

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1970)

Artikel: Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume.
Autor: Schuster, Hans Werner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34658>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume

VON HANS WERNER SCHUSTER

Einleitung

In der Hochschild-Theorie der Ringerweiterungen werden Algebra-Epimorphismen betrachtet, deren Kerne nilpotente Ideale sind. Eine analoge Situation tritt in der Theorie der komplexen Räume (deren Strukturgarben nilpotente Elemente enthalten dürfen) auf. Eine holomorphe Abbildung $i: S \rightarrow S'$ heißt infinitesimale Erweiterung, wenn S ein durch eine lokal-nilpotente Idealgarbe definierter analytischer Unterraum von S' und i die kanonische Injektion ist. i ist bestimmt durch einen Epimorphismus $\mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S$, dessen Kern lokal-nilpotent ist.

In der Hochschild-Theorie interessiert man sich unter anderem dafür, wann eine gegebene Ringerweiterung trivial ist. In der Funktionentheorie wird in § 4 von uns die entsprechende Frage untersucht: $i: S \rightarrow S'$ sei eine infinitesimale Erweiterung, ist i linksinvertierbar? Ein komplexer Raum S heißt *glatt*, wenn jede infinitesimale Erweiterung von $S \rightarrow S'$ linksinvertierbar ist. Es wird gezeigt: Ein Steinscher Raum ist genau dann glatt, wenn er keine Singularität besitzt (4.4, 4.7); ein komplexer Raum S ist genau dann eine Steinsche Mannigfaltigkeit, wenn $S \times \mathbb{C}$ glatt ist (4.11), ein holomorph-konvexer *glatter* Raum ist eine Steinsche Mannigfaltigkeit (4.10). Diese Sätze werden gewonnen mit Hilfe der folgenden Tatsache (4.5): Ist der komplexe Raum S glatt, so ist die Garbe der Pfaffschen Formen ein projektives Objekt in der (abelschen) Kategorie der kohärenten Modulgarben auf S .

Der Begriff glatter Raum hat sein Analogon in den „Algèbres formellement lisses“, wie sie Grothendieck in EGA (0, 19) definiert und untersucht hat. Grothendieck behandelt vor allem lokale noethersche Ringe, aber es konnten doch manche Beweisideen von ihm übernommen werden.

Ist S ein komplexer Raum, f eine holomorphe Funktion auf S , $i: S \rightarrow S'$ eine infinitesimale Erweiterung, so kann man fragen, ob sich f nach S' fortsetzen läßt, d.h. ob es eine holomorphe Funktion f' auf S' gibt, sodaß $f' \circ i = f$ ist. In (8.3) zeigen wir, daß diese Frage im allgemeinen negativ beantwortet werden muß.

Ist der komplexe Raum S nicht Steinsch, so ist nach Grauert [4] auch S_{red} nicht Steinsch. Wir bringen in (8.5) das Beispiel eines komplexen Raumes, der nicht holomorph-konvex ist, aber dessen Reduktion holomorph-konvex ist. Außerdem wird ein komplexer Raum angegeben (8.6), der nicht holomorph-separabel ist, aber dessen Reduktion holomorph-separabel ist.

Auf einem reduzierten Raum bilden die regulären Punkte das Complement einer dünnen analytischen Menge. Diese Aussage ist aber für nicht reduzierte Räume falsch.

Nun hat Grauert in [4] folgende Definition gegeben: Ein Punkt eines komplexen Raumes heiße *gewöhnlich* (in [4] steht hierfür „*regulär*“), wenn er eine Umgebung besitzt, die biholomorph auf das direkte Produkt eines einpunktigen komplexen Raumes mit einem Polyzylinder abgebildet werden kann. Wir zeigen in (5.9), daß die gewöhnlichen Punkte eines komplexen Raumes das Complement einer analytischen Menge bilden, die jedoch i.a. nicht dünn ist. Denn man kann komplexe Räume angeben (6.4), die keine gewöhnlichen Punkte besitzen.

In § 1 stellen wir Notationen und kleine technische Hilfssätze zusammen. In § 2 wird der folgende Satz bewiesen: Ist $i: S \rightarrow S'$ eine infinitesimale Erweiterung, $f: S \rightarrow X$ eine eigentliche Abbildung mit diskreten Fasern, so existiert in der Kategorie der komplexen Räume das Faserproduct von i und f und der kanonische Morphismus $i_X: X \rightarrow X \times_S S'$ ist eine infinitesimale Erweiterung. § 4 behandelt glatte komplexe Räume. § 5 beschäftigt sich mit gewöhnlichen Punkten komplexer Räume. In § 6 bringen wir Beispiele komplexer Räume ohne gewöhnliche Punkte. In § 7 wird gezeigt, daß ein gewöhnlicher Raum i.a. nur dann als Faserbündel über seiner Reduktion aufgefaßt werden kann, wenn er Steinsch ist. In § 8 wird die Reichhaltigkeit der Algebra der globalen Funktionen auf infinitesimalen Erweiterungen untersucht.

Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Dr. K. Stein und Herrn Dr. O. Forster für zahlreiche Anregungen und wertvolle Hinweise zu danken.

§ 1. Notationen und Bereitstellung von Hilfsmitteln

Sei \underline{A} eine Kategorie; bezüglich der Definition einer Garbe mit Werten in \underline{A} wird auf (EGA, 0; 3.1.2.) verwiesen.

DEFINITION 1.1. Die Kategorie $\underline{G}(\underline{A})$ wird wie folgt definiert:

- Die Objekte von $\underline{G}(\underline{A})$ sind die Paare (X, \mathcal{O}_X) , wobei X ein topologischer Raum und \mathcal{O}_X eine Garbe auf X mit Werten in \underline{A} ist.
- Sind $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ Objekte aus $\underline{G}(\underline{A})$, so sind die Morphismen von (X, \mathcal{O}_X) in (Y, \mathcal{O}_Y) die Paare (u, α) , wobei $u: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\alpha: \mathcal{O}_Y \rightarrow u_* \mathcal{O}_X$ ein Garbenmorphismus ist.
- Ist $(u, \alpha) \in \text{Hom}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$,
 $(v, \beta) \in \text{Hom}((Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z))$, so ist
 $(v, \beta) \circ (u, \alpha) := (v \circ u, v_* (\alpha) \circ \beta)$.

Für (X, \mathcal{O}_X) schreibt man meist kurz X .

Unter einem Ring wird stets ein kommutativer, assoziativer Ring mit 1 verstanden, der Fall $1=0$, also der Nullring, wird zugelassen. Von einem Ringhomomorphismus wird stets vorausgesetzt, daß er das Einselement in das Einselement überführt. Unter einem Modul wird stets ein unitärer Modul verstanden.

Ist K ein Ring, so ist eine K -Algebra ein Ring B zusammen mit einem Ringhomo-

morphismus $K \rightarrow B$. Mit $Al-K$ wird die Kategorie der K -Algebren bezeichnet. Die Objekte von $G(Al-K)$ heißen K -algebrierte Räume.

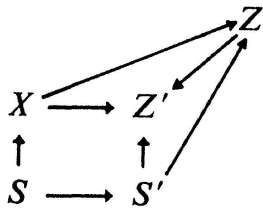
DEFINITION 1.2. Seien $X \xrightarrow{v} S \xleftarrow{u} S'$ zwei Morphismen aus einer Kategorie \underline{A} . Ein Objekt Z aus \underline{A} zusammen mit Morphismen $p_X: Z \rightarrow X$, $p_{S'}: Z \rightarrow S'$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \leftarrow & S' \end{array}$$

kommutativ machen, heißt Faserprodukt von X und S' über S (genauer: Faserprodukt von u und v), wenn folgendes gilt: Hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \leftarrow & Z' \\ \downarrow v & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{u} & S' \end{array}$$

so gibt es genau einen Morphismus $Z' \rightarrow Z$, sodaß



kommutiert. $(Z, p_X, p_{S'})$ ist dann bis auf Isomorphie eindeutig und man schreibt $Z =: X \times_S S'$.

Die duale Definition ist auch wichtig:

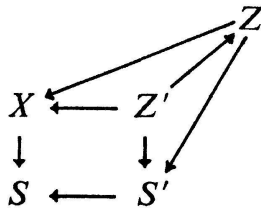
DEFINITION 1.3. Seien $X \xleftarrow{v} S \xrightarrow{u} S'$ zwei Morphismen aus einer Kategorie \underline{A} . Ein Objekt Z aus \underline{A} zusammen mit Morphismen $i_X: X \rightarrow Z$, $i_{S'}: S' \rightarrow Z$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Z \\ \uparrow & & \uparrow \\ S & \rightarrow & S' \end{array}$$

kommutativ machen, heißt Fasercoprodukt von X und S' unter S (genauer: von u und v), wenn folgendes gilt: Hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Z' \\ \uparrow v & & \uparrow \\ S & \xrightarrow{u} & S' \end{array}$$

so gibt es genau einen Morphismus $Z \rightarrow Z'$, sodaß



kommutiert. $(Z, i_X, i_{S'})$ ist dann bis auf Isomorphie eindeutig und man schreibt $Z = : X \perp \perp_S S'$.

Sind $\mathcal{L} \xrightarrow{v} \mathcal{A} \xleftarrow{u} \mathcal{A}'$ zwei Morphismen von Garben von K -Algebren auf dem feste topologischen Raum X , so existiert $\mathcal{L} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ und kann durch

$$X \supset U = \dot{U} \mapsto \{(x, y) \in \mathcal{L}(U) \times \mathcal{A}'(U) : v_U(x) = u_U(y)\}$$

definiert werden. Die kanonischen Morphismen $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}'$ sind die Restriktionen der kanonischen Projektionen.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so gilt:

$$(1.3.1.) \quad f_*(\mathcal{L} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') = f_* \mathcal{L} \times_{f_* \mathcal{A}} f_* \mathcal{A}'.$$

In der Kategorie $\underline{G}(Al-K)$ interessiert uns die Existenz von $X \perp \perp_S S'$ nur in dem Fall, daß der Morphismus $u: S \rightarrow S'$ infinitesimal ist:

DEFINITION 1.4. $u: S \rightarrow S'$ heißt *infinitesimal* (Abgekürzt: *inf.*), wenn die u zugrundeliegende stetige Abbildung die Identität von S ist.

