

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple.
Autor: Siebenthal, Jean de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33753>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple

Par JEAN DE SIEBENTHAL (Lausanne)

Magnificat anima mea Dominum

§ 1. Introduction

1. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple de rang l sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0, Λ le système des racines de \mathfrak{g} sur une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} , avec $\Lambda' = \Lambda - \{0\}$. Une suite fondamentale de Λ est une suite libre $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ de l racines telle que $\mu \in \Lambda$ implique $\mu = a_1 \varphi_1 + \dots + a_e \varphi_e$, les a_i étant des entiers rationnels, tous ≥ 0 ou bien tous ≤ 0 . Λ engendre un espace euclidien R^l identifié à son dual au moyen du produit scalaire usuel.

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ , c'est à dire tel que

$$\Lambda_0 = -\Lambda_0 \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0.$$

Une suite $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \Lambda$ est une Λ_0 -suite si $\mu_{i+1} - \mu_i \in \Lambda_0$ ($i=0, 1, \dots, k-1$); une partie A de Λ est dite Λ_0 -connexe, si pour toute paire $\gamma, \gamma' \in A$ il existe une Λ_0 -suite qui relie γ à γ' .

THÉORÈME: La partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ de Λ en classes mod Λ_0 vérifie:

a) Toute classe Λ_i est Λ_0 -connexe

b) Si $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$, il existe un entier k tel que $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$; de plus

b') $k \neq 0$ implique $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$
 $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$

b'') Pour tout i il existe un i' tel que

$$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

2. L'addition dans Λ définit dans $\Lambda | \Lambda_0$ une loi de composition commutative, associative, non partout définie, ayant un 0 noté Λ_0 , tout élément Λ_i ayant un opposé $\Lambda_{i'}$.

Le but du présent mémoire est l'étude de ces structures. On peut se ramener aux cas suivants:

3. Une suite fondamentale de Λ_0 fait partie d'une suite fondamentale de Λ .

C'est le cas des sous-systèmes fermés Λ_0 dits saturés: l'intersection du sous-espace $R(\Lambda_0)$ support de Λ_0 et de Λ coïncide avec Λ_0 .

Lorsque

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \subset \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_l\}$$

est l'inclusion de suites fondamentales ci-dessus, et si $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$ sont les classes de

$\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_l \bmod \Lambda_0$, alors la classe de

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \quad \text{est} \quad \bar{\mu} = \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i.$$

Désignant par R^{l-r} le supplémentaire orthogonal du support de Λ_0 , chaque classe Λ_i admet une projection orthogonale sur R^{l-r} réduite à un point: le centre de gravité de cette classe.

La loi $\Lambda \mid \Lambda_0$ est ici entièrement déterminée par les centres $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$ des classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s$.

4. *Le sous-système fermé Λ_0 est de rang maximal l .*

Ici, $R^{l-r} = \{0\}$, les centres des classes Λ_i sont tous en 0. Particulièrement intéressants sont ici les simplifiés de Λ , c'est à dire les sous-systèmes fermés Λ_0 minimaux de rang l , tous de type

$$A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_t} \quad s_1 + \dots + s_t = l.$$

Pour étudier $\Lambda \mid \Lambda_0$, on peut choisir dans le support R^l de Λ un système de générateurs

$$\tau_{1,1}, \dots, \tau_{1,s_1+1}; \dots; \quad \tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,s_t+1}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{s_i+1} \tau_{i,j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Les racines de Λ_0 sont toutes les différences $\tau_{im} - \tau_{im'}$; les autres éléments de Λ sont de l'un des types

$$\tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''.$$

Les $A_7 \subset E_7$, $A_8 \subset E_8$, $A_2 \subset G_2$ conduisent aux expressions connues.

Pour $A_2 + A_2 + A_2 \subset E_6$, on obtient, en prenant

$$\begin{array}{lll} \tau_1, \tau_2, \tau_3 & ; & \tau_4, \tau_5, \tau_6 & ; & \tau_7, \tau_8, \tau_9 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 & & \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 = 0 & & \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 = 0 \\ \alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, 3\} & & \beta, \beta', \dots \in \{4, 5, 6\} & & \gamma, \gamma', \dots \in \{7, 8, 9\} \end{array}$$

les expressions suivantes pour les racines de E_6

$$\begin{array}{l} \tau_\alpha - \tau_{\alpha'}; \quad \tau_\beta - \tau_{\beta'}; \quad \tau_\gamma - \tau_{\gamma'} \\ \pm (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma). \end{array} \quad (\text{racines de } \Lambda_0)$$

On a ici trois classes

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \{\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma\}, \quad \Lambda_{1'} = -\Lambda_1$$

et $\Lambda \mid \Lambda_0$ est un groupe cyclique d'ordre 3. On pourra constater ici, lorsque Λ est une structure exceptionnelle E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 que les $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toujours des lois de groupes, sauf dans le cas $E_8 \mid 8A_1$.

5. Cette théorie peut servir à l'étude:

a) des sous-algèbres réductives \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} qui correspondent aux systèmes fermés $\Lambda_0 \subset \Lambda$

b) des \mathfrak{g}_0 -modules en lesquels \mathfrak{g} se décompose suivant $\text{ad } \mathfrak{g}_0$: Λ tout $\mu \in \Lambda$ correspond dans \mathfrak{g} un sous-espace 1-dimensionnel $\mathbb{C}e_\mu$, avec

$$[h, e_\mu] = \mu(h) e_\mu \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

On a:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'} \mathbb{C}e_\mu \quad \text{où } e_0 = \mathfrak{h} \\ \mathfrak{g}_0 &= e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'_0} \mathbb{C}e_\mu. \end{aligned}$$

J'écris:

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbb{C}e_\alpha \quad \text{d'où}$$

$$1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s.$$

Les \mathfrak{g}_i sont des \mathfrak{g}_0 -modules, irréductibles si $i \neq 0$.

On peut avoir $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$; si ce n'est pas le cas, il existe un indice k tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$. Lorsque $k \neq 0$, on a: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$; $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_k$.

Enfin, pour tout i , il existe i' tel que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_{i'}] \subset \mathfrak{g}_0$.

