Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 45 (1970)

Artikel: Gleichungen und Ungleichungen für die Gerüste von konvexen Polytopen und Zellenkomplexen.

Autor: Larman, D.G. / Mani, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34653

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gleichungen und Ungleichungen für die Gerüste von konvexen Polytopen und Zellenkomplexen

D. G. LARMAN und P. MANI[1])

1. Einleitung

Wir befassen uns hier mit Eigenschaften der k-dimensionalen Gerüste von Zellenkomplexen, wobei uns die Randkomplexe von Polytopen besonders interessieren. In Abschnitt 2 führen wir, in Anlehnung an die Arbeit [4] von H. Hadwigger, den Begriff des k-ten äusseren Winkels eines Polytops ein und gewinnen Beziehungen, die eine Verbindung zwischen der diskreten Form der Formel von Gauss-Bonnet für die Aussenwinkel und der Formel von Euler-Gram für die Innenwinkel eines Polytops darstellen. Wir zeigen, dass diese Beziehungen in einem gewissen Sinn eindeutig sind, und erweitern sie auf beliebige geradlinige Zellenkomplexe. In Abschnitt 3 beweisen wir eine Unterhalbstetigkeitsaussage für die inneren Winkelsummen von Polytopen und leiten notwendige Bedingungen für die Gleichheit her. Abschnitt 4 enthält eine Untersuchung des r-dimensionalen Hausdorffschen Masses des r-Gerüsts von Polytopen und Zellenkomplexen, und kann als eine Fortsetzung der von H. G. Eggleston, B. Grünbaum und V. Klee in [1] gemachten Studien angesehen werden.

2. Die k-dimensionalen Winkelsummen

E^d sei der d-dimensionale euklidischen Raum. Wir sagen, zwei Ebenen (lineare Mannigfaltigkeiten) E und F von E^d seinen in allgemeiner Lage, wenn für die zu E und F parallelen Unterräume E', F' die Gleichung

$$\dim(E' \cap F') = \max\{0, \dim E' + \dim F' - d\}$$

zutrifft.

Wenn E ein Unterraum von E^d und $x \in E^d$ ein Punkt ist, überträgt sich die euklidische Struktur von $E \subset E^d$ durch Translation auf $E+x$, wobei x zum Ursprung des „euklidischen Raumes $E+x$" wird. Die Grassmannsche Mannigfaltigkeit aller k-dimensionalen Unterräume von E^d bezeichnen wir mit V_d^k; hier nehmen wir $1 \leq k \leq d$ an. Es gibt genau ein drehinvariantes Haarsches Mass μ_k^d auf V_k^d mit der Eigenschaft, dass $\mu_k^d(V_k^d) = 1$ ist.

Unter einem (geradlinigen) Zellenkomplex $\mathfrak{A}$ in E^d verstehen wir eine endliche

[1]) Der erste Verfasser ist von einer Harkness Fellowship des Commonwealth Fund unterstützt worden, der zweite Verfasser von einem Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds.

Menge von (konvexen) Polytopen des E^d derart, dass mit einem Polytop auch alle seine Seiten zu $\mathfrak{A}$ gehören, und dass der Durchschnitt zweier Elemente aus $\mathfrak{A}$ stets eine gemeinsame Seite ist. Das durch $\mathfrak{A}$ bestimmte Polyeder bezeichnen wir mit $|\mathfrak{A}|$, sodass also $|\mathfrak{A}| = \bigcup_{X \in \mathfrak{A}} X$ gilt. Für jede ganze Zahl i sei $\Delta^i(\mathfrak{A})$ die Menge der i-dimensionalen Zellen in $\mathfrak{A}$, wobei wir $\Delta^i(\mathfrak{A}) = \emptyset$ haben, wenn i nicht zum Interval $[-1, \dim \mathfrak{A}]$ gehört. Unter $f^i(\mathfrak{A})$ verstehen wir die Mächtigkeit von $\Delta^i(\mathfrak{A})$, und $\mathfrak{A}^i = \bigcup_{j \leq i} \Delta^j(\mathfrak{A})$ steht für das i-dimensionale Gerüst von $\mathfrak{A}$. Zu jedem Polytop P gehört der natürliche Komplex $\mathfrak{P}$, dessen Zellen die i-dimensionalen Seiten $(-1 \leq i \leq \dim P)$ von P sind. Gelegentlich werden wir statt $\Delta^i(\mathfrak{P})$ und $f^i(\mathfrak{P})$ einfach $\Delta^i(P)$ und $f^i(P)$ schreiben. Wenn ein Polytop P, ein Unterraum $E \in V_k^d$ und ein Punkt $x \in P$ gegeben sind, bezeichnen wir mit $A(P, E, x)$ den äusseren Winkel des Polytops $P \cap (E+x)$ in der Ebene $E+x$ und beim Punkt x. $A(P, E, x)$ ist, mit anderen Worten, die Menge der Richtungen im euklidischen Raum $E+x$, welche das Polytop $P \cap (E+x)$ an der Stelle x stützen. Λ^{k-1} sei das $(k-1)$-dimensionale Hausdorffsche Mass auf der Einheitssphäre S in $E+x$, welche den Ursprung x als Mittelpunkt hat. Wit normieren Λ^{k-1} so, dass $\Lambda^{k-1}(S) = 1$ ausfällt, und setzen $\xi(P, E, x) = \Lambda^{k-1}(A(P, E, x))$. Für jede Teilmenge $M \subset E^d$ bezeichnen wir mit $\operatorname{conv} M$ die konvexe Hülle von M, mit $\operatorname{aff} M$ die affine Hülle von M, mit $\operatorname{relint} M$ das Innere von M bezüglich der Topologie τ von $\operatorname{aff} M$ und mit $\operatorname{relbd} M$ den Rand von M bezüglich τ. Wenn nun die Punkte x und y zum relativen Inneren der gleichen Seite X eines Polytops P gehören, gilt stets $\xi(P, E, x) = \xi(P, E, y)$. Darauf gestützt definieren wir $\xi(P, E, X)$, indem wir einen Punkt $x \in \operatorname{relint} X$ wählen und $\xi(P, E, X) = \xi(P, E, x)$ setzen. Im Fall $\dim X + \dim E > d$ finden wir $\xi(P, E, X) = 0$. Der $(k-1)$-dimensionale äussere Winkel $\alpha_{k-1}(P, X)$ von P an der Seite X ist durch die Beziehung

$$\alpha_{k-1}(P, X) = \int_{V_k^d} \xi(P, E, X)\, d(\mu_k^d)$$

festgelegt, wobei E die Menge V_k^d durchläuft. Wit setzen

$$\alpha_{k-1}^i(P) = \sum_{X \in \Delta^i(\mathfrak{P})} \alpha_{k-1}(P, X)$$

und definieren die totale $(k-1)$-dimentionale äussere Winkelsumme $\alpha_{k-1}(P)$ durch die Formel

$$\alpha_{k-1}(P) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \alpha_{k-1}^i(P). \tag{1}$$

Für $i > d-k$ verschwinden die Ausdrücke $(-1)^i \alpha_{k-1}^i(P)$ auf der rechten Seite von (1). Im Falle $k = d$ liefert das polyedrische Analogon der Formel von Gauss-Bonnet die Gleichung $\alpha_{d-1}(P) = 1$. Als Erweiterung dieser Gleichung beweisen wir zunächst

SATZ 1. *Für jedes Polytop $P \subset E^d$ und jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq d$ gilt* $\alpha_{k-1}(P) = 1$.

Beweis. Wit setzen, bei gegebenem $E \in V_k^d$,

$$\xi^i(P, E) = \sum_{X \in \Delta^i(\mathfrak{P})} \xi(P, E, X) \quad \text{und} \quad \xi(P, E) = \sum_{i=0}^{d-k} (-1)^i \xi^i(P, E).$$

$V_0 \subset V_k^d$ sei die Menge der Unterräume, welche sich zu allen Ebenen aff$X$ ($X \in \mathfrak{P}$) und zu allen Geraden aff$\{p, q\}$ ($p, q \in \Delta^0(\mathfrak{P})$) in allgemeiner Lage befinden.

Wir wollen zeigen, dass für jeden Unterraum $E \in V_0$ die Beziehung

$$\xi(P, E) = 1 \tag{2}$$

gilt. Mit $F \in V_{k-1}^d$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement von E in E^d und mit $\pi: E^d \to F$ die Normalprojektion längs E auf den Unterraum F. Wir setzen $P' = \pi(P)$ und $\Pi = \{\pi(X) \mid X \in \mathfrak{P}^{d-k}\}$. Da E zu V_0 gehört, ist die Einschränkung von π auf X für jede Zelle $X \in \mathfrak{P}^{d-k}$ ein Homöomorphismus zwischen X und $\pi(X)$, und ausserdem induziert π eine Bijektion $\hat{\pi}$ von $\mathfrak{P}^{d-k}$ auf Π. Wir werden unsere weiteren Überlegungen auf diese einfachen Tatsachen stützen, ohne sie jeweils besonders zu erwähnen. Als eine erste Konsequenz derselben finden wir, dass sich durch die Beziehung $\eta(Y) = \xi(P, E, \hat{\pi}^{-1}(Y))$ ($Y \in \Pi$) eine Abbildung η von Π in die reellen Zahlen $\mathbf{R}$ definieren lässt. Wir setzen $\eta^i(\Pi) = \sum \eta(Y)$, für $Y \in \Pi$, $\dim Y = i$, und $\eta(\Pi) = \sum_{i=0}^{d-k} (-1)^i \eta^i(\Pi)$. Zum Beweis von (2) genügt es, die Beziehung