Seien $X \xleftarrow{(v, \alpha)} S \xrightarrow{(u, \beta)} S'$ Morphismen in $\underline{G}(Al-K)$, (u, β) sei inf. Man definiere $X \perp \perp_S S' := (X, \mathcal{O}_X \times_{v_*(\mathcal{O}_S)} v_*(\mathcal{O}_{S'}))$ und $i_X: X \rightarrow X \perp \perp_S S'$, $i_{S'}: S' \rightarrow X \perp \perp_S S'$ durch $i_X := (id_X, \pi_1)$, $i_{S'} := (v, \pi_2)$, wobei $\pi_1: \mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'} \rightarrow \mathcal{O}_X$, $\pi_2: \mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'} \rightarrow v_* \mathcal{O}_{S'}$ die kanonischen Morphismen sind. Aus (1.3.1) folgt dann sofort das

LEMMA 1.5. $(X \perp \perp_S S', i_X, i_{S'})$ ist das Faserprodukt von X und S' unter S .

LEMMA 1.6. Seien $X \xleftarrow{v} S \xrightarrow{u} S'$ Morphismen in $\underline{G}(Al-K)$, u sei inf.; ist $U = \dot{U} \subset X$, so definieren u, v Morphismen

$$(U, \mathcal{O}_X \mid U) \xleftarrow{v'} (v^{-1}(U), \mathcal{O}_S \mid v^{-1}(U)) \xrightarrow{u'} (v^{-1}(U), \mathcal{O}_{S'} \mid v^{-1}(U))$$

und $(U, \mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'} \mid U)$ ist das Faserprodukt von v' und u' . Der Beweis ergibt sich sofort aus der Definition von $X \perp \perp_S S'$.

LEMMA 1.7. Seien $X \xleftarrow{(v, \alpha)} S \xrightarrow{(u, \beta)} S'$ Morphismen in $\underline{G}(Al-K)$, (u, β) sei inf., weiter seien β und $v_*(\beta)$ Epimorphismen. Dann hat man eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow (0) \times v_*(\ker \beta) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Gleichung $v_*(\ker \beta) = \ker(v_* \beta)$.

Sind $\mathcal{B} \xrightarrow{\tilde{v}} \mathcal{A} \xleftarrow{\tilde{u}} \mathcal{A}'$ Morphismen von Garben von K -Algebren auf einem festen topologischen Raum X und ist $\tilde{f}: \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus, so hat man eine exakte Sequenz:

$$(1.8.1) \quad 0 \rightarrow \ker \tilde{f} \times (0) \hookrightarrow \mathcal{B}' \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \xrightarrow{\tilde{f} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'} \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow 0$$

wobei $\tilde{f} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ so definiert ist: Für $U = \mathring{U} \subset X$ ist $(\tilde{f} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}')_U(x, y) = (f_U(x), y)$.

LEMMA 1.8. Seien $X' \xleftarrow{(j, \gamma)} X \xleftarrow{(v, \alpha)} S \xrightarrow{(u, \beta)} S'$ Morphismen in $G(\underline{Al-K})$, (u, β) sei inf., X sei eine abgeschlossene Teilmenge von X' , j sei die kanonische Injektion, γ sei surjektiv. Dann hat man einen kanonischen Morphismus $(j, \tilde{\gamma}): X \perp \perp_S S' \rightarrow X' \perp \perp_S S'$ mit: $\tilde{\gamma}$ ist surjektiv und $\ker \tilde{\gamma} = \ker \gamma \times (0)$.

Beweis: Der Beweis folgt aus (1.8.1) mit $\mathcal{A} = (jv)_* \mathcal{O}_S$, $\mathcal{B} = j_* \mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}' = (jv)_* \mathcal{O}_{S'}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{O}_{X'}$, $\tilde{v} = j_*(\alpha)$, $\tilde{u} = (jv)_*(\beta)$, $\tilde{f} = \gamma$. Nach (1.3.1) ist $j_*(\mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'})$ das Faserprodukt von $j_*(\alpha) = \tilde{v}$ und $(jv)_*(\beta) = \tilde{u}$, und $\mathcal{O}_{X' \perp \perp_S S'}$ ist (in dieser Umschreibung) das Faserprodukt von den Morphismen $\mathcal{B}' \xrightarrow{\tilde{v} \circ \tilde{f}} \mathcal{A} \xleftarrow{\tilde{u}} \mathcal{A}'$.

LEMMA 1.9. Seien $X \xleftarrow{f=(v, \alpha)} S \xrightarrow{i=(u, \beta)} S'$ Morphismen in $G(\underline{Al-K})$, i sei infinitesimal. Dann definiert die Zuordnung $h \mapsto hi_{S'}$, eine Bijektion

$$\{h \in \text{Hom}(X \perp \perp_S S', X) : hi_X = id_X\} \rightarrow \{h' \in \text{Hom}(S', X) : f = h'i\}.$$

Der Beweis folgt sofort aus (1.3) und (1.5).

(1.10) Sind $\mathcal{B} \xrightarrow{v} \mathcal{A} \xleftarrow{u} \mathcal{A}'$ Morphismen von Garben von K -Algebren auf dem festen topologischen Raum X , so induziert ein $g \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{A}')$ mit $v = ug$ einen wichtigen Isomorphismus für $\mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$. $\ker u$ wird durch g ein \mathcal{B} -Modul und man kann aus \mathcal{B} und $\ker u$ den \mathcal{B} -Modul $\mathcal{B} \times \ker u$ bilden. $\mathcal{B} \times \ker u$ ist sogar eine \mathcal{B} -Algebra, wenn man die Multiplikation so erklärt: über $U = \mathring{U} \subset X$ sei

$$(a, c) \cdot (a', c') := (aa', g_U(a) \cdot c' + g_U(a') \cdot c + a \cdot c').$$

Die so definierte \mathcal{B} -Algebra wird mit $\mathcal{B} + \ker u$ bezeichnet.

Es ist $\varphi: \mathcal{B} + \ker u \rightarrow \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$, $(a, c) \mapsto (a, g_U(a) + c)$ über $U = \mathring{U} \subset X$ ein Isomorphismus von Garben von K -Algebren. (1.10.1)

Die inverse Abbildung $\psi: \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B} + \ker u$ wird durch $(b, a') \mapsto (b, a' - g_U(b))$ über $U = \mathring{U} \subset X$ gegeben.

(1.10.2) Durch φ wird insbesondere $\mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ ein \mathcal{B} -Modul. Die kanonischen Morphismen $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}'$ sind \mathcal{B} -linear, wobei \mathcal{A}' durch g ein \mathcal{B} -Modul ist.

(1.11) Sei (\mathcal{A}_λ) ein projektives System von Garben von K -Algebren auf dem topologischen Raum X . Die Zuordnung $X \supset U = \mathring{U} \mapsto \lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_\lambda(U)$ ist eine Prägarbe auf X . Nach (EGA, 0, 3.2.6) ist diese Prägarbe bereits eine Garbe und ist auch der projektive Limes des Systems (\mathcal{A}_λ) , und daher wird sie mit $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_\lambda$ bezeichnet.

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so ist $f_* \varprojlim \mathcal{A}_\lambda = \varprojlim f_* \mathcal{A}_\lambda$. Daraus folgt sofort, daß $(X, \varprojlim \mathcal{A}_\lambda)$ der induktive Limes des induktiven Systems $((X, \mathcal{A}_\lambda))$ ist, d.h.

$$\varinjlim (X, \mathcal{A}_\lambda) = (X, \varinjlim \mathcal{A}_\lambda) \quad (1.11.1)$$

§ 2. Infinitesimale Erweiterungen

DEFINITION 2.1. Ein Morphismus (u, α) aus $G(\mathcal{A}l-K)$ heißt

- a) abgeschlossene Einbettung, wenn gilt:
 - i) u ist eine injektive abgeschlossene Abbildung,
 - ii) α ist surjektiv und $\ker \alpha$ ist eine kohärente Idealgarbe;
- b) infinitesimale Erweiterung, wenn gilt:
 - i) (u, α) ist eine abgeschlossene Einbettung,
 - ii) (u, α) ist infinitesimal.

Ist außerdem für ein $n \in \mathbb{N}$ $(\ker \alpha)^{n+1} = 0$, so heißt (u, α) eine inf. Erweiterung vom Grad n .

Bemerkung: Ein Morphismus $(u, \alpha): X \rightarrow Y$ ist genau dann eine abgeschlossene Einbettung, wenn (u, α) ein Isomorphismus von X auf einen durch ein kohärentes \mathcal{O}_Y -Ideal definierten Unterraum von Y ist.

Von nun an wählen wir $K := \mathbb{C}$. Mit P_n , $n \in \mathbb{N}$, meinen wir folgendes Objekt aus $G(\mathcal{A}l-\mathbb{C})$: Der unterliegende topologische Raum ist

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : |x_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n\},$$

die Strukturgarbe ist die Garbe der Holomorphie auf diesem Raum.

Ein Objekt (X, \mathcal{O}_X) aus $G(\mathcal{A}l-\mathbb{C})$ heißt *komplexer Raum*, wenn gilt:

- i) X ist hausdorffsch,
- ii) zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x , ein $n \in \mathbb{N}$ und eine abgeschlossene Einbettung $(U, \mathcal{O}_X|_U) \rightarrow P_n$.

Mit AN (genauer $AN_{\mathbb{C}}$) bezeichnen wir die Kategorie der komplexen Räume, d.h. die durch die Klasse der komplexen Räume definierte volle Unterkategorie von $G(\mathcal{A}l-K)$.

DEFINITION 2.2. Sei $f = (f, \alpha): X \rightarrow Y$ ein Morphismus aus AN ; f heißt *endlich*, wenn

- a) f abgeschlossen ist,
- b) alle Fasern von f endliche Mengen sind.