La connaissance de la loi $\Lambda \mid \Lambda_0$ implique celle des sur-algèbres de \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g} , permet de trouver rapidement les sous-algèbres \mathfrak{g}_0 maximales (du type envisagé). Les sous-algèbres \mathfrak{g}_0 pour lesquelles 1) se réduit à

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{1'}, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{1'}] \subset \mathfrak{g}_0, \quad \text{ou} \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \end{aligned}$$

correspondent à certains espaces riemanniens symétriques.

6. Ce travail se rattache à [1] et à [2] chap II où sont étudiés principalement les systèmes fermés Λ_0 en eux-mêmes. Ici, la question est reprise dans son ensemble, en portant plutôt l'attention sur l'insertion de Λ_0 dans Λ . J'ai utilisé les listes données dans [1] ou [2]; celles qui figurent dans [4] permettront d'étudier le cas des sous-systèmes saturés des algèbres simples exceptionnelles, cas qui ne figure pas explicitement dans le § 5.

Plan

§ 1	<i>Introduction</i>	1
§ 2	<i>Partitions admissibles d'un Λ-système</i>	5
1	Notion de Λ -système	5
2	Λ -connexité dans un Λ -système	5
3	Sous-systèmes fermés Λ .	8
4	Partitions admissibles	9
§ 3	<i>Addition des classes modulo Λ_0</i>	10
§ 4	<i>Sous-systèmes saturés. Centre et caractères</i>	12
1	Sous-systèmes saturés	12
2	Suites fondamentales	12
3	Centre d'un sous-système	13
4	Structure du centre d'un sous-système saturé	14
5	Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$	15
§ 5	<i>Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est saturé</i>	16
1	Détermination pratique	16
2	Inclusions de suites fondamentales	16
3	Chambres de $\Lambda \mid \Lambda_0$	17
4	Racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$	18
5	Cas $\Lambda = A_l$	19–23
6	Cas $\Lambda = B_l$	
7	Cas $\Lambda = C_l$	
8	Cas $\Lambda = D_l$	
§ 6	<i>Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est de rang maximum</i>	23
1	Construction	23
2	Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ pour $\Lambda = A_l, B_l, C_l, D_l$	23
3	Sous-systèmes minimaux de rang l .	25
§ 7	<i>Sur certains produits de modules irréductibles</i>	39
1	Sous algèbre \mathfrak{g}_0 associée à un sous-système Λ_0 fermé	39
2	Somme directe associée à une partition.	40
3	Sur-algèbres réductives d'une algèbre \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g}	42
4	Sous-algèbres \mathfrak{g}_0 maximales	43
5	Sur-algèbres réductives d'une algèbre \mathfrak{g}_0 semi-simple.	44

§ 2. Partitions admissibles

2.1 Notion de Λ -système

Soit $\Lambda \subset R^l$ le système des vecteurs-racines d'une algèbre semi-simple \mathfrak{g} . On en déduit:

a) le système inverse

$$\Lambda^* = \{\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha), \forall \alpha \in \Lambda\}$$

b) la symétrie $S_\alpha: z \mapsto z - (\alpha^*, z)\alpha$, et le groupe de Weyl W , engendré par les $S_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda$.

c) la grille des poids

$$\gamma(\Lambda) = \{x \in R^l \mid (\alpha^*, x) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

On sait que $W\gamma(\Lambda) = \gamma(\Lambda)$. Si $x \in \gamma(\Lambda)$, on a

$$S_\alpha x = x + m\alpha \quad \text{où} \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \text{les} \quad x + k\alpha, \quad \text{où} \quad k \in]0, m[\cap \mathbb{Z}$$

sont alors les intermédiaires stricts.

DÉFINITION 2.1: J'appelle Λ -système toute partie Δ de R^l qui vérifie:

- 1) $\Delta \subset \gamma(\Lambda)$
- 2) $x \in \Delta \Rightarrow S_\alpha x \in \Delta, \quad \forall \alpha \in \Lambda$
- 3) $x \in \Delta, \quad S_\alpha x = x + m\alpha \Rightarrow x + k\alpha \in \Delta \quad \forall k \in \mathbb{Z} \cap]0, m[.$

Autrement dit, Δ est une partie de la grille des poids stables pour W et qui, avec deux éléments symétriques $x, S_\alpha x$ contient tous les intermédiaires $x + k\alpha, (k \in \mathbb{Z})$. Notons que

$$|S_\alpha x| = |x|, \quad |x + k\alpha| \leq |x|.$$

2.2 Λ -connexité dans un Λ -système

DÉFINITION 2.2: Soit Λ le système des racines d'une algèbre \mathfrak{g} semi-simple; soient

- 1) Δ un Λ -système
- 2) $A \subset \Delta$
- 3) $B \subset \Delta$

L'ensemble B est dit A -connexe si pour tout couple $(\mu, \mu') \in B \times B$, il existe une A -suite $\subset B$ qui relie μ à μ' , c'est à dire une suite

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_1, \dots, \quad \mu_k = \mu'$$

d'éléments de B telle que $\mu_{i+1} - \mu_i \in A, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. B est dit connexe s'il est Λ -connexe.

Cela posé, j'écris

$$\mu' \equiv \mu \pmod A \quad \text{lorsque} \quad \mu' = \mu + \sum n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

C'est une relation d'équivalence dans Δ , qui subit une partition en classes modulo le réseau engendré par A sur \mathbb{Z} ou en bref modulo A :

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s.$$

PROPOSITION 2.1: Soient Δ un Λ -système, $A \subset \Lambda$, avec $0 \in A$, $A = -A$, et

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$$

la partition de Δ en classes mod A . Chaque classe Δ_m est A -connexe.

Preuve: soient $\mu, \bar{\mu} \in \Delta_m$, avec

$$1) \quad \bar{\mu} = \mu + \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

Supposons d'abord

$$i) \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) > 0.$$

Je dis qu'il existe un indice j tel que $n_j \neq 0$ avec

$$\begin{aligned} \bar{\mu} - \alpha_j &\in \Delta & \text{si } n_j > 0 \\ \bar{\mu} + \alpha_j &\in \Delta & \text{si } n_j < 0. \end{aligned}$$

En effet, si cet indice n'existe pas,

- a) $n_j > 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$
- b) $n_j < 0$ implique $(\bar{\mu}, \alpha_j) \geq 0$, soit $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$.

