

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 45 (1970)  
  
**Artikel:** Hinreichende Bedingungen für die Regularität einer komplexen Funktion.  
**Autor:** Meier, Kurt  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34657>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Hinreichende Bedingungen für die Regularität einer komplexen Funktion<sup>1)</sup>

Von KURT MEIER (Zürich)

In einem beschränkten Gebiet der  $z$ -Ebene ( $z = x + iy$ ) sei eine komplexe Funktion  $f(z)$  definiert. Wir setzen voraus, dass  $f(z)$  in allen Punkten von  $G$  endliche partielle Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  besitzt, welche in fast allen Punkten von  $G$  die Cauchy-Riemannsche Bedingung  $f_x + if_y = 0$  erfüllen.

Schon unter diesen Voraussetzungen lässt sich beweisen, dass es Teilgebiete von  $G$  gibt, in welchen  $f(z)$  regulär analytisch ist. Wie aus dem von P. Montel angegebenen Beispiel  $f(z) = e^{-1/z^4}$ ,  $f(0) = 0$  hervorgeht, darf aber aus diesen Voraussetzungen nicht auf die Regularität von  $f(z)$  in  $G$  geschlossen werden.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $f(z)$  in  $G$  die Werte 0, 1 und  $\infty$  nicht annimmt, steht hingegen die Regularität von  $f(z)$  in  $G$  fest. Dies ist die Behauptung, die wir in der vorliegenden Arbeit beweisen werden.

An die Funktion  $f(z)$  stellen wir demnach die folgenden Bedingungen:

- I.  $f(z)$  nimmt in  $G$  die Werte 0, 1 und  $\infty$  nicht an.
- II. In jedem Punkt  $z$  von  $G$  besitzt  $f(z)$  endliche partielle Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$ .
- III. In fast allen Punkten von  $G$  ist  $f_x + if_y = 0$ .

Damit können wir jetzt den zu beweisenden Satz folgendermassen aussprechen:

*Sind die Bedingungen I, II und III erfüllt, so ist  $f(z)$  in  $G$  regulär analytisch.*

Für den Fall, dass anstelle von I die Beschränktheit von  $f(z)$  in  $G$  vorausgesetzt wird, hat G. P. Tolstov [3] diesen Satz bewiesen.

Den Beweis unseres Satzes führen wir folgendermassen durch: Wir zeigen zunächst, dass aus den Bedingungen I, II und III die Stetigkeit von  $f(z)$  in  $G$  folgt. Als Hilfsmittel verwenden wir dabei einen Satz von W. Gross ([1], p. 292): Münden in  $z_0$  zwei vom gleichen Punkt ausgehende Jordanwege  $W_1$ ,  $W_2$ , welche ein einziges Innengebiet  $D$  begrenzen, ist ferner  $f(z)$  in  $D$  und auf seinem Rand mit Ausnahme von  $z_0$  meromorph und strebt  $f(z)$  bei Annäherung von  $z_0$  auf  $W_1$  und  $W_2$  gegen den gleichen Grenzwert  $a$ , so strebt entweder  $f(z)$  für  $z \rightarrow z_0$  in  $D$  gleichmässig gegen  $a$  oder  $f(z)$  nimmt in  $D$  jeden Wert mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an.

Nach dem Satz von Looman-Menchoff ([2], p. 199) ist eine in  $G$  stetige Funktion  $f(z)$ , welche die Voraussetzungen II und III erfüllt, in  $G$  regulär analytisch. Auf diesen Satz berufen wir uns am Schluss des Beweises.

---

<sup>1)</sup> Die Ausführung dieser Arbeit wurde ermöglicht durch einen Beitrag aus dem Schweizerischen Nationalfonds.

*Beweis.* Unter  $A$  verstehen wir die Menge derjenigen Punkte des Gebietes  $G$ , in welchen  $f(z)$  regulär analytisch ist und unter  $B$  das Komplement von  $A$  in bezug auf  $G$ . Auf Grund der Voraussetzungen I, II und III haben wir zu beweisen, dass die Punktmenge  $B$  leer ist.

Wir definieren zu jeder natürlichen Zahl  $n$  folgendermassen eine Punktmenge  $B_n$ :  $\zeta$  ist Element von  $B_n$ , falls die Kreisscheibe  $|z - \zeta| < 2/n$  dem Gebiet  $G$  angehört, und ausserdem für  $|h| \leq 1/n$  ( $h$  reell) die Bedingungen  $|f(\zeta + h) - f(\zeta)| \leq n|h|$ ,  $|f(\zeta + ih) - f(\zeta)| \leq n|h|$  erfüllt sind.

Wir beweisen zunächst, dass die Punktmengen  $B_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) abgeschlossen sind.

