

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1970)

**Artikel:** Über ganz-algebraische Abhängigkeit in der Idealtheorie.  
**Autor:** Scheja, Günter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34667>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über ganz-algebraische Abhängigkeit in der Idealtheorie<sup>1)</sup>

VON GÜNTER SCHEJA

## Einleitung

Es seien  $S \subseteq R$  kommutative Ringe mit gleichem Einselement und  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in  $S$ . Ein  $f \in R$  heißt bekanntlich *ganz über* (*ganz-algebraisch über*, oder: *ganz-abhängig von*)  $\mathfrak{a}$ , wenn es eine Ganzheitsgleichung

$$f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathfrak{a}^i \quad \text{für } 1 \leq i \leq n,$$

gibt. Die Menge aller über  $\mathfrak{a}$  ganzen Elemente von  $R$ , die *ganz-algebraische Hülle* (der *ganz-algebraische Abschluß*) von  $\mathfrak{a}$  in  $R$ , sei mit  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$  bezeichnet; im Falle  $S=R$  verwenden wir statt  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$  oft die kürzere Bezeichnung  $\mathfrak{a}'$ .  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$  ist ein Ideal im gewöhnlichen ganzen Abschluß  $\mathcal{H}(S, R)$  von  $S$  in  $R$ ; insbesondere ist  $\mathfrak{a}\mathcal{H}(S, R) \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$ .

Ist  $R$  ganz über  $S$ , dann ist  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$  ganz-abgeschlossen in  $R$ , d.h. man hat  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)' = \mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$ . Es gilt in diesem Falle also  $\mathcal{H}(\mathfrak{a}, R) = (R\mathfrak{a})'$ . Es genügt aus diesem Grunde für viele Zwecke, den ganzen Abschluß von  $R$ -Idealen in  $R$  zu betrachten.

Zu dem gerade beschriebenen Begriff der ganz-algebraischen Abhängigkeit in der Idealtheorie, der übrigens schon von Prüfer verwendet wurde, sei auf [4], Übungen zu § 10, und auf die in [7] angegebene Literatur verwiesen.

Im nachfolgenden Abschnitt 1 wird gezeigt, daß bei gewissen Voraussetzungen unter allen Ganzheitsgleichungen für ein festes  $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$  eine eindeutig bestimmte minimale Ganzheitsgleichung existiert.

In Abschnitt 2 soll ein Satz von D. Rees über den Zusammenhang zwischen ganz-algebraischer Abhängigkeit und Multiplizitätentheorie in einem wichtigen Spezialfall, nämlich für die Kategorie der lokalen Ringe, die Körper enthalten, auf elementare Weise neu bewiesen werden. Dabei geht es in der Hauptsache um den Nachweis, daß gewisse Minimalpolynome Ganzheitsgleichungen definieren; hierin zeigt sich die Verwandtschaft zu den Überlegungen aus Abschnitt 1.

Unter Verwendung des erwähnten Satzes von Rees wurden in [7] einige Aussagen darüber gewonnen, wie ganz-algebraische Hüllen von Idealen durch homomorphe Abbildungen des zugrunde liegenden Ringes in strukturell einfache Testringe bestimmt werden können. Das Verfahren soll im nachfolgenden Abschnitt 3 von unnötigen Annahmen befreit werden. Erwähnt sei an dieser Stelle ein Ergebnis, das ein Resultat

<sup>1)</sup> Die Anfertigung dieser Arbeit wurde gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds, Vertrag Nr. 5123.2.

von D. Mumford verallgemeinert: Es sei  $R$  ein kompletter lokaler Ring mit einem algebraisch-abgeschlossenen Koeffizientenkörper  $k$ ,  $T=k[[t]]$  der formale Potenzreihenring in einer Unbestimmten  $t$  über  $k$  und  $\mathfrak{a}$  ein zum maximalen Ideal von  $R$  primäres Ideal; dann gibt es endlich viele  $k$ -Algebra-Homomorphismen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  von  $R$  in  $T$  dergestalt, daß  $\mathfrak{a}' = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\mathfrak{a})T) \cap \dots \cap \varphi_n^{-1}(\varphi_n(\mathfrak{a})T)$  ist.

## 1. Minimale Ganzheitsgleichungen

Im folgenden Satz wird eine Situation beschrieben, in der das übliche Minimalpolynom eine ausgezeichnete Ganzheitsgleichung definiert.

