

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Algèbres d'Azumaya et modules projectives.
Autor: Knus, M.A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34666>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Algèbres d'Azumaya et modules projectifs

M. A. KNUS (Ecole polytechnique fédérale, Zurich)¹⁾

Introduction

Le produit tensoriel de deux algèbres d'Azumaya, c'est-à-dire de deux algèbres centrales séparables sur un anneau R , est de nouveau une algèbre d'Azumaya. Si R est un anneau semi-local ou un anneau de polynômes en une variable sur un corps de caractéristique zéro, on connaît une «loi de cancellation», $A \otimes B \cong A \otimes C$ entraîne que $B \cong C$ pour des algèbres d'Azumaya A et B . ([7] et [9].) Dans le cas général, nous montrons que la cancellation peut se faire sous des conditions en partie analogues aux hypothèses du théorème de cancellation pour les modules de Bass-Schanuel [3, Th. 9.3.]. Notre démonstration utilise d'ailleurs ce théorème de façon essentielle.

Dans le § 1, nous rappelons quelques propriétés des modules fidèlement projectifs et des algèbres d'Azumaya. Puis nous généralisons des résultats de Rosenberg et Zelinsky ([8]), nécessaires à la démonstration du théorème de cancellation. Cette démonstration est donnée au § 3. Plusieurs exemples (et contre-exemples) sont étudiés ensuite. Le § 5 est consacré à diverses généralisations du théorème de Skolem-Noether. Nous répondons en particulier à une question de Rosenberg et Zelinsky ([8]), en montrant que tout automorphisme d'une algèbre d'Azumaya est intérieur si et seulement si le groupe Pic (R) n'a pas de torsion. Finalement, nous décrivons certains rapports entre la cancellation et le théorème de Skolem-Noether.

Rappelons encore les conventions habituelles. Tous les anneaux possèdent un élément unité, préservé par les homomorphismes. Les modules sont unitaires et, sauf mention expresse du contraire, des modules à droite. On notera rM la somme directe de r copies du module M et A^0 l'algèbre opposée à l'algèbre A .

Nous voulons remercier ici R. Sridharan, qui nous a suggéré l'étude d'un théorème de cancellation pour les algèbres d'Azumaya, H. Bass, qui, au cours d'une discussion à Hull, nous a fait mieux comprendre ce problème, et A. Roy à qui nous devons en particulier le théorème 5.8.

1. Modules fidèlement projectifs.

1.1. Pour tout anneau A et tout A -module P , appelons $B = \text{End}_A(P)$, l'anneau des endomorphismes A -linéaires de P , et $P^* = \text{Hom}_A(P, A)$ le dual de P par rapport à A .

¹⁾ Cette étude a été faite en grande partie à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève.

Pour $x \in P$ et $\varphi \in B$, on pose $\varphi x = \varphi(x)$. Le module P est ainsi un B -module à gauche. En posant $(af)(x) = af(x)$ et $(f\varphi)(x) = f(\varphi(x))$ pour $f \in P^*$, $a \in A$ et $\varphi \in B$, on définit une structure de B -module à droite et de A -module à gauche sur P^* . Soit

$$\tau: P^* \otimes_B p \rightarrow A$$

l'homomorphisme de A -bimodules défini par $\tau(f \otimes x) = f(x)$ pour $f \in P^*$ et $x \in P$. L'image de τ dans A est un idéal bilatère. On note cet idéal $\mathfrak{T}_A(P)$. C'est la *trace* de P dans A .

1.2. Supposons que P soit un A -module projectif. Les conditions suivantes sont équivalentes ([12], p. 2):

1.2.1. $\mathfrak{T}_A(P) = A$ (τ est alors un isomorphisme).

1.2.2. Pour tout A -module à gauche M , $P \otimes_A M = 0$ entraîne que $M = 0$.

1.2.3. P est un B -module à gauche projectif de type fini et $A \cong \text{End}_B(P)^0$.

Un A -module projectif de type fini est appelé *fidèlement projectif* s'il satisfait aux conditions ci-dessus.

1.3. Soit R un anneau commutatif. Les conditions suivantes sont équivalentes ([4], Prop. 6.1., p. 37):

1.3.1. P est un R -module fidèlement projectif.

1.3.2. P est un R -module projectif de type fini et fidèle.

1.3.3. P est un R -module projectif de type fini et de rang partout positif ($P_{\mathfrak{p}} \neq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec } R$).

1.3.4. Il existe un R -module Q et un entier $n > 0$ tels que $P \otimes_R Q \cong nR$.

1.4. Soit R un anneau commutatif. Rappelons qu'une *algèbre d'Azumaya* est une R -algèbre satisfaisant aux conditions équivalentes ([4], Th. 4.1., p. 104):

1.4.1. A est un R -module de type fini et A est centrale séparable.

1.4.2. A est un R -module fidèlement projectif et la représentation naturelle $\mu: A \otimes_R A^0 \rightarrow \text{End}_R(A)$ donnée par $\mu(a \otimes b^0)(x) = axb^0$, $a \in A$, $b^0 \in A^0$ et $x \in A$, est un isomorphisme.

1.4.3. A est un R -module projectif de type fini et pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de R , $A/\mathfrak{m}A$ est une R/\mathfrak{m} -algèbre centrale simple.