(2.3) Für endliche Morphismen $f: X \rightarrow Y$ ist folgendes bekannt:

- a) Ist \mathcal{F} ein kohärenter Modul auf X , so ist $f_*(\mathcal{F})$ ein kohärenter Modul auf Y ,
- b) ist $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von kohärenten Moduln auf X , so ist die Sequenz $0 \rightarrow f_*(\mathcal{F}') \rightarrow f_*(\mathcal{F}) \rightarrow f_*(\mathcal{F}'') \rightarrow 0$ auch exakt.

Ein Beweis hierfür findet sich etwa in ([9], II, Cor. von Theor. 2).

(2.4) Ist $f: X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus und \mathcal{I} ein lokal-nilpotentes kohärentes Ideal auf X , so ist auch $f_*(\mathcal{I})$ lokal-nilpotent.

In der Tat: ist U eine offene relativkompakte Umgebung von $y \in Y$, so ist $f^{-1}(U)$ relativkompakt. Nach ([4], § 1, Satz 4) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\mathcal{I} | f^{-1}(U))^n = 0$, also $((f_*\mathcal{I})(U))^n = 0$.

(2.5.1) Sei A ein Ring, B eine A -Algebra, $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus B . Dann heißt $(x_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von B , wenn der Morphismus

$$\begin{aligned} A[X_i]_{i \in I} &\rightarrow B \\ X_i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

ein Epimorphismus ist.

(2.5.2) B heißt eine nilpotent erzeugte A -Algebra, wenn es ein Erzeugendensystem $(x_i)_{i \in I}$ gibt, derart daß für alle $i \in I$ x_i nilpotent ist.

DEFINITION 2.5. Sei S ein komplexer Raum. Eine kohärente, nilpotent erzeugte Algebra auf S ist eine Garbe \mathcal{A} von \mathcal{O}_S -Algebren mit:

- i) als \mathcal{O}_S -Modul ist \mathcal{A} kohärent,
- ii) für alle $s \in S$ ist \mathcal{A}_s als $\mathcal{O}_{S,s}$ -Algebra nilpotent erzeugt.

SATZ 2.6. Sei S ein komplexer Raum, \mathcal{A} eine kohärente nilpotent erzeugte Algebra auf S , es sei $\text{Supp}(\mathcal{A}) = S$. Dann ist (S, \mathcal{A}) ein komplexer Raum.

Beweis: Sei $s \in S$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von s und $t_1, \dots, t_r \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ mit $t_i^n = 0$ $1 \leq i \leq r$ für ein $n \in \mathbb{N}$, derart daß $\mathcal{A} | U$ als $\mathcal{O}_S | U$ -Modul von $1, t_1, \dots, t_r$ erzeugt wird. Also ist der durch $T_i \mapsto t_i$, $1 \leq i \leq r$, definierte Morphismus $\mathcal{O}_U[T_1, \dots, T_r] \rightarrow \mathcal{A} | U$ surjektiv, wobei $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_S | U$ ist. Da $t_i^n = 0$ ist, erhält man einen Epimorphismus

$$\mathcal{O}_U[T_1, \dots, T_r] / (T_1^n, \dots, T_r^n) =: \mathcal{B} \xrightarrow{f} \mathcal{A} | U.$$

Nun ist f \mathcal{O}_U -linear und \mathcal{B} ist ein kohärenter \mathcal{O}_U -Modul, also ist $\ker f$ ein \mathcal{O}_U -Modul von endlichem Typ, daher ist $\ker f$ ein \mathcal{B} -Ideal von endlichem Typ. (U, \mathcal{B}) ist isomorph zu $(U, \mathcal{O}_U) \times P$, wobei P der durch das Ideal (z_1^n, \dots, z_r^n) definierte einpunktige Unterraum des \mathbb{C}^r ist. \mathcal{B} ist also ein kohärenter \mathcal{B} -Modul, und da $\ker f$ von endlichem Typ ist, ist $\ker f$ ein kohärenter \mathcal{B} -Modul. Also ist der durch f definierte Morphismus $(U, \mathcal{A} | U) \rightarrow (U, \mathcal{B})$ eine abgeschlossene Einbettung, und da die Komposition von abgeschlossenen Einbettungen eine abgeschlossene Einbettung ist, folgt daraus, daß $(U, \mathcal{A} | U)$ ein komplexer Raum ist. Da $s \in S$ beliebig war, ist alles bewiesen.

Sind $X \xleftarrow{f} S \xrightarrow{i} S'$ Morphismen in AN und ist i eine inf. Erweiterung, so existiert

nach (1.5) in der Kategorie $G(\underline{A}I - \underline{C})$ das Faserprodukt $X \perp \perp_S S'$ von X und S' unter S und man hat kanonische Morphismen $X \xrightarrow{i_X} X \perp \perp_S S' \xleftarrow{i_{S'}} S'$, die insbesondere so beschaffen sind, daß $i_X f = i_S$, i ist. Eine wichtige Frage ist es dann natürlich, ob $X \perp \perp_S S'$ ein komplexer Raum ist. Diese Frage wird im folgenden Satz teilweise beantwortet.

SATZ 2.7. $X \xleftarrow{f} S \xrightarrow{i} S'$ seien Morphismen in AN , i sei dabei eine inf. Erweiterung und f sei eine endliche Abbildung. Dann ist $X \perp \perp_S S'$ ein komplexer Raum und i_X ist eine inf. Erweiterung.

Beweis: 1. Der Satz wird für den Fall bewiesen, daß X ein Steinscher Raum mit endlicher Einbettungsdimension ist. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N}$ und eine abgeschlossene Einbettung $j: X \rightarrow \mathbb{C}^n$. Da X Steinsch und f endlich ist, ist auch S steinsch, also ist auch S' Steinsch. Aus Theorem *B* folgt dann, daß ein $g \in \text{Hom}(S', \mathbb{C}^n)$ existiert mit $jf = gi$. Da i infinitesimal ist, ist auch g endlich.

Sei nun $j = (j, \gamma)$, $f = (f, \alpha)$, $i = (i, \beta)$, $g = (g, \delta)$. Nach (2.3.b) ist $(jf)_*(\beta)$ surjektiv, nach (1.10.1) ist also $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} + \ker(jf)_*(\beta) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} + g_*(\ker \beta)$. Da g endlich und $\ker \beta$ kohärent ist, ist auch (2.3.a) $g_*(\ker \beta)$ ein kohärenter Modul auf dem \mathbb{C}^n . Daraus und aus (2.4) folgt, daß $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} + g_*(\ker \beta)$ eine kohärente nilpotent erzeugte Algebra auf dem \mathbb{C}^n ist. Nach (2.6) ist also $\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'$ ein komplexer Raum.

Man betrachte nun die kanonischen Morphismen $\pi_1: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, $\pi_2: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'} \rightarrow (jf)_* \mathcal{O}_{S'}$; sie sind nach (1.10.2) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -linear. $\mathcal{I} := \ker \gamma$; nach (1.8) ist $\mathcal{I} \times (0)$ ein Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'}$. Es ist $\mathcal{I} \times (0) = \bar{\pi}_1^{-1}(\mathcal{I}) \cap \ker \pi_2$. $\mathcal{I} \times (0)$ ist also ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -Modul, also ein $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'}$ -Ideal von endlichem Typ, also ein kohärenter Modul auf $\mathbb{C}^n \perp \perp_S S'$. Daraus folgt nach (1.8), daß $X \perp \perp_S S'$ ein komplexer Raum ist.

Es bleibt zu zeigen, daß $(id_X, \pi) := i_X$ eine inf. Erweiterung ist: Da f endlich ist, ist $f_*(\beta)$ surjektiv, also ist nach (1.7) π surjektiv. Da $X \perp \perp_S S'$ ein komplexer Raum ist, ist $\ker \pi$ kohärent; da i eine inf. Erweiterung ist, folgt mit (2.4), daß $\ker \pi$ lokal-nilpotent ist.

2. X ist ein beliebiger komplexer Raum: Sei $x \in X$. Es gibt eine Steinsche offene Umgebung U von x mit endlicher Einbettungsdimension. Nach Teil 1 und wegen (1.6) ist $(U, \mathcal{O}_{X \perp \perp_S S'}|_U)$ ein komplexer Raum. Daraus folgt sofort die Behauptung.

§ 3. Die universelle Eigenschaft der Garbe der Keime von Pfaffschen Formen auf komplexen Räumen

(3.0) Ist S ein komplexer Raum, so bezeichnen wir mit $M_c(S)$ die Kategorie der kohärenten \mathcal{O}_S -Moduln. Man weiß, daß $M_c(S)$ eine abelsche Kategorie ist.

(3.1) Sei S ein komplexer Raum, \mathcal{F} ein Objekt aus $M_c(S)$. Für jedes $U = \dot{U} \subset S$ kann man in $(\mathcal{O}_S \times \mathcal{F})(U)$ folgende Verknüpfung einführen: $(a, f) (a', f') := (aa', af' + a'f)$. Damit hat $\mathcal{O}_S \times \mathcal{F}$ die Struktur einer Garbe von Ringen. Für jedes $U = \dot{U} \subset S$

ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_S(U) &\rightarrow (\mathcal{O}_S \times \mathcal{F})(U) \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

ein Ringhomomorphismus, daher kann man $\mathcal{O}_S \times \mathcal{F}$ die Struktur einer \mathcal{O}_S -Algebra aufprägen. Mit $\mathcal{O}_S + \mathcal{F}$ bezeichnen wir die so definierte \mathcal{O}_S -Algebra.

Offenbar ist $\mathcal{O}_S + \mathcal{F}$ eine kohärente, nilpotent erzeugte \mathcal{O}_S -Algebra, daher (2.6) ist $I_S(\mathcal{F}) := (S, \mathcal{O}_S + \mathcal{F})$ ein komplexer Raum. Die \mathcal{O}_S -Algebra-Struktur von $\mathcal{O}_S + \mathcal{F}$ definiert einen Morphismus $p_{\mathcal{F}}: I_S(\mathcal{F}) \rightarrow S$. Die Projektion von $\mathcal{O}_S + \mathcal{F}$ auf den ersten Faktor definiert einen Morphismus $i_{\mathcal{F}}: S \rightarrow I_S(\mathcal{F})$, der eine inf. Erweiterung vom Grad 1 ist.