Es seien  $S \subseteq R$  kommutative Ringe mit gleichem Einselement,  $S$  sei nullteilerfrei, und die nichttrivialen Elemente von  $S$  seien darüber hinaus keine Nullteiler von  $R$ . Der totale Ring der Brüche von  $R$  enthält dann den Körper  $K$  der Brüche von  $S$ . Ist  $f \in R$ , dann kann man also von dem Ideal der in  $f$  verschwindenden Polynome aus dem Polynomring  $K[X]$  in einer Unbestimmten  $X$  über  $K$  sprechen. Dieses Ideal wird von einem eindeutig bestimmten normierten Polynom  $F$  erzeugt, das man das *Minimalpolynom* von  $f$  über  $K$  nennt. Ist  $f$  ganz über  $S$  und ist  $S$  ganz-abgeschlossen in  $K$ , dann hat  $F$  Koeffizienten in  $S$ ; siehe [9], V, § 3. Allgemeiner hat man:

**SATZ 1.** *Es seien  $S \subseteq R$  kommutative Ringe mit gleichem Einselement,  $S$  sei nullteilerfrei, die nichttrivialen Elemente von  $S$  seien keine Nullteiler in  $R$ . Es sei  $\mathfrak{a}$  ein Ideal in  $S$ , dessen sämtliche Potenzen  $\mathfrak{a}^n$ ,  $n \geq 1$ , ganz-abgeschlossen im Körper  $K$  der Brüche von  $S$  sind, und  $f \in \mathcal{H}(\mathfrak{a}, R)$ . Dann ergibt das Minimalpolynom  $F$  von  $f$  über  $K$  eine Ganzheitsgleichung  $F(f) = 0$  von  $f$  über  $\mathfrak{a}$ . Jedes andere Polynom aus  $S[X]$ , das eine Ganzheitsgleichung von  $f$  über  $\mathfrak{a}$  ergibt, ist Vielfaches von  $F$  in  $S[X]$ .*

*Beweis.* Wir nennen ein Polynom  $\sum_{i=0}^m a_i X^i \in K[X]$  kurz regulär, wenn gilt:  $m \geq 1$ ,  $a_m = 1$ ,  $a_i \in \mathfrak{a}^{m-i}$  für  $0 \leq i \leq m-1$ . Die Menge der regulären Polynome in  $K[X]$  ist multiplikativ abgeschlossen. Offenbar genügt es nun zu zeigen, daß die normierten Primteiler in  $K[X]$  von regulären Polynomen wieder regulär sind.

Sei also  $G$  ein beliebiges reguläres Polynom aus  $K[X]$  und  $H$  ein normierter Primteiler von  $G$  in  $K[X]$ . Sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $H$  über  $K$  und  $\{x_1, \dots, x_m\}$  eine vollständige Menge von Nullstellen von  $H$  in  $L$  (d.h. jede Nullstelle wird  $p^e$ -fach angesetzt, wenn  $p^e$  der Inseparabilitätsgrad von  $H$  über  $K$  ist).  $H$  ist dann das Produkt der  $X - x_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Da die  $x_j$  konjugiert sind, verschwindet  $G$  in jedem dieser Elemente: Die  $x_j$  sind ganz über  $\mathfrak{a}$ . Jede elementarsymmetrische Form vom Grade  $n \geq 1$  in den  $x_j$  ist ganz über  $\mathfrak{a}^n$  nach [4], § 10, ex. 2, und gehört daher zu  $\mathfrak{a}^n$  gemäß der Voraussetzung  $\mathfrak{a}^n = \mathcal{H}(\mathfrak{a}^n, K)$ . Somit ist  $H$  regulär. Satz 1 ist bewiesen.

Wir diskutieren noch die Voraussetzung von Satz 1. *Die Potenzen  $\mathfrak{a}^n$  sind jedenfalls dann ganz-abgeschlossen in  $K$ , wenn  $S$  ganz-abgeschlossen in  $K$  ist, wenn der assoziierte graduierte Ring von  $S$  bezüglich  $\mathfrak{a}$  nullteilerfrei ist und wenn der Durchschnitt aller*

*Potenzen von  $\mathfrak{a}$  das Nullideal ergibt.* Beweis. Da  $S$  ganz-abgeschlossen in  $K$  sein soll, hat man nur zu zeigen:  $(\mathfrak{a}^n)' = \mathfrak{a}^n$ . Die Durchschnittsbedingung erlaubt es, eine Bewertungsfunktion  $w$  auf  $S$  wie folgt zu definieren:  $w(0) := \infty$ ; ist  $a \in \mathfrak{a}^m$ ,  $a \notin \mathfrak{a}^{m+1}$ , dann sei  $w(a) := m$ . Die Nullteilerfreiheit des genannten graduierten Ringes besagt gerade, daß  $w$  auf  $S$  multiplikativ ist. Betrachten wir nun eine Ganzheitsgleichung

$$f^r + a_1 f^{r-1} + \dots + a_r = 0, \quad a_i \in (\mathfrak{a}^n)^i \quad \text{für } 1 \leq i \leq r,$$

wobei  $s := w(f) < \infty$  ist. Man hat dann  $a_i f^{r-i} \in \mathfrak{a}^{ni+s(r-i)}$ , also  $f^r \in \mathfrak{a}^{sr+q}$ , wobei  $q := \min\{(n-s)i : 1 \leq i \leq r\}$  gesetzt ist. Wegen  $w(f^r) = sr$  folgt nun  $n \leq s$ , also  $f \in \mathfrak{a}^n$ , was zu zeigen war.