1.5. Deux R -algèbres d'Azumaya A_1 et A_2 sont *semblables* si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites ([4], Prop. 4.10. p. 109):

1.5.1. $A_1 \otimes_R A_2^0 \cong \text{End}_R(P)$ pour un R -module fidèlement projectif P .

1.5.2. $\text{End}_R(P_1) \otimes_R A_1 \cong \text{End}_R(P_2) \otimes_R A_2$ pour des R -modules fidèlement projectifs P_1 et P_2 .

1.5.3. $A_1 \cong \text{End}_{A_2}(P)$ pour un A_2 -module fidèlement projectif P .

Rappelons que le *groupe de Brauer* de R , $B(R)$, est l'ensemble des classes d'équivalence d'algèbres d'Azumaya, pour la relation définie ci-dessus, muni du produit induit par le produit tensoriel ([2], p. 381).

1.6. Soit A une R -algèbre d'Azumaya et soit $\text{Pic}_R(A)$ le groupe des classes d'isomorphisme des A -bimodules inversibles. L'homomorphisme

$$\text{Pic}(R) \rightarrow \text{Pic}_R(A)$$

induit par $I \mapsto A \otimes_R I$, $(I) \in \text{Pic}(R)$, est un isomorphisme ([4], Cor. 4.5., p. 108).

2. Une relation d'équivalence

2.1. Soit R un anneau commutatif et soit A une R -algèbre d'Azumaya. Pour tout A -module fidèlement projectif P , soit $J_A(P)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A -modules fidèlement projectifs Q tels que $\text{End}_A(Q)$ est une R -algèbre isomorphe à $\text{End}_A(P)$.

2.2. PROPOSITION. $(Q) \in J_A(P)$ si et seulement si $Q \cong P \otimes_R I$ comme A -modules, pour un R -module projectif de rang un I .

Démonstration. Posons $B = \text{End}_A(P)$. Soit $(Q) \in J_A(P)$ et soit $\sigma: B \rightarrow \text{End}_A(Q)$ un isomorphisme de R -algèbres. Le module Q est un B -module à gauche par σ . Puisque P est fidèlement projectif, l'homomorphisme

$$\varphi: P \otimes_A \text{Hom}_B(P, Q) \rightarrow Q$$

défini par $\varphi(x \otimes f) = f(x)$, $x \in P$ et $f \in \text{Hom}_B(P, Q)$, est un isomorphisme ([2], Prop. A.6., p. 23). La structure de A -module à gauche de $\text{Hom}_B(P, Q)$ est donnée par $(af)(x) = f(xa)$, $x \in P$, $a \in A$ et $f \in \text{Hom}_B(P, Q)$. L'application af est un B -homomorphisme car $(af)(\beta x) = f((\beta x)a) = f(\beta(xa)) = \sigma(\beta)(f(xa)) = \sigma(\beta)(af)(x)$ pour $\beta \in B$. Le groupe $\text{Hom}_B(P, Q)$ est un A -bimodule si l'on pose $(fa)(x) = f(x)a$, $x \in P$, $a \in A$ et $f \in \text{Hom}_B(P, Q)$, car $(fa)(\beta x) = f(\beta x)a = (\sigma(\beta)f(x))a = \sigma(\beta)(f(x)a) = \sigma(\beta)(fa)(x)$. L'homomorphisme φ est alors un homomorphisme de A -modules à droite car $\varphi((x \otimes f)a) = \varphi(x \otimes fa) = (fa)(x) = f(x)a = \varphi(x \otimes f)a$. Montrons maintenant que $\text{Hom}_B(P, Q)$ est un A -bimodule inversible. Puisque P et Q sont fidèlement projectifs, on sait que $A \cong \text{End}_B(P)^0$ et $A \cong \text{End}_B(Q)^0$ (1.2.3.). Il suffit donc de montrer que les homomorphismes

$$\mu_1: \text{Hom}_B(P, Q) \otimes_A \text{Hom}_B(Q, P) \rightarrow \text{Hom}_B(P, P)^0 \quad \text{et}$$

$$\mu_2: \text{Hom}_B(Q, P) \otimes_A \text{Hom}_B(P, Q) \rightarrow \text{Hom}_B(Q, Q)^0$$

définis par $\mu_1(f \otimes g) = f^0 g^0 = gf$ et $\mu_2(g \otimes f) = g^0 f^0 = fg$ pour $f \in \text{Hom}_B(P, Q)$ et $g \in \text{Hom}_B(Q, P)$ sont des isomorphismes de A -bimodules. On voit facilement que μ_1 et

μ_2 sont des homomorphismes de A -bimodules. Vérifions-le pour μ_1 : $a(f \otimes g) = af \otimes g$, donc $\mu_1(a(f \otimes g))(x) = g(af(x)) = g(f(xa)) = a(gf)(x)$; $(f \otimes g)a = f \otimes ga$, donc $\mu_1((f \otimes g)a)(x) = (ga)(f(x)) = g(f(x))a = (gf)a(x)$. Pour tout idéal maximal m de R , μ_1 et μ_2 sont des isomorphismes sur le corps de restes R/m . En effet, en notant $\bar{R} = R/m$, etc. ..., on a:

$$\begin{aligned}\bar{R} \otimes_R \text{Hom}_B(P, Q) &\cong \text{Hom}_{\bar{B}}(\bar{P}, \bar{Q}) \quad \text{et} \\ \bar{R} \otimes_R \text{Hom}_B(Q, P) &\cong \text{Hom}_{\bar{B}}(\bar{Q}, \bar{P}),\end{aligned}$$

