe un voisinage stable U de p, disjoint de S^m, difféomorphe à B^{m+1} et sur lequel l'action de G est différentiablement équivalente à une action linéaire. Soit $V = \partial U$. V est une α-sphère homotopique et S^m aussi, par [1] § 3, et pour le même α. Alors si on enlève de B^{m+1} l'intérieur de U on obtient un $G-h$-cobordisme entre V et S^m. Mais, d'après [20], on sait que $\mathrm{Wh}(Z_3) = 0$. Alors, par le lemme 6, S^m est isomorphe à V, c.q.f.d.

3. α-sphères homotopiques qui sont des bords des G-variétés parallélisables

On conserve les notations des paragraphes précédents. Si (X, Y) est un couple d'espaces compacts $(Y \subset X)$ alors on dénote avec $\pi_S^n(X, Y) = \pi_S^n(X/Y)$ le n-ième groupe de cohomotopie stable de X/Y (on convient, comme d'habitude, que si Y est vide alors X/Y est la somme disjointe de X et un point). On sait que π_S^* est une cohomologie généralisée avec $\pi_S^n(\text{point}) = \prod_{-n}$ (où $\prod_j$ dénote le j-ième groupe d'homotopie stable des sphères). On dénote $\tilde{\pi}_S^*$ la cohomotopie réduite. [24]

Dans tout ce qui suit G sera un groupe fini d'ordre impair quelconque. On appelera *G-variété* une variété différentiable sur laquelle G opère différentiablement. On dira que deux telles variétés sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme équivariant de l'une sur l'autre. Si X est une G-variété on notera $\tilde{X}$ l'espace X/G. Si G opère librement sur X on supposera $\tilde{X}$ muni de la structure différentiable *quotient*. Si G opère librement dans le complémentaire de l'ensemble des points fixes on dira que X est une G-variété *semilibre*.

On va maintenant introduire quelques définitions utiles par la suite. On supposera toujours que G opère sur R^{m+k} et S^{m+k-1} par les extensions triviales de α.

DÉFINITION 1. Un *G-fibré* est un fibré vectoriel réel sur lequel G opère par des automorphismes de fibré vectoriel.

La base et l'espace total d'un G-fibré sont des G-espaces et la projection est équivariante.

DÉFINITION 2. Deux G-fibrés sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme équivariant de l'un sur l'autre. (On supposera toujours que les deux G-fibrés ont la même base et que l'isomorphisme relève l'identité de la base.)

DÉFINITION 3. Un G-fibré de base X est *α-trivial* s'il est isomorphe au-G-fibré

$$X \times R^{m+k} \to X \qquad (k \geqslant 0)$$

où G opère sur $X \times R^{m+k}$par $g(x, \mu) = (gx, \alpha(g)\mu)$ pour tout $g \in G$, $x \in X$, $\mu \in R^{m+k}$. (On dénote avec la même lettre α la représentation de G obtenue par composition $G \xrightarrow{\alpha} SO(m) \xrightarrow{j} SO(m+k)$, $k \geqslant 0$, où j est l'inclusion canonique).

Si X est un G-espace on notera $\eta^k(X)$ le G-fibré

$$X \times R^k \to X$$

où G opère sur $X \times R^k$ par $g(x, \mu) = (gx, \mu)$ pour tout $g \in G$, $x \in X$, $\mu \in R^k$

DÉFINITION 4. Une G-variété W est *$\alpha - s$-parallélisable* si $\tau(W) \oplus \eta^k(W)$ est α-trivial pour k assez grand.

LEMME 1. *Si W est une G-variété semilibre $\alpha-s$-parallélisable de dimension n alors l'ensemble des points fixes est de dimension $n-m$ à moins qu'il ne soit vide.*

Démonstration. En effet, si $x \in W$ est un point fixe alors $T_x(W) \oplus R^k$ (T, espace tangent) est isomorphe à R^{m+l} $(m+l=n+k)$ comme G-espace. Donc, l'ensemble des points fixes de $T_x(W) \oplus R^k$ est de dimension $l=n+k-m$. Alors, l'ensemble des points fixes de $T_x(W)$ est de dimension $n-m$.

PROPOSITION 1. *Soit M une α-sphère homotopique. Alors M admet un plongement équivariant dans la sphère S^{m+k} si $k>m+1$.*

Démonstration. Dans ce qui suit $a=0$, 1. Soit U_a un voisinage de m_a dans M stable par G et isomorphe à la boule ouverte $\dot{B}^m$. Soit W_a le correspondant de la boule fermée de rayon $\frac{1}{2}$ dans cet isomorphisme. Supposons $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Soit $V_a = \partial W_a$. Soit W l'adhérence de $M-(W_0 \cup W_1)$. W est stable par G et $\partial W = V_0 \cup V_1$.

Soient $f_a: U_a \to S^m$ des plongements équivariants compatibles avec les orientations et tels que $f_0(U_0) \cap f_1(U_1) = \emptyset$ (voir lemme 3 du § 1). Soit X le sous -ensemble ouvert de S^{m+k} où G opère librement, formé par les points dont les m premières coordonnées ne sont pas toutes nulles. Les plongements équivariants:

$$f_a: U_a - \{m_a\} \to X$$

passent au quotient et donnent des plongements

$$\tilde{f}_a: \tilde{U}_a - \{\tilde{m}_a\} \to \tilde{X}$$

(on suppose toujours $S^m \subset S^{m+k}$). Soit $\tilde{g}_a = \tilde{f}_a | \tilde{V}_a$.

LEMME 1. *Il existe une application continue $\tilde{g}: \tilde{W} \to \tilde{X}$ telle que $\tilde{g} | \tilde{V}_a = \tilde{g}_a$.*

Admettons ce lemme. On peut évidemment supposer que $\tilde{g}$ coincide avec $\tilde{f}_a$ au voisinage de $\tilde{V}_a$. Alors $\tilde{f}_0 \cup \tilde{f}_1 \cup \tilde{g}$ est une application continue

$$\tilde{M} - \{\tilde{m}_0, \tilde{m}_1\} \to \tilde{X}$$

qui est un plongement au voisinage de $\tilde{W}_0 \cup \tilde{W}_1$. Puisque $k>m+1$, il existe un plongement $\tilde{h}: \tilde{M} - \{\tilde{m}_0, \tilde{m}_1\} \to \tilde{X}$ qui coincide avec $\tilde{f}_a$ au voisinage de $\tilde{W}_a$. Comme $W_0 - \{m_0\}$ est un rétracte par déformation de $M - \{m_0, m_1\}$, il existe un relèvement $h: M - \{m_0, m_1\} \to X$ de $\tilde{h}$ tel que h coincide avec f_0 dans $W_0 - \{m_0\}$. Il est facile de voir que h est un plongement équivariant.

Les applications h et f_1 restreintes à $W_1 - \{m_1\}$ sont équivariantes et induisent la même application par passage au quotient. Alors on a que $h = tf_1$ sur $W_1 - \{m_1\}$ où t est un élément du centre de G. Donc, puisque h coincide avec f_0 sur $W_0 - \{m_0\}$ et avec tf_1 aur $W_1 - \{m_1\}$, h s'étend à un plongement équivariant de M dans S^{m+k}.

Il reste à prouver le lemme 1. Soit $S_a = f_a(W_a)$, $S_a \subset S^m \subset S^{m+k}$ et soit W' l'adhérence de $S^m-(S_0\cup S_1)$. Alors $\tilde{W}$ est un h-cobordisme entre $\tilde{V}_0$ et $\tilde{V}_1$ et $\tilde{W}'$ est un h-cobordisme enter $\partial\tilde{S}_0$ et $\partial\tilde{S}_1$. Soit $\alpha\colon\tilde{V}_0\to\tilde{V}_1$ induite par une rétraction par déformation de $\tilde{W}$ sur $\tilde{V}_1$ et analoguement $\beta\colon\partial\tilde{S}_0\to\partial\tilde{S}_1$. On a le diagramme homotopiquement commutatif:

$$\begin{tikzcd} \tilde{V}_0 \arrow[r, "\tilde{g}_0"] \arrow[d, "\alpha"'] & \tilde{S}_0 \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr] & \\ \tilde{V}_1 \arrow[r, "\tilde{g}_1"] & \tilde{S}_1 \arrow[r] & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

où les flèches de droite sont les inclusions. Le triangle de droite est homotopiquement commutatif parce que $\tilde{W}'\subset\tilde{X}$. Le carré est homotopiquement commutatif parce que $\tilde{g}_1\circ\alpha$ et $\beta\circ\tilde{g}_0$ sont toutes les deux de degré -1 (avec des orientations convenablement choisies – puisque les f_a conservent l'orientation) et compatibles avec les identifications des groupes fondamentaux (cette dernière affirmation se prouve directement pour $m=2$ et utilisant le fait que V_a et ∂S_a sont simplement connexes pour $m>2$). Alors on applique [21] § 5.