$$\eta(\Pi) = 1 \tag{3}$$

zu sichern. Zunächst wollen wir zeigen, dass für jeden Punkt $y \in P'$ die Gleichung

$$\sum \eta(Y) = 1, \quad \text{für} \quad Y \in \Pi,\ y \in \operatorname{relint} Y, \tag{4}$$

zutrifft. Nun fällt im Polytop $(E+y) \cap P$ die Menge der Eckpunkte mit der Menge der Durchschnitte $(E+y) \cap \operatorname{relint}(\hat{\pi}^{-1} Y)$, für $y \in \operatorname{relint} Y$, $Y \in \Pi$, zusammen, und daraus folgt (4) sofort durch Anwendung der Formel von Gauss-Bonnet auf $(E+y) \cap P$. Zu jeder Zelle $Y \in \Pi$ wählen wir ein Rechtsinverses von π, welches $\hat{\pi}^{-1}(Y)$ „enthält", genauer, eine Abbildung $\sigma: P' \to P$ und einen Subkomplex $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}^{d-k}$ so, dass die Beziehungen $|\mathfrak{F}| = \sigma(P')$, $\pi\sigma = 1_P$, und $\sigma(Y) \in \mathfrak{F}$ gelten, wo $|\mathfrak{F}|$ das zu $\mathfrak{F}$ gehörige Polyeder ist. Die Existenz einer solchen Abbildung σ geht aus dem „lifting theorem" für; Polytope von D. W. Walkup und R. J.-B. Wets (8) hervor. Die Menge $\mathfrak{A}(Y) = \{\pi(F) \mid F \in \mathfrak{F}\}$ ist ein Zellenkomplex mit $\mathfrak{A}(Y) \subset \Pi$, $|\mathfrak{A}(Y)| = P'$ und $Y \in \mathfrak{A}(Y)$. Unter dem Durchschnitt $\mathfrak{A} = \bigcap_{Y \in \Pi} \mathfrak{A}(Y)$ verstehen wir den Zellenkomplex $\mathfrak{A}$ bestehen aus allen Durchschnitten der Form $A = \bigcap_{Y \in \Pi} A(Y)$, mit $A(Y) \in \mathfrak{A}(Y)$.

Offenbar ist $|\mathfrak{A}| = P'$, und weiter gilt für jedes Paar von Zellen $A \in \mathfrak{A}$, $Y \in \Pi$ entweder $\operatorname{relint} A \subset \operatorname{relint} Y$ oder $\operatorname{relint} A \cap \operatorname{relint} Y = \emptyset$. So können wir eine Abbildung $\varepsilon: \mathfrak{A} \times \Pi \to \mathbf{R}$

durch die Gleichungen $\varepsilon(A, Y)=\eta(Y)$ (relint $A \subset$ relint Y) und $\varepsilon(A, Y)=0$ (relint $A \cap$ relint $Y=\emptyset$) festlegen. Die Formel von Euler liefert

$$\sum_{A \in \mathfrak{A}} (-1)^{\dim A} = \chi(P') = 1. \tag{5}$$

Hierbei bedeutet χ die Eulersche Charakteristik. Falls, für eine gegebene Zelle $A \in \mathfrak{A}$, p im relativen Inneren von A liegt, so gehört p genau dann zu relint Y ($Y \in \Pi$), wenn relint $A \subset$ relint Y gilt. So finden wir, unter Berücksichtigung von (4), für jedes A

$$\sum_{Y \in \Pi} \varepsilon(A, Y) = 1. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$$1 = \sum_{A \in \mathfrak{A}} (-1)^{\dim A} \Big(\sum_{Y \in \Pi} \varepsilon(A, Y)\Big) = \sum_{Y \in \Pi} \eta(Y) \Big(\sum{}^{*} (-1)^{\dim A}\Big), \tag{7}$$

wobei das Zeichen $\sum^*$ bedeutet, dass über alle Zellen A mit relint $A \subset$ relint Y zu summieren ist. Da die Menge der $A \in \mathfrak{A}$ mit relint $A \subset Y$ eine Zellenzerlegung von Y ist, finden wir

$$\sum{}^{*} (-1)^{\dim A} = \chi(Y) - \chi(\text{relbd } Y) = 1 - \big(1 - (-1)^{\dim Y}\big). \tag{8}$$

Indem wir (7) mit (8) kombinieren, erhalten wir

$$1 = \sum_{Y \in \Pi} (-1)^{\dim Y} \eta(Y),$$

woraus sich (3) und mithin (2) ergibt. Der Beweis von Satz 1 folgt unmittelbar durch Integration von (2) über die Menge V_0, wenn wir noch berücksichtigen, dass $V_k^d - V_0$ eine μ_k^d-Nullmenge ist.

Um zu zeigen, dass sich aus Satz 1 die Formel von Euler-Gram unmittelbar ableiten lässt, führen wir zunächst den zu α_{k-1} komplementären Winkel β_{k-1} ein. Wir setzen, wenn P nach wie vor ein Polytop des E^d bedeutet, für $x \in P$ und $E \in V_k^d$, $\eta(P, E, x) = 1 - \xi(P, E, x)$. Wiederum finden wir, dass $\eta(P, E, x)$ für alle Punkte $x \in$ relint X ($X \in \mathfrak{P}$) gleich ausfällt, was uns erlaubt, $\eta(P, E, X)$ und den $(k-1)$-dimensionalen inneren Winkel

$$\beta_{k-1}(P, X) = \int_{V_k{}^d} \eta(P, E, X)\, d(\mu_k^d)$$

zu definieren. Ebenso legen wir $\beta_{k-1}^i(P)$ und

$$\beta_{k-1}(P) = \sum_{i=1}^{d-k} (-1)^i \beta_{k-1}^i(P)$$

analog zu den entsprechenden Ausdrücken für α fest. Aus Satz 1 ergibt sich sodann $\beta_{k-1}(P)=\chi(\mathfrak{P}^{d-k})-1$, wo χ wieder die Eulersche Charakteristik bezeichnet. Im Falle $k=1$ ist dies die Formel von Euler-Gram für Polytope.

Zu jedem Unterraum $E\in V_k^d$ und jedem Punkt $x\in E\cap S^{d-1}$ gehört eine $(k-1)$-dimensionale Hemisphäre

$$H(E, x)=\{y\in E\cap S^{d-1} \mid (x, y)\geq 0\}.$$

Mit W_{k-1}^d bezeichnen wir die Menge aller Hemisphären $H(E, x)$ $(E\in V_k^d, x\in E\cap S^{d-1})$, zusammen mit der Hausdorff Metrik. Auf W_{k-1}^d gibt es genau ein Haarsches Mass ϱ_{k-1}^d, für welches $\varrho_{k-1}^d(W_{k-1}^d)=1$ gilt. Wir erwähnen hier ohne Beweis.

LEMMA 1. *Wenn P ein Polytop und X eine Seite von P ist, gilt*

$$\beta_{k-1}(P, X)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{W_{k-1}^d}\chi((x+\varepsilon H)\cap P)\,d(\varrho_{k-1}^d).$$

Dabei is x ein beliebiger Punkt in relint$X$, H durchläuft die Menge W_{k-1}^d, und χ ist die Eulersche Charakteristik, welche in dem speziellen Fall, auf den sich unser Lemma bezieht, nur die Werte 0 und 1 annimt. Für $k=d$ ist das Lemma äquivalent zur Tatsache, dass der Aussenwinkel eines Polytops P an seiner Stelle $p\in P$ mit der Menge der Stützrichtungen von P in p zusammenfällt.

Nun bedeute $\mathfrak{M}$ irgendeinen Zellenkomplex in E^d und $M=|\mathfrak{M}|$ das zugehörige Polyeder. Zu jedem nichtleeren $X\in\mathfrak{M}$ wählen wir einen Punkt $x\in$relint$X$ und setzen

$$\alpha_{k-1}(\mathfrak{M}, X)=1-\beta_{k-1}(\mathfrak{M}, X)=1-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{W_{k-1}^s}\chi((x+\varepsilon H)\cap M)\,d(\varrho_{k-1}^d).$$

Einfache Überlegungen (vgl. etwa (6), Lemma 1) zeigen, dass $\alpha_{k-1}(\mathfrak{M}, X)$ nicht von der Wahl des Punktes $x\in$relint$X$ abhängt. Ausserdem ersehen wir aus Lemma 1, dass $\alpha_{k-1}(\mathfrak{M}, X)=\alpha_{k-1}(M, X)$ gilt, wenn $\mathfrak{M}$ der aus den Seiten eines Polytops M bestehende Komplex ist. Wie zuvor definieren wir

$$\alpha_{k-1}^i(\mathfrak{M})=\sum_{X\in\Delta^i(\mathfrak{M})}\alpha_{k-1}(\mathfrak{M}, X),$$

und

$$\alpha_{k-1}(\mathfrak{M})=\sum_{i=0}^{d-k}(-1)^i\alpha_{k-1}^i(\mathfrak{M}),$$

sowie, in analoger Weise, $\beta_{k-1}^i(\mathfrak{M})$ und $\beta_{k-1}(\mathfrak{M})$.