Par exemple, avec a), $(\bar{\mu}, \alpha_j) > 0$ signifie

$$S_{\alpha_j} \bar{\mu} = \bar{\mu} - (\bar{\mu}, \alpha_j^*) \alpha_j \quad \text{et} \quad \bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta,$$

vu que Δ est un Λ -système.

Multipliant scalairement 1) par $\bar{\mu}$, il vient

$$(\bar{\mu}, \bar{\mu}) - (\bar{\mu}, \mu) = \sum n_i (\bar{\mu}, \alpha_i).$$

D'après i), le premier membre est strictement positif, tandis que d'après a) et b) le second membre est négatif. On n'échappe à la contradiction qu'en admettant l'existence de l'indice j .

Maintenant la condition

$$ii) \quad \bar{\mu} \neq \mu \quad \text{et} \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu}) \geq (\mu, \mu)$$

implique i), comme le montre un calcul élémentaire:

si

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}| &= 1, \quad |\mu| = r \leq 1 \\ \bar{\mu} &= (1, 0) \\ \mu &= (r \cos t, r \sin t) \end{aligned}$$

dans le plan euclidien, on a $(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) = 1 - r \cos t$.

Si $r < 1$, on a $1 - r \cos t > 0$, et si $r = 1$, alors $\cos t < 1$ vu que $\bar{\mu} \neq \mu$, d'où encore $1 - r \cos t > 0$.

Prenons maintenant dans Δ_m un μ' de carré scalaire minimum; pour tout $\delta_0 \neq \mu'$, $\delta_0 \in \Delta_m$, on a

$$\delta_0 = \mu' + \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in A$$

δ_0 et μ' vérifiant ii) satisfont à i): $(\delta_0, \delta_0 - \mu') > 0$.

On a vu qu'il existe alors dans Δ_m

$$\delta_1 = \delta_0 - \alpha_j = \mu' + \dots + (n_j - 1) \alpha_j + \dots \quad (n_j > 0)$$

ou

$$\delta_1 = \delta_0 + \alpha_j = \mu' + \dots + (n_j + 1) \alpha_j + \dots \quad (n_j < 0).$$

Soit

$$\Delta \ni \delta_1 = \mu' + \sum n_i' \alpha_i \quad \sum |n_i'| = \sum |n_i| - 1.$$

Si $\delta_1 \neq \mu'$, on recommence l'opération, ... Il se construit une A -suite

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k, \dots \subset \Delta$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_k &= \mu' + \sum n_i^{(k)} \alpha_i, \quad n_i^{(k)} \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in A \\ \sum |n_i^{(k)}| &= \sum |n_i^{(k-1)}| - 1. \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si pour un entier k , on a $\delta_k = \mu'$, alors la A -suite

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k = \mu' \quad \text{relie} \quad \delta_0 \text{ à } \mu'.$$

Cette circonstance se produit nécessairement puisque $\sum |n_i^{(k)}|$ décroît strictement. Ainsi, on peut relier μ et $\bar{\mu}$.

Ecrivons la suite obtenue:

$$\mu = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_u = \bar{\mu} \quad \tau_{i+1} - \tau_i \in A_0.$$

Par construction, on a, successivement $\Delta_m \ni \mu = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_u = \bar{\mu}$ ce qui prouve que Δ_m est A_0 -connexe.

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

PROPOSITION 2.2: Soient Δ un A -système, $\tau \in \Delta$, $\alpha, \beta \in A$, et $\tau' = \tau + \alpha + \beta \in \Delta$, où $\tau \neq \tau'$. Alors $\tau + \alpha \in \Delta$ ou $\tau + \beta \in \Delta$.

On utilise le raisonnement qui suit i) dans la preuve de la proposition 2.1.

Si $(\tau', \tau') \geq (\tau, \tau)$, alors, comme $\tau \neq \tau'$, il vient $(\tau', \tau') - (\tau', \tau) > 0$ d'où $\tau + \alpha \in \Delta$ ou $\tau + \beta \in \Delta$.

Si $(\tau, \tau') \leq (\tau, \tau)$, on a $(\tau, \tau) - (\tau', \tau) > 0$ et $\tau = \tau' - \alpha - \beta$ montre à nouveau que $\tau + \alpha \in \Delta$ ou $\tau + \beta \in \Delta$.

PROPOSITION 2.3: *Soit Λ un système de racines de rang 1; pour que $\{\mu_1, \dots, \mu_l\} \subset \Lambda$ soit une suite fondamentale de Λ , il faut et il suffit qu'on ait*

1) $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda \quad \forall i \neq j$ et

2) *Toute racine $\mu \in \Lambda$ est \mathbb{Z} -combinaison linéaire de μ_1, \dots, μ_l .*

Si m_1, \dots, m_l est une suite fondamentale, il est bien connu que 1) et 2) sont vérifiées.

Les conditions 1) et 2) sont suffisantes. En effet, les racines

$$\mu = \sum m_i \mu_i \in \Lambda \quad \text{ont un poids} \quad P(\mu) = \sum_{i=1}^l |m_i|.$$

Les racines de poids 2 sont par hypothèse de la forme $\pm(\mu_i + \mu_j)$ ($i \neq j$). Raisonnons par récurrence et soit β une racine de poids $p+1$; d'après la proposition 2.1, on peut écrire $\beta = \mu \pm \mu_i$ où μ est une racine de poids p , donc à coefficients tous ≥ 0 par exemple.

Si β a des coefficients tous ≥ 0 , il n'y a rien à démontrer; sinon $\beta = \mu - \mu_i$ avec

$$\mu = m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s, \quad m_j > 0, \quad j = 1, \dots, s \quad \text{et} \quad i \notin \{1, \dots, s\}.$$

Il existe un indice $j \leq s$, s par exemple, tel que

$$\mu - \mu_s = \alpha \in \Lambda, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \mu_s \in \Lambda, \quad \alpha + \mu_s - \mu_i \in \Lambda.$$

On a: $\beta = -\mu_i + \alpha + \mu_s$.

D'après la proposition 2.2, on a $-\mu_i + \alpha \in \Lambda$ ou bien $-\mu_i + \mu_s \in \Lambda$. Le second cas est exclu par hypothèse; $-\mu_i + \alpha$ est une racine de poids p à coefficients non tous ≥ 0 ; pour éviter la contradiction, il faut poser $\beta = \mu + \mu_i$, d'où la conclusion.