De ce diagramme on déduit que $\tilde{g}_0\colon\tilde{V}_0\to\tilde{X}$ est homotopique à $\tilde{g}_1\circ\alpha\colon\tilde{V}_0\to\tilde{X}$. Evidemment l'application $\partial\tilde{W}\to\tilde{X}$ donnée par $\tilde{g}_1\circ\alpha$ sur $\tilde{V}_0$ et par $\tilde{g}_1$ sur $\tilde{V}_1$, s'étend à $\tilde{W}$. Comme elle est homotopique à l'application $\tilde{g}_0\cup\tilde{g}_1\colon\partial\tilde{W}\to\tilde{X}$, celle-ci s'étend aussi à $\tilde{W}$ et *le lemme est prouvé.*

PROPOSITION 2. *Soit M une α-sphère homotopique plongée de façon équivariante dans S^{m+k}, $k>m+1$. Alors le G-fibré normal à M est isomorphe à $\eta^k(M)$.*

Démonstration. Comme l'action de G au voisinage d'un point fixe est équivalente à une action linéaire, il est facile de voir qu'au voisinage de m_0 et m_1 il existe un champs invariant (par l'action de G) de k-repères normaux à M. Soient W_0, W_1 des voisinages stables disjoints de m_0, m_1 dans M, isomorphes à B^m, et sur lesquels il existe un champ invariant de k-repères normaux à M. Soient $V_0=\partial W_0$, $V_1=\partial W_1$. Soit W l'adhérence de $M-(W_0\cup W_1)$. Soit E le fibré principal sur W associé au fibré normal à M. G opère de façon naturelle sur E. Soit $E_0=E\,|\,V_0$. Alors $\tilde{E}$ est un fibré principal sur $\tilde{W}$ et $\tilde{E}\,|\,\tilde{V}_0=\tilde{E}_0$. Puisque $\tilde{V}_0$ est rétracte par déformation de $\tilde{W}$, tout section de $\tilde{E}_0$ s'étend à une section de $\tilde{E}$. Donc, toute section invariante de E_0 s'étend à une section invariante de E. On en déduit l'existence sur $W_0\cup W$ d'un champ invariant s de k-repères orthonormaux normaux à M. Il en existe aussi un champ t sur W_1. Soit

$$s(x)=t(x)f(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in V_1 \quad \text{où}$$
$$f\colon V_1\to SO(k).$$

Alors f satisfait $f(gx)=f(x)$ pour tout $x\in V_1$ et $g\in G$ et définit une application

$$\tilde{f}:\tilde{V}_1\to SO(k).$$

Pour prouver la proposition il suffit de prouver que $\tilde{f}$ s'étend à $\tilde{h}:\tilde{W}_1\to SO(k)$. Parce qu'alors si h est la composition $W_1\to\tilde{W}_1\xrightarrow{\tilde{h}}SO(k)$, s s'étend à M en prenant $s(x)=t(x)\,h(x)$ pour $x\in W_1$. Les obstructions à l'extension de $\tilde{f}$ se trouvent dans les groupes

$$H^{i+1}(\tilde{W}_1,\tilde{V}_1;\pi_i(SO(k)))=H^i(\tilde{V}_1,\pi_i(SO(k)))$$

pour $1\leqslant i\leqslant m-1$. ($\tilde{W}_1$ est contractil parce que W_1 est isomorphe à B^m). Pour $1\leqslant i\leqslant m-1$ on a $\pi_i(SO(k))=\pi_i(SO)$ i-ème groupe d'homotopie stable du groupe orthogonal qui est calculé dans [22].

Si $1\leqslant i<m-1$, alors

$$H^i(\tilde{V}_1,\pi_i(SO))=H^i(G,\pi_i(SO)).$$

Si $i\geqslant 1$ est pair, $\pi_i(SO)=0$, Z_2 et $H^i(G,\pi_i(SO))=0$ puisque G est d'ordre impair ([3] chap. XII § 2 cor 2.7).

Soit $i\geqslant 1$ impair. Soit H un sous-groupe de Sylow de G. Comme G est d'ordre impair et opére librement sur S^{m-1}, H est cyclique d'ordre impair. ([2] exp. 13 § 9.) Donc, $H^i(H,\pi_i(SO))=0$, puisque $\pi_i(SO)=0$, Z, Z_2 ([3] chap. XII § 7). Comme cela vaut pour tout sous-groupe de Sylow de G on a $H^i(G,\pi_i(SO))=0$ ([3] chap. XII § 10).

Il reste seulement à calculer l'obstruction

$$\xi\in H^m(\tilde{W}_1,\tilde{V}_1;\pi_{m-1}(SO)).$$

On sait que le fibré normal à M dans S^{m+k} est trivial ([7] th. 3.1 et lemme 3.3). Donc, puisque $W_0\cup W$ est contractile, le champ s s'étend à un champ de repères orthonormaux normaux à M, défini sur tout M. Ceci implique f s'étend à une application $W_1\to SO(k)$. Alors l'image de ξ dans $H^m(W_1,V_1;\pi_{m-1}(SO))$ est nulle. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^m(\tilde{W}_1,\tilde{V}_1;\pi_{m-1}(SO)) & \xrightarrow{\sim} & H^{m-1}(\tilde{V}_1,\pi_{m-1}(SO)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^m(W_1,V_1;\pi_{m-1}(SO)) & \xrightarrow{\sim} & H^{m-1}(V_1,\pi_{m-1}(SO)) \end{array}$$

et la flèche de droite est injective parce que $\pi_{m-1}(SO)=0$, Z, Z_2 et $V_1\to\tilde{V}_1$ est de degré impair. Donc $\xi=0$, c.q.f.d.

Soit M une α-sphère homotopique, soit $f:M\to S^{m+k}$ un plongement équivariant et soit φ un champ invariant (sous l'action de G) de k-repères normaux à f et cohérents avec l'orientation de M. L'existence de f et φ est assurée par les propositions 1 et 2. La démonstration de la proposition 1 nous dit aussi qu'on peut supposer $f(U_0)\subset S^m$

et $f(U_1)\subset S^m$ pour des voisinages stables convenables U_0 et U_1 de m_0 et m_1. La construction de Pontrjagyn-Thom ([7] § 4) nous permet, dans ces conditions, de définir un élément $\mu(M,f,\varphi)\in\tilde{\pi}_S^{-1}(L_{m-1})$ où $L_{m-1}=S^{m-1}/G$. En effet, elle donne une application équivariante $S^{m+k}\to S^k$ (où G opère trivialement sur S^k) qui induit une application $S^{m+k}/G\to S^k$. Mais $S^{m+k}/G=\Sigma^{k+1}(S^{m-1}/G)=\Sigma^{k+1}(L_{m-1})$ où Σ denote la suspension non-réduite. L'application $\Sigma^{k+1}(L_{m-1})\to S^k$ représente $\mu(M,f,\varphi)$.

Soit (M',f',φ') une triple analogue à (M,f,φ). Choisissons des voisinages V_1 et W_0 de m_1 et m_0' dans S^{m+k}, intersections de S^{m+k} avec des boules de l'espace ambiant R^{m+k+1}. Si on forme $S^{m+k}\# S^{m+k}$ à l'aide de V_1 et W_0 on obtient

$$S^{m+k}\# S^{m+k}=S^{m+k}.$$

Mais si V_1 et W_0 sont assez petits, f et f' induisent un plongement équivariant de $M\# M'$ dans $S^{m+k}\# S^{m+k}=S^{m+k}$. Ce plongement sera noté $f\# f'$. D'autre part, on voit facilement qu'on peut déformer φ et φ' au voisinage de V_1 et W_0 de façon à ce qu'ils se recollent et donnent un champ invariant $\varphi\#\varphi'$ de k-repères normaux à $f\# f'$. On obtient donc un nouveau triple $(M\# M' f\# f', \varphi\#\varphi')$ et

$$\mu(M\# M', f\# f', \varphi\#\varphi')=\mu(M,f,\varphi)+\mu(M',f',\varphi').$$

Si $-\varphi$ est le champ qu'on obtient en changeant le signe de la dernière composante de φ on a

$$\mu(-M,f,-\varphi)=-\mu(M,f,\varphi).$$

Finalement la construction de Pontrjagyn-Thom implique que si $(M,f,\varphi)=0$ alors $M=\partial W$ où W est une sous-variété de B^{m+k+1} stable par G, donc une G-variété, semilibre, qui est $\alpha-s$-parallélisable puisque son G-fibré normal est isomorphe à $\eta^{k-1}(W)$. En effet, si $\mu(M,f,\varphi)=0$ l'application $S^{m+k}/G\to S^k$ qui represente $\mu(M,f,\varphi)$ s'étend au cône de S^{m+k}/G qui est homéomorphe à B^{m+k+1}/G.

Soit J_α le sous-ensemble de $\tilde{\pi}_S^{-1}(L_{m-1})$ formé par les $\mu(M,f,\varphi)$ tels que M représente l'élément nul de $\Theta_m(\alpha)$. D'après ce qu'on vient de voir J_α est un sous groupe de $\tilde{\pi}_S^{-1}(L_{m-1})$.

PROPOSITION 3. *La classe $\mu(M)$ de $\mu(M,f,\varphi)$ modulo J_α ne dépend que de la classe de M dans $\Theta_m(\alpha)$ et*

$$\mu:\Theta_m(\alpha)\to\tilde{\pi}_S^{-1}(L_{m-1})/J_\alpha$$

est un homomorphisme dont le noyau $\wedge_m(\alpha)$ satisfait:

a) *Toute α-sphère homotopique qui représente un élément de $\wedge_m(\alpha)$ est bord d'une G-variété semilibre $\alpha-s$-parallélisable.*

b) *Le groupe $\Theta_m(\alpha)/\wedge_m(\alpha)$ est abélien fini.*

Démonstration. Si $(M'f', \varphi')$ est une autre triple et M' est $G-h$-cobordante avec M alors

$$\mu(M, f, \varphi) - \mu(M', f', \varphi') = \mu(M \# - M', f \# f', \varphi \# - \varphi') \in J_\alpha$$

puisque $M\# - M'$ est $G-h$-cobordante avec S^m.