SATZ 2. *Für jeden Zellenkomplex $\mathfrak{M}$ und jedes k, $1\leq k\leq d$, gilt $\alpha_{k-1}(\mathfrak{M})=\chi(\mathfrak{M})$.*

Beweis. Zwecks formaler Vereinfachung setzen wir, wenn $\mathfrak{O}$ den leeren Komplex bedeutet, $\alpha_{k-1}(\mathfrak{O})=0$. Aus Satz 1 folgt, dass für jede nichtleere Zelle $X\in\mathfrak{M}$, mit dem aus allen Seiten von X bestehenden Komplex $\mathfrak{X}$, die Beziehung $\alpha_{k-1}(\mathfrak{X})=1$ gilt. Zudem ergibt sich aus des Definition der Funktion α_{k-1}, dass für beliebige Subkomplexe $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{M}$ die Gleichung

$$\alpha_{k-1}(\mathfrak{B})+\alpha_{k-1}(\mathfrak{C})=\alpha_{k-1}(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})+\alpha_{k-1}(\mathfrak{B}\cap\mathfrak{C})$$

richtig ist. Daher stimmt α_{k-1} mit der Eulerschen Charakteristik χ überein, was zu zeigen war.

Mit $\hat{\mathfrak{M}}\subset\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge der Zellen $X\in\mathfrak{M}$, für welche $X\subset\hat{M}$ gilt, wo $\hat{M}$ den Rand des Polyeders $M=|\mathfrak{M}|$ bezüglich der Topologie von E^d bedeutet. Analog zu $\alpha_{k-1}(\mathfrak{M})$ definieren wir

$$\alpha_{k-1}(\hat{\mathfrak{M}})=\sum_{X\in\hat{\mathfrak{M}}^{d-k}}(-1)^{\dim X}\alpha_{k-1}(\mathfrak{M},X)$$

und

$$\beta_{k-1}(\hat{\mathfrak{M}})=\sum_{X\in\hat{\mathfrak{M}}^{d-k}}(-1)^{\dim X}\beta_{k-1}(\mathfrak{M},X).$$

SATZ 3. *Für jeden Zellenkomplex $\mathfrak{M}$ gilt*

$$\beta_{k-1}(\hat{\mathfrak{M}})=\chi(\hat{\mathfrak{M}}^{d-k})-\chi(\mathfrak{M}).$$

Beweis. X sei eine Zelle in $\mathfrak{M}-\hat{\mathfrak{M}}$. Jeder Punkt $x\in\operatorname{relint}X$ gehört zum Inneren M^0 von M in der Topologie von E^d, und wir finden eine Zahl $\varepsilon(x)$ so, dass für jedes ε mit $0<\varepsilon<\varepsilon(x)$ und jedes $H\in W^d_{k-1}$ die Sphäre $x+\varepsilon H$ eine Teilmenge von M ist. Daraus folgt $\chi((x+\varepsilon H)\cap M)=1$ und weiter $\alpha_{k-1}(\mathfrak{M},X)=0$. So finden wir $\alpha_{k-1}(\hat{\mathfrak{M}})=$ $=\alpha_{k-1}(\mathfrak{M})=\chi(\mathfrak{M})$, und Satz 3 folgt unmittelbar, im Hinblick auf die Definition von $\beta_{k-1}(\hat{\mathfrak{M}})$.

Im Fall $k=1$ finden wir $\beta_0(\hat{\mathfrak{M}})=\chi(\hat{\mathfrak{M}})-\chi(\mathfrak{M})=(-1)^{d-1}\chi(M^0)$, was mit proposition 2 in P. Mani [6] übereinstimmt. Wir können $\beta_{k-1}(\mathfrak{B})$ für eine beliebige Zellen zerlegung $\mathfrak{B}$ von $\hat{M}$ definieren, und eine dem Satz 3 entsprechende Aussage beweisen. Es ist uns nicht bekannt, ob zu jeder Zerlegung $\mathfrak{B}$ von $\hat{M}$ sets eine Zerlegung $\mathfrak{M}$ des ganzen Polyeders so existiert, dass $\hat{\mathfrak{M}}=\mathfrak{B}$ ist. Für weitere Anwendungen wollen wir den Wert von α_{k-1} in einem besonders einfachen Fall bestimen.

LEMMA 2. *Wenn $P\subset E^d$ ein Polytop der Dimension $d-k+1$ und X eine $(d-k)$-dimensionale Seite von P ist, so gilt $\alpha_{k-1}(P,X)=\frac{1}{2}$.*

Beweis. $E\in V^d_k$ bedeute einen hinsichtlich $\mathfrak{P}$ allgemeinen Unterraum. Indem wir

einen Punkt $x \in \operatorname{relint} X$ wählen, finden wir, dass $(E+x) \cap \operatorname{aff} P$ eine Gerade L ist, die nicht in $\operatorname{aff} X$ verläuft. Daher ist der Durchschnitt $L \cap P$ eine abgeschlossene Strecke S mit x als einem ihrer Endpunkte. Der Aussenwinkel von S in der Ebene $E+x$ an der Stelle x hat das Mass $\frac{1}{2}$, woraus unser Lemma sich ergibt.

$P \subset E^d$ sei ein Polytop der Dimension $d-k$. Wir wählen $p \in \operatorname{relint} P$ und eine Richtung e, welche zu $\operatorname{aff} P$ senkrecht steht, und setzen $p_t = p + te$ $(0 < t \leq 1)$ sowie $P_t = \operatorname{conv}(P \cup \{p_t\})$. Mit $\mathfrak{P}$ $(\mathfrak{P}_t)$ bezeichnen wir den natürlichen Komplex von P (P_t). Wir finden $\mathfrak{P}_t = \mathfrak{P} \cup \{\operatorname{conv}(X \cup \{p_t\}) \mid X \in \mathfrak{P}\}$. Es gibt einen naheliegenden Isomorphismus $\Phi_{t_1,t_2}: \mathfrak{P}_{t_1} \to \mathfrak{P}_{t_2}$, der $\mathfrak{P}$ fest lässt und p_{t_1} in p_{t_2} überführt. Wir setzen, für jedes $X \in \mathfrak{P}_1$ und jedes $t \in (0, 1)$, $X_t = \Phi_{1,t}(X)$. Wegen Lemma 2 gilt für alle $t\alpha_{k-1}(P_t, P) = \frac{1}{2}$, und wir bemerken hier ohne Beweis

LEMMA 3. *P und $(P_t)_{t \in (0,1]}$ seien wie oben gegeben. Wenn $X \in \mathfrak{P}_1$ den Punkt P_1 enthält, gilt $\alpha_{k-1}(P_t, X_t) \to \frac{1}{2}$ für $t \to 0$. Wenn Y eine nichtleere Seite in $\mathfrak{P} - \{P\}$ ist, gilt $\alpha_{k-1}(P_t, Y_t) \to 1$ für $t \to 0$.*

Schliesslich stellen wir fest

LEMMA 4. *Für einen $(d-k+1)$-dimensionalen Würfel W in E^d gilt*

$$\beta^i_{k-1}(W) = \binom{d-k+1}{i}.$$

Beweis. Bei der Integration für β^i_{k-1} können wir uns auf die Menge $V_0 \subset V^d_k$ derjenigen Unterräume beschränken, die sich zu allen Ebenen $\operatorname{aff} X$ $(X \in \mathfrak{M})$ in allgemeiner Lage befinden. Wir betrachten eine i-dimensionale Seite X von W und einen Punkt $x \in \operatorname{relint} X$. Für jedes $E \in V_0$ ist $(E+x) \cap W$ eine (eventuell entartete) Strecke, und daraus folgt, dass $\beta_{k-1}(W, X)$ mit dem in $\operatorname{aff} W$ gemessenen Innenwinkel von W an der Stelle x übereinstimmt. Für die Summe der i-dimensionalen Kantenwinkel eines $(d-k+1)$-dimensionalen Würfels finden wir aber leicht den

Wert $\binom{d-k+1}{i}$.

Mit diesen Vorbereitungen können wir ohne Mühe die beiden nachfolgenden Eindeutigkeitssätze für die Winkelsummen beweisen.

SATZ 4. *Wenn $\xi, \xi_0, \ldots, \xi_{d-k}$ reelle Zahlen sind, sodass für jedes $(d-k+1)$-dimensionale Polytop $P \subset E^d$ die Beziehung $\sum_{i=0}^{d-k} (-1)^i \xi_i \alpha^i_{k-1}(P) = \xi$ gilt, so ist $\xi = \xi_i$, für alle i, $0 \leq i \leq d-k$.*

Beweis. P sei ein beliebiges $(d-k)$-dimensionales Polytop in E^d. Wir betrachten eine Familie von Polytopen $(P_t)_{t\in(0,1]}$ wie in Lemma 3. Gemäss Lemma 3 finden wir, für

$$t\to 0,\ \alpha^0_{k-1}(P_t)\to f^0(P)+\tfrac{1}{2},$$
$$\alpha^i_{k-1}(P_t)\to f^i(P)+(\tfrac{1}{2})f^{i-1}_{\rfloor}(P)\quad(1\le i\le d-k-1)$$

und

$$\alpha^{d-k}_{k-1}(P_t)\to(\tfrac{1}{2})f^{d-k-1}(P)+(\tfrac{1}{2}).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{d-k}(-1)^i\,\xi_i\alpha^i_{k-1}(P_t)=\xi \tag{9}$$

erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{d-k-1}(-1)^i(\xi_i-(\tfrac{1}{2})\,\xi_{i+1})\,f^i(P)=\xi-(\tfrac{1}{2})\,\xi_0-(\tfrac{1}{2})(-1)^{d-k}\,\xi_{d-k}. \tag{10}$$

Da (10) für alle $(d-k)$-dimensionalen Polytope gilt, erhalten wir aus der Eindeutigkeit der Eulerschen Relation (B. Grünbaum [2]), indem wir zur Abkürzung $\delta=\xi_1-\xi_0$ setzen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\xi_i=\xi_0+\delta(2^i-1)\quad(0\le i\le d-k)\\&\xi=\xi_0+(\delta/2)((-1)^{d-k}\,2^{d-k}-1).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nun sei W ein $(d-k)$-dimensionaler Würfel. Wegen Lemma 3 gilt

$$\alpha^i_{k-1}(W)=f^i(W)-\beta^i_{k-1}(W)=\binom{d-k+1}{i}(2^{d-k-i+1}-1).$$

Da (9) auch für W anstelle von P_t zutreffen muss, haben wir

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{d-k}(-1)^i(\xi_0+\delta(2^i-1))\binom{d-k+1}{i}(2^{d-k-i+1}-1)\\&\quad=\xi_0+(\delta/2)((-1)^{d-k}\,2^{d-k}-1),\end{aligned}$$

woraus sich, ausser im trivialen Fall $d=k$, die den Beweis von Satz 4 sichernde Gleichung $\delta=0$ ergibt.