car P et Q sont des B -modules projectifs de type fini (1.2.3.). La \bar{R} -algèbre \bar{B} est centrale simple (1.4.3.). Elle ne possède donc qu'un type de module simple à droite, S . On a, par conséquent, $\bar{P} \cong nS$ et $\bar{Q} \cong mS$. Comme $\text{End}_B(\bar{P}) \cong \text{End}_{\bar{B}}(\bar{Q})$, $n = m$ et les \bar{B} -modules \bar{P} et \bar{Q} sont isomorphes. On voit donc que $\bar{\mu}_1$ est un isomorphisme pour tout idéal maximal m de R . L'algèbre $\text{End}_B(P, P)^0 \cong A$ est un R -module de type fini, par conséquent, μ_1 est surjectif ([6], Chap. II, § 3, Prop. 11). Soit K le noyau de μ_1 . Comme A est un R -module projectif, la suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow \text{Hom}_B(P, Q) \otimes_A \text{Hom}_B(Q, P) \rightarrow A \rightarrow 0$$

est scindée sur R . Par conséquent, $K = 0$ et K est un R -module de type fini. Il faut donc que $K = 0$. On voit de la même façon que μ_2 est un isomorphisme. Le bimodule $\text{Hom}_B(P, Q)$ définit donc un élément de $\text{Pic}_R(A)$. Puisque A est une R -algèbre d'Azumaya, $\text{Hom}_B(P, Q)$ est donc isomorphe à un module de la forme $A \otimes_R I$, où $(I) \in \text{Pic}(R)$ (1.6.). Inversément, si $Q = P \otimes_R I$, $(I) \in \text{Pic}(R)$, il est clair que $\text{End}_A(Q) \cong \text{End}_A(P)$, car $\text{End}_R(I) \cong R$.

La Proposition 2.2. a été démontrée dans [8], par Rosenberg et Zelinsky, lorsque $A = R$.

3. Un théorème de cancellation

3.1. Soient B et C deux R -algèbres. S'il existe une R -algèbre d'Azumaya A telle que $A \otimes_R B = A \otimes_R C$, alors il existe un entier n tel que $\text{End}_R(nR) \otimes_R B = \text{End}_R(nR) \otimes_R C$, d'après (1.4.2) et (1.3.4.). Pour résoudre le problème de cancellation pour les algèbres d'Azumaya, on peut donc supposer que l'algèbre A est l'anneau des endomorphismes d'un R -module libre de rang fini.

3.2. Soit D une R -algèbre finie et soit M un D -module. On dit que $f\text{-rang}_D(M) \geq r$ si pour tout idéal maximal m de R , le D_m -module M_m possède un facteur direct isomorphe à $r D_m$. On note $\max(R)$ le spectre des idéaux maximaux de R . Nous utiliserons plus loin le théorème de cancellation de Bass-Schanuel ([3], Th. 9.3., p. 28):

THÉORÈME. *Supposons que $M \cong E \oplus N$ où E est un D -module projectif tel que*

$f\text{-rang}_D(E) > \dim(\max(R))$. Alors, pour tout D -module projectif de type fini P et tout D -module M' , $M \oplus P \cong M' \oplus P$ entraîne que $M \cong M'$.

3.3. Soit B une R -algèbre d'Azumaya.

THÉORÈME. *Supposons que B soit isomorphe à $\text{End}_D(P)$, où D est une R -algèbre d'Azumaya et P un D -module projectif de type fini, tel que $f\text{-rang}_D P > \dim(\max(R))$. Supposons que le groupe de Grothendieck des D -modules projectifs de type fini $K_0(D)$ soit sans torsion. Alors, pour toute R -algèbre d'Azumaya A et toute R -algèbre C , $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$ entraîne que $B \cong C$.*

Démonstration. Le D -module P est fidèlement projectif, car $f\text{-rang}_D P > 0$. Par conséquent, C est une algèbre d'Azumaya ([2], Th. 3.5., p. 376). Les algèbres B et D sont semblables (1.5.3.). Comme B et C sont semblables (3.1.), il existe un D -module fidèlement projectif Q tel que $C \cong \text{End}_D(Q)$ (1.5.3.). D'après (3.1.), il existe donc un entier n tel que $\text{End}_D(nP) \cong \text{End}_D(nQ)$. Il suit alors de la Proposition 2.2. que $nP \cong nQ \otimes_R I$ pour un R -module projectif I de rang un. Puisque $K_0(D)$ est sans torsion, il existe un entier r tel que $P \oplus rD \cong Q \otimes_R I \oplus rD$. D'après le théorème de cancellation de Bass-Schanuel (3.2.), on a donc que $P \cong Q \otimes_R I$, car $f\text{-rang}_D P > \dim(\max(R))$. Le théorème résulte alors de la Proposition 2.2.

4. Exemples

Le théorème 3.2. est faux sans conditions. Donnons quelques contre-exemples.