Supposons $\mu(M, f, \varphi) \in J_\alpha$. Alors $\mu(M, f, \varphi) = \mu(N, g, \psi)$ où N est $G-h$-cobordante avec S^m. Alors,

$$\mu(M \# - N, f \# g, \varphi \# - \psi) = 0$$

et, d'après ce qu'on a dit plus haut, $M\# - N$ est bord d'une G-variété semilibre $\alpha - s$-parallélisable. Du fait que N est $G-h$-cobordant à S^m on déduit $M\# - N$ est $G-h$-cobordante avec M; donc l'assertion (a). L'assertion (b) résulte du fait que $\pi_S^{-1}(L_{m-1})$ est abélien fini.

PROPOSITION 4. *Supposons que G opère sur S^m de façon semilibre avec exactement deux points fixes. Supposons que l'ordre de G est premier avec l'ordre de $\prod_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Alors il existe une variété parallélisable W avec $\partial W = S^m$ et telle que l'action de G sur S^m se prolonge à action semilibre de G sur W.*

Démonstration. D'abord, l'action de G sur S^m définit une α-sphère homotopique M pour α convenablement choisi ([1] § 3). On notera M_0 la α-sphère homotopique S^m—munie de l'action de G donnée par α et $f_0 : M_0 \to S^{m+k}$ $(k > m+1)$ l'inclusion canonique. Soit $f : M \to S^{m+k}$ un plongement équivariant et soit φ un champ invariant (sous l'action de G) de k-repères normaux à f. Si on oublie l'action de G on peut associer au triple (M, f, φ), par la construction de Pontrjagyn-Thom classique, un élément $\mu'(M, f, \varphi) \in \prod_m$. Alors $\mu'(M, f, \varphi)$ est l'image de $\mu = \mu(M, f, \varphi)$ par l'application naturelle

$$p^* : \tilde{\pi}_S^{-1}(L_{m-1}) \to \tilde{\pi}_S^{-1}(S^{m-1}) = \prod_m$$

induite par $p : S^{m-1} \to L_{m-1}$, la projection canonique. On sait ([7] § 4), puisque M est difféomorphe à S^m, que $\mu'(M, f, \varphi) = \mu'(M_0, f_0, \varphi_0)$ où φ_0 est un champ de k-repères normaux à M_0. Mais par le lemme 2 ci-dessous, on peut choisir φ_0 invariant sous l'action de G. Donc, $\mu_0 = \mu(M_0, f_0, \varphi_0)$ est défini et $p^*(\mu) = p^*(\mu_0)$. Par le lemme 3 ci-dessous on en déduit $\mu = \mu_0$. Donc, $M\# - M_0 \cong M$ est bord d'une G-variété semilibre $\alpha - s$-parallélisable, c.q.f.d.

LEMME 2. *Toute application $f : S^m \to SO(k)$ $(k > m+1)$ est homotopique à une application équivariante. (G opère trivialement sur $SO(k)$.)*

Démonstration. Soit M le «mapping cylinder» de la projection canonique $S^m \to$

S^m/G. Alors $S^m \subset M$ et il suffira de voir que f s'étend à $F: M \to S0(k)$. Les obstructions à l'extension appartiennent à

$$H^{j+1}(M, S^m; \pi_j(S0(k))) \quad j \geq 1.$$

On va prouver que ces groupes sont nuls pour tout $j \geq 1$. Observons d'abord que, puisque $S^m \to S^m/G$ est une application de degré impair, la restriction

$$H^m(M, \pi_j(S0)) \to H^m(S^m, \pi_j(S0))$$

est injective pour $j = m-1$ (puisque $\pi_{m-1}(S0) = 0$, Z_2, Z) et bijective pour $j = m$ (puisque $\pi_m(S0) = 0$, Z_2 étant donné que m est pair). Alors, par la suite exacte de cohomologie de la paire (M, S^m) on obtient

$$H^{j+1}(M, S^m; \pi_j(S0(k))) = H^{j+1}(M, \pi_j(S0(k))) \quad \text{si} \quad j \neq m-1$$

et

$$H^m(M, S^m, \pi_{m-1}(S0(k))) = 0.$$

Mais

$$H^{j+1}(M, \pi_j(S0(k)) = H^{j+1}(S^m/G, \pi_j(S0(k))) = H^j(L_{m-1}, \pi_j(S0(k)))$$

(puisque $S^m/G = \Sigma(L_{m-1})$) pour tout $j \geq 1$.
Si $j > m-1$,

$$H^j(L_{m-1}, \pi_j(S0(k)) = 0.$$

Si $j < m-1$,

$$H^j(L_{m-1}, \pi_j(S0(k))) = H^j(G, \pi_j(S0)).$$

Mais on a vu au cours de la démonstration de la proposition 2 que $H^j(G, \pi_j(S0)) = 0$ pour tout j, c.q.f.d.

LEMME 3. *Si G est d'ordre premier avec l'ordre de $\prod_j$, $1 \leq j \leq m$, alors*

$$p^*: \pi_S^{-1}(L_{m-1}) \to \pi_S^{-1}(S^{m-1}) = \prod\nolimits_m$$

est injective.

Démonstration. Il faut prouver que si $f: S^{m+k} \to S^k$ est équivariante, où G opère trivialement sur S^k, et si f admet une extension à B^{m+k+1} alors f admet une extension équivariante à B^{m+k+1}. On rappelle que pour tout G-espace X on note $\tilde{X} = X/G$ l'espace quotient.

Soit

$$\tilde{f}: \tilde{S}^{m+k} \to S^k$$

l'application induite par f. Il suffit de prouver que $\tilde{f}$ s'étend à $\tilde{B}^{m+k+1}$. Soit $X=\tilde{B}^{m+k+1}$ et $Y=\tilde{S}^{m+k}$. Y est un souspolyèdre de X et X est contractile. Les obstructions à l'extension de $\tilde{f}$ appartiennent à

$$H^{i+1}(X, Y; \pi_i(S^k)) = H^i(Y, \pi_i(S^k))$$

pour $i \geqslant 1$.

Si Z est un espace topologique compact sur lequel G opère et $\Sigma(Z)$ est la suspension (non-réduite) de Z, alors G opère sur $\Sigma(Z)$ et $\Sigma(Z)/G$ est canoniquement homéomorphe à $\Sigma(Z/G)$. Or, $S^{m+k}=\Sigma^{k+1}(S^{m-1})$ comme G-espaces. Donc, $Y=\Sigma^{k+1}(\tilde{S}^{m-1})$. Alors

$$H^i(Y, \pi_i(S^k)) = H^{i-k-1}(\tilde{S}^{m-1}, \pi_i(S^k))$$

pour $i>k+1$ et

$$H^i(Y, \pi_i(S^k)) = 0$$

pour $0<i\leqslant k+1$.

Soit $k+1<i<m+k$. Alors

$$\pi_i(S^k) = \pi_{(i-k)+k}(S^k) = \textstyle\prod_{i-k}$$

puisque $k>m+1>(i-k)+1$. Mais comme $i-k-1<m-1$,

$$H^{i-k-1}(\tilde{S}^{m-1}, \textstyle\prod_{i-k}) = H^{i-k-1}(G, \textstyle\prod_{i-k}).$$

Par l'hypothèse sur l'ordre de G on a $H^{i-k-1}(G, \prod_{i-k})=0$.

Pour $i>m+k$, $H^{i-k-1}(\tilde{S}^{m-1}, \pi_i(S^k))=0$.

Il reste l'obstruction

$$\xi \in H^{m+k+1}(X, Y, \textstyle\prod_m).$$

Puisque, par hypothèse, f s'étend à B^{m+k+1}, ξ va à zéro par l'application

$$p: H^{m+k+1}(X, Y, \textstyle\prod_m) \to H^{m+k+1}(B^{m+k+1}, S^{m+k}, \textstyle\prod_m).$$

Mais on a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
H^{m+k+1}(X, Y, \prod_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p"] & H^{m+k}(Y, \prod_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^{m-1}(\tilde{S}^{m-1}, \prod_m) \arrow[d] \\
H^{m+k+1}(B^{m+k+1}, S^{m+k}, \prod_m) \arrow[r, "\sim"] & H^{m+k}(S^{m+k}, \prod_m) \arrow[r, "\sim"] & H^{m-1}(S^{m-1}, \prod_m)
\end{tikzcd}$$

La dernière flèche est injective parce que $S^{m-1} \to \tilde{S}^{m-1}$ est de degré égal à l'ordre de G, qui est premier avec l'ordre de $\prod_m$. Donc, $p(\xi)=0$ implique $\xi=0$.

4. Réduction de l'ensemble des points fixes

On conserve les notations introduites au § 3. G sera supposé seulement fini.

DÉFINITION 1. On dit qu'une G-variété $\alpha-s$-parallélisable W est repérée si elle est munie d'un isomrphisme différentiable de $\tau(W)\oplus\eta^k(W)$ avec le G-fibré α-trivial type de dimension égale à $\dim W+k$, pour k assez grand. Si W est orienté on suppose le repérage compatible avec l'orientation.