SATZ 5. *Wenn $\xi,\xi_0,\dots,\xi_{d-k}$ reelle Zahlen sind, sodass für jedes $(d-k+1)$-dimensionale Polytop $P\subset E^d$ die Gleichung*

$$\sum_{i=0}^{d-k}(-1)^i\,\xi_i\beta^i_{k-1}(P)=(-1)^{d-k}\,\xi \tag{12}$$

gilt, so ist $\xi=\xi_i$ für alle i, $0\le i\le d-k$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4 finden wir für jede Familie $(P_t)_{t\in(0,1]}$ von Pyramiden mit $t\to 0$ die Konvergenzen

$$\beta^0_{k-1}(P_t)\to\tfrac{1}{2},\quad \beta^i_{k-1}(P_t)\to(\tfrac{1}{2})f^{i-1}(P)\quad(1\le i\le d-k+1),$$
$$\beta^{d-k}_{k-1}(P_t)\to(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})f^{d-k-1}(P).$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (12) ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{d-k-1}(-1)^i\,\xi_{i+1}f^i(P)=\xi_0+(-1)^{d-k}\,\xi_{d-k}-2\xi.$$

Die Eindeutigkeit der Eulerschen Relation liefert weiter

$$\xi_i=(\xi_0-2\xi(-1)^{d-k})/(1-2(-1)^{d-k}). \tag{13}$$

Indem wir diese Zahlen in (12) einsetzen und (12) für einen $(d-k+1)$-dimensionalen Würfel berechnen, erhalten wir

$$\xi_0+\sum_{i=1}^{d-k}(-1)^i(\xi_0-2\xi(-1)^{d-k})(1-2(-1)^{d-k})^{-1}\binom{d-k+1}{i}=(-1)^{d-k}\,\xi.$$

woraus sich $\xi_0=\xi$ und, wegen (13), auch $\xi_i=\xi\ (1\le i\le d-k)$ ergibt.

Satz 5 ist für den Fall $k=1$ zuerst von W. Höhn in (5) bewiesen worden.

3. Ein Unterhalbstetigkeitssatz für die Innenwinkel konvexer Polyeder

Unter einem konvexen Polyeder verstehen wir hier, in leichter Abweichung von der Definition in Abschnitt 2, den Durchschnitt einer endlichen Menge von abgeschlossenen Halbräumen des E^d, sodass also ein beschränktes Polyeder ein Polytop ist. Zu einem gegebenen konvexen Polyeder P gehören wie im Fall der Polytope der aus allen Seiten von P bestehende Komplex $\mathfrak{P}$, das k-dimensionale Gerüst $\mathfrak{P}^k$ von $\mathfrak{P}$ und die Menge $\Delta^k(\mathfrak{P})$ der k-dimensionalen Zellen in $\mathfrak{P}$. Wir betrachten ein konvexes Polyeder P mit $\dim P=m$ und wählen $X\in\Delta^k(\mathfrak{P})$, $x\in\operatorname{relint}X$. Zu jedem $M\in V^d_{d-m+1}$ setzen wir $\Psi(P,X,M)=1$, falls $(x+M)\cap P\neq\{x\}$ ist und $\Psi(P,X,M)=0$ andernfalls. Dam gilt für den in $\operatorname{aff}P$ gemessenen Innenwinkel $\bar\beta_0$ von P an der Kante X die Beziehung

$$\bar\beta_0(P,X)=(\tfrac{1}{2})\int_{V^d_{d-m+1}}\Psi(P,X,M)\,d(\mu^d_{d-m+1}),$$

und wir definieren die k-te innere Winkelsumme wie gewohnt durch

$$\bar\beta^k_0(P)=\sum_{X\in\Delta^k(\mathfrak{P})}\bar\beta_0(P,X).$$

Wir sagen, eine Folge P_α von konvexen Polyedern P_i konvergiere gegen das konvexe Polyeder P und schreiben $P_\alpha\to P$, wenn für jede positive ganze Zahl r die Folge der

Polytope $(rW)\cap P_i$ im Sinne der Hausdorff Metrik gegen $(rW)\cap P$ konvergiert. Hierbei bedeutet W einen Einheitswürfel, der den Ursprung als Symmetriezentrum hat. Wenn e_α eine reelle Zahlenfolge ist, bezeichnen wir mit $\liminf e_\alpha$ den limes inferior und mit $\limsup e_\alpha$ den limes superior von e_α. Zunächst beweisen wir ein Lemma, das den in (1) hergeleiteten Halbstetigkeitssatz für die Seitenzahlen eines Polytopes als unmittelbares Korollar enthält.

LEMMA 5. *P sei ein Polytop und P_α eine gegen P konvergierende Folge von Polytopen so, dass die Folge $f^0(P_\alpha)$ beschränkt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ von P_α, zu jeder natürlichen Zahl k eine Folge von bijektiven Abbildungen $\Psi^k_{i_j}: \Delta^k(P_{i_1})\to\Delta^k(P_{i_j})$ und zu jedem $Y\in\Delta^k(P)$ eine Teilmenge $\mathfrak{A}(Y)$ von $\Delta^k(P_{i_1})$ so, dass alle Folgen $\Psi^k_{\alpha\beta}(A)$ $(A\in\mathfrak{A}(Y))$ konvergieren und die Beziehung $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}(Y)}\lim\Psi^k_{\alpha\beta}(A)=Y$ gilt. Ausserdem könen wir fordern, dass die Mengen $\mathfrak{A}(Y_1)$ und $\mathfrak{A}(Y_2)$ $(Y_1\neq Y_2)$ stets disjunkt seien.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass mit $f^0(P_\alpha)$ alle Folgen $f^k(P_\alpha)$ beschränkt sind. Daher finden wir eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ so, dass alle Folgen $f^k(P_{\alpha\beta})$ konstant sind. Gestützt auf den Blaschkeschen Auswahlsatz können wir $P_{\alpha\beta}$ so fein wählen dass es Folgen $\Psi^k_{\alpha\beta}$ von bijektiven Abbildungen $\Psi^k_{i_j}: \Delta^k(P_{i_1})\to\Delta^k(P_{i_j})$ gibt, für welche jede Folge $\Psi^k_{\alpha\beta}(X)$ $(X\in\Delta^k(P_{i_1}))$ gegen ein Polytop $\tilde{X}\subset P$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass

$$\bigcup \tilde{X} \supset |\Delta^k(P)|, \quad \text{für} \quad X\in\Delta^k(P_{i_1}), \tag{14}$$

gilt. Andernfalls finden wir $Y\in\Delta^k(P)$ und $p\in\operatorname{relint} Y$ so, dass p nicht in $\bigcup\tilde{X}$, für $X\in\Delta^k(P_{i_1})$, liegt. Es gibt eine Folge $p_{\alpha\beta}$ von Punkten p_{i_j} so, dass $\lim p_{\alpha\beta}=p$ ist. Unsere Gegenannahme besagt, dass die Folge $d_{\alpha\beta}$ der euklidischen Abstände $d_{i_j}=\|p_{i_j}, |\mathfrak{P}^k_{i_j}|\|$ nicht gegen Null streben kann. Daher gibt es $\delta>0$ und eine Teilfolge $p_{\alpha\beta\gamma}$ von $p_{\alpha\beta}$ so, dass jeder Punkt $p_{i_{j_l}}$ Mittelpunkt einer $(k+1)$-dimensionalen Kugel $K_{i_{j_l}}\subset P_{i_{j_l}}$ mit Radius δ ist. Nach dem Blaschkeschen Auswahlsatz finden wir sofort, dass eine $(k+1)$-dimensionale Kugel $K\subset P$ mit Zentrum p und Radius δ existiert, was der Beziehung $p\in|\mathfrak{P}^k|$ widerspricht. Damit ist (14) bewiesen. Zu jeder Zelle $Y\in\Delta^k(P)$ setzen wir $\mathfrak{A}(Y)=\{X\in\Delta^k(P_{i_1})\mid \operatorname{relint}\tilde{X}\cap\operatorname{relint} Y\neq\emptyset\}$. Aus (14) ergibt sich unmittelbar $\sum_{X\in\mathfrak{A}(Y)}\tilde{X}\supset Y$. Da $\tilde{X}$ jeweils eine Teilmenge von P und Y ein Element von $\Delta^k(P)$ ist, folgt andererseits aus $\operatorname{relint}\tilde{X}\cap\operatorname{relint} Y\neq\emptyset$ dass $\operatorname{relint}\tilde{X}\subset\operatorname{relint} Y$ und damit $\bigcup_{X\in\mathfrak{A}(Y)}\tilde{X}\subset Y$ gilt. Wenn Y_1 und Y_2 verschiedene Seiten in $\Delta^k(P)$ sind, ist $\mathfrak{A}(Y_1)\cap\mathfrak{A}(Y_2)=\emptyset$; denn sonst gäbe es $X\in\Delta^k(P_{i_1})$ derart, dass $\operatorname{relint}\tilde{X}\subset\operatorname{relint} Y_i$ $(i=1,2)$ und weiter $\operatorname{relint}\tilde{X}\subset(\operatorname{relint} Y_1\cap\operatorname{relint} Y_2)=\emptyset$ gälte. Die Mengen $\mathfrak{A}(Y)$ genügen daher allen in Lemma 5 geforderten Bedingungen.