Die gerade genannten Bedingungen an  $S$  und  $\mathfrak{a}$  sind insbesondere dann erfüllt, wenn  $S$  ein regulärer lokaler Ring (oder ein Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über einem Körper) ist und  $\mathfrak{a}$  das maximale (bzw. irrelevante maximale) Ideal von  $S$  ist.

Ein Anwendungsbereich von Satz 1 sei kurz beschrieben. Es sei  $k$  ein (trivial oder nichttrivial) bewerteter Körper der Charakteristik 0 und  $R = k \langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$  der (formale oder konvergente) Potenzreihenring in den Unbestimmten  $X_i$  über  $k$ ; mit  $\partial_i$  sei die partielle Ableitung nach  $X_i$  bezeichnet. Sei  $f \in R$ ,  $f$  keine Einheit. Dann ist  $f$  ganz über dem Ideal  $R\partial_1 f + \dots + R\partial_n f$  ([7], [8], [3]). Zur Untersuchung der Singularität  $\{f=0\}$ , bzw. des Ringes  $R/Rf$ , ist eine genauere Kenntnis der genannten ganz-algebraischen Abhängigkeit nötig. Gibt es eine ausgezeichnete Ganzheitsgleichung? Dies ist beispielsweise der Fall, wenn  $\{f=0\}$  isoliert ist. Dann ist nämlich  $S := k \langle\langle \partial_1 f, \dots, \partial_n f \rangle\rangle$  trivialerweise ein freier Potenzreihenring (regulärer lokaler Ring), über dem  $R$  ganz ist; ferner ist  $f$  nach den in der Einleitung zitierten Eigenschaften der ganz-algebraischen Hülle ganz über dem maximalen Ideal von  $S$ . Das Minimalpolynom von  $f$  über dem Körper der Brüche von  $S$  ergibt nun die gewünschte Ganzheitsgleichung.

## 2. Der Multiplizitätensatz von Rees

Es seien  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  Ideale eines Ringes  $R$ .  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  heißen *äquivalent*, wenn  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$  ist.  $\mathfrak{a}$  heißt *Reduktion* von  $\mathfrak{b}$ , wenn  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  ist und wenn es eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so daß  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^n = \mathfrak{b}^{n+1}$  ist. Ist  $R$  noethersch, so sind  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  bei  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  genau dann äquivalent, wenn  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$  ist. Bezüglich Restklassenbildung läßt sich sofort folgendes sagen ([6], Lemma 1.2):

**LEMMA 1 (Rees).** *Es sei  $R$  ein noetherscher Ring. Ideale  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  in  $R$  sind genau dann äquivalent, wenn für jedes minimale Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$  die Ideale  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$  und  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$  äquivalent sind.*

Wir betrachten jetzt lokale Ringe. Sei  $R$  ein lokaler Ring. Sein maximales Ideal sei mit  $\mathfrak{m}_R$  bezeichnet. Ideale von  $R$ , die eine Potenz von  $\mathfrak{m}_R$  enthalten, heißen *offen*.

Eine Teilmenge von  $R$  aus  $\dim R$  Elementen, die ein offenes Primärideal erzeugt, heißt *Parametersystem* von  $R$ . Die von Parametersystemen erzeugten Ideale heißen *Parameterideale*.

LEMMA 2 (Northcott-Rees). *Ist  $\mathfrak{a}$  ein offenes Primärideal in einem lokalen Ring  $R$ , dann gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $\mathfrak{a}^n$  eine Reduktion besitzt, die Parameterideal ist.*

Ist  $R/\mathfrak{m}_R$  unendlich, dann ist die Behauptung bekanntlich mit  $n=1$  richtig. Lemma 2 ist thm. 4 aus § 3 von [5]; die generelle Voraussetzung in [5], daß die betrachteten lokalen Ringe gleichcharakteristisch seien (d.h. Körper enthalten), wird an der zitierten Stelle nicht benutzt.