LEMME 1. *L'ensemble des points fixes d'une G-variété $\alpha-s$-parallélisable repérée semilibre W est une variété repérée et son fibré normal dans W est α-trivial.*

Démonstration. Soit F l'ensemble des points fixes de W (on sait, par le lemme 4 du § 3, que $\dim F=\dim W-m$) et soit $x\in F$. Alors le repérage de W donne un isomorphisme de G-espaces vectoriels

$$R^m\oplus R^l=R^{m+l}\overset{\sim}{\leftrightarrow}T_x(W)\oplus R^k=N_x(F)\oplus T_x(F)\oplus R^k$$

($\dim W+k=m+l$) (T, espace tangent; N, espace normal). Comme l'action de G sur $R^m-\{0\}$ et sur $N_x(F)-\{0\}$ est libre, et triviale sur R^l et $T_x(F)\oplus R^k$, cet isomorphisme se décompose en deux isomorphismes:

$$R^l\overset{\sim}{\leftrightarrow}T_x(F)\oplus R^k\quad\text{et}\quad R^m\overset{\sim}{\leftrightarrow}N_x(F).$$

Le premier donne le repérage de F et le second donne la α-trivialisation du G-fibré normal $\nu(F)$.

DÉFINITION 2. Dnas les conditions du lemme 1, on notera $r(W)\in\prod_{\dim W-m}$ la classe de cobordisme repéré de la réunion des composantes connexes sans bord de l'ensemble des points fixes de W.

LEMME 2. *Si $r(W)=0$ alors il existe W' $\alpha-s$-parallélisable semilibre telle que $\partial W=\partial W'$ et l'ensemble des points fixes de W' ne contient aucune composante connexe sans bord.*

LEMME 3. *Soient W, W' deux G-variétés semilibres $\alpha-s$-parallélisables repérées telles que $M=\partial W$ et $M'=\partial W'$ soient des α-sphères homotopiques. Soient:*

$$f:B_+^{m+1}\to -W\quad\text{et}\quad g:B_+^{m+1}\to W'$$

des plongements orientés équivariants, où

$$B_+^{m+1}=\{x\in B^{m+1}\mid x=(x_1,\dots,x_m)\ \ \textit{avec}\ \ x_m\geqslant 0\}.$$

Soit

$$\dot{B}_+^{m+1} = \{x \in B_+^{m+1} \mid \|x\| < 1\}$$

et soit

$$W \# W' = (W - f(\dot{B}_+^{m+1})) \cup_{g \circ f^{-1}} (W' - g(\dot{B}_+^{m+1}))$$

Alors $\partial(W \# W) = M \# M'$ *et on peut modifier les repérages de* W *et* W' *au voisinage de* $f(B_+^{m+1})$ *et* $g(B_+^{m+1})$ de *façon à qu'ils se recollent et donnent un repérage de* $W \# W'$. *En particulier,* $W \# W'$ *est* $\alpha - s$*-parallélisable repérée et*

$$r(W \# W') = r(W) + r(W').$$

LEMME 4. *Soit* M *une* α*-sphère homotopique qui est le bord d'une* G*-variété* $\alpha - s$*-parallélisable semilibre. Alors* M *est le bord d'une* G*-variété semilibre* $\alpha - s$*-parallélisable repérée* W *telle que* $r(W) = 0$.

Si W est une variété $\alpha - s$-parallélisable semilibre dont le bord est une α-sphère homotopique alors l'ensemble des points fixes de W est de dimension 1 (lemme 1 du § 3) et composé d'un arc qui relie les deux points fixes du bord et de plusieurs composantes connexes difféomorphes à S^1. Alors les lemmes 2 et 4 impliquent immédiatement la:

PROPOSITION 1. *Supposons* G *d'ordre impair. Alors tout élément de* $\wedge_m(\alpha)$ (*voir prop.* 3 *du* § 3) *est la classe d'une* α*-sphère homotopique qui est le bord d'une* G*-variété* $\alpha - s$*-parallélisable semilibre dont l'ensemble des points est difféomorphe à* $[0, 1]$.

Démonstration du lemme 2. On va introduire une construction générale sur une G-variété $\alpha - s$-parallélisable W.

Soit $V \subset W$ une sous G-variété *de la même dimension* telle que $V \cap \partial W = \emptyset$. V est alors une G-variété $\alpha - s$-parallélisable repérée (par restriction) et son repérage induit un repérage de ∂V. Soit V' une G-variété $\alpha - s$-parallélisable repérée (de la même dimension que V et W) et soit $f: \partial V \to \partial V'$ un isomorphisme compatible avec les repérages. Alors la G-variété

$$W' = (W - (\text{interieur de } V)) \cup_f V'$$

est $\alpha - s$-parallélisable et $\partial W = \partial W'$.

Maintenant, soit F la réunion des composantes connexes sans bord de l'ensemble des points fixes de W. Par le lemme 1 F admet un voisinage tubulaire stable V isomorphe à $B^m \times F$. Sur V on a le repérage induit par celui de W et aussi le repérage produit de celui de F avec celui (canonique) de B^m. Ces deux repérages coincident sur F. Comme V se rétracte par déformation équivariante sur F on peut modifier le repérage de W au voisinage de V de telle façon qu'il induise sur V le repérage produit.

Ceci fait on prend une variété repérée N dont le bord soit F (comme variété repérée) ce qui est possible par l'hypothèse $r(W)=0$. Alors $V'=S^{m-1}\times N$ est une G-variété (G opère trivialement sur N) $\alpha-s$-parallélisable avec le repérage produit de celui de S^{m-1} (induite par $S^{m-1}=\partial B^m$) et celui de N. On applique maintenant la construction introduite plus haut et on obtient W' $\alpha-s$-parallélisable telle que $\partial W'=\partial W$. Mais comme G opère librement sur V' on a éliminé F de l'ensemble des points fixes, c.q.f.d.

Démonstration du lemme 3. Ce lemme suit immédiatement du fait que $S_+^m=\{x\in B_+^{m+1} \mid \|x\|=1\}\cong B^m$ est contractile de façon équivariante et du lemme 5 du § 1.

Démonstration du lemme 4. Soit $T=B^m\times S^1$ qui est une G-variété (G opère trivialement sur S^1) $\alpha-s$-parallélisable sur laquelle on prend le repérage produit de celui de B^m avec celui de S^1 donné par l'isomorphisme évident $\tau(S^1)\tilde{\rightarrow}\eta^1(S^1)$. (Avec ce repérage S^1 représente le générateur de $\prod_1$).

Soient T_1, T_2 deux exemplaires de T et soit $L=T_1\cup T_2$ obtenu en identifiant les bords (c.-à-d., L est le «double» de T). Il est facile à voir que L est $\alpha-s$-parallélisable et admet un repérage qui induit sur $T_1=T$ le repérage donné.

Soit C le demi-cercle formé par les points z de S^1 de la forme $z=e^{i\theta}$ avec $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Alors si on enlève dans L l'intérieur de l'ensemble des points de T_2 de la forme (x, y), $x\in B^m$, $y\in C$ et on lisse les coins de ce qui reste on obtient L' telle que:

a) L' est une G-variété semilibre $\alpha-s$-parallélisable repérée,

b) $\partial L'$ est isomorphe *à* S^m

c) $r(L')\in\prod_1$ est le générateur.

Maintenant, pour prouver le lemme 4, supposons $M=\partial W$ où W est une G-variété semilibre $\alpha-s$-parallélisable repérée. Si $r(W)=0$ c'est trivial. Supposons $r(W)\neq 0$. Alors on forme $W'=W\# L'$ d'après le lemme 3 et on a: $\partial W'\cong\partial W\#\partial L'\cong M\# S^m\cong M$ et $r(W')=r(W)+r(L')=0$ puisque $\prod_1=Z_2$, ce qui complète la démonstration.

5. Modifications sphériques

On introduit maintenant les modifications sphériques (voir [7] § 5 et § 6). Soit M une G-variété semilibre de dimension $n=r+s+1$. Soit F l'ensemble des points fixes de M. Soit

$$\varphi: S^r\times B^{s+1}\rightarrow M-F$$

un plongement tel que $g(\varphi(S^r\times B^{s+1}))\cap\varphi(S^r\times B^{s+1})=\emptyset$ pour tout $g\in G, g\neq 1$. Faisons opérer G sur $G\times B^{r+1}\times S^s$ par

$$g(h, x, y)=(gh, x, y).$$

DÉFINITION 1. La *modification sphérique* correspondante à φ est la G-variété $M' = \chi(M, \varphi)$ obtenue de la somme disjointe

$$(M - \cup_{g \in G} g\varphi(S^r \times 0)) + G \times B^{r+1} \times S^s$$

en identifiant $g\varphi(u, tv)$ avec (g, tu, v) pour tout $g \in G$, $u \in S^r$, $v \in S^s$ et $0 < t \leqslant 1$.

Soit $\varrho : S^r \to SO(s+1)$ une application différentiable. Alors on peut obtenir un noveau plongement

$$\varphi_\varrho : S^r \times B^{s+1} \to M - F$$

défini par $\varphi_\varrho(u, v) = \varphi(u, \varrho(u)v)$.