Ein Homomorphismus $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ induziert einen Morphismus $\mathcal{O}_S + \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_S + \mathcal{F}'$ und definiert so einen Morphismus $I_S(f): I_S(\mathcal{F}') \rightarrow I_S(\mathcal{F})$. Man hat also einen Funktor $I_S: \underline{M}_c(S)^0 \rightarrow AN$ definiert.

DEFINITION 3.2. Sei S ein komplexer Raum, \mathcal{F} ein kohärenter Modul auf S . Unter $\text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ versteht man die abelsche Gruppe aller \mathbb{C} -Modul-Garben Homomorphismen f von \mathcal{O}_S in \mathcal{F} , die über jedem $U = \overset{\circ}{U} \subset S$ die Identität $f_U(xy) = xf_U(y) + f_U(x)y \forall x, y \in \mathcal{O}_S(U)$ erfüllen.

Ist $D \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ und $u \in \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$, so ist $u \circ D \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F}')$, also definiert $\mathcal{F} \mapsto \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ einen Funktor von $\underline{M}_c(S)$ in die Kategorie der abelschen Gruppen.

(3.3.1) Ist $D \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$, so definiert die Zuordnung $\mathcal{O}_S(U) \ni x \mapsto (x, D_U(x)) \in (\mathcal{O}_S + \mathcal{F})(U)$ für jedes $U = \overset{\circ}{U} \subset S$ einen Morphismus $\mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S + \mathcal{F}$ und damit einen Morphismus $I_S(\mathcal{F}) \rightarrow S$.

LEMMA 3.3. Die in (3.3.1) angegebene Zuordnung definiert eine natürliche Bijektion von $\text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ auf die Menge der Linksinversen von $i_{\mathcal{F}}$.

Sei S ein komplexer Raum. Die Diagonalabbildung $d: S \rightarrow S \times S$ ist eine abgeschlossene Einbettung, läßt sich also faktorisieren.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{d} & S \times S \\ & \searrow a & \nearrow j \\ & & d(S) \end{array}$$

Hierbei ist j die kanonische Injektion. Mit \mathcal{I} bezeichnen wir die Idealgarbe von $d(S)$.

Die Garbe Ω , genauer Ω_S , der Keime von Pfaffschen Formen auf S , wird definiert als die analytische Urbildgarbe $d^*\mathcal{I}$ von \mathcal{I} unter d , vgl. dazu ([7], VII). Man kann zeigen, daß diese Definition mit der in ([5]) gegebenen Definition äquivalent ist. Es ist bekannt, daß die Funktoren $\text{Hom}(\Omega_S, -): \underline{M}_c(S) \rightarrow \mathbf{AB}$, $\text{Der}(\mathcal{O}_S, -): \underline{M}_c(S) \rightarrow \mathbf{AB}$ *isomorph* sind. Da aber in der Literatur hierfür ein expliziter Beweis nicht zu existieren

scheint, will ich dies hier, wenn auch nicht in aller Ausführlichkeit, beweisen. Die Beweisidee ist (EGA, 0, 20.4) entnommen, wo der Differentialmodul linear-topologischer Algebren behandelt wird.

$d(S)' := (d(S), \mathcal{O}_{S \times S/\mathcal{F}^2} \mid d(S))$. Man hat eine kanonische Injektion $i: d(S) \rightarrow d(S)'$; mit $i' = (a, \varepsilon)$ bezeichnen wir die Komposition $i \circ a$; sei $j': d(S)' \rightarrow S \times S$ die kanonische Injektion, mit $p_i = (a^{-1}, \pi_i)$, $i = 1, 2$, bezeichnen wir die Komposition $\text{pr}_i \circ j'$.

LEMMA 3.4. Es gibt einen Isomorphismus $\omega: I_S(\Omega) \rightarrow d(S)'$ mit $p_\Omega = p_1 \circ \omega$.

Beweis: Es ist $\Omega \simeq (p_1)_*(\ker \mathfrak{D})$, wo \mathfrak{D} durch $i = (id_{d(S)}, \mathfrak{D})$ definiert ist (vgl. [7], VII). Man muß also einen Isomorphismus $I_S((p_1)_*(\ker \mathfrak{D})) \rightarrow d(S)'$ mit der entsprechenden Eigenschaft angeben. Man definiert

$(a, \varphi): I_S((p_1)_*(\ker \mathfrak{D})) \rightarrow d(S)'$ so:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O}_{d(S)'} &\rightarrow a_*(\mathcal{O}_S + (p_1)_*(\ker \mathfrak{D})) = a_*\mathcal{O}_S + \ker \mathfrak{D} \\ z &\longmapsto (\varepsilon_U(z), z - (a_*(\pi_1) \circ \varepsilon)_U(z)) \end{aligned}$$

für offene Mengen $U \subset d(S)$.

$(a^{-1}, \psi): d(S)' \rightarrow I_S((p_1)_*(\ker \mathfrak{D}))$ wird so definiert:

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{O}_S + (p_1)_*(\ker \mathfrak{D}) &\rightarrow (a^{-1})_* \mathcal{O}_{d(S)'} \\ (b, x) &\longmapsto (\pi_1)_U(b) + x \end{aligned}$$

für offene Mengen $U \subset d(S)$.

Man rechnet leicht nach, daß (a, φ) und (a^{-1}, ψ) zueinander invers sind und daß gilt: $p_{(p_1)_*(\ker \mathfrak{D})} = p_1 \circ (a, \varphi)$.

SATZ 3.5. Die Funktoren $\text{Hom}(\Omega, -): \underline{M}_c(S) \rightarrow \mathbf{AB}$
 $\text{Der}(\mathcal{O}_S, -): \underline{M}_c(S) \rightarrow \mathbf{AB}$

sind zueinander isomorph.

Zum *Beweis* geben wir für ein Objekt \mathcal{F} aus $\underline{M}_c(S)$ eine Bijektion $\text{Hom}(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ an; daß diese Bijektion mit der Gruppenstruktur verträglich und daß sie funktoriell in \mathcal{F} ist, zeigen wir nicht.

Nach (3.3) ist $\text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{F})$ isomorph zu

$$G := \{u \in \text{Hom}(I_S(\mathcal{F}), S) : u \circ i_{\mathcal{F}} = id_S\};$$

nach (3.4) ist $\text{Hom}(\Omega, \mathcal{F})$ isomorph zu

$$G' := \{v \in \text{Hom}(I_S(\mathcal{F}), d(S)') : v \circ i_{\mathcal{F}} = i', p_{\mathcal{F}} = p_1 v\}.$$

Weil $p_2 i' = id_S$ ist, definiert $v \mapsto p_2 v$ eine Abbildung $\sigma: G' \rightarrow G$.

$\tau: G \rightarrow G'$ wird wie folgt definiert: Sei $u \in G$. Aus der Definition des direkten Produktes folgt, daß es genau einen Morphismus $z \in \text{Hom}(I_S(\mathcal{F}), S \times S)$ gibt, sodaß das

Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S \times S & \xrightarrow{\quad} & S \\
 \text{\scriptsize } pr_2 \downarrow & \swarrow & \uparrow \text{\scriptsize } p_{\mathcal{F}} \\
 S & \xleftarrow{\quad} & I_S(\mathcal{F}) \\
 & \text{\scriptsize } u &
 \end{array}$$

kommutiert (3.5.1).

Also ist $ui_{\mathcal{F}} = pr_2(z i_{\mathcal{F}})$, $p_{\mathcal{F}} \circ i_{\mathcal{F}} = pr_1(z i_{\mathcal{F}})$. Weil $u \in G$ ist, folgt $id_S = pr_2(z i_{\mathcal{F}}) = pr_1(z i_{\mathcal{F}})$. Also ist $d = z i_{\mathcal{F}}$. Daraus folgt, daß der durch z gegebene Morphismus $\mathcal{O}_{S \times S} \rightarrow z_* \mathcal{O}_{I_S(\mathcal{F})}$ auf \mathcal{F}^2 verschwindet, also induziert z ein $v: I_S(\mathcal{F}) \rightarrow d(S)'$ mit: $z = j'v$. Es ist $v \in G'$. In der Tat: $j'(vi_{\mathcal{F}}) = z i_{\mathcal{F}} = d = j'i'$, also (j' ist ein Monomorphismus) $vi_{\mathcal{F}} = i'$; $p_1 v = (pr_1)j'v = pr_1 z = p_{\mathcal{F}}$ (wegen 3.5.1). Man setzt nun $\tau(u) := v$ und hat so eine Abbildung $\tau: G \rightarrow G'$ konstruiert. Aus der Definition von τ ergibt sich unmittelbar, daß σ und τ zueinander invers sind.

§ 4. Glatte komplexe Räume

In diesem Kapitel werden mit S, S', T, T', X, X' stets komplexe Räume bezeichnet.

DEFINITION 4.1. Ein komplexer Raum S heißt *glatt*, wenn jede infinitesimale Erweiterung $i: S \rightarrow S'$ ein Linksinverses besitzt.

SATZ 4.2. Für jeden komplexen Raum S sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. S ist glatt;
2. Ist $f: T \rightarrow S$ endlich und $i: T \rightarrow T'$ eine inf. Erweiterung, so gibt es ein $g \in \text{Hom}(T', S)$ mit $f = gi$.

Beweis:

1. impliziert 2.: Ist S glatt, so besitzt nach (2.7) $i_S: S \rightarrow S \perp \perp_T T'$ ein Linksinverses. Aus (1.9) folgt dann die Existenz eines $g \in \text{Hom}(T', S)$ mit $f = gi$.
2. impliziert 1.: Man wähle speziell $T = S, f = id_S$.

SATZ 4.3. Ein komplexer Raum S ist bereits dann glatt, wenn jede inf. Erweiterung vom Grad eins $i: S \rightarrow S'$ ein Linksinverses besitzt.