2.3 Sous-systèmes fermés

PROPOSITION 2.4: *Supposons $\Delta = \Lambda$, $A \subset \Lambda$ avec $A = -A$, $(A + A) \cap \Lambda \subset A$. Alors la classe Δ_0 des $\mu \equiv 0 \pmod{A}$ coïncide avec A .*

On a d'abord $A \subset \Delta_0$. Soit maintenant $\mu \in \Delta_0$:

$$\mu = \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

La proposition 2.1 affirme l'existence d'une A -suite qui relie 0 à μ : $0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k = \mu$.

On a:

$$\mu_1 - 0 = \mu_1 \in A$$

$$\mu_2 - \mu_1 \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_2 = \mu_1 + \alpha \in (A + A) \cap \Lambda, \quad \text{et} \quad \mu_2 \in A$$

.....

$$\mu_k - \mu_{k-1} \in A \quad \text{d'où} \quad \mu_k = \mu \in A.$$

Ainsi $\Delta_0 \subset A$ et $\Delta_0 = A$.

DÉFINITION 2.3: Toute partie Λ_0 de Λ qui vérifie $\Lambda_0 = -\Lambda_0$, $(\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ est appelée sous-système fermé de L .

COROLLAIRE (à la proposition 2.1): Soient Δ un Λ -système, Λ_0 un sous-système fermé de Λ , et $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$ la partition de Δ en classes mod Λ_0 . Chaque classe Δ_m est Λ_0 -connexe.

En particulier, si $\Delta = \Lambda$, ce dernier subit une partition en classes mod Λ_0

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

et chaque classe Λ_m est Λ_0 -connexe. Λ_0 est celle de ces classes qui contient 0.

2.4 Partitions admissibles d'un Λ -système

DÉFINITION 2.4: Soit Δ un Λ -système dans R^l , et D une partition $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$ de Δ . Le vecteur $\tau \rightarrow \tau'$ de R^l est dit vecteur de Δ si $\tau, \tau' \in \Delta$ et si $\tau' - \tau \in \Lambda$. Le vecteur $\tau \rightarrow \tau'$ est dit vecteur de D si c'est un vecteur de Δ et si $\tau \equiv \tau' \pmod{D}$.

DÉFINITION 2.5: La partition D du L -système Δ est dite admissible si

- 1) Tout vecteur de Δ équipollent à un vecteur de D est un vecteur de D et
- 2) Tout ensemble de la partition est connexe.

PROPOSITION 2.5: Soit Δ un Λ -système et D une partition de Δ . Pour que D soit la partition de Δ en classes modulo un sous-système fermé Λ_0 , il faut et il suffit que D soit une partition admissible.

a) Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ et $D: \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$ la partition de Δ en classes mod Λ_0 . Considérons pour commencer un vecteur $\tau \rightarrow \tau'$ de D ; On a: $\tau' = \tau + \alpha$, où $\alpha \in \Lambda$.

D'autre part, $\tau' \equiv \tau \pmod{\Lambda_0}$ implique $\tau' = \tau + \sum n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \Lambda_0$, d'où $\alpha = \sum n_i \alpha_i$, et comme Λ_0 est fermé, on a $\alpha \in \Lambda_0$.

Maintenant, si $\gamma \rightarrow \gamma'$ est un vecteur de Δ équipollent au vecteur $\tau \rightarrow \tau'$ de D , on a:

$$\gamma' = \gamma + \alpha, \quad \text{où } \alpha \in \Lambda_0,$$

soit: $\gamma' \equiv \gamma \pmod{\Lambda_0}$. $\gamma \rightarrow \gamma'$ est un vecteur de D .

D'après le corollaire à la proposition 2.1, chaque classe Δ_i est Λ_0 -connexe et la condition 2) de la définition 2.5 est satisfaite. D est une partition admissible.

b) Soit $D: \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$ une partition admissible de Δ , soit Λ_0 l'ensemble des $\alpha \in \Lambda$ tels qu'il existe $\tau, \tau' \in \Delta$ avec $\tau' \equiv \tau \pmod{D}$, $\tau' - \tau = \alpha$.

Je dis que Λ_0 est un sous-système fermé de Λ . On a d'après la définition: $\Lambda_0 = -\Lambda_0$, et $0 \in \Lambda_0$.

Soient $\alpha, \beta \in \Lambda_0$, avec $\alpha + \beta \in \Lambda - \{0\}$. Construisons le sous-espace R^h de R^l engendré par Δ . On a par hypothèse $\alpha, \beta \in R^h$, d'où $\alpha + \beta \in R^h$. Si, pour tout $\tau \in \Delta$, on a $(\alpha + \beta, \tau) = 0$, alors $(\alpha + \beta, R^h) = 0$ ($\alpha + \beta, \alpha + \beta$) = 0, ce qui est absurde.

Soit donc $\tau \in \Delta$ avec $(\alpha + \beta, \tau) \neq 0$. En prenant un intermédiaire entre τ et $S_{\alpha+\beta}\tau$, on obtient $\mu, \mu' \in \Delta$ avec $\mu' = \mu + \alpha + \beta$, $\mu \neq \mu'$.

D'après la proposition 2.2, on a par exemple $\mu + \alpha \in \Delta$, et le vecteur $\mu \rightarrow \mu + \alpha$ est équipollent à un vecteur de D , d'où $\mu \equiv \mu + \alpha \pmod{D}$; de même, $\mu + \alpha \rightarrow (\mu + \alpha) + \beta$ est un vecteur de D , et $\mu, \mu + \alpha, \mu + \alpha + \beta$ sont congrus mod D , ce qui prouve que $\alpha + \beta \in \Lambda_0$.

Il reste à prouver que D est la partition de Δ en classes mod Λ_0 . Supposons $x, y \in \Delta_m$; comme Δ_m est connexe, il existe une Λ_0 -chaîne qui relie x à y , d'où $y = x + \sum n_i \alpha_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \Lambda_0$. Réciproquement, si cette dernière relation a lieu entre $x, y \in \Delta$, il existe une Λ_0 -chaîne reliant x à y : $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$, avec $x_{i+1} - x_i \in \Lambda_0$, et $x_i \rightarrow x_{i+1}$ est un vecteur de D . De proche en proche:

$$x \in \Delta_m, \quad x_1 \in \Delta_m, \dots, x_k = y \in \Delta_m \quad \text{et} \quad x \equiv y \pmod{D}.$$

§ 3. Addition des classes de Δ modulo un sous-système fermé Λ_0

Soient

Δ le système des racines d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g}

Λ_0 un sous-système fermé de Δ , et

Δ un Δ -système.