Es sei  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  ein Häufungspunkt von  $B_n$  und  $\zeta_\lambda = \xi_\lambda + i\eta_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ ) eine gegen  $\zeta_0$  konvergierende Folge von Punkten der Menge  $B_n$ . Ist  $|h| \leq 1/n$ , so bestehen die Ungleichungen  $|f(\zeta_\lambda + h) - f(\zeta_\lambda)| \leq n|h|$  und  $|f(\zeta_\lambda + ih) - f(\zeta_\lambda)| \leq n|h|$  ( $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ ).

Die Gültigkeit dieser Ungleichungen ist nun auch für  $\lambda = 0$  nachzuweisen. Wir führen den Beweis nur für die Ungleichung  $|f(\zeta_0 + h) - f(\zeta_0)| \leq n|h|$  und beschränken uns zudem auf den Fall  $0 < h \leq 1/n$ . Die Zahl  $h$  bleibt während der folgenden Überlegung fest. Um dies anzudeuten setzen wir  $h = h_0$ .

Nach der Voraussetzung II unseres Satzes ist  $f(z)$  bei festem  $y$  eine in  $x$  stetige Funktion. Wird  $x$  festgehalten, so ist  $f(z)$  stetig als Funktion von  $y$ . Dasselbe gilt auch für

$$F(z) = \frac{f(z + h_0) - f(z)}{h_0}.$$

Ist  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl, so können wir daher einen Punkt  $\zeta'_0 = \zeta_0 - \sigma_0$  ( $0 < \sigma_0 < h_0$ ) so festlegen, dass

$$|F(\zeta'_0) - F(\zeta_0)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

ist. Ferner gibt es im Intervall  $(0, h_0)$  eine Zahl  $t_0$  mit der folgenden Eigenschaft: Für  $|t| \leq t_0$  ( $t$  reell) ist

$$|F(\zeta'_0 + it) - F(\zeta'_0)| \leq \varepsilon \quad (2)$$

Mit  $R_0$  bezeichnen wir die offene Rechteckfläche mit den Ecken

$$\zeta'_0 - it_0, \quad \zeta'_0 - it_0 + h_0, \quad \zeta'_0 + it_0 + h_0, \quad \zeta'_0 + it_0.$$

Der Punkt  $\zeta_0$  liegt in  $R_0$  und die Punktfolge  $\{\zeta_\lambda\}$  ( $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ ) konvergiert gegen  $\zeta_0$ . Es sei  $\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$  ein in  $R_0$  liegender Punkt dieser Folge und  $\zeta''_0 = \zeta'_0 + i(\eta^* - \eta_0)$ . Wegen  $|\eta^* - \eta_0| < t_0$  gilt jetzt nach (2)

$$|F(\zeta''_0) - F(\zeta'_0)| \leq \varepsilon \quad (3)$$

Der Punkt  $\zeta^*$  liegt auf der Strecke mit den Endpunkten  $\zeta''_0$  und  $\zeta''_0 + h_0$ . Wegen

$\zeta^* \in B_n$  bestehen die Ungleichungen

$$|f(\zeta'' + h_0) - f(\zeta^*)| \leq n |\zeta'' + h_0 - \zeta^*|, \quad |f(\zeta'') - f(\zeta^*)| \leq n |\zeta'' - \zeta^*|,$$

welche die folgende Abschätzung ermöglichen;  $|f(\zeta'' + h_0) - f(\zeta'')| \leq$

$$|f(\zeta'' + h_0) - f(\zeta^*)| + |f(\zeta'') - f(\zeta^*)| \leq n |\zeta'' + h_0 - \zeta^*| + n |\zeta'' - \zeta^*| = nh_0.$$

Aus dieser Abschätzung folgt  $|F(\zeta'')| \leq n$  und daraus weiter auf Grund von (3) und (1)  $|F(\zeta_0)| \leq n + 2\varepsilon$ . Diese Ungleichung ist aber für jede beliebig kleine positive Zahl  $\varepsilon$  gültig. Folglich ist  $|F(\zeta_0)| \leq n$ , also  $|f(\zeta_0 + h_0) - f(\zeta_0)| \leq nh_0$ .

Da die Kreisscheibe  $|z - \zeta_0| < 2/n$  offensichtlich in  $G$  liegt, steht jetzt fest, dass die Punktmengen  $B_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) abgeschlossen sind.

Nun folgt aus der Voraussetzung II eine weitere wichtige Aussage über die Mengen  $B_n$ : Ihre Vereinigungsmenge ist mit  $G$  identisch. Ist nämlich  $\zeta$  ein beliebiger Punkt von  $G$ , so gilt  $\zeta \in B_n$  für jede hinreichend grosse natürliche Zahl  $n$ .