Beweis: Sei $i: S \rightarrow S'$ eine beliebige inf. Erweiterung; i definiert also ein lokal-nilpotentes Ideal \mathcal{I} auf S' und man kann annehmen, daß i die kanonische Injektion $(S, \mathcal{O}_{S'/\mathcal{I}}) \rightarrow (S, \mathcal{O}_{S'})$ ist. $S_n := (S, \mathcal{O}_{S'/\mathcal{I}^{n+1}})$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \geq m \geq 0$ definiert der kanonische Epimorphismus $\mathcal{O}_{S'/\mathcal{I}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_{S'/\mathcal{I}^{m+1}}$ eine inf. Erweiterung $i_n^m: S_m \rightarrow S_n$. Da jedes $s \in S$ eine offene Umgebung U besitzt, derart daß für ein $n_s \in \mathbb{N}$ $(\mathcal{I} \mid U)^{n_s} = 0$ ist, ist der kanonische Morphismus $\mathcal{O}_S \rightarrow \varprojlim \mathcal{O}_{S'/\mathcal{I}^{n+1}}$ ein Isomorphismus. Nach (1.11.) ist also $S' \simeq \varinjlim S_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist offenbar i_n^{n-1} eine inf. Erweiterung vom Grad 1.

Wir definieren nun induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, ein $p_n \in \text{Hom}(S_n, S_0)$ mit $p_n i_n^0 = id_S$.

Da i_1^0 vom Grad 1 ist, gibt es ein p_1 mit $p_1 i_1^0 = id_S$. Sei für alle $v < n$ schon p_v definiert. Man kann dann das Faserprodukt der Morphismen

$$S \xleftarrow{p_{n-1}} S_{n-1} \xrightarrow{i_n^{n-1}} S_n$$

bilden. Der kanonische Morphismus i_S von S in das Faserprodukt ist eine inf. Erweiterung vom Grad 1, besitzt also ein Linksinverses. Nach (1.9) gibt es daher ein $p_n: S_n \rightarrow S$ mit $p_{n-1} = p_n i_n^{n-1}$. Es ist $id_S = p_{n-1} i_{n-1}^0 = p_n i_n^{n-1} i_{n-1}^0 = p_n i_n^0$. Damit p_n für alle $n \geq 1$ definiert.

Aus $p_{n-1} = p_n i_n^{n-1}$ folgt durch Induktion, daß $p_m = p_n i_n^m$ für alle $m \leq n$ ist. Es läßt sich also $p := \varinjlim p_n$ bilden und es ist $pi = id_S$.

SATZ 4.4. *Steinsche Mannigfaltigkeiten sind glatt.*

Beweis: Sei $i: S \rightarrow S'$ eine inf. Erweiterung, S eine Steinsche Mannigfaltigkeit; o.E.d.A. ist S zusammenhängend, es gibt also eine abgeschlossene Einbettung $j: S \rightarrow \mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Nach ([8], S. 257) ist $j(S)$ ein Umgebungsretrakt, d.h. es gibt eine offene Umgebung U von $j(S)$ und ein Linksinverses p der durch j definierten Abbildung $j': S \rightarrow U$. Da S' Steinsch ist, gibt es nach Theorem B ein $g: S' \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $j = gi$. Da i inf. ist, definiert g einen Morphismus $g': S' \rightarrow U$ mit $j' = g'i$. Also ist pg' ein Linksinverses von i .

Im folgenden wird der Begriff „projektiv“ benutzt. Ein Objekt P einer Kategorie \underline{A} heißt *projektiv*, wenn für jeden Epimorphismus u von \underline{A} die Abbildung $\text{Hom}(P, u)$ surjektiv ist. Ein Objekt P einer abelschen Kategorie ist genau dann projektiv, wenn jeder Epimorphismus auf P ein Rechtsinverses hat.

Ist S ein komplexer Raum und $\underline{M}_c(S)$ die (abelsche) Kategorie der kohärenten Moduln auf S , so ist \mathcal{O}_S genau dann ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(S)$, wenn S Steinsch ist.

Es gilt nun folgendes

THEOREM 4.5. *Ist S ein glatter komplexer Raum, so ist Ω_S ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(S)$.*

Beweis: Sei $f: \mathcal{F} \rightarrow \Omega, \Omega := \Omega_S$, ein Epimorphismus. Zu zeigen ist, daß f ein Rechtsinverses besitzt.

Der universellen Derivation $d: \mathcal{O}_S \rightarrow \Omega$ entspricht nach (3.2) eindeutig ein Morphismus $\delta: I_S(\Omega) \rightarrow S$. Da $I_S(f)$ eine inf. Erweiterung und da δ ein endlicher Morphismus ist, gibt es (4.2) ein $\gamma: I_S(\mathcal{F}) \rightarrow S$ mit $\delta = \gamma \circ I_S(f)$. Also $id_S = \delta \circ i_\Omega = \gamma \circ I_S(f) i_\Omega = \gamma \circ i_{\mathcal{F}}$. Aus (3.2) und (3.4) folgt nun die Existenz eines $g: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\gamma = \delta \circ I_S(g)$; also $\delta = \delta \circ I_S(g) I_S(f) = \delta \circ I_S(fg)$. Also ist nach (3.4) $fg = 1_\Omega$.

COROLLAR 4.6. Sei $S = \mathring{S} \subset \mathbb{C}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) S ist Steinsch.

ii) S ist glatt.

Beweis: i) impliziert ii): folgt aus (4.4)

ii) impliziert i): Nach (4.5) ist $\Omega_S = \mathcal{O}_S^n$ ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(S)$. Auf S gilt also Theorem *B* und daher ist S Steinsch.

Das folgende Corollar, zusammen mit (4.4), rechtfertigt die Bezeichnung „glatt“.

COROLLAR 4.7. Jeder glatte Steinsche Raum ist eine Mannigfaltigkeit.

Beweis: Ist S ein glatter Steinscher Raum, so ist Ω_S ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(S)$, also nach ([2], Satz 6.2) lokalfrei. Die Behauptung folgt nun aus ([7], VII, 3.4).

Es soll nun gezeigt werden, daß jeder holomorph-konvexe glatte Raum eine Steinsche Mannigfaltigkeit ist. Dazu benötigen wir die folgenden Lemmata:

LEMMA 4.8. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein endlicher Morphismus, \mathcal{F} ein projektives Objekt in $\underline{M}_c(Y)$. Dann ist $f^*(\mathcal{F})$ ein projektives Objekt in $\underline{M}_c(X)$.

Beweis: Sei \mathbf{AB} die Kategorie der abelschen Gruppen,

$T: \underline{M}_c(X) \rightarrow \mathbf{AB}$ sei durch $T := \text{Hom}(f^*\mathcal{F}, -)$,

$T': \underline{M}_c(Y) \rightarrow \mathbf{AB}$ sei durch $T' := \text{Hom}(\mathcal{F}, -)$ definiert.

Nach (2.3.) definiert f einen Funktor $f_*: \underline{M}_c(X) \rightarrow \underline{M}_c(Y)$. Es ist $T \simeq T' \circ f_*$. Da T' und f exakt sind, ist auch T exakt, also ist $f^*\mathcal{F}$ projektiv.

LEMMA 4.9. Ist X ein kompakter komplexer Raum, \mathcal{F} ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(X)$, so ist der Träger von \mathcal{F} eine endliche Menge.

Beweis: Nach ([4], § 2, Satz 6) ist $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ ein endlicher \mathbf{C} -Modul, d.h. es gibt ein $n \in \mathbf{N}$ mit $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathbf{C}^n$. Dann besteht der Träger von \mathcal{F} aus höchstens n Punkten. In der Tat, sind x_0, \dots, x_n verschiedene Punkte aus $\text{Supp}(\mathcal{F})$ und ist \mathcal{I} das Ideal von $\{x_0, \dots, x_n\}$, so induziert die exakte Sequenz $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X/\mathcal{I}} \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{X/\mathcal{I}}) = \prod_{i=0}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}_{x_i}}(\mathcal{F}_{x_i}, \mathbf{C}) \rightarrow 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn

$$\left[\prod_{i=0}^n \text{Hom}_{\mathcal{O}_{x_i}}(\mathcal{F}_{x_i}, \mathbf{C}) : \mathbf{C} \right] \geq n + 1.$$

SATZ 4.10. Sei X ein glatter, holomorph-konvexer Raum. Dann ist X sogar eine Steinsche Mannigfaltigkeit.

Beweis: Nach ([12]) gibt es einen Steinschen Raum $R(X)$ und eine eigentliche Abbildung $f: X \rightarrow R(X)$. Sei $x \in X$. Dann ist $f^{-1}(fx) = L_1 \cup L_2$, $L_1 := \text{Supp}(\Omega_X | f^{-1}(fx))$, $L_2 := f^{-1}(fx) \cap (X \setminus \text{Supp} \Omega_X)$. Nach (4.8) und (4.9) ist L_1 eine endliche Menge. L_2 ist

eine diskrete Menge, also ist $f^{-1}(fx)$ ein diskreter Raum. Die Abbildung f ist also endlich, damit ist X Steinsch, und die Behauptung folgt aus (4.7).

SATZ 4.11. Für einen komplexen Raum X sind folgende Aussagen gleichwertig:

- i) X ist eine Steinsche Mannigfaltigkeit
- ii) $\mathbb{C} \times X$ ist glatt.

Beweis: i) impliziert ii): das folgt aus (4.4)

ii) impliziert i): Nach ([5], Hilfssatz 3.1) ist $\Omega_{\mathbb{C} \times X} \simeq \text{pr}_1^* \Omega_{\mathbb{C}} \oplus \text{pr}_2^* \Omega_X$, also ist nach (4.5) $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X}$ ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(\mathbb{C} \times X)$, denn $\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times X} \simeq \text{pr}_1^* \Omega_{\mathbb{C}}$ ist ein direkter Summand von $\Omega_{\mathbb{C} \times X}$. Damit ist $\mathbb{C} \times X$ Steinsch, und die Behauptung folgt aus (4.7).

Im allgemeinen wird wohl ein glatter Raum weder Steinsch noch eine Mannigfaltigkeit sein. Es gilt aber

SATZ 4.12. Ein glatter Raum, der eine abgeschlossene Einbettung in eine Mannigfaltigkeit zuläßt, ist eine Mannigfaltigkeit.