LEMME 1. *Supposons M $\alpha - s$-parallélisable. Alors on peut choisir ϱ de telle façon que $M' = \chi(M, \varphi_\varrho)$ soit aussi $\alpha - s$-parallélisable.*

Démonstration. Soit W la G-variété obtenue de la somme disjointe

$$M \times [0, 1] + G \times B^{r+1} \times B^{s+1}$$

en identifiant (g, u, v) avec $(g\, \varphi_\varrho(u, v), 1)$ pour tout $u \in S^r$, $v \in B^{s+1}$ et $g \in G$. (On suppose M sans bord; dans le cas général on raisonne sur $M - \partial M$. On peut alors lisser les coins de W pour obtenir une G-variété différentiable.) Le bord de W est la somme disjointe de M et M'.

Soit W_0 le quotient de la somme disjointe

$$M \times [0, 1] + B^{r+1} \times B^{s+1}$$

en identifiant (u, v) avec $(\varphi_\varrho(u, v), 1)$ pour tout $u \in S^r$, $v \in B^{s+1}$. (W_0 n'est pas une G-variété). On a un plongement évident $W_0 \to W$ et $W = \cup_{g \in G} gW_0$.

Par hypothèse $\tau(M) \oplus \eta^k(M)$ est α-trivial pour k assez grand. Donc, il existe $n+k$ sections linéairement indépendantes $s_1 \ldots, s_{n+k}$ de ce fibré telles que

$$(1) \qquad dg(s_1(x), \ldots, s_{n+k}(x)) = (s_1(gx), \ldots, s_{n+k}(gx))\, \alpha(g) \qquad (g \in G)$$

pour tout $x \in M$, où dg est la différentielle de $g : M \to M$ étendue trivialement à $\tau(M) \oplus \eta^k(M)$. Comme $\tau(W) | M = \tau(M) \oplus \eta^1(M)$, $s_1, \ldots, s_{n+k}$ sont des sections de $\tau(W) \oplus \eta^{k-1}(W) | M$ qui vérifient (1). On les étend trivialement à $M \times [0, 1]$ et elles continuent à satisfaire (1). D'après [7] § 6 on peut choisir ϱ de telle façon qui $s_1, \ldots, s_{n+k}$ s'étendent à des sections linéairement indépendantes de $\tau(W) \oplus \eta^{k-1}(W) | W_0$. Alors on définit des sections $u_1, \ldots, u_{n+k}$ de $\tau(W) \oplus \eta^{k-1}(W)$ par

$$(u_1(x), \ldots, u_{n+k}(x)) = dg(s_1(g^{-1}x), \ldots, s_{n+k}(g^{-1}x))\, \alpha(g^{-1})$$

pour tout $x \in W$; $g \in G$ étant choisi tel que $g^{-1}x \in W_0$. On voit immédiatement que ces sections sont bien définies, étendent les $s_1, \ldots, s_{n+k}$ et donnent un isomorphisme de $\tau(W) \oplus \eta^{k-1}(W)$ avec le G-fibré α-trivial.

PROPOSITION 1. *Supposons G d'ordre impair. Alors tout élément de $\wedge_m(\alpha)$ est le bord d'une G-variété semilibre $\alpha-s$-parallélisable W dont l'ensemble des points fixes est difféomorphe à* $[0, 1]$ *et telle que* $\pi_0(W)=\pi_1(W)=\cdots=\pi_{n-1}(W)=0$ *où* $n=m/2$.

Démonstration. On suppose $m\geqslant 4$ puisque pour $m=2$ tout est trivialement déduit de [6].

Observons tout d'abord que quand on fait une modification sphérique du type décrit dans la définition 1 on obtient une variété qui resulte de t modifications sphériques usuelles si t est l'ordre de G.

Par la proposition 1 du § 4 tout élément de $\wedge_m(\alpha)$ est la classe d'une α-sphère homotopique qui est le bord d'une G-variété $W\alpha-s$-parallélisable, semilibre, et dont l'ensemble F des points fixes est difféomorphe à $[0, 1]$. Soit $r\leqslant n$. Tout élément $x\in\pi_r(W)$ peut être représenté par une application $f: S^r\to W-(F\cup\partial W)$ puisque $r+1<2n+1=\dim W$. La composition

$$S^r \to W-(F\cup\partial W)\to(W-(F\cup\partial W))/G$$

est homotopique à un plongement $S^r\to(W-(F\cup\partial W))/G$ parce que $2r+1\leqslant 2n+1=\dim W$. En relevant ce plongement on obtient un plongement $f_1: S^r\to W-(F\cup\partial W))$ qui représente x et tel que

$$gf_1(S^r)\cap f_1(S^r)=\emptyset \quad \text{pour tout} \quad g\in G, g\neq 1\,.$$

Alors, d'après le lemme 1 et le lemme 5.2 de [7], on peut tuer les groupes d'homotopie de dimension $\leqslant n-1$ de W par des modifications sphériques successives sans modifier le bord et en conservant la $\alpha-s$-parallélisabilité de W, ce qui démontre la proposition.

LEMME 2. *Soit*

$$\varphi: S^n\times B^{n+1}\to W-F-\partial W$$

un plongement qui vérifie la condition pour pouvoir définir $W'=\chi(W, \varphi)$. Soit W_0 l'adhérence de $W-\cup_{g\in G} g\varphi(S^n\times B^{n+1})$. Alors on a un diagramme commutatif de $Z[G]$-modules et $Z[G]$homomorphismes:

$$\begin{tikzcd}
 & & H_{n+1}(W', Z) \arrow[d, ".\lambda'"] & & \\
 & & Z[G] \arrow[d, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\
H_{n+1}(W, Z) \arrow[r, ".\lambda"] & Z[G] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & H_n(W_0, Z) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(W, Z) \arrow[r] & 0 \\
 & & H_n(W', Z) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

tel que les lignes horizontales et verticales sont exactes et où: λ dénote la classe d'homologie qui correspond à $\varphi | S^n \times 0$ et aussi l'homomorphisme $x \to x.\lambda$ de $Z[G]$ dans $H_n(W, Z)$; $.\lambda$ dénote l'homomorphisme

$$\mu \to \Sigma_{g \in G}(\mu . g\lambda)\, g \quad \textit{de } H_{n+1}(W, Z) \textit{ dans } Z[G]$$

($(\mu.g\lambda)$ = indice d'intersection de μ avec $g\lambda$); et de manière analogue pour λ' et $.\lambda'$. En conséquence $H^n(W, Z)/Z[G].\lambda \cong H^n(W', Z)/Z[G].\lambda'$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 5.6 de [7].

Dans ce qui suit on notera avec la même lettre un élément de $H_n(W, Z)$ et son image dans $H_n(W, Q)$.

Pour tout $x \in Q[G]$ on notera $\bar{x}$ le correspondant de x par l'application Q-linéaire $Q[G] \to Q[G]$ qui envoie g dans g^{-1} pour tout $g \in G$. Si I est un sous-ensemble de $Q[G]$, $\bar{I}$ dénotera son image par cette application.

LEMME 3. *Avec les hypothéses du lemme 2, soit I l'annulateur (à gauche) de λ dans $Q[G]$* et *I' celui de λ'. Alors $1 \in I + \bar{I}'$.*

Démonstration. D'abord observons qu'on peut, en appliquant le foncteur $\otimes_Z Q$, obtenir un analogue du lemme 2 à coefficients rationnels.

L'application naturelle $x \to x\lambda$ de $Q[G]$ sur $Q[G]\lambda \subset H_n(W, Q)$ admet une inverse à droite $j: Q[G]\lambda \to Q[G]$ puisque $Q[G]$ est sime-simple. Par la même raison j s'étend à un homomorphisme de $Q[G]$-modules à gauche, qu'on dénote encore j, de $H_n(W, Q)$ dans $Q[G]$.

Soit $p: Q[G] \to Q$ l'application Q-linéaire donnée par

$$p(\Sigma_{g \in G} n_g . g) = n_1$$

où les n_g appartiennent à Q et 1 est l'unité de G. Alors, comme le bord de W est une sphère homologique, la dualité de Poincaré nous dit qu'il existe $\mu \in H_{n+1}(W, Q)$ tel que la forme linéaire $p \circ j$ sur $H_n(W, Q)$ satisfait $(p \circ j)(\xi) = (\mu . \xi)$ pour tout $\xi \in H_n(W, Q)$.

Considérons l'homomorphisme de $Q[G]$-modules à gauche

$$\varphi: H_n(W, Q) \to Q[G]$$

donné par $\varphi(\xi) = \Sigma_{g \in G}(\mu . g\xi) g^{-1}$ pur tot $\xi \in H_n(W, Q)$. Alors $p \circ (j - \varphi) = 0$, ce qui implique $j = \varphi$. On a donc

$$\varphi(\lambda) = j(\lambda) = \Sigma_{g \in G}(\mu . g\lambda)\, g^{-1} \in \overline{\mathrm{Im}(.\lambda)}.$$

D'après le lemme 2 $\mathrm{Im}(.\lambda) \subset I'$. Donc, $j(\lambda) \in \bar{I}'$. Mais, par la définition de j, $1 - j(\lambda) \in I$, c.q.f.d.