Ist  $\mathfrak{a}$  offenes Primärideal in einem lokalen Ring, dann ist die Multiplizität  $e(\mathfrak{a})$  wohldefiniert. Sind  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  äquivalente offene Primärideale in einem lokalen Ring, so gilt  $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$ , wie eine simple Rechnung zeigt. Umgekehrt gilt:

SATZ VON REES ([6], Hauptsatz). *Sei  $R$  ein quasi-ungemischter lokaler Ring. Sind  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  offene Primärideale in  $R$  mit  $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$ , dann ist  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$ .*

Eine neue Beweisanordnung und Verallgemeinerungen findet man bei Böger [2]. Ein lokaler Ring heißt bekanntlich *quasi-ungemischt*, wenn die minimalen Primideale seiner Kompletterung gleiche Dimension haben.

In der Kategorie der gleichcharakteristischen lokalen Ringe ist der Satz von Rees als einfach anzusehen, wie der nun folgende *Beweis* zeigt.

Es sei also  $R$  ein gleichcharakteristischer quasi-ungemischter lokaler Ring;  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  seien offene Primärideale in  $R$  mit  $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$ . Wir beginnen mit dem Nachweis, daß  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$  ist, wie in [6]. Der Übergang zur Kompletterung ist problemlos. Man darf also voraussetzen, daß  $R$  komplett ist. Aus dem Additivitätstheorem der Multiplizitätentheorie – dem einzigen Hilfsmittel von einigem Gewicht in unserem Beweis – folgt: Für jedes minimale Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $R$  mit  $\dim \mathfrak{p} = \dim R$  ist  $e(\mathfrak{a} + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{b} + \mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ . Da nach Voraussetzung alle minimalen Primideale von  $R$  gleiche Dimension wie  $R$  haben, ergibt sich mittels Lemma 1, daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen darf, daß  $R$  nullteilerfrei ist.

Nach Lemma 2 gibt es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  und ein Parameterideal  $\mathfrak{q} = Rf_1 + \dots + Rf_q$  in  $R$ , das Reduktion von  $\mathfrak{a}^n$  ist. Erweist sich  $\mathfrak{q}$  als Reduktion von  $\mathfrak{b}^n$  (sind also alle Elemente von  $\mathfrak{b}^n$  ganz über  $\mathfrak{q}$ ), so ist erst recht  $\mathfrak{a}^n$  Reduktion von  $\mathfrak{b}^n$ , woraus sogleich folgt, daß  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$  ist.

Sei jetzt  $f$  ein beliebiges Element von  $\mathfrak{b}^n$ . Da  $\mathfrak{a}^n$  ganz über  $\mathfrak{q}$  ist, hat man  $e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{a}^n)$ . Aus trivialen Gründen ist  $e(\mathfrak{a}^n) = e(\mathfrak{b}^n)$ . Aus den einfachen Ungleichungen  $e(\mathfrak{q}) \geq e(\mathfrak{q} + Rf) \geq e(\mathfrak{b}^n)$ , die aus den Inklusionen  $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q} + Rf \subseteq \mathfrak{b}^n$  folgen, erhält man somit  $e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q} + Rf)$ .

Nach dem Struktursatz über gleichcharakteristische komplette lokale Ringe gibt es einen Koeffizientenkörper  $k$  von  $R$ ; ferner ist  $R$  endlicher Modul über dem regulären

lokalen Unterring  $S := k[[f_1, \dots, f_q]]$ . Das Minimalpolynom  $F$  von  $f$  über dem Körper der Brüche von  $S$  hat Koeffizienten in  $S$ , da  $S$  normal ist. Wir werden zeigen, daß  $F$  sogar eine Ganzheitsgleichung  $F(f)=0$  für  $f$  über  $m_S$  ergibt. Erst recht ist dann  $f$  ganz über  $\mathfrak{q} = Rm_S$ , womit denn unser Beweis beendet ist.

Der Ring  $T := S[f]$  ist Restklassenring des Polynomrings  $S[X]$  nach dem von  $F$  erzeugten Hauptideal.  $m := [T:S]$ , der Rang von  $T$  über  $S$ , stimmt mit dem Grad von  $F$  überein. Als Zwischenring von  $S$  und  $R$  ist  $T$  lokal.  $m_T$  ist Restklassenideal des von  $m_S$  und  $X$  aufgespannten maximalen Ideals von  $S[X]$ , das wir  $\mathfrak{p}$  nennen wollen. Zu zeigen ist offenbar, daß  $F$  zu  $\mathfrak{p}^m$  gehört.