Beweis: Sei $i: S \rightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung, S sei glatt, X sei eine Mannigfaltigkeit. Dann hat man ([7], VII, 4.2) einen kanonischen Epimorphismus $p: i^* \Omega_X \rightarrow \Omega_S$. Nach (4.5) besitzt p ein Rechtsinverses; da $i_* \Omega_X$ lokalfrei ist, ist also auch Ω_S lokalfrei und daraus ergibt sich die Behauptung.

§ 5. Gewöhnliche Punkte in komplexen Räumen

Mit $\mathbb{C}[\langle X_1, \dots, X_n \rangle]$ bezeichnen wir die \mathbb{C} -Algebra der Potenzreihen aus $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, die in einer Umgebung des Ursprungs des \mathbb{C}^n konvergieren. A heißt analytische Algebra (über \mathbb{C}), wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Epimorphismus von \mathbb{C} -Algebren $\mathbb{C}[\langle X_1, \dots, X_n \rangle] \rightarrow A$ gibt. Mit den \mathbb{C} -Algebra-Homomorphismen als Morphismen bilden die analytischen Algebren eine Kategorie ANAL, die antiäquivalent ist zur Kategorie der Keime von komplexen Räumen.

Das analytische Tensorprodukt zweier analytischer Algebren A und B ist das Coprodukt von A und B in ANAL und wird daher mit $A \perp \perp B$ bezeichnet.

Ist A eine analytische Algebra, so bezeichnen wir mit Ω_A den A -Modul der Pfaff-Formen auf A . Man hat eine universelle Derivation $d: A \rightarrow \Omega_A$ und für jeden endlichen A -Modul M definiert $f \mapsto fd$ einen Isomorphismus $\text{Hom}_A(\Omega_A, M) \rightarrow \text{Der}(A, M)$.

DEFINITION 5.1.

- a) Ein Objekt B aus ANAL heißt *gewöhnlich*, wenn es Objekte A, C aus ANAL gibt mit: $B \simeq A \perp \perp C$, $\dim C = 0$, A ist regulär.
- b) Sei X ein komplexer Raum, $x \in X$; x heißt *gewöhnlicher Punkt* von X , wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ gewöhnlich ist.

- c) Ein komplexer Raum X heißt gewöhnlich, wenn X nur aus gewöhnlichen Punkten besteht.

Der Begriff stammt von Grauert ([4]). Er nennt einen komplexen Raum X regulär in $x \in X$, wenn es eine offene Umgebung von x gibt, die biholomorph auf das direkte Produkt einer Mannigfaltigkeit mit einem einpunktigen komplexen Raum abgebildet werden kann. Offenbar ist X genau dann regulär in x (in diesem Sinne), wenn x ein gewöhnlicher Punkt von X ist.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die gewöhnlichen Punkte eines komplexen Raumes das Komplement einer analytischen Menge bilden. Hierzu braucht man einen gewissen „Rang“-Begriff von Moduln:

DEFINITION 5.2. Sei A ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann wird das Maximum der Menge $\{n \in \mathbb{N} : \text{es gibt einen Epimorphismus } M \rightarrow A^n\}$ mit $r(M)$ bezeichnet.

LEMMA 5.3. Sind M, N endlich erzeugte A -Moduln, A ein lokaler Ring, so ist $r(M \oplus N) = r(M) + r(N)$.

Den einfachen Beweis übergehen wir.

Ist M ein A -Modul, so hat man für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen kanonischen Homomorphismus $\varphi_n : \wedge^n M^* \otimes_A \wedge^n M \rightarrow A$, der durch

$$\varphi_n((f_1 \wedge \dots \wedge f_n) \otimes (m_1 \wedge \dots \wedge m_n)) := \det(f_i(m_j))$$

definiert ist.

LEMMA 5.4. Ist A ein lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A -Modul, $n \in \mathbb{N}$, so gilt: φ_n ist genau dann surjektiv, wenn $r(M) \geq n$ ist.

Auch hier übergehen wir den einfachen Beweis.

Im Rest des Paragraphen werde ein komplexer Raum stets mit der Zariski-Topologie versehen, d.h. eine Teilmenge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie analytisch ist.

SATZ 5.5. Sei \mathcal{F} ein kohärenter Modul auf dem komplexen Raum X . Dann ist die Abbildung $r : X \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \mapsto r(\mathcal{F}_x)$$

halbstetig nach unten.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$; die Garbe $\wedge^n \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^n \mathcal{F}$ ist kohärent und die Zuordnung über $U = \dot{U} \subset X$

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_n) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \mapsto \det(f_i(x_j))$$

definiert einen Homomorphismus

$$\Phi_n: \bigwedge^n \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

Nach (5.4) ist $\{x \in X: r(\mathcal{F}_x) < n\} = \text{Supp}(\text{coker } \varphi_n)$, also eine analytische Menge.

DEFINITION 5.6. Ist A eine analytische Algebra, so wird mit $\varrho(A)$ das Maximum der Menge

$$\{n \in \mathbb{N}: \text{es gibt ein Objekt } B \text{ aus ANAL mit: } A \simeq B \perp \perp \mathbb{C}[\langle X_1, \dots, X_n \rangle]\}$$

bezeichnet.

Der folgende Satz ist eine hier nützliche Formulierung eines Resultates von Rossi ([11], Cor. 3.4).

SATZ 5.7 (Rossi). *Ist A eine analytische Algebra, so ist $\varrho(A) = r(\Omega_A)$*

Beweis: $r(\Omega_A) \geq \varrho(A)$: trivial, man vgl. ([5], Hilfssatz 3.1). $r(\Omega_A) \leq \varrho(A)$: Beweis durch Induktion nach $r(\Omega_A)$:

Für $r(\Omega_A) = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also die Behauptung für alle $0 \leq i < n = r(\Omega_A)$ schon bewiesen. Also ist $\varrho(A) \geq n - 1$, also gibt es ein Objekt B aus ANAL, sodaß $A \simeq B \perp \perp \mathbb{C}[\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle]$ ist. Man hat eine kanonische Injektion $i: B \rightarrow A$; es ist ([5], Hilfssatz 3.1): $\Omega_A \simeq A^{n-1} \oplus (\Omega_A \otimes_B A)$. Nach (5.3) ist also $r(\Omega_B \otimes_B A) \geq 1$, da i linksinvertierbar ist, folgt daraus daß $r(\Omega_B) \geq 1$ ist. Es gibt also $a_i, b_i \in B, 1 \leq i \leq m$, und ein $f \in \text{Hom}(\Omega_B, B)$, sodaß gilt: $f(a_1 db_1 + \dots + a_m db_m) = 1$. Da B ein lokaler Ring ist, kann man annehmen, daß $f(db_1)$ inversibel ist, also ist $(f(db_1))^{-1} \cdot (f \circ d) =: D$ eine Derivation von B mit: $D(b_1) = 1$. Nach ([11], 3.2) folgt daraus, daß $\varrho(B) \geq 1$ ist; also ist $\varrho(A) \geq n - 1 + 1 = n$.

Aus (5.7) und (5.5) folgt sofort folgendes

COROLLAR 5.8. Ist X ein komplexer Raum, so ist die Abbildung $\varrho: X \rightarrow \mathbb{Z}$ halb stetig nach unten.
 $x \mapsto \varrho(\mathcal{O}_{X,x})$

COROLLAR 5.9. Ist X ein komplexer Raum, so bilden die nicht gewöhnlichen Punkte von X eine analytische Menge.

Beweis: Die durch $x \mapsto \dim \mathcal{O}_{X,x}$ definierte Abbildung $\delta: X \rightarrow \mathbb{Z}$ ist halb stetig nach oben, also ist nach (5.8) $\varrho - \delta: X \rightarrow \mathbb{Z}$ halb stetig nach unten, also ist

$$\{x \in X: \mathcal{O}_{X,x} \text{ ist nicht gewöhnlich}\} = \{x \in X: (\varrho - \delta)(x) \leq -1\}$$

eine analytische Menge.

§ 6. Beispiel eines komplexen Raumes ohne gewöhnliche Punkte.

LEMMA 6.1. Sei $p: X' \rightarrow X$ ein rechtsinvertierbarer infinitesimaler Morphismus in AN , dabei sei X eine Mannigfaltigkeit. Dann sind für ein $x \in X'$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) x ist ein gewöhnlicher Punkt von X'
- ii) p ist in x lokaltrivial.

Beweis: i) impliziert ii): Die Aussage ist lokaler Art, läßt sich also innerhalb der Kategorie $ANAL$ ausdrücken:

Der Morphismus $f: A = \mathbb{C}[\langle X_1, \dots, X_n \rangle] \rightarrow B$ besitze ein Linksinverses p' , es gebe einen Isomorphismus $g: B \rightarrow A \perp \perp C$ mit $\dim C = 0$. Dann gibt es einen Isomorphismus $g': B \rightarrow A \perp \perp (B \otimes_A C)$ derart daß $g'f$ die kanonische Injektion $A \rightarrow A \perp \perp (B \otimes_A C)$ ist.

Um dies nachzuweisen, muß man nach ([5], Satz 3.3) zeigen, daß es zu jedem $D \in \text{Der}(A, A)$ ein $D'' \in \text{Der}(B, B)$ gibt mit $f \circ D = D'' \circ f$. Sei $q: A \perp \perp C \rightarrow A$ die kanonische Projektion. Da $\ker p'g^{-1} \subset \ker q$ ist, gibt es ein $h: A \rightarrow A$ mit $hq = p'g^{-1}$; also ist h surjektiv, also sogar bijektiv. $f_2 := gfh$; es ist $hqf_2 = p'g^{-1} \circ gfh = h$, also $qf_2 = id_A$.

Zu jedem $D \in \text{Der}(A, A)$ gibt es ein $D' \in \text{Der}(A \perp \perp C, A \perp \perp C)$ mit: $D'f_2 = f_2D$. In der Tat: Mittels der kanonischen Injektion fasse man A als Unterring von $A \perp \perp C$ auf. Wegen $qf_2 = id_A$ ist $f_2(X_i) = X_i + a_i$, a_i nilpotent, für $1 \leq i \leq n$. Seien D_i , $1 \leq i \leq n$, die elementaren Derivationen auf A ; sie lassen sich zu Derivationen \tilde{D}_i auf $A \perp \perp C$ fortsetzen. Da $\tilde{D}_i(a_j)$ nilpotent ist für $1 \leq i, j \leq n$, ist $\det(\tilde{D}_i(f_2(X_j)))$ eine Einheit in $A \perp \perp C$. Es gibt also ein $(a_{ij}) \in \text{GL}(n, A \perp \perp C)$ derart daß für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt:

$$\delta_{ij} = \sum_v a_{iv} \tilde{D}_v(f_2(X_j)).$$

Setzt man $D'_i = \sum_v a_{iv} \tilde{D}_v$, so ist für $1 \leq i \leq n$ $D'_i \circ f_2 = f_2 D_i$.