LEMME 4. *Soit W une G-variété $\alpha-s$-parallélisable semi-libre dont le bord est une α-sphère homotopique. Alors,*

a) *s'il existe $\xi \in H_n(W, Q)$ dont l'annulateur dans $Q[G]$ est nul alors il existe une G-variété W' qui vérifie les mêmes conditions que W et telle que $\partial W' \cong \partial W$ et $H_n(W', Q) \cong H_n(W, Q)/Q[G].\xi$ comme $Q[G]$-modules.*

b) *il existe toujours une G-variété W'' $\alpha-s$-parallélisable semi-libre telle que $\partial W'' \cong \partial W$ et*

$$H_n(W'', Q) \cong H_n(W, Q) \oplus Q[G]$$

comme $Q[G]$-modules.

W' et W'' ont le *même ensemble de points fixes que W.*

Démonstration. (a) est une conséquence facile des lemmes 2 et 3. Pour prouver (b) choisissons un point $x \in W - \partial W$ qui ne soit pas fixe et un voisinage U de x difféomorphe à R^{m+1} et tel que $U \cap gU = \emptyset$ pour tout $g \in G, g \neq 1$. Faisons la modification sphérique correspondante à la sphère plongée dans U qui correspond à la sphère

$$\|x\| = 1 \qquad x_{n+2} = \cdots = x_{m+1} = 0$$

de R^{m+1}. Dans le diagramme du lemme 2 correspondant à cette modification l'homomorphisme vertical $\varepsilon' : Z[G] \to H_n(W_0, Z)$ est nul. Donc, $.\lambda'$ est surjectif. Ceci implique l'annulateur de λ' est nul. parce que alors les éléments $g\lambda$, $g \in G$ sont indépendants sur Z. Comme $Q[G]$ est semi-simple, $Q[G].\lambda' \cong Q[G]$ est facteur direct de $H_n(W', Q)$. Donc, par le lemme 2,

$$H_n(W', Q) \cong H_n(W, Q) \oplus Q[G]$$

puisque $\lambda = 0$.

LEMME 5. *Supposons G cyclique. Alors $\bar{I} = I$ pour tout idéal I de $Q[G]$.*

Démonstration. Prouvons d'abord que si I, I' sont deux idéaux isomorphes de $Q[G]$ (isomorphes comme $Q[G]$-modules) alors $I = I'$. En effet, $Q[G] = I \oplus J$, J étant un idéal. Il est clair que, l'annulateur $\mathrm{Ann}(I)$ de I est J. Donc, $\mathrm{Ann}(I') = J$. D'après ce qu'on vient de voir pour I appliqué à I' on a $I' \cap J = 0$. Mais si $1 = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in I$ et $a_2 \in J$ alors $I' = I'a_1 + I'a_2$ où $I'a_1 \subset I \cap I'$ et $I'a_2 \subset J \cap I$, on aura $I' = I'a_1 \subset I$. Par le même raisonnement $I \subset I'$.

Pour prouver le lemme il suffit d'observer que $\bar{I}$ est un ideal isomorphe à I. Cette derniére assertion se déduit du fait qu'une matrice réelle d'ordre fini a la même trace que son inverse. Donc, I et $\bar{I}$ ont le même caractère et sont alors isomorphes ([5] cor. 30. 14), c.q.f.d.

Considérons maintenant le groupe $\tilde{K}_0\, Q[G]$ des classes projectives de $Q[G]$ (défini dans [9] app. 2). On peut le définir en prenant le quotient de l'ensemble des $Q[G]$-modules de type fini par la relation d'équivalence: *M est équivalent à M' si et seulement si il existe deux modules libres de type fini L, L' tels que $M \oplus L$ soit isomorphe à $M' \oplus L'$.* L'opération de somme directe passe au quotient et définit une loi de groupe (abélien) puisque $Q[G]$ est semi-simple. Pour chaque $Q[G]$-module de type fini M on notera $[M]$ sa classe dans $\tilde{K}_0 Q[G]$.

Si W est une G-variété dont le bord est une α-sphère homotopique et qui satisfait les conditions de la proposition 1, on notera

$$[W] = [H_n(W, Q)] \in \tilde{K}_0\, Q[G] \qquad (n = m/2).$$

Soit $S_m(\alpha) \subset \tilde{K}_0\, Q[G]$ le sous-groupe engendré par tous les éléments de la forme $[W]$ avec ∂W $G-h$-cobordant à S^m. D'après le lemme 3 du § 4, et compte tenu du fait que $H_n(W \# W'\, Q) = H_n(W, Q) \oplus H_n(W', Q)$, on voit que tout élément de $S_m(\alpha)$ est de la forme $[W_1] - [W_2]$ où ∂W_1, ∂W_2 sont $G-h$-cobordants à S^m.

PROPOSITION 2. *Supposons G cyclique d'ordre impair. Soit M une α-sphère homotopique qui représente un élément de $\wedge_m(\alpha)$. Posons $M = \partial W$ où W vérifie les conditions de la proposition* 1. *Soit $v(M)$ la classe de $[W]$ modulo $S_m(\alpha)$. Alors*

$$v\colon \wedge_m(\alpha) \to \tilde{K}_0\, Q[G]/S_m(\alpha)$$

est un homomorphisme dont le noyau $\Phi_m(\alpha)$ vérifie:

a) *Tout élément de $\Phi_m(\alpha)$ est la classe d'une α-sphère homotopique qui est le bord d'un G-variété W qui vérifie les conditions de la proposition* 1 *et, en plus, telle que $H_n(W, Z)$ est fini.*

b) $\wedge_m(\alpha)/\Phi_m(\alpha)$ *est abélien fini.*

Démonstration. Montrons d'abord que v est bien défini. Si W, W' sont deux G-variétés qui vérifient les conditions de la proposition 1 et telles que ∂W soit $G-h$-cobordant avec $\partial W'$, alors

$$[W \# - W'] = [W] + [W'] \in S_m(\alpha)$$

puisque $\partial(W \# - W') = \partial W \# - \partial W'$ est $G-h$-cobordant à S^m. Le même raisonnement prouve que $2[W] \in S_m(\alpha)$. Donc, $[W'] - [W] \in S_m(\alpha)$. Donc v est bien défini et son image est un groupe de 2-torsion. Comme $\tilde{K}_0\, Q[G]$ est abélien de type fini on a prouvé (b). Il reste à prouver la partie (a).

Soit M une α-sphère homotopique qui représente un élément de $\Phi_m(\alpha)$. Alors M est le bord d'une G-variété W qui vérifie les conditions de la proposition 1 et

$$[W] = [V] - [V']$$

où V et V' vérifient les mêmes conditions que W et ∂V et $\partial V'$ sont $G-h$-cobordantes avec S^m. En prenant $W \# V'$ au lieu de W on peut supposer $[W]=[V]$. Alors

$$H_n(W, Q) \oplus L \cong H_n(V, Q) \oplus L'$$

où L et L' sont des $Q[G]$-modules libres de type fini. Par le lemme 4b on voit alors que, en changeant convenablement W et V, on peut supposer

$$H_n(W, Q) \cong H_n(V, Q).$$

Soit $H_n(W, Q)=M_1\oplus\cdots\oplus M_k$ où chaque M_i est engendré par un seul élément $m_i\neq 0$, $m_i\in H_n(W, Z)$. Faisons les modifications sphériques correspondantes à $m_1,\ldots,$ m_k. On obtiendra W' telle que

$$H_n(W', Q) = M_1' \oplus\cdots\oplus M_k'$$

où M_i' est engendré par m_i' tel que

$$\mathrm{Ann}(m_i) + \mathrm{Ann}(m_i') = Q[G]$$

(Ann = annulateur) (lemmes 3 et 5).

Soit $W_1 = W' \# V$ et $V_1 = W \# - W'$. Alors ∂W_1 est $G-h$-cobordant avec M, $\partial \mathrm{V}_1$ est $G-h$-cobordant avec S^m et $H_n(W_1, Q)\cong H_n(V_1, Q)$. D'autre part,

$$H_n(W_1, Q) \cong M_1 \oplus M_1' \oplus\cdots\oplus M_k \oplus M_k'.$$

Je dis que $M_i\oplus M_i'$ est engendré m_i+m_i'. En effet, soit am_i+bm_i' un élément de $M_i\oplus M_i'$. Soit $a-b=x+y$ $x\in\mathrm{Ann}(m_i)$ $y\in\mathrm{Ann}(m_i')$. Alors

$$am_i + bm_i' = (a-x)\, m_i + (b+y)\, m_i' = (a-x)(m_i + m_i').$$

On a, en plus, $\mathrm{Ann}(m_i+m_i')=\mathrm{Ann}(m_i)\cap\mathrm{Ann}(m_i')$. Donc, ou bien $m_i'=0$ ou bien $\mathrm{Ann}(m_i+m_i')\neq\mathrm{Ann}(m_i)$. Soit $m_i''=m_i+m_i'$ et $M_i''=M_i\oplus M_i'$. Alors, ou bien $H_n(W', Q)\cong 0$ ou bien

$$H_n(W_1, Q) \cong M_1'' \oplus\cdots\oplus M_k''$$

où M_i'' est engedré par m_i'' tel que $\mathrm{Ann}(m_i'')\subset\mathrm{Ann}(m_i)$ pour tout i et $\mathrm{Ann}(m_i'')\neq\mathrm{Ann}(m_i)$ pour au moins un i. En répétant le procédé avec W_1, V_1, etc, on arrivera à une G-variété W_k telle que ∂W_k est $G-h$-cobordante avec M et $H_n(W_k, Q)=0$, c.q.f.d.