Nun ist aber, wie eine simple Rechnung zeigt,  $\mathfrak{p}^m$  ein zu  $\mathfrak{p}$  gehörendes Primärideal. Daher genügt es zu zeigen, daß  $F$  in der Lokalisierung  $S[X]_{\mathfrak{p}}$  zur  $m$ . ten Potenz des maximalen Ideals gehört. Da  $T$  auch Restklassenring von  $S[X]_{\mathfrak{p}}$  nach dem von  $F$  erzeugten Hauptideal ist und da  $S[X]_{\mathfrak{p}}$  regulär lokal ist, bedeutet  $F \in \mathfrak{p}^m S[X]_{\mathfrak{p}}$  nichts anderes als  $e(m_T) \geq m$ .

Die Gleichung  $e(m_T) = m$  läßt sich wie folgt erhalten. Die Erweiterungsformel der Multiplizitätentheorie ([9], VIII, § 10, Kor. 1 von thm. 24) ergibt, da  $R$ ,  $S$  und  $T$  alle denselben Restklassenkörper haben:

$$[R:S] \cdot e(m_S) = e(Rm_S)$$

$$[R:T] \cdot e(m_T) = e(Rm_S + Rf).$$

Aus der Voraussetzung und den einfachen Gleichungen  $e(m_S) = 1$  und  $[R:S] = [R:T] \times [T:S]$  folgt jetzt  $e(m_T) = [T:S] = m$ .

### 3. Testkurven für ganz-algebraische Abhängigkeit

Seit längerem sind Sätze des folgenden Typs zur Bestimmung ganz-algebraischer Hüllen bekannt (vgl. die in [7] angegebene Literatur): Ist  $\mathfrak{a}$  ein Ideal im noetherschen Integritätsring  $R$ , dann gibt es endlich viele  $R$  umfassende diskrete Bewertungsringe  $V_1, \dots, V_n$  vom Rang 1 im Körper der Brüche von  $R$  derart, daß  $\mathfrak{a}' = R \cap \mathfrak{a}V_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}V_n$  ist. Die Struktur der Bewertungsringe bleibt dabei unklar. Innerhalb der engeren Kategorie bleibt man mit einem ähnlichen Verfahren der Abbildung in einfachere Testringe, das nun besprochen werden soll. Es handelt sich um Verallgemeinerungen von Überlegungen aus [7].

**SATZ 2.** *Es sei  $R$  ein lokaler Ring, der Restklassenring eines Macaulayringes ist. Zu jedem offenen Primärideal  $\mathfrak{a}$  in  $R$  gibt es endlich viele Homomorphismen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  von  $R$  auf nullteilerfreie Restklassenringe der Dimension  $\leq 1$ , so daß gilt:*

$$\mathfrak{a}' = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\mathfrak{a}')) \cap \dots \cap \varphi_n^{-1}(\varphi_n(\mathfrak{a}')). \quad ^1)$$

<sup>1)</sup> Zusatz bei der Korrektur: Eine Verallgemeinerung auf Ideale beliebiger Dimension ist von E. Böger erhalten worden, Math. Annalen 185, 303-308 (1970).

*Beweis.* Es sei  $\mathfrak{b}$  der Durchschnitt der Ideale  $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{a})')$ , wobei  $\varphi$  die Menge der Homomorphismen von  $R$  auf nullteilerfreie Restklassenringe der Dimension  $\leq 1$  durchläuft. Dieser Durchschnitt ist endlicher Durchschnitt, da  $R/\mathfrak{a}$  artinsch ist. Offenbar ist  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}_R$ . Daher genügt es, die folgende Aussage zu beweisen: Sind  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  offene Primärideale eines lokalen Ringes  $R$  (der Restklassenring eines Macaulayringes ist), so daß für jedes eindimensionale Primideal  $\mathfrak{p}$  in  $R$  das Ideal  $(\mathfrak{a} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$  Reduktion von  $(\mathfrak{b} + \mathfrak{p})/\mathfrak{p}$  ist, dann ist  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$ .

Diese Aussage wird durch Induktion über  $q := \dim R$  bewiesen. Der Fall  $q=0$  ist trivial. Lemma 1 erledigt den Fall  $q=1$ . Sei daher nun  $q \geq 2$  und nehmen wir an, daß die Aussage in der Dimension  $q-1$  richtig ist. Lemma 1 erlaubt es,  $R$  als nullteilerfrei anzunehmen.