Entgegen der Behauptung unseres Satzes nehmen wir nun an, die Punktmenge  $B$  sei nicht leer. Ihrer Definition entsprechend ist  $B$  eine in  $G$  abgeschlossene Punktmenge. Wir haben nachgewiesen, dass sie durch die abgeschlossenen Punktmengen  $B_n$  vollständig überdeckt wird. Nach einem Satz von R. Baire ([2], p. 54) gibt es daher eine natürliche Zahl  $n_0$  und ein Teilgebiet  $G_0$  von  $G$  derart, dass der Durchschnitt  $B_0 = B \cap G_0$  eine nichtleere Teilmenge von  $B_{n_0}$  ist. Demnach sind nun in sämtlichen Punkten  $\zeta$  von  $B_0$  für  $|h| \leq 1/n_0$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$|f(\zeta + h) - f(\zeta)| \leq n_0 |h|, \quad |f(\zeta + ih) - f(\zeta)| \leq n_0 |h| \quad (4)$$

Die Tatsache, dass  $B_0$  nicht leer ist, spielt am Schluss des Beweises eine entscheidende Rolle.

Sind  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$  und  $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$  zwei Punkte von  $B_0$ , welche die Voraussetzungen  $|\xi_2 - \xi_1| \leq 1/n_0$ ,  $|\eta_2 - \eta_1| \leq 1/n_0$  erfüllen, so gilt

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| < 2n_0 |\zeta_2 - \zeta_1| \quad (5)$$

Bezeichnen wir nämlich mit  $\zeta'$  den Punkt  $\xi_2 + i\eta_1$ , so ist nach (4)

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta')| \leq n_0 |\zeta_2 - \zeta'|, \quad |f(\zeta') - f(\zeta_1)| \leq n_0 |\zeta' - \zeta_1| \text{ und damit}$$

$$|f(\zeta_2) - f(\zeta_1)| \leq |f(\zeta_2) - f(\zeta')| + |f(\zeta') - f(\zeta_1)| \leq n_0 |\zeta_2 - \zeta'| + n_0 |\zeta' - \zeta_1| < 2n_0 |\zeta_2 - \zeta_1|.$$

Nun sei  $z_0 = x_0 + iy_0$  ein beliebiger Punkt von  $B_0$  und  $Q_0$  ein Quadrat  $|x - x_0| \leq q_0$ ,  $|y - y_0| \leq q_0$ . Die positive Zahl  $q_0$  wählen wir so, dass  $Q_0$  ganz in  $G_0$  liegt und ausserdem die Bedingung  $q_0 < 1/n_0$  erfüllt ist. Wie aus der Voraussetzung II hervorgeht, ist die Funktion

$$\phi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



auf dem Rand des Quadrates  $Q_0$  stetig. Dabei ist zu beachten, dass in dieser Aussage die Funktion  $\phi$  nur auf dem Rand von  $Q_0$  betrachtet wird. Es gibt demnach eine Schranke  $N_0$  derart, dass  $4|\phi(z)| \leq N_0$  für alle Randpunkte  $z$  von  $Q_0$  gilt. An  $N_0$  stellen wir noch die zusätzliche Bedingung  $N_0 > 8n_0$ .

Wir beweisen nun, dass unter der Bedingung  $z \in Q_0$  die folgende Ungleichung gültig ist:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq N_0 |z - z_0| \quad (6)$$

Durch die Geraden  $x=x_0$  und  $y=y_0$  wird  $Q_0$  in vier Quadrate zerlegt. Mit  $C_0$  bezeichnen wir das Quadrat  $x_0 \leq x \leq x_0 + q_0$ ,  $y_0 \leq y \leq y_0 + q_0$  und mit  $\Gamma_0$  seinen Rand. Den Beweis von (6) führen wir nur für den Fall  $z \in C_0$ .

Liegt  $z$  auf  $\Gamma_0$ , so gilt

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{N_0}{4} |z - z_0| \quad (7)$$

denn für die beiden Seiten des Quadrates  $C_0$ , welche auf dem Rand von  $Q_0$  liegen, ist bereits  $|\phi(z)| \leq N_0/4$ , und für die beiden andern Seiten folgt (7) aus (4) wegen  $N_0 > 8n_0$ .

Ist  $z$  ein innerer Punkt von  $C_0$ , so unterscheiden wir die beiden Fälle  $z \in B_0$  und  $z \in A_0$ . Dabei verstehen wir unter  $A_0$  das Komplement von  $B_0$  in bezug auf  $G_0$ .

Im ersten Fall sind für die Punkte  $z_0 = x_0 + iy_0$  und  $z = x + iy$  die Bedingungen  $z_0 \in B_0$ ,  $z \in B_0$ ,  $|x - x_0| < q_0$  und  $|y - y_0| < q_0$  erfüllt, wobei  $q_0 \leq 1/n_0$  ist. Aus (5) folgt unter diesen Bedingungen  $|f(z) - f(z_0)| < 2n_0|z - z_0|$ , und damit ist wegen  $N_0 > 8n_0$  die Ungleichung (6) erfüllt.