Δ subit une partition en classes mod Λ_0 : $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$

chaque classe étant Λ_0 -connexe. Considérons deux classes Δ_i, Δ_j et formons $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta$; cette intersection peut être vide. Si ce n'est pas le cas, il existe un indice k tel que $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta \subset \Delta_k$. Il s'introduit ainsi une loi de composition entre classes mod Λ_0 , associative, commutative, non nécessairement partout définie.

Je me propose d'étudier cette loi dans le cas où $\Delta = \Lambda$; alors

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

où

$$\Lambda'_0 = \Lambda_0 - \{0\}, \quad \Lambda_0 = \{0, \pm \mu_{0_1}, \dots, \pm \mu_{0_{n_0}}\}, \quad \Lambda_m = \{\mu_{m_1}, \dots, \mu_{m_{n_m}}\}, \quad m \geq 1.$$

L'addition des classes de Λ mod Λ_0 est une loi de composition associative, commutative, non nécessairement partout définie, pourvue d'un zéro Λ_0 , chaque classe ayant une opposée. Nous voulons préciser ces diverses propriétés.

Supposons $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda$ non vide, contenue dans Λ_k et $0 \notin \{i, j, k\}$ distincts. Il existe des racines notées

$$\mu_{i_1}, \mu_{j_1}, \mu_{k_1} \quad \text{telles que} \quad \mu_{i_1} + \mu_{j_1} = \mu_{k_1}.$$

Prenons alors $\mu^* \in \Lambda_k$; comme Λ_k est Λ_0 -connexe, il existe une Λ_0 -suite qui relie μ_{k_1} à μ^* :

$$m_0 = \mu_{k_1}, \quad \mu_1, \dots, \mu_p = \mu^*.$$

Comme $0 \notin \Lambda_k$, aucune de ces racines n'est nulle; je dis que μ^* est somme d'un élément

de Λ_i et d'un élément de Λ_j ; l'affirmation est vraie pour μ_0 . Supposons qu'elle soit vraie pour μ_{z-1} . On a :

$$\mu_{z-1} = \mu_{is'} + \mu_{js''} \quad \mu_z = \mu_{is'} + \mu_{js''} + \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_0^*.$$

En appliquant la proposition 2.2, on a par exemple :

$$\mu_{is'} + \alpha \in \Lambda_i \quad \text{et} \quad \mu_z = (\mu_{is'} + \alpha) + \mu_{js''} \in (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda.$$

L'affirmation est établie. En résumé :

LEMME 3.1 : *Les hypothèses :*

$$0 \notin \{i, j, k\}, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$$

impliquent $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$.

Supposons maintenant $0=i$, $j \neq 0$, $j=k$.

On a : $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_j$.

Comme $0 \in \Lambda_0$, on a $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; précisons en faisant apparaître Λ'_0 :

a) si Λ_j n'a qu'un seul élément μ , alors

$$\mu \pm \alpha \notin L, \quad \forall \alpha \in L'_0, \quad \text{et} \quad (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap L = \Lambda_j = \{\mu\}$$

b) si Λ_j a deux éléments μ, μ' au moins, alors la conjonction

$$\mu \in \Lambda_j, \quad \mu \pm \alpha \notin \Lambda, \quad \forall \alpha \in \Lambda'_0$$

est impossible, vu que Λ_j est Λ_0 -connexe; il existe donc

$$\alpha \in L'_0 \quad \text{avec} \quad \mu + \alpha \in \Lambda_j, \quad \text{et} \quad \mu \in (\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda, \quad (\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j.$$

LEMME 3.2 : *On a, pour $j \neq 0$: $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$; si Λ_j a plus d'un élément, $(\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$.*

Supposons enfin $i \neq 0$, $\Lambda_i = \{\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{n_i}}\}$; alors $-\Lambda_i = \{-\mu_{i_1}, \dots, -\mu_{i_{n_i}}\}$ est une classe de $\Lambda \bmod \Lambda_0$, et il existe $i' \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$. On a :

$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$. Le cas où $i=i'$ n'est pas exclu. Ces résultats peuvent être rassemblés.

THÉORÈME 3.1 : *La partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ du système Λ en classes modulo le sous-système fermé Λ_0 a les propriétés suivantes :*

a) *toute classe Λ_m est Λ_0 -connexe*

b) *si $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$, il existe $k \leq s$ tel que $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cup \Lambda \subset \Lambda_k$; de plus*

b') *$k \neq 0$ implique $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$, $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$ avec $(\Lambda'_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$ si Λ_k a plus d'un élément.*

b'' *pour tout i , il existe un indice i' et un seul tel que $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$, ou $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$.*

L'ensemble quotient est ainsi pourvu d'une loi de composition, qui est précisée par le théorème.

Lorsque $\Lambda'_0 = \emptyset$, on retrouve Λ , chaque classe ayant un seul élément.

On peut adopter une notation abrégée, en écrivant autrement les relations du théorème:

$$\begin{aligned} (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset & \text{ devient } \Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \\ (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k & \text{ devient } \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k \\ (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j & \text{ devient } \Lambda_0 + \Lambda_j = \Lambda_j \\ (\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 & \text{ devient } \Lambda_i + \Lambda_{i'} = \Lambda_0. \end{aligned}$$

Lorsque $\Lambda'_0 = \emptyset$, $\Lambda_i = \{\mu_i\}$, on a toujours, pour $i \neq 0$: $2\Lambda_i = \emptyset$. Lorsque $\Lambda'_0 \neq \emptyset$, on peut avoir des classes $\Lambda_i, 2\Lambda_i, \dots, p\Lambda_i$ non vides, $(p+1)\Lambda_i = \emptyset$; p pouvant prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dans certains cas, on peut aussi obtenir:

$\Lambda_1, 2\Lambda_1, \dots, p\Lambda_1$ non vides, $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$, $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ formant un groupe cyclique.