Sei nun $D \in \text{Der}(A, A)$. Es gibt ein $D_1 \in \text{Der}(A \perp \perp C, A \perp \perp C)$ mit $D_1 f_2 = f_2 h^{-1} D h$. Also $D_1 g f h = g f h h^{-1} D h = g f D h$, also $g^{-1} D_1 g f = f D$. Setzt man $D'' := g^{-1} D_1 g$, so ist also $D'' f = f D$.

ii) impliziert i): trivial.

(6.2) Sei A ein kommutativer Ring, $u \in A$. In A^7 definiert man wie folgt eine A -Algebra Struktur. Seien e_i , $0 \leq i \leq 6$, die kanonischen Basisvektoren des A^7 .

Man setze:

$$\begin{aligned} e_0 \cdot e_i &= e_i \cdot e_0 = e_i & 0 \leq i \leq 6 \\ e_i \cdot e_j &= 0 & 1 \leq i, j \leq 6, \quad i \neq j \\ e_5 \cdot e_5 &= e_6 \cdot e_6 = 0 \\ e_i \cdot e_i &= e_5 + u^{i-1} e_6 & 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

Man definiere $A \rightarrow A^7$ durch $a \mapsto a \cdot e_0$. Dadurch wird A^7 zu einer unitären, kommutativen, assoziativen A -Algebra und wird als solche mit A^u bezeichnet.

Ist (S, \mathcal{A}) ein geringter Raum, $u \in \Gamma(S, \mathcal{A})$, so wird die \mathcal{A} -Algebra \mathcal{A}^u durch $S \supset V = \dot{V} \rightarrow \mathcal{A}(V)^{u|V}$ definiert.

SATZ 6.3. Sei k ein Körper, A eine nullteilerfreie k -Algebra, $u \in A$. Ist D eine k -lineare Derivation von A in sich und ist $D(u) \neq 0$, so läßt sich D nicht zu einer Derivation von A^u in sich fortsetzen.

Beweis: Mann kann annehmen, daß A ein Körper ist (ansonsten betrachtet man den Quotientenkörper von A). Angenommen, D lasse sich zu einer Derivation D' von A^u fortsetzen. Dann ist:

$$D'(e_i) = \sum_{j=0}^6 x_{ij} e_j, \quad x_{ij} \in A, \quad \text{also}$$

$$D'(e_i^2) = 2e_i \sum_{j=0}^6 x_{ij} e_j = 2x_{ii}(e_5 + u^{i-1}e_6) + 2x_{i0}e_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4;$$

daneben ist für $1 \leq i \leq 4$

$$D'(e_i^2) = D'(e_5 + u^{i-1}e_6) = \sum_{j=0}^6 x_{5j} e_j + (i-1)u^{i-2}e_6 + u^{i-1} \sum_{j=0}^6 x_{6j} e_j$$

(denn man kann annehmen, daß $D(u) = 1$ ist).

Zieht man diese Gleichungen voneinander ab und multipliziert sie mit u , so liefert ein Koeffizientenvergleich

$$2ux_{ii} - ux_{55} - u^i x_{65} = 0 \quad \text{(I)}$$

$$2u^i x_{ii} - ux_{56} - (i-1)u^{i-1} - u^i x_{66} = 0 \quad \text{(II)}$$

Multipliziert man nun (I) mit u^{i-1} und subtrahiert dann davon (II), so erhält man

$$u^i(x_{56} - x_{66}) + x_{65}u^{2i-1} - x_{56}u = (i-1)u^{i-1} \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4.$$

Hieraus folgt, indem man $i=1$ setzt, daß $x_{56} = x_{65} + x_{55} - x_{66}$ ist. Für $2 \leq i \leq 4$ ist also

$$(x_{55} - x_{66})(u^i - u) + x_{65}(u^{2i-1} - u) = (i-1)u^{i-1}$$

Also ist

$$\begin{vmatrix} u^2 - u & u^3 - u & u \\ u^3 - u & u^5 - u & 2u^2 \\ u^4 - u & u^7 - u & 3u^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Also ist u algebraisch über dem Primkörper von k . Das ist aber unmöglich, denn $D(u) \neq 0$. Also hat man einen Widerspruch.

Man kann nun komplexe Räume ohne gewöhnliche Punkte angeben:

COROLLAR 6.4. Sei (S, \mathcal{A}) eine komplexe Mannigfaltigkeit, $u \in \Gamma(S, \mathcal{A})$ sei auf keiner Komponente von S konstant. Dann ist (S, \mathcal{A}^u) ein komplexer Raum ohne gewöhnliche Punkte.

Beweis: Daß (S, \mathcal{A}^u) ein komplexer Raum ist, folgt aus (2.6). Sei $s \in S$ beliebig. Wegen (6.1) muß man zeigen, daß der Strukturmorphismus $(S, \mathcal{A}^u) \rightarrow (S, \mathcal{A})$ in s nicht lokaltrivial ist. Hierzu muß nach (6.3) und ([5], Satz 3.3) nur nachgewiesen werden, daß es ein $D \in \text{Der}(\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_s)$ gibt mit $D(u_s) \neq 0$. Dies aber ist klar, da u_s kein konstanter Funktionskeim ist.

Beispiel: Ist $z \in \Gamma(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$ die Koordinatenfunktion, so ist $(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^z) =: X$ ein komplexer Raum ohne gewöhnliche Punkte. X läßt sich realisieren als der Unterraum des \mathbb{C}^7 (mit den Koordinatenfunktionen z_0, \dots, z_6), der definiert wird durch das Ideal

$$\left(\sum_{i=1}^6 (z_i)^2 \right)^3 + (z_5)^2 + (z_6)^2 + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=i+1}^6 (z_i z_j) + \sum_{i=1}^4 (z_i^2 - z_5 - z_6 z_0^{i-1})$$

(6.5) Es gibt überabzählbar viele, paarweise nicht isomorphe, einpunktige komplexe Räume. Dies folgt sofort aus dem folgenden Corollar.

COROLLAR 6.6. Sei K ein Körper der Charakteristik 0; $u, v \in K$ seien algebraisch unabhängig über \mathbb{Q} . Dann sind die K -Algebren K^u und K^v nicht isomorph.

Beweis: Da v transzendent über $\mathbb{Q}(u)$ ist, gibt es eine $\mathbb{Q}(u)$ -lineare Derivation $D: K \rightarrow K$ mit: $D(v) \neq 0$. Da $D(u) = 0$ ist, läßt sich D zu einer Derivation D' von K^u in sich fortsetzen. Angenommen, es gebe einen K -Algebra-Isomorphismus $f: K^v \rightarrow K^u$. Dann wäre $f^{-1} \circ D' \circ f$ eine Fortsetzung von D auf K^v . Da $(f^{-1} D' f)(v) \neq 0$ ist, ist das ein Widerspruch zu (6.3).

Aus (6.6) folgt (6.5), wenn man $K = \mathbb{C}$ setzt und beachtet, daß eine Transzendenzbasis von \mathbb{C} über \mathbb{Q} eine überabzählbare Menge ist.

§ 7. Globale Eigenschaften gewöhnlicher Räume

Unter einem „mehrfachen Punkt“ verstehen wir im Folgenden einen einpunktigen komplexen Raum. Ist $p: X' \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung, so heißt (X', p, X) ein Bündel mehrfacher Punkte, wenn es einen mehrfachen Punkt S_0 gibt, sodaß (X', p, X) ein analytisches Faserbündel mit S_0 als typischer Faser und der komplexen Liegruppe $\text{Aut}(S_0)$ als Strukturgruppe ist.

(7.1) Ist (X', p, X) ein Bündel mehrfacher Punkte, X eine Mannigfaltigkeit, so ist X' ein gewöhnlicher Raum und es ist $X \simeq X'_{\text{red}}$. Es ergibt sich also die Frage, zu welchen gewöhnlichen Räumen X' es eine holomorphe Abbildung $p: X' \rightarrow X'_{\text{red}}$ gibt, sodaß (X', p, X'_{red}) ein Bündel mehrfacher Punkte ist.

Ist X' ein gewöhnlicher Raum, $X := X'_{\text{red}}$, $i: X \rightarrow X'$ die kanonische Einbettung, so gelten die folgenden Aussagen:

(7.1.1) Ist p ein Linksinverses von i , so ist (X', p, X) ein Bündel mehrfacher Punkte.

(7.1.2) Gibt es ein $p' \in \text{Hom}(X', X)$, derart daß (X', p', X) ein Bündel mehrfacher Punkte ist, so ist i linksinvertierbar.

(7.1.1) folgt aus (6.1) und ([10], Satz 1).

Zum Beweis von (7.1.2): Ist (X', p', X) ein Bündel mehrfacher Punkte, so ist p'_{red} ein biholomorpher Automorphismus von X , also ist $(p'_{\text{red}})^{-1} \circ p'$ ein Linksinverses von i .

Aus (4.4) und (7.1.1) folgt sofort der folgende Satz:

SATZ 7.2 *Ist X ein gewöhnlicher Steinscher Raum, so besitzt die Reduktionsabbildung $X_{\text{red}} \rightarrow X$ ein Linksinverses p und (X, p, X_{red}) ist ein Bündel mehrfacher Punkte.*

COROLLAR 7.3 *Ist X ein gewöhnlicher Steinscher Raum und ist X_{red} kontraktibel, so gibt es einen mehrfachen Punkt Z mit der Eigenschaft $X \simeq Z \times X_{\text{red}}$.*

Beweis: X ist ein Faserbündel über X_{red} . Da das assoziierte Prinzipalbündel unter den gemachten Voraussetzungen nach Grauert ([3]) trivial ist, folgt die Behauptung.