Der Beweis von (6) für den Fall  $z \in A_0$  bereitet erhebliche Schwierigkeiten.

Es sei  $z = Z_0$  ein beliebiger Punkt von  $A_0$ , welcher im Innern des Quadrates  $C_0$  liegt. Diesen Punkt halten wir während den folgenden Überlegungen fest.

Zunächst schliessen wir aus der Voraussetzung II, dass der Differenzquotient

$$\frac{f(Z_0) - f(z_0 - \delta)}{Z_0 - z_0 + \delta},$$

als Funktion der reellen Veränderlichen  $\delta$  betrachtet, an der Stelle  $\delta=0$  stetig ist. Es ist daher möglich, den Punkt  $z'_0 = z_0 - \delta_0$ ,  $0 < \delta_0 \leq q_0$  so festzulegen, dass die Funktion

$$\psi(z) = \frac{f(z) - f(z'_0)}{z - z'_0}$$

die folgende Bedingung erfüllt:

$$|\psi(Z_0) - \phi(Z_0)| < N_0/2. \quad (8)$$

Da  $Z_0 = X_0 + iY_0$  ein Punkt der Menge  $A_0$  ist, können wir jetzt eine natürliche Zahl  $p_0$  so wählen, dass die Funktion  $f(z)$  in allen Punkten des Quadrates  $|x - X_0| \leq q_0/p_0$ ,  $|y - Y_0| \leq q_0/p_0$  regulär analytisch ist. An die Zahl  $p_0$  stellen wir die zusätzliche Bedingung  $p_0\delta_0 > 4q_0$ .

Unter  $C_{ij}$  verstehen wir das Quadrat

$$x_0 + \frac{(i-1)q_0}{p_0} \leq x \leq x_0 + \frac{iq_0}{p_0}, \quad y_0 + \frac{(j-1)q_0}{p_0} \leq y \leq y_0 + \frac{jq_0}{p_0}.$$

Die Quadrate  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, p_0$ ) bilden ein Netz, welches  $C_0$  überdeckt.  $Q_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, k_0$ ) seien diejenigen Quadrate dieses Netzes, deren abgeschlossene Fläche mindestens einen Punkt der Menge  $B_0$  enthält. Mit  $R_k$  bezeichnen wir die kleinste Rechteckfläche  $a_k \leq x \leq b_k$ ,  $c_k \leq y \leq d_k$  mit der Eigenschaft  $R_k \supseteq B_0 \cap Q_k$ . (Es ist möglich, dass  $R_k$  zu einer Strecke oder einem einzigen Punkt entartet.) Auf jeder Seite des Rechtecks  $R_k$  liegt nun mindestens ein Punkt von  $B_0$ . Ferner folgt aus  $p_0\delta_0 > 4q_0$ , dass die Seitenlängen von  $R_k$  kleiner als  $\delta_0/4$  sind.

Die Menge derjenigen inneren Punkte des Quadrates  $C_0$ , welche auf keinem der Rechtecke  $R_k$  liegen, bezeichnen wir mit  $D_0$ . Diese Punktmenge ist offen. Ihr Rand  $\Delta_0$  lässt sich in endlichviele Punkte und Strecken zerlegen, und jede dieser Strecken ist entweder zur reellen oder zur imaginären Achse parallel. Die Funktion  $f(z)$  ist in allen Punkten von  $D_0$  regulär analytisch.

Die Quadrate  $C_{ij}$  haben die Seitenlänge  $q_0/p_0$ . Wir haben die Zahl  $p_0$  so gross gewählt, dass  $f(z)$  in sämtlichen Punkten der abgeschlossenen Quadratfläche  $|x - X_0| \leq q_0/p_0$ ,  $|y - Y_0| \leq q_0/p_0$  regulär ist.  $Z_0$  ist infolgedessen ein Punkt von  $D_0$ .

Wir beweisen nun, dass die Funktion  $f(z)$  ( $z \in D_0 + \Delta_0$ ) auf  $D_0 + \Delta_0$  stetig ist und machen dabei von der folgenden Tatsache Gebrauch: Es genügt offensichtlich, die Stetigkeit von  $f(z)$  unter der Bedingung nachzuweisen, dass  $z$  auf einer beliebigen abgeschlossenen Rechteckfläche mit achsenparallelen Seiten variiert, deren Inneres in  $D_0$  liegt.