§ 4. Sous-systèmes saturés. Centre et caractères

4.1

DÉFINITION 4.1: Soit Λ_0 un sous-système fermé du système Λ ; le saturé $\bar{\Lambda}_0$ de Λ_0 dans Λ est l'intersection du support R^r de Λ_0 et de Λ . C'est un sous-système fermé, qui vérifie $\bar{\Lambda}_0 = \bar{\Lambda}_0$. On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda$ lorsque Λ_0 est de rang 1.

DÉFINITION On dit que le sous-système fermé Λ_0^* de Λ est un simplifié de Λ_0 si Λ_0^* et Λ_0 ont même rang, si $\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$ et si Λ_0^* ne contient aucun sous-système fermé $\neq 0$ propre de même rang.

Tout sous-système fermé Λ_0 de Λ admet un saturé unique $\bar{\Lambda}_0$; il admet au moins un simplifié Λ_0^* . Tout simplifié est du type $A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_k}$, et tout sous-système fermé d'un simplifié est encore un simplifié.

PROPOSITION 4.1: Tout sous-système fermé Λ_0 de Λ est saturé dans un système de rang maximum.

Si μ_1, \dots, μ_r ($r < l$) est une base entière de Λ_0 , on prend $\mu_{r+1}, \dots, \mu_l \in \Lambda$ en sorte que μ_1, \dots, μ_l soient libres dans R^l . Les éléments de Λ qui sont des \mathbb{Z} -combinaisons linéaires de μ_1, \dots, μ_l forment un sous-système fermé Λ_0^* de rang l dans lequel Λ_0 est saturé.

4.2 Sous-systèmes saturés et suites fondamentales

PROPOSITION 4.2: Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ ; pour que Λ_0 soit saturé dans Λ , il faut et il suffit qu'il existe une suite fondamentale de Λ_0 contenue dans une suite fondamentale de Λ .

Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de Λ_0 , contenue dans la suite fondamentale $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ de Λ , alors, d'après la définition, Λ_0 est saturé dans Λ .

Réciproquement, supposons Λ_0 saturé dans Λ ; soient R^r le support de Λ_0 ($r < l$), R^{l-r} le supplémentaire orthogonal de R^r dans R^l .

Si $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin \Lambda_0$ on a $\lambda \notin R^r$; la restriction $\bar{\lambda}$ de λ à R^{l-r} n'est pas nulle; $\bar{\lambda} = 0$ définit un $(l-r-1)$ -plan de R^{l-r} , noté π_λ . La réunion de tous les π_λ est une partie F fermée de R^{l-r} .

Je désigne par $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ les composantes connexes du complémentaire de F dans R^{l-r} ; ces \mathcal{D}_1 sont ouverts, connexes, et même convexes: ce sont les chambres de $\Lambda \mid \Lambda_0$.

Soit $x \in \mathcal{D}$; une chambre de Weyl (ouverte) P_φ de Λ est dite adjacente à x si x est adhérent à $P_\varphi: x \in \bar{P}_\varphi$; si dans ce cas, $y \in P_\varphi$, le segment $u = (x, y)$ est dans \bar{P}_φ . Sur y , les racines $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ qui définissent P_φ sont toutes > 0 ; il en est de même en chaque point de u , sauf en x , où elles sont ≥ 0 . Avec de bonnes notations:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{r'}(x) = 0 \\ & \varphi_{r'+1}(x) > 0, \dots, \varphi_l(x) > 0. \end{aligned}$$

La forme φ_j ($j \leq r'$) étant nulle en un point x intérieur à \mathcal{D}_1 est, par définition de F , nulle sur R^{l-r} ; alors

$$\begin{aligned} & \varphi_j \in R^r \cap \Lambda, \quad \text{d'où} \\ & \varphi_1, \dots, \varphi_{r'} \in \Lambda_0. \end{aligned}$$

D'autre part, soit $\mu \in \Lambda_0$; on a

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \quad m_i \in \mathbf{Z}, \quad m_i \text{ nuls ou tous de même signe.}$$

Alors

$$0 = \mu(x) = m_{r'+1} \varphi_{r'+1}(x) + \dots + m_l \varphi_l(x)$$

et par a): $m_{r'+1} = \dots = m_l = 0$; il vient

$$\mu = m_1 \varphi_1 + \dots + m_{r'} \varphi_{r'}, \quad \text{et} \quad r' = r.$$

Ainsi $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ est une suite fondamentale de Λ_0 , contenue dans $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l\}$, qui est une suite fondamentale de Λ .

Par usage du groupe de Weyl de Λ_0 , on voit de plus que toute suite fondamentale de Λ_0 a aussi cette propriété.

COROLLAIRE: On obtient tous les sous-systèmes Λ_0 saturés dans Λ , en prenant une partie quelconque μ_1, \dots, μ_r d'une suite fondamentale $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ de Λ . Λ_0 est constitué par les \mathbf{Z} -combinaisons linéaires de μ_1, \dots, μ_r qui appartiennent à Λ .

4.3 Centre d'un sous-système

DÉFINITION 4.2: Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ .

$$\mathcal{Z}_0 = \{x \in R^l \mid (x, \Lambda_0) \subset \mathbf{Z}\}$$

est par définition le centre de Λ_0 dans R^l .

Le centre \mathcal{Z}_0 est un sous-groupe additif de R^l . A une inclusion de sous-systèmes fermés $\{0\} \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \dots \subset \Lambda$ correspond $R^l \supset \mathcal{Z}_0 \supset \mathcal{Z}_0^* \supset \dots \supset \mathcal{Z}$.

PROPOSITION 4.3: *Si Λ_0, Λ_0^* sont deux sous-systèmes fermés de Λ , distincts, alors les centres $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_0^*$ sont distincts.*

Soit μ_1, \dots, μ_r une base entière de Λ_0 , sous-tendant R^r ; prenons $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin \Lambda_0$. Il suffit de montrer qu'il existe un $v \in \mathcal{Z}_0$, avec $\lambda(v) \notin \mathbb{Z}$.

Deux cas se présentent:

$$a) \quad \lambda = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r \quad \text{avec} \quad m_1 \notin \mathbb{Z}.$$

Ici on prend $v \in R^r$, avec $\mu_1(v) = 1, \mu_2(v) = \dots = \mu_r(v) = 0$ alors $v \in \mathcal{Z}_0$, et $\lambda(v) = m_1 \notin \mathbb{Z}$.

$$b) \quad \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r \quad \text{sont linéairement indépendants.}$$

On prend $v \in R^l$ tel que $\lambda(v) = \frac{1}{2}, \mu_1(v) = \dots = \mu_r(v) = 0$.