KOROLLAR. *P_α sei eine gegen ein konvexes Polyeder P konvergierende Folge von konvexen Polyedern. Dann ist für jede natürliche Zahl k* $\liminf f^k(P_\alpha)\geq f^k(P)$.

Beweis. Wir wählen r so gross, dass das Innere des Würfels rW von jeder Kante $Y\in\Delta^k(P)$ einen Punkt $p(Y)\in\operatorname{relint} Y$ enthält. Bei gegebener Punktmenge $X\subset E^d$

setzen wir $X' = X \cap rW$. Y' ist für jedes Y in $\Delta^k(P)$ ein Element von $\Delta^k(P')$. Wenn eine Folge X_α von Mengen vorliegt, soll X'_α die Folge der Mengen $X_i \cap rW$ bedeuten. Unter der Annahme, unser Korollar sei falsch, finden wir eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ von P_α so, dass $\limsup f^k(P_{\alpha\beta}) < f^k(P)$ gilt. Weiter gibt es eine Teilfolge $P'_{\alpha\beta\gamma}$ von $P'_{\alpha\beta\gamma}$, welche die in Lemma 5 erwähnten Eigenschaften hat. Um unsere Bezeichnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, wir hätten P_α do „dünn" gewählt, dass wir $P_{\alpha\beta\gamma} = P_\alpha$ setzen können. Gemäss Lemma 5 gibt es dann zu jedem $Y \in \Delta^k(P)$ eine Menge $A(Y) \in \mathfrak{A}(Y) \subset \Delta^k(P'_1)$ so, dass $p(Y) \in \lim \Psi^k_\alpha(A(Y)) \subset Y'$ gilt. Für genügend grosse Indexe i muss $\Psi^k_i(A(Y))$ die Form $F \cap rW$ $(F \in \Delta^k(P_i))$ haben, da die übrigen Mengen von $\Delta^k(P'_i)$ dem Rand von rW angehören und sich dem Punkt $p(Y)$ nicht beliebig nähern können. Da $A(Y_1)$ und $A(Y_2)$ stets verschieden sind, folgt für hinreichend grosse i

$$f^k(P_i) \geq \operatorname{card}\{A(Y) \mid Y \in \Delta^k(P)\} = f^k(P),$$

was wir beweisen wollten.

LEMMA 6. *$P \subset E^d$ sei ein m-dimensionales Polytop und P_α eine gegen P konvergierende Folge von Polytopen mit* $\liminf \dim P_\alpha = j$. *Die Folge X_α $(X_i \in \Delta^k(P_i),\ k \leq m-1)$ konvergiere gegen eine Teilmenge $Y \subset \hat{P}$. X sei diejenige Zelle im Randkomplex $\widehat{\mathfrak{P}}$, für welche* $\operatorname{relint} Y \subset \operatorname{relint} X$ *zutrifft. Dann gilt für die Mengen $\mathfrak{G}^m_i$ der m-dimensionalen Seiten von P_i, welche X_i enthalten:*

$$\liminf \sum_{G \in \mathfrak{G}_\alpha{}^m} \bar{\beta}_0(G, X_\alpha) \geq (j - m + 1)\, \bar{\beta}_0(P, X).$$

Beweis. Indem wir, wenn nötig, kleine Translationen auf die Polytope P_i ausüben, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, es gelte

$$\operatorname{relint} X \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{relint} X_i\Big) \neq \emptyset,$$

und wir setzen voraus, der Ursprung liege in diesem Durchschnitt. Wir definieren

$$H = \{M \in V^d_{d-m+1} \mid M \cap \operatorname{relint} P \neq \emptyset\}$$

und bezeichnen mit H^n die abgeschlossene Teilmenge von H, welche alle Unterräume enthält, deren Distanz von $V^d_{d-m+1} - H$ wenigstens $1/n$ ist. Dann gilt

$$\bar{\beta}_0(P, X) = \lim_{n \to \infty} \mu^d_{d-m+1}(H^n).$$

Entsprechend setzen wir

$$H_i = \{M \in V^d_{d-m+1} \mid M \cap \operatorname{relint} P_i \neq \emptyset\}.$$

Wir wollen zeigen, dass zu jedem n ein Index i_0 existiert, sodass für $i \geq i_0$ die Beziehung

$$H^n \subset H_i \tag{15}$$

gilt. Andernfalls finden wir eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ von P_α und eine gegen einem Unterraum N konvergierende Folge $N_{\alpha\beta}$ $(N_{i_j} \in V^d_{d-m+1})$ so, dass für alle i_j N_{i_j} zur Menge $H^n - H_{i_j}$ gehört. Daraus ergibt sich, dass $N \in H^n$ das Polytop P stützt, was nur möglich ist, wenn entweder (a) $N \cap \operatorname{relint} P = \emptyset$ oder (b) $\operatorname{aff} P \subset N$ gilt. (a) widerspricht offensichtlich der Definition von H^n, aber auch (b) ist ausgeschlossen, da N zum Inneren von H bezüglich der Topologie von V^d_{d-m+1} gehören muss and X auf dem Rand $\hat{P}$ liegt. $Z \subset V^d_{d-m+1}$ sei die Menge aller Elemente, welche zu einer der Ebenen $\operatorname{aff} X$ ($X \in \mathfrak{P}$ oder $X \in \mathfrak{P}_i$, $1 \leq i < \infty$) nicht allgemein sind. Es gilt $\mu^d_{d-m+1}(Z) = 0$. Nun sei N irgendein Unterraum in $H^n - Z$. Für $i \geq i_0$ ist die Menge $P_i(N) = N \cap P_i$ ein $(j-m+1)$-dimensionales Polytop. Der Ursprung o ist ein Eckpunkt von $P_i(N)$, und jede von o ausgehende eindimensionale Kante ist ein Durchschnitt $N \cap G$ mit $G \in \mathfrak{G}^m_i$ und $N \cap \operatorname{relint} G \neq \emptyset$. Da von o in $P_i(\mathfrak{K})$ mindestens $j-m+1$ verschiedene Kanten ausgehen, gibt es $j-m+1$ Seiten G_r $(1 \leq r \leq j-m+1)$ in $\mathfrak{G}^m_i$ so, dass N zu allen Mengen $H(G_r) = \{X \in V^d_{d-m+1} \mid X \cap \operatorname{relint} G_r \neq \emptyset\}$ gehört. Durch Integration ergibt sich daraus, für $i \geq i_0$,

$$\sum_{G \in \mathfrak{G}_i^m} \bar{\beta}_0(G, X_i) \geq (j - m + 1)\, \mu^d_{d-m+1}(H^n),$$

und, mit $n \to \infty$, der Beweis unseres Lemmas.

Wenn X eine Seite des konvexen Polyeders P ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}$ den aus allen Seiten von X bestehenden Komplex. Wir definieren sodann für $i \leq k$

$$\gamma_0^{i,k}(P) = \sum_{X \in \Delta^k(P)} \Big(\sum_{Y \in \Delta^i(\mathfrak{X})} \bar{\beta}_0(X, Y).$$

Im Falle $k = \dim P$ gilt natürlich $\gamma_0^{i,k}(P) = \bar{\beta}_0(P)$. Das Hauptergebnis diese Abschnitts liegt im

SATZ 6. *P_α sei eine Folge von konvexen Polyedern des E^d, welche gegen ein m-dimensionales konvexes Polyeder P konvergiert. Aus* $\liminf \dim P_\alpha \geq j$ *folgt dann für* $0 \leq k \leq m-1$

$$\liminf \gamma_0^{k,m}(P) \geq (j - m + 1)\, \bar{\beta}_0^k(P).$$

Wenn P ein Polytop ist, kann Gleichheit nur im Falle $\liminf f^k(P_\alpha) = f^k(P)$ *eintreten.*

Beweis. Wie im Beweis des Korollars zu Lemma 5 wählen wir einen Würfel rW, dessen Inneres von jeder Kante $Y \in \Delta^k(P)$ einen Punkt $p(Y) \in \operatorname{relint} Y$ enthält. Wiederum setzen wir für jede Menge $Q \subset E^d$ $Q' = Q \cap rW$. Wenn die Folge der $f^0(P_i')$ nicht beschränkt ist, zeigt eine einfache Abschätzung, dass auch die Folge der Mächtigkeiten $\operatorname{card}\{X \cap rW \mid X \in \Delta^k(P_i)\}$ nicht beschränkt ist, woraus sich im Hinblick auf