Es sei also  $D$  eine Rechteckfläche  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ , welche die Bedingung  $D \subseteq D_0$  erfüllt. Mit  $\Delta$  bezeichnen wir den Rand von  $D$  und mit  $\bar{D}$  die abgeschlossene Rechteckfläche  $D + \Delta$ . Wir haben zu beweisen, dass die Funktion  $f(z)$  ( $z \in \bar{D}$ ) auf  $\bar{D}$  stetig ist.

Die Funktion  $f(z)$  ist in  $D_0$ , also auch in  $D$  regulär analytisch. Es ist daher noch die Stetigkeit von  $f(z)$  ( $z \in \bar{D}$ ) in den Punkten  $\zeta$  von  $\Delta$  nachzuweisen. Die folgende Begründung beschränkt sich auf diejenigen Punkte von  $\Delta$ , welche auf der abgeschlossenen Rechteckseite mit den Endpunkten  $\zeta_0 = a + ic$ ,  $\zeta'_0 = b + ic$  liegen.

Sind  $\zeta = \xi + ic$ ,  $\zeta' = \xi' + ic$  zwei Punkte dieser Rechteckseite und ist  $\xi < \xi'$ , so verstehen wir unter  $(\zeta, \zeta')$  die offene Strecke mit den Endpunkten  $\zeta$  und  $\zeta'$ . Die Menge derjenigen Punkte von  $(\zeta_0, \zeta'_0)$ , welche zu  $A_0$  gehören, ist offen und zerfällt daher in abzählbar viele Strecken  $(\zeta_k, \zeta'_k)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Wir wählen nun die reelle Zahl  $d'$  so,

dass die Bedingung  $c < d' < d$  erfüllt ist und definieren die abgeschlossenen Rechteckflächen  $F_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) durch  $\xi_k \leq x \leq \xi'_k$ ,  $c \leq y \leq d'$ .

Es sei  $F_{k^*}$  eine dieser Rechteckflächen, welche die Bedingungen  $\zeta_{k^*} \neq \zeta_0$  und  $\zeta'_{k^*} = \zeta'_0$  erfüllt. Unter diesen Bedingungen ist die Funktion  $f(z)$  in allen Punkten von  $F_{k^*}$  mit Ausnahme von  $\zeta_{k^*}$  und  $\zeta'_{k^*}$  regulär analytisch. Um das Verhalten von  $f(z)$  im Punkt  $\zeta_{k^*}$  zu untersuchen, führen wir die folgende Bezeichnung ein: Ist  $r > 0$ , so verstehen wir unter  $S(r)$  die Sektorfläche, deren Punkte  $\zeta_{k^*} + \varrho e^{i\varphi}$  durch  $0 < \varrho \leq r$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  charakterisiert sind. Wählen wir  $r^*$  hinreichend klein, so ist  $S(r^*) \subset F_{k^*}$ . Damit sind die folgende Bedingungen erfüllt: Die Funktion  $f(z)$  ist in allen Punkten von  $S(r^*)$  regulär und nimmt die Werte 0 und 1 nicht an. Für  $h \rightarrow 0$  ( $h$  reell und positiv) streben  $f(\zeta_{k^*} + h)$  und  $f(\zeta_{k^*} + ih)$  zufolge der Voraussetzung II gegen  $f(\zeta_{k^*})$ . Nach dem in der Einleitung erwähnten Satz von W. Gross strebt also  $f(z)$  in  $S(r^*)$  für  $z \rightarrow \zeta_{k^*}$  gleichmässig gegen  $f(\zeta_{k^*})$ . Dies bedeutet, dass  $f(z)$  ( $z \in F_{k^*}$ ) im Randpunkt  $\zeta_{k^*}$  stetig ist. Wie man ganz entsprechend begründet, trifft dies auch für den Punkt  $\zeta'_{k^*}$  zu. Wir sind damit zum folgenden Ergebnis gelangt: Unter der Voraussetzung  $\zeta_k \neq \zeta_0$ ,  $\zeta'_k \neq \zeta'_0$  ist die Funktion  $f(z)$  ( $z \in F_k$ ) auf der abgeschlossenen Rechteckfläche  $F_k$  stetig.

Nun sei  $\zeta^*$  ein beliebiger Punkt der Rechteckseite  $(\zeta_0, \zeta'_0)$ , also  $\zeta^* = \xi^* + ic$ ,  $\xi_0 < \xi^* < \xi'_0$ . Wir beweisen die folgende Behauptung: Für  $z \rightarrow \zeta^*$ ,  $z \in \bar{D}$  strebt  $f(z)$  gegen  $f(\zeta^*)$ . Den Beweis führen wir nur für den Fall durch, dass  $z = x + iy$  im Winkelraum  $x \geq \xi^*$ ,  $y \geq c$  gegen  $\zeta^*$  strebt. Für den Winkelraum  $x \leq \xi^*$ ,  $y \geq c$  verläuft der Beweis ganz analog.