4.1. Soit $R = \mathbf{R}[x, y, z]$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, \mathbf{R} est le corps des réels. On sait que $K_0(R) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le R -module $P = R \oplus R \oplus R/(x, y, z)R$ est projectif, n'est pas libre et $P \oplus R \cong 3R$ ([13], Th. 3, p. 270, voir aussi [10]). On a $P \oplus P = 2R \oplus 2R$ (par cancellation!), donc

$$\text{End}_R(2R) \otimes_R \text{End}_R(P) \cong \text{End}_R(2R) \otimes_R \text{End}_R(2R).$$

Si $\text{End}_R(2R) \cong \text{End}_R(P)$, on a $P \cong 2R$, d'après la Proposition 2.2., car $\text{Pic}(R) = 0$. En effet R est factoriel ([13], Th. 5, p. 273, voir aussi [10], Prop. 9, p. 165). La classe de P dans $K_0(R)$ n'a pas de torsion, mais la condition sur le f -rang n'est pas satisfaite. L'exemple suivant se trouve essentiellement dans [13], p. 276. Soit $A = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} R$ et soit M un A -module libre de rang deux. Soit ϱ l'endomorphisme de M défini par

$$\varrho(a_1, a_2) = (\tfrac{1}{2}a_1(1-x) + \tfrac{1}{2}a_2(y-iz), \tfrac{1}{2}a_1(y+iz) + \tfrac{1}{2}a_2(1+x)).$$

On vérifie que ϱ est idempotent. Soit Q l'image de ϱ . On a donc $Q \oplus \text{Ker } \varrho \cong M$. De plus, Q , considéré comme R -module, est isomorphe à $\text{Ker } \varrho \cong \text{Im}(1-\varrho)$. En effet, si

(e_i) , $i=1, \dots, 4$ est la base canonique de M sur R , Q est engendré par

$$\begin{aligned}\varrho(e_1) &= \frac{1}{2}(1-x)e_1 + \frac{1}{2}ye_3 + \frac{1}{2}ze_4 \\ \varrho(e_2) &= \frac{1}{2}(1-x)e_2 - \frac{1}{2}ze_3 + \frac{1}{2}ye_4 \\ \varrho(e_3) &= \frac{1}{2}ye_1 - \frac{1}{2}ze_2 + \frac{1}{2}(1+x)e_3 \\ \varrho(e_4) &= \frac{1}{2}ze_1 + \frac{1}{2}ye_2 + \frac{1}{2}(1+x)e_4.\end{aligned}$$

Soit $f : M \rightarrow M$ l'automorphisme de M défini par $f(e_1) = e_3$, $f(e_2) = -e_4$, $f(e_3) = -e_1$ et $f(e_4) = e_2$. On voit alors facilement que Q est l'image de $f^{-1}(1-\varrho)f$. La classe de Q est donc un élément d'ordre deux dans $K_0(R)$. Par conséquent, $Q \oplus R$ n'est pas libre, mais $(Q \oplus R) \oplus (Q \oplus R) \cong 3R \oplus 3R$. On a donc

$$\mathrm{End}_R(2R) \otimes_R \mathrm{End}_R(Q \oplus R) \cong \mathrm{End}_R(2R) \otimes_R \mathrm{End}_R(3R),$$

sans que $\mathrm{End}_R(Q \oplus R)$ soit isomorphe à $\mathrm{End}_R(3R)$. L'hypothèse sur le f -rang est satisfaite, mais la classe de Q dans $K_0(R)$ a de la torsion.

4.2. Soit R un anneau d'entiers algébriques de nombre de classes deux, par exemple l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$. Soit I un R -module projectif de rang un, dont la classe (I) engendre $\mathrm{Pic}(R)$. Le module $I \oplus I \cong R \oplus I \otimes_R I$ est donc libre. Posons $P = R \oplus I$, P est projectif, n'est pas libre, mais $P \oplus P$ est libre. On a donc

$$\mathrm{End}_R(2R) \otimes_R \mathrm{End}_R(P) \cong \mathrm{End}_R(2R) \otimes_R \mathrm{End}_R(2R).$$

Un isomorphisme $\mathrm{End}_R(2R) \cong \mathrm{End}_R(P)$ entraîne que P est libre, car $P \cong J \otimes_R (R \oplus R) \cong \cong J \oplus J$, $(J) \in \mathrm{Pic}(R)$. Dans cet exemple, la condition sur le rang est satisfaite, mais $K_0(R) = \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Pic}(R) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ a de la torsion.

4.3. Remarquons que, même si R est principal, il peut exister des R -algèbres d'Azumaya A telles que $K_0(A)$ ait de la torsion. Supposons que R soit un anneau principal d'entiers algébriques. D'après la théorie de Eichler-Swan ([14]), $K_0(A)$ est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -module. On en déduit facilement le résultat suivant.

4.3.1. PROPOSITION. *Soit R un anneau principal d'entiers algébriques et soit B une R -algèbre d'Azumaya. Supposons que B soit isomorphe à une algèbre de matrices $M_2(D)$ sur une R -algèbre finie D . Alors, pour toute R -algèbre d'Azumaya A et toute R -algèbre C , $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$ entraîne que $B \cong C$.*

Démonstration. Puisque $B \cong M_2(D) \cong \mathrm{End}_R(R \oplus R) \otimes_R D$, D est une algèbre d'Azumaya ([2], Th. 3.5., p. 376), qui est semblable à C . Il existe donc un C -module fidèlement projectif P tel que $D \cong \mathrm{End}_C(P)$. Par conséquent, $B \cong \mathrm{End}_C(P \oplus P)$. Le C -module $P \oplus P$ est stablement libre, puisque $K_0(C)$ est un $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -module. Il est donc libre ([14], Th. 2, p. 56), $P \oplus P = nC$. Pour des raisons de dimension, $n=1$, d'où le résultat.