6. Le théorème de finitude

Dans ce qui suit on suppose toujours $m\geqslant 4$. Pour $m=2$ tout est trivial (voir [6]).

LEMME 1. *Soit W une G-variété semilibre dont le bord est une α-sphère homotopique et qui vérifie les conditions suivantes:*

a) *W est $\alpha-s$-parallélisable.*

b) *L'ensemble F des points fixes de W est difféomorphe à* $[0, 1]$.

c) $\pi_0(W)=\pi_1(W)=\cdots=\pi_{n-1}(W)=0$ et $H_n(W, Z)$ fini, $n=m/2$.

Alors $H_n(W, Z)$ est, comme $Z[G]$-module, le quotient d'un module libre de type fini par sous-module libre de type fini.

LEMME 2. *Soit*

$$0 \to C_q \to C_{q-1} \to \cdots \to C_0 \to 0$$

une suite exacte de modules à gauche sur un anneau avec unité A.

a) *Si C_j est libre de type fini pour $0 \leqslant j \leqslant q-1$, il existe un A-module libre de type fini L tel que $C_q \oplus L$ est libre de type fini.*

b) *Si C_0 est projectif et C_j est libre de type fini pour $1 \leqslant j \leqslant q$, alors il existe un A-module libre de type fini L' tel que $C_0 \oplus L'$ est libre de type fini.*

Le lemme 2 se démontre directement par récurrence.

Démonstration du lemme 1. Soit T un voisinage tubulaire équivariant de F dans W. Alors $T \cong I \times B^m$. Soit ∂T l'image de $I \times S^{m-1}$ par cet isomorphisme. Soit V l'adhérence de $W-T$. On a par la suite exacte d'homologie, excision et homotopie:

$$H_j(V, \partial T; Z) = H_j(W, Z) \quad \text{pour} \quad j > 0$$

et

$$H_0(V, \partial T; Z) = 0.$$

Donc, d'après les hypothèses sur W et la dualité de Poincaré,

$$H_j(V, \partial T; Z) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq n \quad \text{et} \quad H_n(V, \partial T; Z) = H_n(W, Z).$$

Comme G opère librement sur V, la paire $(V, \partial T)$ admet une triangulation invariante par G. Soit $C_* = C_*(V, \partial T; Z)$ le complexe de chaînes simpliciales de cette triangulation. Chaque C_j est un $Z[G]$-module libre de type fini. On a les suites exactes de $Z[G]$-modules:

$$0 \to C_{m+1} \to C_m \to \cdots \to C_{n+1} \to B_n(C_*) \to 0$$
$$0 \to B_n(C_*) \to Z_n(C_*) \to H_n(W, Z) \to 0$$
$$0 \to Z_n(C_*) \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \to 0.$$

Par le lemme 2 a cette dernière suite exacte nous dit qu'il existe un $Z[G]$-module libre de type fini L tel que $Z_n(C_*) \oplus L$ est libre de type fini.

D'autre part, la première suite exacte montre que $H_j(G, B_n(C_*))=0$ si $j>m+1$. Mais comme G opère librement sur S^{m-1} sa cohomologie est périodique ([3]). Donc, $H_j(G, B_n(C_*))=0$ pour tout $j \geqslant 1$ et analoguement pour tout sous-groupe de G. Comme $B_n(C_*)$ est un Z-module libre de type fini on en déduit, d'après [12], que $B_n(C_*)$ est $Z[G]$-projectif. Alors le lemme 2b nous dit qu'il existe un $Z[G]$-module libre de type fini L' tel que $B_n(C_*)\oplus L'$ est libre de type fini. Alors,

$$H_n(W, Z) = Z_n(C_*)/B_n(C_*) = Z_n(C_*)\oplus L \oplus L'/B_n(C_*)\oplus L \oplus L'$$

ce qui démontre le lemme 1.

Il s'agira maintenant de montrer que le groupe $\Phi_n(\alpha)$ est fini.

Reprenons la G-variété à coins V définie plus haut. En lissant les coins de V on obtient une G-variété à bord dont le bord est du type d'homotopie équivariant de $S^{m-1}\times S^1$ (G opérant trivialement sur S^1). On voit facilement que V est simplement connexe et que

$$H_i(V, Z) = H_i(W, Z) \quad \text{si} \quad i \neq m-1$$

et

$$H_{m-1}(V, Z) = Z$$

même si $m=4$. (On rappelle que $H_i(W, Z)=0$ si $i\neq 0$, n, $H_0(W, Z)=Z$ et $H_n(W, Z)$ est fini.) En particulier, par le lemme 1, il existe une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to L' \to L \xrightarrow{p} H_n(V, Z) \to 0$$

de $Z[G]$-modules où L et L' sont libres de type fini. Soit $e_1, \ldots, e_s$ une base de L et soit $x_j = p(e_j)$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Soient

$$f_j : S^n \to V - \partial V \qquad 1 \leqslant j \leqslant s$$

des applications continues qui représentent les éléments x_j, $1\leqslant j \leqslant s$, de $\pi_n(V)= H_n(V, Z)$. Attachons à V st exemplaires de B^{n+1} ($t=$ ordre G) au moyen des applications gf_j, $1\leqslant j\leqslant s$, $g\in G$. On obtient ainsi un G-espace simplement connexe X_0 qui contient V et tel que, par identification de la suite exacte d'homologie de (X_0, V) avec $(*)$:

$$H_i(X_0, Z) = H_i(V, Z) \quad \text{si} \quad i \neq n, n+1$$
$$H_n(X_0, Z) = 0 \quad \text{et} \quad H_{n+1}(X_0, Z) = H_{n+1}(V, Z)\oplus L'$$

(naturellement, $H_{n+1}(V, Z)=0$ si $m>4$). Soit $y_1, \ldots, y_r$ une base de L' et soient

$$h_i : S^{n+1} \to X_0 - \partial V \qquad 1 \leqslant i \leqslant r$$

des représentants des $y_i \in \pi_{n+1}(X_0) = H_{n+1}(X_0, Z)$. En attachant à X_0 rt exemplaires de B^{n+2} au moyen des applcations gh_i, $1\leqslant i \leqslant r$, $g\in G$, on obtient un G-espace simplement connexe X qui contient V et tel que

$$H_j(X, Z) = 0 \quad \text{si} \quad j \neq 0, m-1;\ H_0(X, Z) = H_{m-1}(X_0, Z) = Z.$$

Soit $Y = \partial V$. Alors, comme $(V, \partial V)$ est une paire de Poincaré orientée ([15] § 2) on voit facilement que (X, Y) est une paire de Poincaré orientée de dimension $m+1$. Soit $X'=X/G$ et $Y'=Y/G$. Comme G opère librement et en conservant l'orientation sur X, (X', Y') est aussi une paire de Poincaré orientée de dimension $m+1$ ([15] § 2).

Soit $V'=V/G$. Alors l'inclusion $V\subset X$ induit au quotient une application de degré 1

$$\psi: V' \to X'$$

telle que $\psi|\partial V': \partial V' \to Y'$ est une équivalence d'homotopie (et même un homéomorphisme). En plus,

$$\pi_i(\psi)=0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et}$$
$$\pi_{n+1}(\psi)=\pi_n(V')=\pi_n(V)=H_n(V, Z)=H_n(W, Z)$$

est fini. On est donc en mesure d'appliquer les résultats de [15] § 5; en particulier le théorème 5.6. Dans la page 258 de [15] il est défini un certain «groupe de Grothendieck» qui est associé à chaque groupe G et chaque entier positif k. On va le noter ici $W_k(G)$. L'obstruction à l'annulation de $\pi_{n+1}(\psi)$ par des modifications sphériques successives est un élément de $W_{n+1}(G)$ qui ne dépend pas du choix de T et de la construction de X (voir lemme 4 du § 2) et qu'on notera $\Gamma(W)$ ([15] § 5; en particulier, théorème 5.6 et lemme 5.7).

Soit $\mathscr{U}_m(\alpha)$ le sous-ensemble de $W_{n+1}(G)$ formé par les éléments de la forme $\Gamma(W)$ avec W vérifiant les conditions (a), (b), (c) du lemme 1 et, en plus, ∂W $G-h$-cobordante avec S^m. On voit que $\mathscr{U}_m(\alpha)$ est un sous-groupe (voir proposition 2 du § 5). Alors on a:

PROPOSITION 1. *Supposons G cyclique d'ordre impair. Soit M une α-sphère homotopique qui est le bord d'une G-variété W qui vérifie les conditions* (a), (b), (c) *du lemme* 1. *Soit $\gamma(M)$ la classe de $\Gamma(W)$* modulo $\mathscr{U}_m(\alpha)$. *Alors $M\to \gamma(M)$ définit un homomorphisme*

$$\gamma: \Phi_m(\alpha) \to W_{n+1}(G)/\mathscr{U}_m(\alpha)$$

(*voir proposition* 2 *du* § 5) *et cet homorphisme est injectif.*

Démonstration. Le fait que γ est un homomorphisme bien défini est évident.