Lemma 6 sofort ergibt, dass $\gamma_0^{k,m}(P_\alpha)$ gegen ∞ divergiert. So finden wir, wenn Satz 6 falsch ist, eine gegen ein m-dimensionales Polyeder P konvergierende Folge P_α von j-dimensionalen Polyedern so, dass $\gamma_0^{k,m}(P_\alpha)$ konvergiert und die Beziehung $\lim \gamma_0^{k,m}(P_\alpha) < (j-m+1)\,\bar{\beta}_0^k(P)$ gilt. Indem wir den Würfel rW und die Punkte $p(Y)$ wie oben wählen, können wir zusätzlich annehmen, dass die Folge der $f^0(P_i')$ beschränkt ist. Nach Lemma 5 gibt es eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ von P_α und zu jeder Seite $Y \in \Delta^k(P)$ eine Folge von Seiten

$$A_{i_j}(Y)\,(A_{i_j}(Y) = \Psi_{i_j}^k(A),\ A \in \mathfrak{A}(Y))$$

in $\Delta^k(P_{i_1}')$ so, dass $A_{i_j}(Y_1) \neq A_{i_j}(Y_2)\ (Y_1 \neq Y_2)$ und $p(Y) \in \lim A_{\alpha\beta}(Y) \subset Y$ gilt. Wie im Beweis des Korollars zu Lemma 5 hat A_{i_j} für hinreichend grosse Indexe i_j jeweils die Form $A_{i_j}(Y) = X \cap rW\ (X \in \Delta^k(P_{i_j}))$. Aus Lemma 6 folgt, im Widerspruch zu unserer Gegenannahme,

$$\begin{aligned}\lim \gamma_0^{k,m}(P_\alpha) &\geq \lim \sum_{Y \in \Delta^k(P)} \Big(\sum{}^1 \bar{\beta}_0(G, A_{\alpha\beta}(Y))\\ &\geq (j-m+1) \sum_{Y \in \Delta^k(P)} \bar{\beta}_0(P, Y) = (j-m+1)\,\bar{\beta}_0(P).\end{aligned}$$

Hier bedeutet $\sum^1$, dass über alle m-dimensionalen Seiten G von P_{i_j}', welche $A_{i_j}(Y)$ enthalten, zu summieren ist. Um die Bedingung für die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir ein Polytop P und können annehmen, jedes P_i sei ebenfalls ein Polytop mit $f^k(P_i) > f^k(P)$. Wenn unsere Behauptung falsch ist, gibt es eine Teilfolge $P_{\alpha\beta}$ von P so, dass $\gamma_0^{k,m}(P_{\alpha\beta})$ gegen $(j-m+1)\,\bar{\beta}_0^k(P)$ konvergiert. Wir wählen Z_{i_j} in $\Delta^k(P_{i_j}) - \sum_{Y \in \Delta k(P)} A_{i_j}(Y)$ und können weiter annehmen, die Folge $Z_{\alpha\beta}$ strebe gegen ein Polytop Z in relbd$P$. Wegen Lemma 6 ist $\sum^2 \bar{\beta}_0(H, Z_{\alpha\beta}) > 0$, wo das Zeichen $\sum^2$ bedeutet, dass über alle m-dimensionalen Seiten H von P_{i_j}, welche Z_{i_j} enthalten, zu summieren ist. So finden wir

$$\begin{aligned}\lim \gamma_0^{k,m}(P_{\alpha\beta}) &\geq \lim \sum_{Y \in \Delta^k(P)} \Big(\sum{}^1 \bar{\beta}_0(G, A_{\alpha\beta}(Y))\\ &\quad + \lim \sum{}^2 \bar{\beta}_0(H, Z_{\alpha\beta}) > (j-m+1)\,\bar{\beta}_0(P).\end{aligned}$$

Damit ist unsere Gegenannahme widerlegt.

Die Bedingung $\lim f^k(P_\alpha) = f^k(P)$ ist auch im Falle beliebiger konvexer Polyeder für die Gleichheit in Satz 6 notwendig, doch ist der Beweis dafür etwas verwickelter, und wir lassen ihn hier aus. Unterhalbstetigkeitssätze sind nützlich, um die Existenz von Lösungen bei Extremalproblemen zu sichern. Als Beispiel erwähnen wir.

SATZ 7. *B und C seien konvexe Körper des E^d mit $B \subset \operatorname{int} C$, und k sei eine natürliche Zahl. Unter allen Polytopen P mit $B \subset P \subset C$ gibt es eines, für welches der Wert der Funktion β_0^k minimal ist.*

Beweis. ξ sei das Infimum von β_0^k für die in Frage stehende Klasse von Polytopen. P_α sei eine Folge von Polytopen P_i, $B \subset P_i \subset C$, so, das $\xi + 1 \geq \beta_0^k(P_i) \geq \xi$ und $\lim \beta_0^k(P_\alpha) = \xi$ gilt. Wir können $\lim P_\alpha = D$ annehmen, wo D ein zwischen B und C liegender konvexer Körper ist. Da $\beta_k^0(P_i) \leq \xi + 1$ für alle i gilt, ist die Folge der $f^0(P_i)$ beschränkt. Daraus folgt, dass D ein Polytop sein muss, und aus Satz 6 ergibt sich

$$\xi \leq \beta_0^k(D) \leq \lim \beta_0^k(P_\alpha) = \xi \quad \text{oder} \quad \beta_0^k(D) = \xi .$$

4. Ungleichungen für die Inhalte von Gerüsten

In diesem letzten Paragraphen studieren wir das Mass des r-dimensionalen Gerüsts eines Polytops $P \subset E^d$. Wir schliessen direkt an die Arbeit [1] von H. G. Eggleston, B. Grünbaum und V. Klee an. In privater Mitteilung erfuhren wir von den Autoren, sie seien nicht imstande, die am Ende von § 5 in (1) gemachte Behauptung zu beweisen; vergleiche auch die Bemerkungen, die unserem Satz 11 vorangehen. Für ein Polytop $P \subset E^d$ bedeutet $\xi_m(P)$ das m-dimensionale Hausdorffsche Mass des m-dimensionalen Gerüstss von P. In (1) ist die Unterhalbstetigkeit der Funktion ξ_m bewiesen worden, und wir studieren hier die Existenz schärferer Ungleichungen, wenn das Grenzpolytop im Verhältnis zur approximierende Folge entartet ist.

SATZ 8. *$P \subset E^d$ sei ein m-dimensionales Polytop und P_α eine gegen P konvergierende Folge von Polytopen mit* $\liminf \dim P_\alpha \geq j$. *Dann gilt* $\liminf \xi_m(P_\alpha) \geq (j - m + 1)\, \xi_m(P)$.

Beweis. Wir können annehmen, P liege in einem Unterraum $E^m \subset E^d$. Mit $M \in V_{d-m}^d$ bezeichnen wir den zu E^m senkrechten Unterraum. Zu jedem Polytop P_i gibt es ein zu P_i kongruentes Polytop P_i', dessen hausdorffsche Distanz von P_i nicht grösser als $1/i$ ist, derart, dass M in Bezug zu allen Ebenen $\operatorname{aff} X$ $(X \in \mathfrak{P}_i')$ allgemein ist. Es gilt $P_\alpha' \to P$ und $\xi_m(P_i) = \xi_m(P_i')$. Daher dürfen wir zum vorneherein annehmen, M sei in Bezug auf alle Polytope von P_α allgemein. π bedeute die Projektion von E^d längs M auf E^m. Offenbar ist $\lim \pi(P_\alpha) = P$, und wegen der Stetigkeit des Volumens für konvexe kompakte Teilmengen in E^m finden wir.

$$\lim \xi_m(\pi(P_\alpha)) = \xi_m(P). \tag{16}$$

Im Folgenden setzen wir für P_α nur die Bedingung (16) und die allgemeine Lage von M voraus. Unsere Behauptung folgt nämlich unmittelbar daraus, dass für jedes j-dimensionale Polytop, bezüglich dessen M allgemein ist, die Beziehung

$$\xi_m(P) \geq (j - m + 1)\, \xi_m(\pi(P)) \tag{17}$$

zutrifft. Um (17) einzusehen, setzen wir

$$\Pi = \{\pi(X) \mid X \in \mathfrak{P}^m\},$$

und mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir den beim Beweis von Satz 1 eingeführten Zellenkomplex, welcher aus Durchschnitten von Elementen aus Π besteht. Zu jedem $A \in \mathfrak{A}$ und $x \in \operatorname{relint} A$ ist $(x+M) \cap P$ ein $(j-m)$-dimensionales Polytop, dessen Eckpunkte Durchschnitte von $x+M$ mit m-dimensionalen Seiten $F_1, \ldots, F_{q(A)}$ $(q(A) \geq j-m+1)$ von P sind. Zwei Ebenen $x+M, y+M$ $(x, y \in \operatorname{relint} A)$ treffen stets dieselben Seiten von P. Mit $A'_j \subset F_j$ $(1 \leq j \leq q(A))$ bezeichnen wir die Menge $\pi^{-1}(\operatorname{relint} A) \cap F_j$. Da π eine metrische Kontraktion ist, gilt $\Lambda^m A'_j \geq \Lambda^m(A)$, und daher

$$\begin{aligned}\xi_m(P) &\geq \sum_{A \in \mathfrak{A}} \Big(\sum_{1 \leq j \leq q(A)} \Lambda^m(A'_j) \\ &\geq (j-m+1) \sum_{A \in \mathfrak{A}} \Lambda^m(A) = (j-m+1)\, \xi_m(\pi(P)),\end{aligned}$$

womit (17) bewiesen ist.

Bemerkungen. In den Fällen $j=m$ und $j=m+1$ tritt in Satz 8 stets Gleichheit ein. Um dies einzusehen, können wir zunächst ohne Einbusse an Allgemeinheit voraussetzen, dass alle Polytope P_i demselben Raum E^j angehören. Für $j=m$ folgt unsere Behauptung unmittelbar aus der Stetigkeit des Volumenfunktionals in E^m (vgl. H. Hadwiger, [3]). Wenn $j=m+1$ gilt, bemerken wir zunächst, dass für jeden Einheitsvektor u in E^{m+1} die Projektionen $\pi_u(P_i)$ längs u auf den zu u senkrechten m-dimensionalen Unterraum gegen $\pi_u(P)$ konvergieren. Weiter ergibt sich die Konvergenz von $F_m(P_\alpha) = (1/\omega_m) \int \xi_m(\pi_u(P_\alpha))\, du$ gegen $F_m(P) = (1/\omega_m) \int \xi_m(\pi_u(P))\, du$. Hierbei bedeutet ω_m das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel. Nach der Formel von Cauchy ([3], Seite 208) gilt aber $F_m(P_i) = \xi_m(P_i)$, während wir die Beziehung $F_m(P) = 2\xi_m(P)$ leicht durch direkte Integration finden. Für $j \neq m$ und $1 \leq s \leq m$ braucht nicht einmal $\lim \xi_s(P_\alpha) > \xi_s(P)$ zu gelten, obschon dies sicher für $n \leq 3$ zutrifft. Beispielweise lässt sich das eindimensionale Gerüst eines „nachbarlichen" vierdimensionalen Polytops mit $j+1$ Ecken beliebig genau durch das eindimensionale Gerüst eines j-dimensionalen Simplex approximieren.