Die Behauptung trifft offensichtlich zu, falls  $\zeta^* \in A_0$  ist. Für den Fall, dass  $\zeta^*$  mit einem der Punkte  $\zeta_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) zusammenfällt, folgt sie aus dem Satz von W. Gross. Ist  $\zeta^* \in B_0$  und  $\zeta^* \neq \zeta_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ), so lässt sie sich folgendermassen begründen:

Es sei  $x^*$  eine reelle Zahl, welche die Bedingung  $\xi^* < x^* < \xi'_0$ ,  $z^* = x^* + ic \in B_0$  erfüllt,  $D^*$  die Rechteckfläche  $\xi^* \leq x \leq x^*$ ,  $c \leq y \leq d'$  und  $\Delta^*$  der Rand von  $D^*$ . Zuzufolge der Voraussetzung II ist  $f(z)$  und damit auch

$$\psi^*(z) = \frac{f(z) - f(\zeta^*)}{z - \zeta^*}$$

als Funktion von  $z \in \Delta^*$  in jedem von  $\zeta^*$  verschiedenen Punkt von  $\Delta^*$  stetig. Für  $h \rightarrow 0$  ( $h$  reell und positiv) streben ferner  $\psi^*(\zeta^* + h)$  und  $\psi^*(\zeta^* + ih)$  gegen endliche Grenzwerte. Die Funktion  $\psi^*(z)$  ist folglich für  $z \in \Delta^*$ ,  $z \neq \zeta^*$  beschränkt. Es gibt also eine Schranke  $n^*$  derart, dass für  $z \in \Delta^*$ ,  $z \neq \zeta^*$

$$|f(z) - f(\zeta^*)| \leq n^* |z - \zeta^*| \quad (9)$$

gilt. Die Schranke  $n^*$  wählen wir so gross, dass  $n^* > 2n_0$  ist.

Um die Gültigkeit der Ungleichung (9) auch für einen beliebigen inneren Punkt

$Z = X + iY$  von  $D^*$  nachzuweisen, unterscheiden wir die beiden Fälle  $Z' = X + ic \in B_0$  und  $Z' \notin B_0$ .

Im ersten Fall gelten nach (4) die Ungleichungen  $|f(Z) - f(Z')| \leq n_0 |Z - Z'|$  und  $|f(Z') - f(\zeta^*)| \leq n_0 |Z' - \zeta^*|$ . Wie wir leicht bestätigen ist ferner  $|Z - Z'| + |Z' - \zeta^*| < < 2|Z - \zeta^*|$ . Wir schliessen daraus  $|f(Z) - f(\zeta^*)| \leq |f(Z) - f(Z')| + |f(Z') - f(\zeta^*)| < < n_0 |Z - Z'| + n_0 |Z' - \zeta^*| < 2n_0 |Z - \zeta^*| < n^* |Z - \zeta^*|$ .

Die Gültigkeit der Ungleichung (9) steht damit für alle Punkte von  $D^*$  fest, welche nicht im Innern eines Rechtecks  $F_k$  liegen.

Im zweiten Fall ist  $Z = X + iY$  innerer Punkt einer Rechteckfläche  $F_k$ , für welche wegen  $\xi_0 < \xi^* < X < x^* < \xi'_0$ ,  $\zeta \in B_0$ ,  $z^* \in B_0$  die Bedingung  $\zeta'_k \neq \zeta'_0$ ,  $\zeta_k \neq \zeta_0$  erfüllt ist. Da  $\zeta^*$  mit keinem der Punkte  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$  zusammenfällt, ist  $\zeta^* \notin F_k$ . Mit  $f(z)$  ist daher auch die Funktion  $\psi^*(z)$  ( $z \in F_k$ ) auf  $F_k$  stetig und im Innern von  $F_k$  regulär analytisch. Auf dem Rand von  $F_k$  ist  $|\psi^*(z)| \leq n^*$ . Nach dem Maximumprinzip schliessen wir daraus  $|\psi^*(Z)| \leq n^*$ , also  $|f(Z) - f(\zeta^*)| \leq n^* |Z - \zeta^*|$ .

Die Ungleichung (9) ist damit für alle Punkte  $z$  von  $D^*$  erfüllt. Für  $z \rightarrow \zeta^*$ ,  $z \in D^*$  strebt also  $f(z)$  gegen  $f(\zeta^*)$ .