4.3.2. COROLLAIRE. Soient A et A' deux ordres maximaux séparables dans une algèbre centrale simple sur un corps de nombres algébriques K , de nombre de classes un. Alors $M_2(A) \cong M_2(A')$ (bien que A et A' ne soient pas nécessairement isomorphes).

Démonstration. Soit R l'anneau des entiers de K . Par hypothèse, $A \otimes_R K \cong A' \otimes_R K$. L'homomorphisme du groupe de Brauer de R dans le groupe de Brauer de K est injectif ([2], Th. 7.2., p. 388). Par conséquent, les algèbres A et A' sont semblables. La conclusion suit alors de la Proposition 4.3.1.

4.4. Si R est l'anneau des entiers rationnels \mathbf{Z} , le groupe de Brauer $B(R)$ est trivial. Toute \mathbf{Z} -algèbre d'Azumaya est donc semblable à une algèbre de matrices sur \mathbf{Z} . La cancellation est toujours possible.

4.5. Anneaux semi-locaux.

Soit R un anneau semi-local et soit A une R -algèbre d'Azumaya.

4.5.1. PROPOSITION. Le groupe $K_0(A)$ est le groupe abélien libre engendré par les classes de A -modules projectifs de type fini indécomposables. Si R est connexe, $K_0(A) = \mathbf{Z}$.

Démonstration. L'algèbre A satisfait aux conditions du théorème de Krull-Schmidt ([15], Th. 2.1., p. 76):

- 1) Tout A -module projectif de type fini P est somme directe de A -modules projectifs indécomposables.
- 2) La décomposition est unique (aux isomorphismes habituels près).

En effet, si R est connexe, A ne possède qu'un type de A -modules projectifs de type fini indécomposables ([7], Th. 1. p. 39). Si R n'est pas connexe, R est un produit d'anneaux semi-locaux connexes, $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$. On a alors $A \cong A_1 \times \cdots \times A_n$ et $P \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, où A_i est une R_i -algèbre d'Azumaya et P_i un A_i -module projectif de type fini. Cette décomposition est unique, d'où la proposition.

4.5.2. COROLLAIRE. ([7] et [9]). Soient A , B des algèbres d'Azumaya et C une algèbre sur un anneau semi-local R . Si $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$, alors $B \cong C$.

Démonstration. Comme la dimension de $\max(R)$ est zéro, c'est une conséquence immédiate du Théorème 3.3. et de la Proposition 4.5.2.

4.6. Anneaux de polynômes.

Soit $R = k[x_1, \dots, x_n]$ un anneau de polynômes en n variables sur un corps de caractéristique zéro k et soit A une R -algèbre d'Azumaya.

4.6.1. PROPOSITION. $K_0(A) \cong \mathbf{Z}$.

Démonstration. L'application canonique $k \rightarrow k[x_1, \dots, x_n]$ induit un isomorphisme

des groupes de Brauer correspondants ([2], Prop. 7.7., p. 391). Par conséquent, l'algèbre A est semblable à une R -algèbre $D[x_1, \dots, x_n] \cong D \otimes_k k[x_1, \dots, x_n]$, où D est une algèbre de division de dimension finie sur k . Il existe donc un $D[x_1, \dots, x_n]$ -module fidèlement projectif P tel que $A \cong \text{End}_{D[x_1, \dots, x_n]}(P)$. Cet isomorphisme induit une équivalence de Morita des catégories $\text{Mod-}A$ et $\text{Mod-}D[x_1, \dots, x_n]$. Par conséquent

$$K_0(A) \cong K_0(D[x_1, \dots, x_n]) \cong K_0(D) \cong \mathbf{Z}.$$

4.6.2 THÉORÈME. *Soit $R = k[x_1, \dots, x_n]$ un anneau de polynômes en n variables sur un corps k de caractéristique zéro. Toute R -algèbre d'Azumaya B peut s'écrire de façon unique sous la forme $B \cong \text{End}_{D[x_1, \dots, x_n]}(P)$ où D est une algèbre de division de dimension finie sur k et P un $D[x_1, \dots, x_n]$ -module fidèlement projectif. Supposons que le rang de P (sur $D[x_1, \dots, x_n]$) soit plus grand que n . Alors pour toute R -algèbre d'Azumaya A et toute R -algèbre C , $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$ entraîne que $B \cong C$.*

Démonstration. L'existence a été démontrée dans 4.6.1. Supposons que $\text{End}_{D[x_1, \dots, x_n]}(P) \cong \text{End}_{D'[x_1, \dots, x_n]}(P')$. Le corps k est une R -algèbre par la projection $R = k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$. On a donc $\text{End}_D(P \otimes_R k) \cong \text{End}_{D'}(P' \otimes_R k)$, d'où $D \cong D'$. Le module P' devient ainsi un $D[x_1, \dots, x_n]$ -module isomorphe à P par la Prop. 2.2., car $\text{Pic}(R) = 0$. La seconde partie suit du Théorème 3.3.