In [1] haben H. G. Eggleston, B. Grünbaum und V. Klee bewiesen: Wenn r, s und d natürliche Zahlen sind, sodass $s \leq d$ und r ein Teiler von s ist, so existiert eine positive Konstante $\gamma(r, s, d)$ so, dass für alle Zellenkomplexe $\mathfrak{K}$ der Dimension d gilt: $\xi_s(\mathfrak{K})^{1/s} \leq \gamma(r, s, d)\, \xi_r(\mathfrak{K})^{1/r}$. Inder Tat liess sich zeigen, dass unter den obigen Bedingungen $\gamma(r, s, d) = 1$ gesetzt werden kann, doch blieb das Problem für andere Werte von r und s offen, sogar wenn man sich auf simpliziale Komplexe beschränkte. Hier beweisen wir ein schwächeres Resultat für simpliziale Komplexe, welches für alle r und s zutrifft und das Ergebnis von (1) mitliefert. Wir werden zeigen, dass im Fall $r = s-1$ diese schwächere Ungleichung für alle Zellenkomplexe gilt. Wenn r und $s \neq 0$ natürliche Zahlen sind, bezeichnen wir mit $\langle s/r \rangle$ die kleinste natürliche Zahl $\geq s/r$.

SATZ 9. *$\mathfrak{Q}$ sei ein d-dimensionaler simplizialer Komplex in E^n. Dann existiert für*

alle s und r mit $d \geq s \geq r$ eine Zahl $\gamma(r, s, d)$ so, dass

$$\xi_s(\mathfrak{Q})^{1/s}/\xi_r(\mathfrak{Q})^{1/r} \leq \gamma(r, s, d)\,(f^r(\mathfrak{Q}))^{(1/s)(\langle s/r\rangle - (s/r))}$$

gilt.

Beweis. Zunächst nehmen wir zusätzlich $r \leq s \leq 2r$ an. Wenn $F \in \Delta^s(\mathfrak{Q})$ ein s-dimensionales Simplex ist, wählen wir ein $(2r-s)$-dimensionale Seite G von F so, dass $\xi_{2r-s}(G) \geq \xi_{2r-s}(X)$ für alle $(2r-s)$-dimensionalen Seiten X von F gilt. Mit G_1 und G_2 bezeichnen wir die beiden r-dimensionalen Seiten von F, deren Durchschnitt G ist. Indem wir Satz 5.6 von (1) auf die Polytope G_i $(i=1, 2)$ anwenden, finden wir eine Zahl $k(r, s)$ so, dass für alle $F \in \Delta^s(\mathfrak{Q})$ gilt:

$$k(r, s)\,(\xi_r(G_i))^{(2r-s)/r} \leq \xi_{2r-s}(G) \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Die Eckpunkte von G_2, die nicht auch zu G_1 gehören, bezeichnen wir mit $a_{r+2}, \ldots, a_{s+1}$. Wir setzen für $r+2 \leq j \leq s+1$

$$h_j = \|a_j, \operatorname{aff}(G_1 \cup \{a_{r+2}, \ldots, a_{j-1}\})\|$$

und

$$h'_j = \|a_j, \operatorname{aff}(G \cup \{a_{r+2}, \ldots, a_{j-1}\})\|,$$

wo $\|x, M\|$ den euklidischen Abstand des Punktes x von der Menge M bedeutet. Es ist $h_j \leq h'_j$, und nach der Formel für das Kegelvolumen gibt es Zahlen $k'(r, s)$ und $k''(r, s)$ so, dass die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \xi_s(F) &= k'(r, s)\,\xi_r(G_1) \prod_{j=r+2}^{s+1} h_j \\ \xi_r(G_2) &= k''(r, s)\,\xi_{2r-s}(G) \prod_{j=r+2}^{s+1} h'_j \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

gelten, Aus (18) und 19) folgt für alle F in $\Delta^s(\mathfrak{Q})$

$$\xi_r(G_2) \geq k(r, s)\,k''(r, s)\,(\xi_r(G_2))^{(2r-s)/r} \prod_{j=r+2}^{s+1} h'_j$$

oder

$$(\xi_r(G_2))^{(s-r)/r} \geq k(r, s)\,k''(r, s) \prod_{j=r+2}^{s+1} h_j. \tag{20}$$

Indem wir (19) mit (20) kombinieren, finden wir $k^*(r, s) > 0$ so, dass für alle $F \in \Delta^s(\mathfrak{Q})$ die Ungleichung

$$\xi_s(F) \leq k^*(r, s)\,\xi_r(G_1)\,(\xi_r(G_2))^{(s-r)/r}$$

zutrifft. Daraus folgt, wenn wir zur Verdeutlichung die zu F gehörenden Seiten G_i mit $G_i(F)$ $(i=1, 2)$ bezeichnen,

$$\xi_s(\mathfrak{Q}) \leq k^*(r, s) \sum_{F \in \Delta^s(\mathfrak{Q})} \xi_r(G_1(F))\,(\xi_r(G_2(F)))^{(s-r)/r}. \tag{21}$$

Nun ist sicher

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{F\in\Delta^s(\mathfrak{Q})}\xi_r(G_1(F))\,(\xi_r(G_2(F)))^{(s-r)/r}\leq\\&\quad\Big(\sum_{G\in\Delta^r(\mathfrak{Q})}\xi_r(G)\Big)\Big(\sum_{G\in\Delta^r(\mathfrak{Q})}\xi_r(G)^{(s-r)/r}\Big).\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt ferner

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{G\in\Delta^r(\mathfrak{Q})}\xi_r(G)^{(s-r)/r}\leq\Big(\sum_{G\in\Delta^r(\mathfrak{Q})}\xi_r(G)\Big)^{(s-r)/r}\Big(\sum_{G\in\Delta^r(\mathfrak{Q})}1\Big)^{(2r-s)/r}\\&\quad=(\xi_r(\mathfrak{Q}))^{(s-r)/r}\,(f^r(\mathfrak{Q}))^{(2r-s)/s}.\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

Aus (21) bis (23) schliessen wir auf die Existenz einer Konstanten $\gamma(r, s, d)$, für welche

$$\xi_s(\mathfrak{Q})^{1/s}/\xi_r(\mathfrak{Q})^{1/r}\leq\gamma(r, s, d)\,(f^r(\mathfrak{Q}))^{(1/s)(2-(s/r))}\tag{24}$$

zutrifft. Im Falle $s>2r$ wählen wir eine positive ganze Zahl n so, dass $(n+1)r<s\leq(n+2)r$ gilt, und wenden Satz 5.4 von (1) an. So erhalten wir

$$\xi_s(\mathfrak{Q})\leq\xi_r(\mathfrak{Q})^n\,\xi_{s-nr}(\mathfrak{Q})$$

und mit (24), angewendet auf $s-nr$, folgt die Existenz einer Zahl $\gamma(r, s, d)$ so, dass

$$\xi_s(\mathfrak{Q})^{1/s}/\xi_r(\mathfrak{Q})^{1/r}\leq\gamma(r, s, d)\,(f^r(\mathfrak{Q}))^{(1/s)(\langle s/r\rangle-(s/r))}$$

zutrifft, was wir beweisen wollten.

SATZ 10. *Wenn $\mathfrak{Q}$ ein d-dimensionaler Zellenkomplex in E^n ist, so gibt es zu jeder ganzen Zahl $s<d$ eine Zahl $\gamma(s, d)>0$ so, dass*

$$\xi_{s+1}(\mathfrak{Q})^{1/(s+1)}/\xi_s(\mathfrak{Q})^{1/s}\leq\gamma(s, d)\,(f^s(\mathfrak{Q}))^{(s-1)/(s(s+1))}$$

ist.