Für jeden Punkt  $\zeta^* = \xi^* + ic$ , der auf der Seite  $(\zeta_0, \zeta'_0)$  des Rechtecks  $\bar{D}$  liegt, ist jetzt die folgende Behauptung bewiesen: Im Winkelraum  $x \geq \xi^*$ ,  $y \geq c$  strebt  $f(z)$  gegen  $f(\zeta^*)$  für  $z \rightarrow \zeta^*$ . Wie bereits erwähnt lässt sich der Beweis für den Winkelraum  $x \leq \xi^*$ ,  $y \geq c$  ganz analog durchführen. Die Funktion  $f(z)$ , wobei  $z \in \bar{D}$  vorausgesetzt wird, ist also im Randpunkt  $\zeta^*$  von  $\bar{D}$  stetig. Diese Aussage kann offensichtlich auf dem gleichen Weg für jeden Randpunkt  $\zeta^*$  von  $\bar{D}$  bewiesen werden, der nicht mit einer Ecke von  $\bar{D}$  zusammenfällt. Aber auch für die Ecken von  $\bar{D}$  versagt die Beweismethode nicht. Ist zum Beispiel  $\zeta^* = \zeta_0$ , so kann sie unverändert übernommen werden, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Es gibt eine positive Zahl  $\delta$  derart, dass auf der offenen Strecke mit den Endpunkten  $\zeta_0$  und  $\zeta_0 + i\delta$  kein Punkt von  $B_0$  liegt. Ist dies nicht der Fall, so liefert die gleiche Beweismethode das gewünschte Resultat, wenn wir sie auf diejenige Seite des Rechtecks  $D$  anwenden, deren Endpunkte in  $\zeta_0$  und  $\zeta_0 + i\delta$  liegen.

Es steht jetzt also fest, dass die Funktion  $f(z)$  ( $z \in \bar{D}$ ) auf der abgeschlossenen Rechteckfläche  $\bar{D}$  stetig ist. Daraus folgt aber, wie wir bereits bemerkt haben, auch die Stetigkeit von  $f(z)$  ( $z \in \bar{D}_0$ ) in jedem Punkt von  $\bar{D}_0$ . Auf Grund dieses Ergebnisses können wir den Beweis unseres Satzes folgendermassen weiterführen:

Wegen  $z'_0 \notin \bar{D}_0$  ist mit  $f(z)$  ( $z \in \bar{D}_0$ ) auch die Funktion

$$\psi(z) = \frac{f(z) - f(z'_0)}{z - z'_0} \quad (z \in \bar{D}_0)$$

in  $D_0$  regulär analytisch und auf  $\bar{D}_0$  stetig. Auf dem Rand  $\Delta_0$  von  $\bar{D}_0$  gibt es daher einen Punkt  $Z'_0$  derart, dass

$$|\psi(Z_0)| \leq |\psi(Z'_0)| \quad (10)$$

ist. Der Punkt  $Z'_0$  liegt entweder auf  $\Gamma_0$  oder auf dem Rand eines Rechtecks  $F_k$ .

Liegt  $Z'_0$  auf  $\Gamma_0$ , so gilt nach (7)

$$|f(Z'_0) - f(z_0)| \leq \frac{N_0}{4} |Z'_0 - z_0|.$$

Gestützt auf  $z_0 \in B_0$ ,  $|z'_0 - z_0| \leq 1/n_0$  und  $4n_0 < N_0$  schliessen wir weiter aus (4)

$$|f(z'_0) - f(z_0)| \leq \frac{N_0}{4} |z'_0 - z_0|.$$

Unter Anwendung der Ungleichungen  $|Z'_0 - z_0| \leq |Z'_0 - z'_0|$  und  $|z'_0 - z_0| \leq |Z'_0 - z'_0|$  führt uns nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(Z'_0) - f(z'_0)| &\leq |f(Z'_0) - f(z_0)| + |f(z'_0) - f(z_0)| \\ &\leq \frac{N_0}{4} |Z'_0 - z_0| + \frac{N_0}{4} |z'_0 - z_0| \leq \frac{N_0}{2} |Z'_0 - z'_0| \end{aligned}$$

zum Ergebnis  $|\psi(Z'_0)| \leq N_0/2$ , aus welchem nach (10) zunächst  $|\psi(Z_0)| \leq N_0/2$  und sodann nach (8)  $|\phi(Z_0)| \leq N_0$  folgt.

Für den Fall, dass  $Z'_0$  auf dem Rand eines Rechtecks  $F_k$  liegt, wählen wir zunächst den Punkt  $Z^*$  von  $B_0$  so, dass  $Z'_0$  und  $Z^*$  auf der gleichen abgeschlossenen Rechteckseite liegen. Dies ist möglich, weil jede Seite von  $F_k$  mindestens einen Punkt von  $B$  enthält. Da die Seitenlängen von  $F_k$  kleiner als  $\delta_0/4$  sind, ist  $4|Z'_0 - Z^*| < \delta_0$ .