Sei  $\mathfrak{c}$  ein Ideal mit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$ . Man sieht leicht, daß  $\mathfrak{a}$  genau dann Reduktion von  $\mathfrak{b}$  ist, wenn  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{c}$  und  $\mathfrak{c}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$  ist. Die Paare  $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$  und  $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}$  erfüllen offenbar dieselben Voraussetzungen bezüglich eindimensionaler Restklassenringe von  $R$  wie  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ . Da  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  von endlicher Länge ist, genügt es also, den Fall zu betrachten, daß  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  eine Länge  $\leq 1$  hat. Für jede natürliche Zahl  $m$  ist dann auch  $\mathfrak{b}^{m+1}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}^m$  ein Modul der Länge  $\leq 1$ ; ferner ist  $\mathfrak{a}$  genau dann Reduktion von  $\mathfrak{b}$ , wenn  $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^m$  Reduktion von  $\mathfrak{b}^{m+1}$  ist. Wegen Lemma 2 kann man daher außerdem annehmen, daß es eine Reduktion  $\mathfrak{q}$  von  $\mathfrak{b}$  gibt, die Parameterideal ist.

Wegen  $q \geq 2$  ist  $\mathfrak{q}$  nicht zyklisch. Da aber  $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$  zyklisch ist, gibt es ein  $f \in \mathfrak{q} \cap \mathfrak{a}$ , das zu einem minimalen Erzeugendensystem von  $\mathfrak{q}$  gehört. Da  $q \geq 2$  ist und da  $R$  nullteilerfrei ist, hat man  $e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q}/Rf)$ ; siehe [1], § 4, (D). Nach Konstruktion ist  $\mathfrak{q}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$ ; dann ist natürlich auch  $\mathfrak{q}/Rf$  Reduktion von  $\mathfrak{b}/Rf$ . Es folgt  $e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{b})$  und  $e(\mathfrak{q}/Rf) = e(\mathfrak{b}/Rf)$ . Daraus ergibt sich  $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{b}/Rf)$ . Die Ideale  $\mathfrak{a}/Rf$  und  $\mathfrak{b}/Rf$  genügen trivialerweise derselben Voraussetzung bezüglich eindimensionaler Restklassenringe wie  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ ; ferner ist  $\dim R/Rf = q-1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist daher  $\mathfrak{a}/Rf$  Reduktion von  $\mathfrak{b}/Rf$ . Erst recht ist  $e(\mathfrak{a}/Rf) = e(\mathfrak{b}/Rf)$ . Ein simpler Hilfssatz besagt:  $e(\mathfrak{a}) \leq e(\mathfrak{a}/Rf)$ . Unter Berücksichtigung der aus  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  trivial folgenden Ungleichung  $e(\mathfrak{a}) \geq e(\mathfrak{b})$  erhält man insgesamt  $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$ .  $R$  ist als nullteilerfreier Restklassenring eines Macaulayringes, Nagatas Satz (34.5) aus [4] zufolge, quasiungemischt. Nach dem Satz von Rees endlich ist  $\mathfrak{a}$  Reduktion von  $\mathfrak{b}$ . Satz 2 ist bewiesen.

Zu den lokalen Ringen, die sich als Restklassenringe von Macaulayringen darstellen lassen, gehören insbesondere die kompletten lokalen Ringe und die analytischen lokalen Algebren. Ein Ring heißt bekanntlich *analytische (lokale)  $k$ -Algebra* über einem (trivial oder nichttrivial) bewerteten Körper  $k$ , wenn er sich als Restklassenring eines konvergenten Potenzreihenringes in endlich vielen Unbestimmten über  $k$  darstellen läßt.

In [7] ist ausgeführt, wie man ein Kriterium wie das von Satz 2 dadurch übersetzt, daß man die eindimensionalen Restklassenringe zu ihren Normalisierungen – das

sind dann eindimensionale reguläre lokale Ringe bestimmten Typs – erweitert. Von den Verallgemeinerungen der Sätze aus [7], die sich dabei mit Satz 2 in ganz naheliegender Weise ergeben, sei der folgende Satz aufgeführt.

**SATZ 3.** *Es sei  $R$  eine analytische Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen bewerteten Körper  $k$  und  $T = k\langle t \rangle$  der konvergente Potenzreihenring in einer Unbestimmten  $t$  über  $k$ . Zu jedem offenen Primärideal  $\alpha$  in  $R$  gibt es endlich viele  $k$ -Algebra-Homomorphismen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  von  $R$  in  $T$  dergestalt, daß  $\alpha' = \varphi_1^{-1}(\varphi_1(\alpha) T) \cap \dots \cap \varphi_n^{-1}(\varphi_n(\alpha) T)$  ist.*