4.6.3. PROPOSITION. *Soit R un anneau de polynômes en une variable sur un corps parfait ou un anneau de polynômes en deux variables sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soient A et B des R -algèbres d'Azumaya et C une R -algèbre. Alors, $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$ entraîne que $B \cong C$.*

Démonstration. Si k est parfait, l'homomorphisme naturel $k \rightarrow k[x]$ induit un isomorphisme des groupes de Brauer correspondants ([2], Th. 7.5., p. 389). Tout module projectif de type fini sur $D[x]$ est libre car $D[x]$ est principal. Par conséquent, il n'est plus nécessaire d'utiliser le théorème de Bass-Schanuel (3.2.) dans la démonstration de (3.3.). Dans l'autre cas, le même raisonnement s'applique grâce au théorème de Seshadri ([11]).

4.7. Soit A une algèbre d'Azumaya. En général, il est difficile de trouver la meilleure représentation $A \cong \text{End}_D(P)$ qui permette d'appliquer le Théorème 3.3. Soit R un anneau intègre et soit K son corps de fractions. L'algèbre $A \otimes_R K$ est une algèbre de matrices $M_n(\Delta)$ sur une algèbre de division Δ de dimension finie sur K . Il est alors naturel de chercher l'algèbre d'Azumaya D dans Δ , telle que $D \otimes_R K = \Delta$.

4.7.1. THÉORÈME. *Soit R un domaine régulier de dimension ≤ 2 et soit A une R -algèbre d'Azumaya. Soit K le corps des fractions de R . L'algèbre $A \otimes_R K$ est isomorphe à une algèbre de matrices $M_n(\Delta)$, où Δ est une algèbre de division de dimension finie sur*

K. Il existe alors une R-algèbre d'Azumaya $D \subset \Delta$, telle que $D \otimes_R K = \Delta$, et un D -module fidèlement projectif P tel que $A \cong \text{End}_D(P)$. De plus, $f\text{-rang}_D P = n$.

Démonstration. Soit D un ordre maximal de Δ sur R . D est un R -module projectif car $\dim(R) \leq 2$ ([2], p. 389). Soit \mathfrak{p} un idéal premier minimal de R . L'algèbre $D \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = D_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal de Δ sur $R_{\mathfrak{p}}$. L'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, par conséquent, $M_n(D_{\mathfrak{p}})$ est un ordre maximal dans $M_n(\Delta)$ ([1], Th. 3.8., p. 12). L'algèbre $A_{\mathfrak{p}}$ est également un ordre maximal de $M_n(\Delta)$, car $A_{\mathfrak{p}} \otimes_R K \cong M_n(\Delta)$. Il suit alors de [1], Prop. 3.5., p. 11, que $M_n(D_{\mathfrak{p}}) \cong A_{\mathfrak{p}}$. C'est vrai pour tout idéal premier minimal, donc $M_n(D)$ est une algèbre d'Azumaya ([2], Prop. 4.6., p. 397). L'algèbre D est donc également une algèbre d'Azumaya ([2], Th. 3.5., p. 376). De plus A est semblable à D , car l'homomorphisme $B(R) \rightarrow B(K)$ des groupes de Brauer est injectif ([2], Th. 7.2., p. 388).

5. Le théorème de Skolem-Noether

5.1. Pour toute R -algèbre d'Azumaya A , notons $O(A)$ le groupe des automorphismes de A , modulo les automorphismes intérieurs. Pour tout automorphisme σ de A , le R -module $J_{\sigma} = \{a \in A \mid \sigma(x)a = ax, \forall x \in A\}$ est inversible et définit un élément de $\text{Pic}(R)$. On vérifie que la correspondance $\sigma \rightarrow J_{\sigma}$ induit un homomorphisme de groupes ([8])

$$\alpha: O(A) \rightarrow \text{Pic}(R).$$

Soit P un A -module fidèlement projectif. L'ensemble $J_A(P)$ défini au § 2 possède une structure de groupe, la multiplication étant induite par $(P \otimes_R I, P \otimes_R J) \mapsto P \otimes_R I \otimes_R J$, (I) et (J) dans $\text{Pic}(R)$. L'application

$$\beta: \text{Pic}(R) \rightarrow J_A(P)$$

définie par $I \mapsto P \otimes_R I$, $(I) \in \text{Pic}(R)$, est alors un homomorphisme de groupes.

5.2. PROPOSITION. La suite

$$0 \rightarrow O(B) \xrightarrow{\alpha} \text{Pic}(R) \xrightarrow{\beta} J_A(P) \rightarrow 0$$

où $B = \text{End}_A(P)$, est exacte pour toute algèbre d'Azumaya A et tout A -module fidèlement projectif P .

Ce résultat a été démontré dans [8] pour $A = R$ (Th. 11) et pour $P = A$ (Th. 7). La démonstration du théorème 11 de [8] peut être reprise pour démontrer (5.2.), si l'on utilise la Proposition 2.2.

5.3. La Proposition 5.2. peut être considérée comme une généralisation du théorème de Skolem-Noether: si $\text{Pic}(R) = 0$, tout automorphisme d'une R -algèbre d'Azumaya est intérieur ([2] et [8]). Le problème inverse a été posé par Rosenberg et

Zelinsky dans [8]. Si, pour toute R -algèbre d'Azumaya, tout automorphisme est intérieur, $\text{Pic}(R)$ est-il nécessairement zéro? La réponse est négative.