Mit  $C_0$  haben wir die abgeschlossene Quadratfläche mit den Ecken  $z_0, z_0 + q_0, z_0 + q_0 + iq_0, z_0 + iq_0$  bezeichnet. Die Lage des Punktes  $z'_0$  zum Quadrat  $C_0$  geht aus  $z'_0 = z_0 - \delta_0$ ,  $0 < \delta_0 \leq q_0$  hervor.

Aus  $Z^* \in C_0$  folgt  $|z'_0 - z_0| \leq |Z^* - z'_0|$  und  $|Z^* - z_0| \leq |Z^* - z'_0|$ . Zwischen den Seitenlängen des Dreiecks  $z_0, Z^*, Z'_0$  besteht ferner die Ungleichung  $|Z^* - z'_0| \leq |Z'_0 - z'_0| + |Z'_0 - Z^*|$ , und wegen  $4|Z'_0 - Z^*| < \delta_0$  und  $\delta_0 < |Z'_0 - z'_0|$  ist  $4|Z'_0 - Z^*| < |Z'_0 - z'_0|$ . Aus diesen Ungleichungen schliessen wir  $|Z'_0 - Z^*| + 2|Z^* - z_0| + |z'_0 - z_0| \leq |Z'_0 - Z^*| + 3|Z^* - z'_0| \leq 4|Z'_0 - Z^*| + 3|Z'_0 - z'_0| < 4|Z'_0 - z'_0|$ . Wegen  $Z^* \in B_0$  und  $z_0 \in B_0$ ,  $|Z'_0 - Z^*| < 1/n_0$  und  $|z'_0 - z_0| < 1/n_0$  ist weiter nach (4)  $|f(Z'_0) - f(Z^*)| \leq n_0 |Z'_0 - Z^*|$ ,  $|f(z'_0) - f(z_0)| \leq n_0 |z'_0 - z_0|$  und nach (5)  $|f(Z^*) - f(z_0)| < 2n_0 |Z^* - z_0|$ . Aus der Abschätzung  $|f(Z'_0) - f(z'_0)| \leq |f(Z'_0) - f(Z^*)| + |f(Z^*) - f(z_0)| + |f(z'_0) - f(z_0)| \leq n_0 |Z'_0 - Z^*| + 2n_0 |Z^* - z_0| + n_0 |z'_0 - z_0| < 4n_0 |Z'_0 - z'_0|$  folgt jetzt  $|\psi(Z'_0)| < 4n_0$ . Unter Anwendung der Ungleichungen  $8n_0 < N_0$ , (10) und (8) ziehen wir daraus nacheinander die Schlüsse  $|\psi(Z'_0)| < N_0/2$ ,  $|\psi(Z_0)| < N_0/2$  und  $|\phi(Z_0)| < N_0$ , also  $|f(Z_0) - f(z_0)| < N_0 |Z_0 - z_0|$ .

Die Gültigkeit von (6) steht jetzt für jeden Punkt  $z$  der abgeschlossenen Quadratfläche  $C_0$  fest. Dabei haben wir mit  $C_0$  eines der vier Quadrate bezeichnet, in welche  $Q_0$  durch die Geraden  $x = x_0$  und  $y = y_0$  zerlegt wird. Für die drei andern Quadrate kann der Beweis von (6) ganz analog geführt werden.

Wir haben damit bewiesen, dass es zu jedem Punkt  $z_0$  von  $B_0$  ein Quadrat  $|x-x_0| \leq q_0$ ,  $|y-y_0| \leq q_0$  und eine Schranke  $N_0$  gibt, derart, dass  $|f(z)-f(z_0)| \leq N_0 |z-z_0|$  für jeden Punkt  $z$  dieses Quadrates gilt. Die Funktion  $f(z)$  ist somit in sämtlichen Punkten von  $B_0$  stetig. Da  $f(z)$  definitionsgemäss in jedem Punkt von  $A_0$  regulär analytisch ist, steht jetzt die Stetigkeit von  $f(z)$  im Gebiet  $G_0 = A_0 \cup B_0$  fest. Damit sind aber für  $f(z)$  alle Voraussetzungen des in der Einleitung erwähnten Satzes von *Looman-Menchoff* erfüllt. Nach diesem Satz muss  $f(z)$  in  $G_0$  regulär analytisch sein, im Widerspruch zur Tatsache, dass die Punktmenge  $B_0$  nicht leer ist. Entgegen unserer Annahme folgt aus diesem Widerspruch, dass die Punktmenge  $B$  leer ist und damit die Behauptung unseres Satzes zutrifft.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. GROSS, *Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen*, Math. Z. 2 (1918)
- [2] S. SAKS, *Theory of the integral* (New York 1937).
- [3] G. P. TOLSTOV, *On the curvilinear and iterated integral*, Trudy Mat. Inst. Steklov 35 (1950) (Russisch).

Eingegangen, 20. September 1969