#### LITERATUR

- [1] AUSLANDER, M. and BUCHSBAUM, D. A., *Codimension and Multiplicity*, Ann. Math. 68 (1958), 625–657.
- [2] BÖGER, E., *Eine Verallgemeinerung eines Multiplizitätensatzes von D. Rees*, J. Algebra 12 (1969), 207–215.
- [3] ———, *Differentielle und ganz-algebraische Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren* erscheint in Math. Zeitschr.
- [4] NAGATA, M., *Local Rings* (Intersci. Publ., New York 1962).
- [5] NORTHCOTT, D. G. and REES, D., *A Note on Reductions of Ideals with an Application to the Generalized Hilbert Function*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 50 (1954), 354–359.
- [6] REES, D.,  *$\alpha$ -transforms of Local Rings and a Theorem on Multiplicities of Ideals*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961), 8–17.
- [7] SCHEJA, G., *Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven*, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 438–445.
- [8] SCHEJA, G. und STORCH, U., *Über differentielle Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren*, Math. Z. 114 (1970), 101–112.
- [9] ZARISKI, O. and SAMUEL, P., *Commutative Algebra*, 2 Bde. (Van Nostrand, Princeton, N.J. 1958/1960).

*Institut de Mathématiques  
Pérolles  
CH-1700 Fribourg*

Eingegangen den 14. November 1969

---

## Bucheingänge

---

Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bukurești:

**RADU ROSCA, Geometria Diferentiala a Congruentelor in Spatiul Eliptic**, 208 pp., 1969, Lei 7,25  
I. Preliminarii – II. Generalitai – III. Congruentele Pentru Care Axele – IV. Congruente Pseudo-sferice – V. Congruente Normal-Izotope – VI. Congruente Ribaucour – VII. Congruente Izotrope – VIII. Cupluri Conforme Tichoski – IX. Cupluri Thybaut si Congruente  $T$  – X. Cupluri  $J$  si Congruente  $J_m$  – XI. Congruente  $K_1$  – XII. Configuratiile  $I$  – XIII. Congruente in Spatiul  $P_e^n$  – Anexa.

**Abstrakte Räume und Approximation.** Abhandlungen zur Tagung im mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Schwarzwald, vom 18. bis 27. Juli 1968. Herausgegeben von P. L. BUTZER und B. SZÖKEFALVI-NAGY. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1969, 424 S., Fr. 68.–.

*Aus dem Inhalt:* G. Alexits et M. Zamansky: Jean Favard 1902–1965.

I. Operating Theory – II. Interpolation and Approximation on Banach Spaces – III. Harmonic Analysis and Approximation – IV. Algebraic and Complex Approximation – V. Numerical and Spline Approximation, Differential Equations.

**S. G. MIGLIN und Ch. L. SMOLIZKI, Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen.** Übersetzung aus dem Russischen, XI + 282 Seiten mit 23 Abbildungen. Mathematik für technische Hochschulen Bd. 10. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969, 28.– M.

I. Näherungsweise Lösung von Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen – II. Differenzenverfahren – III. Variationsmethoden – IV. Näherungsweise Lösung von Integralgleichungen.

**BODO PAREIGIS, Kategorien und Funktoren.** Mathematische Leitfäden, herausg. von Prof. Dr. Dr. h. c. G. Köthe. 192 Seiten mit 49 Aufgaben, B. G. Teubner, Stuttgart 1969. DM 38.–.

1. Grundlagen – 2. Adjungierte Funktoren und Limites – 3. Universelle Algebra – 4. Abelsche Kategorien – Literaturhinweise.

**I. J. MADDOX, Elements of Functional Analysis**, 210 pp., Cambridge University Press 1970, 50s.

1. Basic set theory and analysis – 2. Metric and topological spaces – 3. Linear and linear metric spaces – 4. Normed linear spaces – 5. Banach algebras – 6. Hilbert space – 7. Matrix transformations in sequence spaces – Bibliography – Index.

**J. C. BURKILL and H. BURKILL, A Second Course in Mathematical Analysis**, viii + 526 pp., Cambridge University Press 1970, £4 net.

Preface – 1. Sets and functions – 2. Metric spaces – 3. Continuous functions on metric spaces – 4. Limits in the spaces  $R^1$  and  $Z$  – 5. Uniform convergence – 6. Integration – 7. Functions from  $R^m$  to  $R^n$  – 8. Integrals in  $R^n$  – 9. Fourier series – 10. Complex function theory – 11. Complex integrals. Cauchy's theorem – 12. Expansions. Singularities. Residues – 13. General theorems. Analytic functions – 14. Applications to special functions. Solutions to exercices – References – Index.

**Atti dell'ottavo congresso dell'Unione Matematica Italiana tenuto a Trieste nel Periodo 2–7 Ottobre 1967.** Nicola Zanichelli Editore Bologna 1968, 336 pp., L. 6000.