Beweis. Nach einer klassischen isoperimetrischen Ungleichung (H. Hadwiger [3]) gibt es eine Zahl $\gamma>0$ so, dass für jedes $F\in\Delta^{s+1}(\mathfrak{Q})$ die Beziehung $\xi_{s+1}(F)^s\leq\gamma\xi_s(F)^{s+1}$ gilt. $\mathfrak{F}$ sei der aus allen Seiten von F bestehende Komplex. Eine einfache Abschätzung liefert

$$\xi_{s+1}(F)^s\leq\gamma\Big(\sum_{G\in\Delta^s(\mathfrak{F})}\xi_s(G)\Big)^s\Big(\sum_{G\in\Delta^s(\mathfrak{F})}\xi_s(G)\Big)\leq\gamma\Big(\sum{}^1\,\xi_s(G)\,(\xi_s(H)^{(1/s)})^s.\tag{25}$$

Dabei bedeutet $\sum^1$, dass über alle Paare $(G, H)\in\Delta^s(\mathfrak{F})\times\Delta^s(\mathfrak{F})$ zu summieren ist. Nun gilt für jede Seite $G\in\Delta^s(\mathfrak{F})$

$$\xi_s(G)\leq\sum_{H\in\Delta^s(\mathfrak{F})-\{G\}}\xi_s(H).\tag{26}$$

Indem wir in (25) für ein Diagonalelement den Ausdruck rechts in (26) einsetzen,

finden wir $\gamma^* \leq 2\gamma$ so, dass

$$\xi_{s+1}(F) \leq \gamma^* \sum{}^2 \xi_s(G)\, \xi_s(H)^{1/s}$$

oder

$$\xi_{s+1}(\mathfrak{Q}) = \gamma^* \sum_{F \in \Delta^{s+1}(\mathfrak{Q})} \left(\sum{}^2 \xi_s(G)\, \xi_s(H)^{1/s}\right) \tag{27}$$

gilt, wobei $\sum^2$ vorschreibt, dass über alle Paare von Zellen G, H in $\Delta^s(\mathfrak{F})$ mit $G \neq H$ summiert werden soll. Ein solches Paar kann nur zweimal auf der rechten Seite von (27) erscheinen; denn $\operatorname{conv}(G \cup H)$ muss $(s+1)$-dimensional und in einem $F \in \Delta^{s+1}(\mathfrak{Q})$ enthalten sein. So gilt

$$\begin{aligned}\xi_{s+1}(\mathfrak{Q}) &\leq 2\gamma^* \Big(\sum_{G \in \Delta^s(\mathfrak{Q})} \xi_s(G)\Big)\Big(\sum_{G \in \Delta^s(\mathfrak{Q})} \xi_s(G)^{1/s}\Big) \\ &\leq 2\gamma^* (\xi_s(\mathfrak{Q}))^{(s+1)/s} (f^s(\mathfrak{Q}))^{(s-1)/s},\end{aligned}$$

wo die letzte Ungleichung sich wieder aus der Formel von Cauchy-Schwarz ergibt. Das heisst, es gibt eine Zahl $\gamma(s, d)$ so, dass, wie Satz 10 verlangt,

$$\xi_{s+1}(\mathfrak{Q})^{1/s+1} / \xi_s(\mathfrak{Q})^{1/s} \leq \gamma(s, d)\, (f^s(\mathfrak{Q}))^{(s-1)/(s(s+1))}$$

gilt.

In (1) ist der folgende Satz (theorem 5.10) bewiesen worden: r, s, d und k seinen ganze Zahlen mit $1 \leq r \leq d$, $0 \leq s < d$ und $k \geq \binom{d+1}{s+1}$. Dann gibt es unter den konvexen Körpern (Polytopen mit höchstens k s-dimensionalen Seiten) mit dem Volumen 1 in E^d solche, für welche ξ_r minimal ist. Die Autoren fügen bei: „Wir konnten nicht entscheiden, ob der vorstehende Satz richtig bleibt, wenn die Bedingung für das Volumen durch die Forderung ersetzt wird, dass die Oberfläche den Wert 1 haben sollen, obwohl dies im Fall $r = 1$ leicht eingesehen werden kann.“ Indessen haben uns die Verfasser mitgeteilt, dass für $r = 1$ zwar eine gleichmässig beschränkte Folge von Polytopen P_i existiert, für welche $\xi_1(P_i)$ gegen den Minimalwert von ξ_r strebt, die Möglichkeit dass das Grenzpolytop entartet sein könnte, von ihnen jedoch übersehen worden ist. Der nächste Satz zeigt, dass solche Folgen von Polytopen für jedes r $(1 \leq r \leq d)$ existieren, doch sind wir nicht imstande, zu entscheiden, ob das Grenzpolytop entartet sein muss oder nicht.

SATZ 11. *r, t und d seien positive ganze Zahlen mit $1 \leq r \leq d-1$. Dann gibt es eine positive ganze Zahl n, die nur von r, t und d abhängt, so, dass jeder konvexe Körper C mit Durchmesser $\geq n$ und Oberfläche eins der Bedingung $\xi_r(C) \geq t$ genügt.*

Beweis. Wir beweisen zuerst eine Hilfsaussage (*) γ, δ, ϑ seien positive Zahlen so, dass ein konvexer Körper D in E^{d-1} den Bedingungen $\gamma \leq \xi_{d-1}(D) \leq \vartheta$, $\xi_r(D) \leq \delta$, $r \leq d-2$, genügt. Dann gibt es eine Zahl q, die nur von r, d, γ, δ und ϑ abgängt, sodass der Durchmesser von D nicht grösser als q ist.

Andernfalls existiert eine Folge D_α von konvexen Körpern in E^{d-1} so, dass der Durchmesser von $D_i \geq i$ ist und für welche die Bedingung $\gamma \leq \xi_{d-1}(D_i) \leq \vartheta$, $\xi_r(D_i) < \delta$ erfüllt ist. Aus $\vartheta \geq \xi_{d-i}(D_i)$ folgt, dass die minimale Breite von D_i für $i \to \infty$ gegen Null strebt. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert daher ein Index i_0 so, dass es zu jedem $i \geq i_0$ eine $(d-2)$-dimensionale Ebene Q_i in E^{d-1} gibt, deren Parallelmenge $(Q_i)\,\varepsilon$ den Körper D_i enthält. Mit π_i bezeichnen wir die Projektion von E^{d-1} auf Q_i. Dann existiert, wegen Satz 5.6 von (1), eine Zahl $\gamma(r, d) > 0$ so, dass

$$\delta^{(d-2)/r}\gamma(r, d) \geq \xi_{d-2}(D_i) \geq \xi_{d-2}(\pi_i(D_i))$$

für $i \geq i_0$ und daher

$$2^d \varepsilon \delta^{(d-2)/r}\gamma(r, d) \geq 2^d \varepsilon \xi_{d-2}(\pi_i(D_i)) > \xi_{d-1}(D_i)) > \gamma$$

gilt. Diese Ungleichung enthält jedoch einen Widerspruch, wenn wir ε so wählen, dass $2^d \varepsilon \delta^{(d-2)/r}\gamma(r, d) < \gamma$ ist, und die Hilfsaussage (*) ist gesichert.

Nun betrachten wir einen konvexen Körper $C \subset E^d$ mit der Oberfläche $\xi_{d-1}(C) = 1$ und $\xi_r(C) < t$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, C sei ein Polytop und $u = (1/d, \ldots, 1/d)$ liege in Richtung eines Durchmessers von C. $C_1, \ldots, C_d$ seien die Projektionen von C in den Richtungen $e_1, \ldots, e_d$, wobei e_i der Einheitsvektor $e_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{di})$ mit $\delta_{ji} = 0$ für $j \neq i$ und $\delta_{ii} = 1$ ist. Wir wollen zeigen, dass es einen Index k_0 $(1 \leq k_0 \leq d)$ gibt, für welchen

$$(\tfrac{1}{2}d)\, \xi_{d-1}(C) \leq \xi_{d-1}(C_{k_0}) \leq 1 \tag{28}$$

zutrifft. $v(F)$ sei ein zu $\operatorname{aff} F$ $(F \in \Delta^{d-1}(C))$ orthogonaler Einheitsvektor. Dann ist, wenn π_k die Projektion in Richtung e_k bezeichnet,

$$\xi_{d-1}(\pi_k(F)) = |(v(F), e_k)|\, \xi_{d-1}(F)$$

und weiter

$$\sum_{F \in \Delta^{d-1}(\mathfrak{C})} \sum_{k=1}^{d} \xi_{d-1}(\pi_k(F)) \geq \sum_{F \in \Delta^{d-1}(\mathfrak{C})} \xi_{d-1}(F) = 1\,. \tag{29}$$

Andererseits ist die linke Seite von (29) gleich $2\sum_{k=1}^{d} \xi_{d-1}(C_k)$, woraus sich $\sum_{k=1}^{d} \xi_{d-1}(C_k) \geq \frac{1}{2}$ und damit die Existenz der in (28) geforderten Zahl k_0 ergibt. Nun ist

$$t > \xi_r(C) \geq \xi_r(C_{k_0})\,. \tag{30}$$

Indem wir die in (28) und (30) gefundenen Konstanten für C_{k_0} in Hilfssatz (*) einsetzen, finden wir die Existenz einer nur von r, t und d abhängigen Zahl q so, dass $q \geq$ Durchmesser von $C_{k_0} \geq d^{-1/2}$. Durchmesser von C gilt, wobei die letzte Ungleichung aus der Tatsache folgt, dass $u = (1/d, \ldots, 1/d)$ in der Richtung eines Durchmessers von C liegt. Die Zahl $n = [d^{1/2}q] + 1$ erfüllt die in Satz 11 geforderten Bedingungen.

LITERATUR

[1] H. G. EGGLESTON, B. GRÜNBAUM und V. L. KLEE, *Some semicontinuity theorems for convex polytopes and cell complexes*, Comment. Math. Helv. *39* (1964), 165–189.
[2] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes* (Wiley, 1967).
[3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Springer, Berlin 1957).
[4] H. HADWIGER, *Eckenkrümmung beliebiger kompakter euklidischer Polyeder und Charakteristik von Euler-Poincaré*, Enseignement math. *XV* (1969), 147–151.
[5] W. HÖHN, *Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex*, Ph. D. These, E. T. H. Zürich (1953).
[6] P. MANI, *On angle sums and Steiner points of polyhedra*, soll im Israel Journal of Math. erscheinen.
[7] M. A. PERLES und G. C. SHEPHARD, *Angle sums of convex polytopes*, Math. Scand. *21* (1967), 199–21.
[8] D. W. WALKUP and R. J.-B. WETS, *Lifting projections of convex polyhedra*, Math. Note 553, Boeing, April 1968.

University of Washington, Seattle

University College, London

Universität Bern.

Eingegangen den 24. Februar 1969