PROPOSITION 4.4: *Toute forme linéaire sur R^l , entière sur le centre \mathcal{Z}_0 du sous-système fermé Λ_0 , est \mathbb{Z} -combinaison linéaire d'éléments de Λ_0 .*

Si ϱ est cette forme, elle s'annule sur le supplémentaire R^{l-r} du support R^r de Λ_0 . Si μ_1, \dots, μ_r est une base entière de Λ_0 , on a $\varrho = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r$. Il existe $v_1, \dots, v_r \in R^r$ avec $\mu_i(v_j) = \delta_{ij}$ (Symbole de Kronecker); ainsi $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{Z}_0$, $\varrho(v)_j = m_j \in \mathbb{Z}$ cqfd.

4.4 Structure du centre d'un sous-système saturé

PROPOSITION 4.5: *Soient Λ_0 un sous-système fermé de Λ , \mathcal{Z}_0 son centre, \mathcal{Z} celui de Λ . Pour que Λ_0 soit saturé dans Λ , il faut et il suffit que $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$ soit un tore.*

Supposons Λ_0 saturé; soit R^r son support, de supplémentaire R^{l-r} . Il suffit de prouver que toute classe de $\mathcal{Z}_0 \bmod R^{l-r}$ contient un élément de \mathcal{Z} .

Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ une suite fondamentale de Λ_0 contenue dans une suite fondamentale $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l\}$ de Λ .

Pour $v \in \mathcal{Z}_0$, on a

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{où} \quad v_1 \in R^r, \quad v_2 \in R^{l-r}, \quad \text{et} \\ \varphi_i(v) = \varphi_i(v_1) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ce qui prouve que $v_1 \in \mathcal{Z}_0$. Cherchons $u \in R^{l-r}$ en sorte que

$$\varphi_i(v + u) \in \mathbb{Z}, \quad v_1 = 1, 2, \dots, l$$

c'est à dire $v_1 + u \in \mathcal{Z}$. On a

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(v_1 + u) = \varphi_1(v_1) \in \mathbb{Z} \\ \varphi_r(v_1 + u) = \varphi_r(v_1) \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad \forall u \in R^{l-r}.$$

Posons $\varphi_i(v_1 + u) = 0 \quad i = r+1, \dots, l$, d'où $\varphi_i(u) = -\varphi_i(v_1)$.

On a un système de $l-r$ équations indépendantes pour $u \in R^{l-r}$; il y a une solution u_0 et une seule, et $v_1 + u_0 \in \mathcal{Z}$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}$ soit un tore, c'est à dire que chaque classe de $\mathcal{L}_0 \bmod R^{l-r}$ contienne un élément de \mathcal{L} .

Soit $v + R^{l-r}$ une classe de $\mathcal{L}_0 \bmod R^{l-r}$, où

$$v = v_1 + v_2 \in \mathcal{L}_0, \quad v_1 \in \mathcal{L}_0.$$

Il existe $x \in R^{l-r}$ avec $v_1 + x \in \mathcal{L}$.

Si μ_1, \dots, μ_r est une base entière de Λ_0 , et si

$$\mu = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r \in \bar{\Lambda}_0, \quad \text{on a}$$

$$\mu(v_1 + x) \in \mathbb{Z}, \quad m(v_1) \in \mathbb{Z}; \quad \text{ainsi}$$

$$\mu(v) \in \mathbb{Z}, \quad \forall v \in \mathcal{L}_0 \quad \text{et} \quad \mu \in \Lambda_0.$$

On a $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0$ cqfd.

REMARQUE 1: Lorsque Λ_0 n'est pas saturé, on a $\Lambda_0 \subset \bar{\Lambda}_0 \subset \Lambda$, d'où

$$\mathcal{L}_0 \supset \bar{\mathcal{L}}_0 \supset \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0 | \bar{\mathcal{L}}_0 \sim (\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}) / (\bar{\mathcal{L}}_0 | \mathcal{L}).$$

$\mathcal{L}_0 | \bar{\mathcal{L}}_0$ est un groupe fini, tandis que $\bar{\mathcal{L}}_0 | \mathcal{L}$ est un tore; ainsi

$\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}$ est une extension de ce tore par un groupe fini.

REMARQUE 2: Lorsque Λ_0 n'est pas saturé, on a encore Λ_0 saturé dans un Λ_0^* de rang maximal:

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \Lambda \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0 \supset \mathcal{L}_0^* \supset \mathcal{L} \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}_0 | \mathcal{L}_0^* \sim (\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}) / (\mathcal{L}_0^* | \mathcal{L}).$$

Le premier membre est un tore, tandis que $\mathcal{L}_0^* | \mathcal{L}$ est un groupe fini. $\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}$ contient ce groupe fini, avec un quotient toroïdal.

4.5 Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$

Soit Λ_0 un sous-système fermé du système Λ , et \mathcal{L}_0 son centre dans R^l ; soit

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en classes mod Λ_0 . Soit $\mu \in \Lambda$; je pose

$$\mu^* = (\mu | \mathcal{L}_0) \bmod 1.$$

C'est par définition le caractère de $\Lambda_0 \subset \Lambda$ associé à μ ; μ^* est une fonction définie sur $\mathcal{L}_0 | \mathcal{L}$, à valeurs dans $T = R/\mathbb{Z}$.

Si $\mu, \mu' \in \Lambda_i$, on a

$$\mu' = \mu + \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad \mu_1, \dots, \mu_r \quad \text{base entière de } \Lambda_0.$$

Sur \mathcal{L}_0 les μ_i sont entiers, d'où $\mu'^* = \mu^*$.

Réciproquement, si $\mu, \mu' \in \Lambda$ sont tels que $\mu^* = \mu'^*$, alors $\mu' - \mu$ est une forme linéaire

sur R^l entière sur \mathcal{Z}_0 ; d'après la proposition 2 de 4.3, on a

$$\mu' - \mu = \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z} \quad \text{d'où} \quad \mu, \mu' \in \Lambda_k.$$

Par ailleurs, si $\mu, \mu', \mu + \mu' \in \Lambda$, on a $(\mu + \mu')^* = \mu^* + \mu'^*$.