Discorsi – Conferenze – Comunicazioni: I. Algebra – II. Analisi Matematica – III. Analisi numerica e Macchine calcolatrici – IV. Calcolo della Probabilità ed Applicazioni – V. Geometria – VI. Matematiche elementari, Storia, Filosofia e Didattica della Matematica – VII. Meccanica razionale e Fisica Matematica – VIII. Topologia.

ROLF KLÖTZER, **Mehrdimensionale Variationsrechnung**. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe Bd. 44. 300 S. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1970, Fr. 54.–.

I. Grundtypen von Variationsproblemen – II. Funktionalanalytische Hilfsmittel – III. Notwendige Bedingungen für ein Extremum – IV. Theorie der zweiten Variation – V. Die de-Donder-Weilsche Feldtheorie im Grossen – VI. Anwendungen und Ergänzungen zur erweiterten Feldtheorie.

WOLFGANG HAAK und WOLFGANG WENDLAND, **Vorlesungen über partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen**. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe Bd. 39. 556 S. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1969, Fr. 88.–.

I. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen: 1. Einführung und Existenzsatz von Cauchy-Kowalewski – 2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Integralrelationen – 3. Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus – 4. Die elliptische Differentialgleichung in der Normalform – 5. Die Existenz von Lösungen der Beltramischen Differentialgleichung – 6. Probleme vom gemischten Typus.

II. Systeme erster Ordnung in zwei Variablen: 7. Normalformen und Typus eines linearen Systems – 8. Hyperbolische Systeme – 9. Integralgleichungen und die erste Randwertaufgabe eines elliptischen Systems – 10. Index oder Charakteristik allgemeiner Randwertaufgaben – 11. Randwertaufgaben höherer Charakteristik – 12. Randwertprobleme positiver Charakteristik – 13. Existenzsätze im Grossen – 14. Einige Bemerkungen zur numerischen Behandlung der Randwertaufgaben für elliptischen Systeme – 15. Systeme vom gemischten Typus; parabolische Anfangskurve.

III. Systeme Pfaffscher Formen im  $R_n$  und partielle Differentialgleichungen: 16. Beispiel einer Pfaffschen Differentialgleichung in drei Variablen – 17. Lineare Mannigfaltigkeiten und Pfaffsche Formen – 18. Integralmannigfaltigkeiten – 19. Existenz von Integralmannigfaltigkeiten – 20. Partielle Differentialgleichungen als Systeme Pfaffscher Gleichungen – 21. Der Integralsatz und seine Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen – 22. Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung im  $R_n$  – 23. Hyperbolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung im  $R_n$ .

JOSEPH LEHNER, **Lectures on Modular Forms**. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 61, issued December 1969; 77 pages; 70 cents. (Order from the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. 20402 or local U.S. Department of Commerce Field Offices as *SD Catalog No. C 13.32:61*; or from the Clearinghouse for Federal Scientific and Technical Information, Springfield, Virginia 22151 as *NBS AMS-61*.)

I. Modular forms – II. Modular forms with multiplicative Fourier coefficients I – III. Modular forms with multiplicative Fourier coefficients II – IV. Automorphisms of compact Riemann surfaces – V. The Fourier coefficients of  $j(\tau)$  I – VI. The Fourier coefficients of  $j(\tau)$  II.

OCTAV ONICESCU, **Principiile Teoriei Probabilităților**. 216 pp., Editura Academiei Republicii Socialiste România București 1969, Lei 10.

I. Sistem de evenimente cu structură de ordine și cu ponderi – II. Transformări și ergodicitate a  $S.A.$ -funcțiilor per sisteme  $\{S, \varphi\}$  – III. Model cvasiensamblist al unei  $\sigma$ -algebre Boole – IV. Latice de evenimente – V. Cîmp cu basă numărabilă – VI.  $s$ -funcții funcții sumă – VII. Convergența în spațiul funcțiilor sumă. Teorema limită centrală – VIII. Transformări și teoreme ergodice pentru funcții sumă – IX. Proprietăți ergodice – X. Procese aleatoare – XI. Probabilitate și informație.

AUGUSTE DICK, **Emmy Noether (1882–1935)**. Beihefte zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik“, Suppléments à la «Revue de mathématiques élémentaires», Nr. 13: Kurze mathematiker-Biographien, (1970) 72 Seiten mit einem Porträt, einem Faksimile und mit den Nekrologen von B. L. van der Waerden und Hermann Weyl. Format 17 × 24 cm. Broschiert Fr. 14.–. Birkhäuser Verlag, Basel (Switzerland).

*Inhalt:* Die Erlanger Zeit (1882–1915). Die Göttinger Zeit (1915–1933). Bryn Mawr und Princeton (Herbst 1933 bis Frühjahr 1935).