Es gibt viele gewöhnliche Räume, die *nicht* ein Faserbündel über ihrer Reduktion sind. Das folgt aus (7.1.2) und dem folgenden Satz.

SATZ 7.4 *Sei $X = X \subset \mathbb{C}^n$ nicht holomorph-konvex. Dann gibt es eine inf. Erweiterung $i: X \rightarrow X'$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. X' ist ein gewöhnlicher Raum
2. i ist nicht linksinvertierbar.

Beweis: Nach ([1]) gibt es auf X endlich viele holomorphe Funktionen ohne gemeinsame Nullstellen, die sich nicht linear zu 1 kombinieren lassen. Es gibt also für ein $s \in \mathbb{N}$ einen Epimorphismus $\mathcal{O}_X^s \rightarrow \mathcal{O}_X$, der nicht rechtsinvertierbar ist. Also gibt es für ein $r \in \mathbb{N}$ einen Epimorphismus $f: \mathcal{O}_X^r \rightarrow \Omega_X$, der nicht rechtsinvertierbar ist.

Die universelle Derivation $d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X$ definiert nach (3.2) ein $\delta: I_X(\Omega_X) \rightarrow X$. Man definiert nun X' als das Fasercoprodukt der Morphismen δ und $I_X(f)$ und man definiert i als den kanonischen Morphismus von X in X' . Nach (2.7) ist X' ein komplexer Raum und i eine inf. Erweiterung. Man zeigt leicht (vgl. den Beweis zu (4.5)), daß i nicht linksinvertierbar ist, da f nicht rechtsinvertierbar ist.

Ist $U = \dot{U} \subset X$ Steinsch, so besitzt nach (4.4) $i|_U$ ein Linksinverses; daraus folgt schnell, daß $(U, \mathcal{O}_{X'}|_U) \simeq I_U(\ker f|_U)$ ist.

Da $\ker f$ lokalfrei ist, hat man gezeigt, daß X' ein gewöhnlicher Raum ist.

§ 8. Globale Funktionen auf infinitesimalen Erweiterungen

(8.1) Sei S ein komplexer Raum, \mathcal{F}, \mathcal{G} Objekte aus $\underline{M}_c(S)$, $D \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{G})$, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Epimorphismus. Dann definiert D nach (3.3.1) ein $\delta \in \text{Hom}(I_S(\mathcal{O}_S), S)$. $I_S(f)$ ist eine inf. Erweiterung, es läßt sich also nach (2.7) das Fasercoprodukt der Morphismen δ und $I_S(f)$ bilden; es werde mit $S_{D,f}$ bezeichnet. Man hat einen kanonischen Morphismus $i_S: S \rightarrow S_{D,f}$. Die durch i_S gegebene Abbildung $\Gamma(S_{D,f}, \mathcal{O}_{S_{D,f}}) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ wird mit $p_{D,f}$ bezeichnet. Ist $a \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, so wird für $\Gamma(S, D)$ (a) kurz: $D(a)$ geschrieben. Aus der Definition von $S_{D,f}$ folgt sofort:

(8.1.1) Ist $a \in \text{imp}_{D,f}$, so gibt es ein $m \in \Gamma(S, \mathcal{F})$, für welches gilt:
 $D(a) = \Gamma(S, f)(m)$.

DEFINITION 8.2 Der komplexe Raum S hat die Eigenschaft E , wenn bei jeder inf. Erweiterung $(id_S, \pi): S \rightarrow S'$ die Abbildung $\Gamma(S, \pi): \Gamma(S, \mathcal{O}_{S'}) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ surjektiv ist. Aus Theorem B folgt, daß jeder Steinsche Raum die Eigenschaft E hat. Die Umkehrung hiervon gilt nicht, denn jeder irreduzible kompakte Raum hat die Eigenschaft E . Es gilt aber:

SATZ 8.3 Der komplexe Raum S habe die Eigenschaft E . Gibt es ein $D \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S)$ und ein $a_0 \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ mit $D(a_0) = 1$, so ist S Steinsch.

Beweis: Sei $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_S$ ein Epimorphismus in $\underline{M}_c(S)$. Mit den Bezeichnungen von (8.1) gilt also: $p_{D,f}$ ist surjektiv. Also ist $a_0 \in \text{imp}_{D,f}$. Nach (8.1.1) existiert ein $m \in \Gamma(S, \mathcal{F})$ mit $\Gamma(S, f)(m) = 1$. Also ist f rechtsinvertierbar. Daher ist \mathcal{O}_S ein projektives Objekt von $\underline{M}_c(S)$, und daraus folgt die Behauptung.

COROLLAR 8.4 Sei S ein komplexer Raum. Hat $S \times \mathbb{C}$ die Eigenschaft E , so ist S Steinsch.

(8.5) *Beispiel* eines komplexen Raumes S' , der folgende Eigenschaften hat:

- i) S' ist nicht holomorph-konvex
- ii) $S := S'_{\text{red}}$ ist holomorph-konvex.

Man wähle $S := \mathbb{P}_1 \times \mathbb{C}$. Da \mathbb{P}_1 nicht Steinsch ist, gibt es einen Epimorphismus von kohärenten Modulgarben $f': \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ derart, daß $\Gamma(\mathbb{P}_1, f')$ nicht surjektiv ist. Also ist $\Gamma(\mathbb{P}_1, f') = 0$.

$f := \text{pr}_1^* f', \mathcal{F} := \text{pr}_1^* \mathcal{F}'$. Offenbar ist

$f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_S$ ein Epimorphismus und $\Gamma(S, f) = 0$.

$$D := \frac{\partial}{\partial z} \in \text{Der}(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S)$$

Sei die partielle Ableitung nach der Variablen von \mathbb{C} . D und f definieren nach (8.1) den komplexen Raum $S' := S_{D,f}$. Offenbar ist $S'_{\text{red}} = S$. S' ist nicht holomorph-konvex. In der Tat: Sei $a \in \text{imp}_{D,f}$. Nach (8.1.1) gibt es ein $m \in \Gamma(S, \mathcal{F})$ mit $D(a) = \Gamma(S, f)(m)$, also ist $D(a) = 0$. Also ist a konstant. Die Werte jeder globalen Funktion auf S' sind also konstant. S' ist also nicht holomorph-konvex, da S' nicht kompakt ist.

(8.6) Ist S ein zusammenhängendes Riemannsches Gebiet über dem $\mathbb{C}^n, n \geq 1$, welches nicht holomorph-vollständig ist, so kann ein komplexer Raum S' konstruiert werden mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $S'_{\text{red}} = S$
- ii) Jeder Morphismus $S' \rightarrow \mathbb{C}$ ist als Funktion konstant.

Sei \hat{S} die Holomorphiehülle von S . Man wählt eine konvergente Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus S , derart daß gilt:

$$s_n \in S \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in \hat{S} \setminus S, \quad s_n \neq s_m \text{ für } n \neq m.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei \mathfrak{m}_n das zum Punkt $s_n \in S$ gehörige kohärente \mathcal{O}_S -Ideal. $\mathcal{I} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_n$.

Ein \mathcal{O}_S -linearer Automorphismus α von $\mathcal{A} := \mathcal{O}_S / \mathcal{I}$ wird wie folgt definiert: Für $n \in \mathbb{N}$ sei α_{s_n} die Multiplikation mit $(-1)^n$. Es sei $p: \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{A}$ die kanonische Projektion. Mit \mathcal{F} werde das Faserprodukt von p und $\alpha \circ p$ bezeichnet; man hat kanonische Morphismen p_1, p_2 mit $\alpha \circ p \circ p_1 = p \circ p_2$. p_1 ist ein Epimorphismus und $\Gamma(S, p_1) = 0$. In der Tat: Sei $a \in \text{im } \Gamma(S, p_1)$. Es gibt dann ein $b \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ mit $p_S(b) = (\alpha_S \circ p_S)(a)$. Also ist $(b - (-1)^n a)_{s_n} \in \mathfrak{m}_n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da sich a und b in den Punkt $s \in S$ holomorph fortsetzen lassen, folgt $a_s = b_s = 0$. Also $a = b = 0$, da S zusammenhängend ist.

Es gibt einen Isomorphismus $\beta: \mathcal{O}_S^n \simeq \Omega_S$; man setze $f := \beta \circ p_1^n: \mathcal{F}^n \rightarrow \Omega_S$ und $d: \mathcal{O}_S \rightarrow \Omega_S$ sei die universelle Derivation. Dann hat $S' := S_{D, f}$ (vgl. 8.1) die gewünschten Eigenschaften, wie sofort aus (8.1.1) folgt.

LITERATUR

- [1] H. CARTAN: *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France 78 (1950) 28–64.
- [2] O. FORSTER: *Steinsche Algebren und Moduln*, Math. Z. 97 (1967) 376–405.
- [3] H. GRAUERT: *Analytische Faserungen über holomorphvollständigen Räumen*, Math. Ann. 135 (1958) 263–273.
- [4] —: *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. I.H.E.S. 5 (1960) 233–292.
- [5] — und H. KERNER: *Deformationen von Singularitäten komplexer Räume*, Math. Ann. 153 (1964) 236–260.
- [6] A. GROTHENDIECK: *Elements de Géométrie algébrique*. Publ. Math. I.H.E.S. ab 1960 zitiert als „EGA“.
- [7] —: *Techniques de construction en Géométrie analytique I–VII*, Seminaire Cartan, t. 13, 1960/61, no. 7–13.
- [8] R. C. GUNNING und H. ROSSI: *Analytic functions of several variables*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1965.
- [9] C. HOUZEL: *Géométrie analytique locale I–IV*, Sem. Cartan t. 13, 1960/61 no. 18–21.
- [10] H. KERNER: *Familien kompakter und holomorph-vollständiger komplexer Räume*, Math. Z. 92 (1966).
- [11] H. ROSSI: *Vector fields on analytic spaces*, Ann. Math. 78 (1963) 455–467.
- [12] K. W. WIEGMANN: *Über Quotienten holomorph-konvexer Räume*, Math. Z. 97, (1967) 251–258.

Eingegangen im November 1968