5.4. THÉORÈME. *Soit A une R -algèbre d'Azumaya. Tout automorphisme de A est intérieur si et seulement si le groupe $\text{Pic}(R)$ n'a pas de torsion.*

Démonstration. La démonstration est semblable à celle de la proposition (7.3.), p. 46 de [4]. Les notations sont celles de (5.1.). Montrons tout d'abord que l'image de $0(A)$ par α est contenue dans le sous-groupe de torsion de $\text{Pic}(R)$. D'après la suite exacte (5.2.), $\text{Im } \alpha = \{(J) \in \text{Pic}(R) \mid A \otimes_R J \cong A \text{ comme } A\text{-modules à droite}\}$. Le R -module A est fidèlement projectif (1.4.2.), par conséquent il existe un entier n tel que $nJ \cong nR$ (1.3.4.). On voit alors que l'image de J dans $\text{Pic}(R)$ est un élément de torsion en prenant la n -ième puissance extérieure. Inversément, montrons que pour tout élément de torsion (J) de $\text{Pic}(R)$, il existe une R -algèbre d'Azumaya A telle que $A \otimes_R J \cong A$ comme A -modules à droite. Soit n l'ordre de (J) et soit P le R -module $R \oplus J \oplus J \otimes_R J \oplus \cdots \oplus J \otimes_{n-1} J$. Il est clair que P est fidèlement projectif et que $P \otimes_R J \cong P$. Soit Q le dual de P , $Q = \text{Hom}_R(P, R)$. L'application canonique $P \otimes_R Q \rightarrow \text{End}_R(P)$ donnée par $p \otimes q \mapsto pq$ est un isomorphisme de $\text{End}_R(P)$ -modules à droite. Par conséquent $\text{End}_R(P) \otimes_R J \cong \text{End}_R(P)$ et $\text{End}_R(P)$ est l'algèbre d'Azumaya A cherchée.

5.5. Sur un corps, il est bien connu que deux sous-algèbres simples d'une algèbre centrale simple sont conjuguées si elles sont isomorphes. Nous dirons que l'anneau R est un *anneau de Skolem-Noether* si, pour toute R -algèbre d'Azumaya et pour toute paire de sous-algèbres d'Azumaya B et C de A , tout isomorphisme de R -algèbres $\varphi: B \rightarrow C$ est induit par un automorphisme intérieur de A . En particulier, tout automorphisme de A est intérieur.

5.6. PROPOSITION. *Soit R un anneau de Skolem-Noether et soient A, B des R -algèbres d'Azumaya, C une R -algèbre. Tout isomorphisme de R -algèbres $A \otimes_R B \cong A \otimes_R C$ entraîne que $B \cong C$. Réciproquement, si le théorème de cancellation est vrai sans restrictions et si l'ordre des éléments de torsion de $\text{Pic}(R)$ est borné, alors R est un anneau de Skolem-Noether.*

Démonstration. Soient $h_1: A \rightarrow A \otimes_R B$, $h_2: A \rightarrow A \otimes_R C$ les plongements canoniques et soit $\varphi: A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R C$ un isomorphisme donné. Les sous-algèbres $\varphi h_1(A)$ et $h_2(A)$ de $A \otimes_R C$ sont isomorphes. Puisque R est un anneau de Skolem-Noether et que $A \otimes_R C$ est une algèbre d'Azumaya, il existe un automorphisme ψ de $A \otimes_R C$ qui rende le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_R B & \xrightarrow{\psi} & A \otimes_R C \xrightarrow{\varphi} A \otimes_R C \\ h_1 \uparrow & & \uparrow h_2 \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array}$$

commutatif. Puisque B est une algèbre d'Azumaya, B est isomorphe au commutant de A dans $A \otimes_R B$ ([2], Th. 3.3., p. 376). C'est également vrai pour C , d'où l'isomorphisme $B \cong C$.

Pour démontrer la seconde affirmation, nous supposerons tout d'abord que $\text{Pic}(R)$ est sans torsion. Soient B et C deux sous-algèbres d'Azumaya d'une algèbre d'Azumaya et soit $\varphi: B \rightarrow C$ un isomorphisme. Soit A^B le commutant de B dans A . On a $A \cong A \otimes_R A^B$ et $A \cong C \otimes_R A^C$ ([2], Th. 3.3., p. 376). Par conséquent, $C \otimes_R A^C \cong B \otimes_R A^B \cong \cong C \otimes_R A^B$. Les algèbres A^B et A^C sont des algèbres d'Azumaya, elles sont donc isomorphes, puisque le théorème de cancellation s'applique sans restrictions. L'isomorphisme peut s'étendre alors à un automorphisme de A , qui doit être intérieur, puisque $\text{Pic}(R)$ est sans torsion (5.4.). Montrons maintenant que la torsion de $\text{Pic}(R)$ est zéro. Soit J un R -module projectif de rang un, dont l'image dans $\text{Pic}(R)$ est d'ordre maximal fini $n > 1$. En vertu de la règle de cancellation, il est clair que $\text{End}_R((n-1)R \oplus J) \cong \text{End}_R(nR)$. Il existe donc un R -module projectif de rang un L , tel que $((n-1)R \oplus J) \otimes_R L \cong nR$ (Prop. 2.2.). On a par conséquent $(n-1)R \oplus J \cong nK$, pour un R -module projectif de rang un K . On obtient $J \cong \otimes nK$ en prenant la n -ième puissance extérieure. Il est clair que K définit un élément de torsion de $\text{Pic}(R)$ d'ordre supérieur à n , d'où la contradiction.