Supposons $\gamma(M)=0$. Alors $M=\partial W$ où W est une G-variété qui vérifie les conditions (a), (b), (c) du lemme 1 et pour laquelle il existe une autre G-variété W' vérifiant les mêmes conditions et telle que $\partial W'$ est $G-h$-cobordant avec S^m, qui satisfait $\Gamma(W')=\Gamma(W)$. En prenant $W\# -W'$ au lieu de W on peut supposer $\Gamma(W)=0$. Ceci implique ([15] § 5) qu'on peut annuler $\pi_{n+1}(\psi)$ par des modifications sphériques successives, sans toucher ∂V, Mais faire une modification sphérique usuelle sur V équivaut à faire une modification sphérique du type décrit dans le § 5 sur W. Donc, on peut tuer $H_n(W, Z)=\pi_{n+1}(\psi)$ par des modifications sphériques équivariantes. Alors,

M est bord d'une G-variété semilibre contractile, ce qui implique immédiatement que M est $G-h$-cobordant avec S^m, c.f.q.d.

Conjecture algébrique (C.T.C. Wall). *Si G est fini alors $W_k(G)$ est fini pour tout k.*

Cette conjecture est de nature tout à fait algébrique parce que $W_k(G)$ est défini de facon purement algébrique.

PROPOSITION 2. *Supposons G cyclique d'ordre impair. Si $W_{n+1}(G)$ est fini alors $\Theta_m(\alpha)$ est fini ($n=m/2$).*

Démonstration. Ceci résulte de la proposition 1, de la proposition 2 du § 5, de la proposition 1 du § 4 et de la proposition 3 du § 3.

THEOREME. *Soit M une sphère homotopique de dimension $m \geqslant 6$ et soit G un groupe fini cyclique d'ordre impair. Considérons toutes les actions semi-libres avec exactement deux points fixes de G sur M et disons que deux telles actions sont équivalentes si elles sont conjuguées par un difféomorphisme de M. Soit $D_G(M)$ l'ensemble des classes d'equivalence. Alors si $W_{n+1}(G)$ est fini ($n=m/2$), $D_G(M)$ est aussi fini.*

Démonstration. Ceci résulte du théorème d'Atiyah-Bott [1], de la proposition 2, du corollaire 2 à la proposition 1 du § 2 et du fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations non-équivalentes de G dans $GL(m, R)$.

Note: On remarque ce qu'on a noté $W_k(G)$ est le groupe d'obstructions aux modifications sphériques en dimension $2k-1$.

Appendice

Dans cet appendice on va indiquer comment il faut modifier les résultats et démonstrations des paragraphes prédédents quand G est d'ordre pair, *tout en supposant G cyclique.*

Dans le § 1 il fait distinguer deux cas: $G=Z_2$ et $G\neq Z_2$.

Supposons $G\neq Z_2$. Alors tous les résultats du § 1 sont valables avec essentiellement les mêmes démonstrations.

Si $G=Z_2$ il faut modifier la notion de α-sphère homotopique. Dans ce cas, il faut supposer *choisi* un ordre dans l'ensemble des points fixes. Si M est une α-sphère homotopique on dénote m_0 le «premier» point fixe et m_1, le «deuxième». Un isomorphisme entre deux α-sphères homotopiques doit conserver l'ordre des points fixes. Pour définir le $G-h$-cobordisme on ajoute à la définition 3 du § 1 la condition que $f_0^{-1}(m_0)$ et $f_1^{-1}(n_0)$ appartiennent à la même composante connexe de l'ensemble des points fixes de W (voir lemme 7 du § 1). Dans la définition 4 du § 1 il faut *supposer*

$f_1(0)=m_1$ et $f_2(0)=n_0$. Dans ces conditions la proposition 1 du § 1 est valable avec les modifications évidentes.

Tous les résultats du § 2 sont valables pour G d'ordre pair, avec les mêmes démonstrations. En particulier, la proposition 2 du § 2 est valable si $G=Z_2$.

La proposition 1 du § 3 est valable pour G d'ordre pair avec la même démonstration. Par contre, je ne sais pas si la proposition 2 est valable pour G d'ordre pair. Alors, on procède de la façon suivante. On considère le sous-groupe $\Theta'_m(\alpha)$ de $\Theta_m(\alpha)$ formé par les α-sphères homotopiques M qui admettent un plongement équivariant dans S^{m+k} avec G-fibré normal isomorphe à $\eta^k(M)$. Si M est une α-sphère homotopique quelconque plongée dans S^{m+k} et si on essaye de construire un isomorphisme du G-fibré normal avec $\eta^k(M)$ on trouve une obstruction qui appartient à $[S^{m-1}/G, S0(k)]$ (voir § 3), Cette obstruction est contenue dans le noyau de l'application

$$[S^{m-1}/G, S0(k)] \to [S^{m-1}, S0(k)]$$

induite par la projection naturelle $S^{m-1} \to S^{m-1}/G$, puisque le G-fibré normal est toujours trivial en tant que fibré [7]. (On suppose $k>m+1$.) Mais il est facile de voir (cf. § 3) que ce noyau est fini. De là on déduit que $\Theta'_m(\alpha)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Theta_m(\alpha)$. Maintenant si on fait la construction précédant la proposition 3 du § 3 pour les éléments de $\Theta'_m(\alpha)$ on voit que cette proposition est valable si on substitue $\Theta'_m(\alpha)$ à $\Theta_m(\alpha)$. On appellera $\wedge'_m(\alpha)$ le noyau de l'homomorphisme μ.

Dans le § 4 l'hypothèse sur l'ordre de G n'intervient pas. Donc la proposition 1 du § 4 est valable pour G d'ordre pair si on substitue $\wedge'_m(\alpha)$ à $\wedge_m(\alpha)$.

Les résultats des §§ 5 et 6 sont valables avec les mêmes démonstrations si G est d'ordre pair. En particulier, la proposition 2 du § 5 est valable pour G d'ordre pair si on substitue $\wedge'_m(\alpha)$ à $\wedge_m(\alpha)$. Si on appelle $\Phi'_m(\alpha)$ le noyau de v dans cette proposition, alors la proposition 1 du § 6 est valable en substituant $\Phi'_m(\alpha)$ à $\Phi_m(\alpha)$. En définitive, la proposition 2 et le Théorème du § 6 sont valables pour G cyclique d'ordre pair. Comme pour $G=Z_2$ la conjecture algébrique a été prouvée par Wall [15] on a le:

THEOREME. *Soit M une sphère homotopique de dimension pair $m \geqslant 6$. Considérons l'ensemble de toutes les involutions différentiables de M qui laissent exactement deux points fixes et disons que deux telles involutions sont équivalentes si elles sont conjuguées par un difféomorphisme de M. Alors l'ensemble des classes d'équivalence est fini.*

Pour l'étude des questions de ce travail dans le cas où l'ensemble des points fixes est de dimension $\geqslant 1$ voir [23].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah and R. Bott, *A Leftschetz fixed point formula for elliptic differential operators*, Bull. Amer. Math. Soc. *72* (1966), 245–250.

[2] H. CARTAN, *Cohomologie de groupes, suite spectrale, faisceaux,* Séminaire Ecole Normale Supérieur N° 3 (1950/51).
[3] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton University Press, 1956).
[4] P. E. CONNER and E. E. FLOYD, *Differentiable Periodic Maps* (Springer, 1964).
[5] C. CURTIS and I. REINER, *Representation theory of finite groups and associative algebras* (Interscience, 1962).
[6] B. KÉRÉKJARTO, *Über die endlichen topologischen Gruppen der Kugelfläche,* Nederl. Akad. Wetensch. Proc. [Ser. A] *22* (1919), 568–569.
[7] M. KERVAIRE and J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres,* I, Ann. of Math. *77* (1963), 504–537.
[8] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem* (Princeton 1965).
[9] J. MILNOR, *Whitehead torsion,* Bull. Amer. Math. Soc. *72* (1966), 358–426.
[10] R. PALAIS, *Natural operations on differential forms,* Trans. Amer. Math. Soc. *92* (1959), 125–141.
[11] R. PALAIS, *Extending Diffeomorphisms,* Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 274–277.
[12] D. S. RIM, *Modules over finite groups,* Ann. of Math. *69* (1959), 700–712.
[13] J. P. SERRE, *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens,* Ann. of Math. *58* (1953), 258–294.
[14] G. VINCENT, *Les groupes linéaires finis sans points fixes,* Comment. Math. Helv. *20* (1947), 117–171.
[15] C. T. C. WALL, *Surgery of non-simply-connected manifolds,* Ann. of Math. *84* (1966), 217–276.
[16] A. BOREL, *Seminar on transformation groups* (Princeton University Press 1960).
[17] J. R. MUNKRES, *Elementary Differential Topology* (Princeton University Press, 1963).
[18] M. KERVAIRE, *Le théorème de Barden–Mazur–Stallings,* Comment. Math. Helv. *40* (1965), 31–42.
[19] B. MAZUR, *Relative neighborhoods and the theorems of Smale,* Ann. of Math. *77* (1963), 231–249.
[20] G. HIGMAN, *The units of groups rings,* Proc. London Math. Soc. *46* (1940), 231–248.
[21] P. OLUM, *Mappings of manifolds and the notion of degree,* Ann. of Math. *58* (1953), 458–480.
[22] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups,* Ann. of Math. *70* (1959), 313–337.
[23] M. ROTHENBERG and J. SONDOW, *Non-linear smooth representations of compact Lie groups,* Mimeographed Notes.
[24] G. W. WHITEHEAD, *Generalized homology theories,* Trans. Amer. Math. Soc. *102* (1962), 227–283.

Reçu le 25 octobre 1969