5.7. PROPOSITION. *Soit R un anneau de Skolem-Noether. Si $\dim(\max(R)) < \infty$, alors pour toute R -algèbre d'Azumaya D , le groupe $K_0(D)$ est sans torsion.*

Démonstration. Soit $[P] - [F]$ un élément d'ordre fini $n > 1$ de $K_0(D)$. F est un D -module libre de type fini. On peut supposer que $f\text{-rang}_D(P) > 0$, sinon on ajoute un D -module libre de type fini à P . Il est clair que $[nP] = [nF]$. Remplaçant n par un multiple suffisamment grand r , on obtient en vertu du théorème de cancellation de Bass-Schanuel (Th. 3.2.) que $rP \cong rF$. On a donc $\text{End}_R(rR) \otimes_R \text{End}_D(P) \cong \cong \text{End}_R(rR) \otimes_R \text{End}_D(F)$. Il suit de la proposition 5.6 que $\text{End}_D(P) \cong \text{End}_D(F)$. Par conséquent, il existe un R -module projectif de rang un I tel que $P \cong F \otimes_R I$ (Prop. 2.2.). On obtient ainsi l'isomorphisme $rF \otimes_R I \cong rF$. D'après (1.3.), il existe alors un entier m tel que $mI \cong mR$. En effet, F est un R -module fidèlement projectif, car D est fidèlement projectif. En prenant la m -ième puissance extérieure de mI , on voit que la classe de I dans $\text{Pic}(R)$ est un élément de torsion. C'est impossible d'après le théorème 5.4.

5.8. THÉORÈME. *Soit R un anneau de Skolem-Noether tel que $\dim(\max(R)) < \infty$. Soient D une R -algèbre d'Azumaya et P un D -module projectif de type fini tel que $f\text{-rang}_D(P) > 0$. Alors pour tout D -module P' et tout D -module projectif de type fini Q , $P \oplus Q \cong P' \oplus Q$ entraîne que $P \cong P'$.*

Démonstration. Il suit de $f\text{-rang}_D(P) > 0$ que P est un D -module fidèlement projectif. Le module P' est donc également fidèlement projectif. Puisque $P \oplus Q \cong \cong P' \oplus Q$, les classes $[P]$ et $[P']$ de P et de P' dans $K_0(D)$ sont égales. Si r est un entier suffisamment grand, les deux modules rP et rP' sont donc isomorphes, en vertu du théorème de cancellation de Bass-Schanuel (Th. 3.2.). On en déduit, comme dans

la démonstration de la proposition 5.7., qu'il existe un R -module projectif de rang un I tel que $P' \cong P \otimes_R I$. Par conséquent, on a $rP \otimes_R I = rP$. On conclut alors comme dans (5.7) que la classe de I dans $\text{Pic}(R)$ est un élément de torsion. D'après le théorème 5.4., I est donc isomorphe à R . D'où la conclusion.

5.9. Remarque. Soit D une R -algèbre d'Azumaya. D'après les propositions 5.6. et 5.7., le groupe $K_0(D)$ n'a pas de torsion si le théorème de cancellation s'applique sans restrictions et si la torsion du groupe $\text{Pic}(R)$ est bornée. Ce résultat est en quelque sorte une réciproque au théorème de cancellation. Il serait intéressant de savoir si l'hypothèse sur $\text{Pic}(R)$ est vraiment nécessaire.

5.10. Remarque. Si R est un anneau de Skolem-Noether, le groupe $\text{Pic}(R)$ n'a pas de torsion (Th. 5.4.). La réciproque est fausse d'après la proposition 5.6. et l'exemple 4.1. Nous avons donc un exemple simple d'une algèbre d'Azumaya dont tout automorphisme est intérieur et qui contient deux sous-algèbres d'Azumaya isomorphes non conjuguées.

5.11. Remarque (ajoutée pendant les corrections). Ojanguren et Sridharan ont montré que la loi de cancellation est fausse pour un anneau de polynômes sur le corps des réels. Ils ont construit un $\mathbf{H}[X, Y]$ -module projectif de type fini qui n'est pas libre, \mathbf{H} étant le corps des quaternions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN, *Maximal orders*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 1–24.
- [2] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN, *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 367–409.
- [3] H. BASS, *K-theory and stable algebra*, Publ. 22, Inst. Hautes Etudes Sci. (Bures-sur-Yvette, 1964).
- [4] H. BASS, *Lectures on topics in algebraic K-theory* (Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay 1967).
- [5] H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York 1968.
- [6] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Chap. I et II (Hermann, Paris 1961).
- [7] F. R. DEMEYER, *Projective modules over central separable algebras*, Canad. J. Math. 21 (1969), 39–43.
- [8] A. ROSENBERG et D. ZELINSKY, *Automorphisms of central separable algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), 1109–1118.
- [9] A. ROY et R. SRIDHARAN, *Derivations in Azumaya algebras*, J. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), 161–167.
- [10] P. SAMUEL, *Sur les anneaux factoriels*, Bull. Soc. Math. France 89 (1961) 155–173.
- [11] C. S. SESHA DRI, *Triviality of vector bundles over the affine space K^2* , Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 44 (1958), 456–458.
- [12] J. R. STROOKER, *Faithfully projective modules and clean algebras* (Groen et Zoon, Leiden 1965).
- [13] R. SWAN, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 264–277.
- [14] R. SWAN, *Projective modules over group rings and maximal orders*, Annals of Math. 76 (1962), 55–61.
- [15] R. SWAN, *Algebraic K-theory*, Springer Lecture Notes in Mathematics 76 (Heidelberg 1968).