PROPOSITION 4.6: *La loi $\mu \rightarrow \mu^*$ détermine un isomorphisme de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sur l'ensemble des caractères de $\Lambda_0 \subset \Lambda$.*

Lorsque Λ_0 est saturé, chaque caractère est défini sur le tore T^{l-r} .

§ 5. Loi-quotient $\Lambda \mid \Lambda_0$ lorsque Λ_0 est saturé dans Λ

5.1 Détermination pratique de la loi-quotient

PROPOSITION 5.1: *Soit Λ_0 un sous-système saturé dans Λ ; pour que deux racines $\mu, \mu' \in \Lambda$ appartiennent à une même classe mod Λ_0 , il faut et il suffit que leurs restrictions $\bar{\mu}, \bar{\mu}'$ au supplémentaire orthogonal R^{l-r} du support de Λ_0 coïncident.*

Si $\mu, \mu' \in \Lambda_i$, $\mu' - \mu$ est une forme entière sur \mathcal{Z}_0 , entière sur R^{l-r} , donc nulle sur ce sous-espace.

Réciproquement, si $\bar{\mu} = \bar{\mu}'$, on a $\mu^* = \mu'^*$ sur le tore $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$, et μ, μ' sont dans une même classe mod Λ_0 .

Ainsi, on déduit $\Lambda \mid \Lambda_0$ de Λ en prenant les restrictions à R^{l-r} des $\mu \in \Lambda$. Pratiquement, si

$$\Lambda = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l, \dots, \sum_1^l m_i \varphi_i, \dots\}$$

il suffit de supprimer partout $\varphi_1, \dots, \varphi_r$

$$\Lambda \mid \Lambda_0 = \{\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l, \dots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \dots\}.$$

Les éléments de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont des \mathbf{Z} -combinaisons linéaires de $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$ à coefficients nuls ou tous de même signe.

5.2 Ensemble des inclusions de suites fondamentales correspondant à $\Lambda_0 \subset \Lambda$

PROPOSITION 5.2: *Soit Λ_0 un sous-système saturé dans Λ , $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ une suite fondamentale de Λ_0 et μ_1, \dots, μ_s s classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$. Pour qu'il existe $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) de façon que $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ soit une suite fondamentale de Λ , il faut et il suffit que*

1) *Pour tout couple (i, j) $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, s$: $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0$, et*

2) *$\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$ forment une base entière de $\Lambda \mid \Lambda_0$, ($s = l - r$).*

La condition est nécessaire: Si $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ est une suite fondamentale de Λ alors $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j$ n'est pas une classe vu que $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda$, et $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$ engendrent $\Lambda \mid \Lambda_0$ par combinaisons linéaires à coefficients entiers.

La condition est suffisante: soient $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$, $s = l - r$ classes vérifiant 1) et 2). Pre-

nons $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tel que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda, j=1, \dots, r$. On a par ailleurs $\mu_i - \mu_k \notin \Lambda (i \neq k)$, sinon $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_k$ serait une classe. Ainsi la différence des deux racines quelconques dans $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ n'est pas une racine.

Soit $\mu \in \Lambda$; on a par hypothèse $\bar{\mu} = m_1 \bar{\mu}_1 + \dots + m_s \bar{\mu}_s, m_i \in \mathbb{Z}$.

Alors $m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s$ est de la forme

$$\mu - \sum_1^r n_i \varphi_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \sum_1^r n_i \varphi_i + \sum_1^s m_i \mu_i.$$

Ainsi $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_{l-r}$ est une base entière de Λ telle que la différence de deux de ses éléments distincts quelconques ne soit pas dans Λ . D'après la proposition 2.3, $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_{l-r}$ est une suite fondamentale de Λ .

SCHOLIE: Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ une suite fondamentale du sous-système Λ_0 saturé dans Λ , et $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l$ une suite fondamentale de Λ contenant la précédente. On obtient toutes les suites fondamentales de Λ qui contiennent $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ en constituant la loi-quotient:

$$1) \quad \pm \bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \pm \bar{\varphi}_l, \dots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \dots$$

puis en déterminant les suites $\bar{\mu}_{r+1}, \dots, \bar{\mu}_l$ extraites de 1) telles que

$$a) \quad \bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0 \quad b) \quad \bar{\mu}_{r+1}, \dots, \bar{\mu}_l \text{ base entière de } \Lambda \mid \Lambda_0.$$

Les $\mu_i \in \bar{\mu}_i$ tels que $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda (j=1, 2, \dots, r)$ constituent avec $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ une telle suite fondamentale $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_l$ de Λ .

5.3 Caractérisation des domaines \mathcal{D}_i

PROPOSITION 5.3: Soit Λ_0 un sous-système saturé de Λ ; toute chambre \mathcal{D} de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est définie par des relations

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_r = 0, \quad \varphi_{r+1} > 0, \dots, \varphi_l > 0$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_l(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est une suite fondamentale de Λ resp. (Λ_0) .

Reprenons les notations de 4.2, avec $x \in \mathcal{D}_1$; on a

$$1) \quad \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0, \quad \varphi_{r+1}(x) > 0, \dots, \varphi_l(x) > 0.$$

Par définition de \mathcal{D}_1 , chaque racine de Λ est ou bien nulle sur \mathcal{D}_1 , ou bien garde un signe constant. Les relations 1) ont donc lieu pour tout $y \in \mathcal{D}_1$.

Réciproquement, soit $z \in R^l$ vérifiant

$$\varphi_1(z) = \dots = \varphi_r(z) = 0; \quad \varphi_{r+1}(z) > 0, \dots, \varphi_l(z) > 0.$$

On a d'abord $z \in R^{l-r}$; sur le segment (z, x) , la forme $\varphi_{r+j} (1 \leq j \leq l-r)$, qui est positive aux extrémités, est positive sur tout le segment; il en est de même de $\bar{\varphi}_{r+j}$

Toutes les formes $\bar{\lambda} \in \Lambda \mid \Lambda_0$ gardent alors un signe constant sur (z, x) , d'où $(z, x) \in D_1, z \in \mathcal{D}_1$.

Maintenant, si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$ est la base duale de $\varphi_1, \dots, \varphi_l$:

$$(\varepsilon_i, \varphi_j) = \delta_{ij}; \quad \text{on a} \\ z = \lambda_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \dots + \lambda_l \varepsilon_l$$

car R^{l-r} est engendré par $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$; $\varphi_\alpha(z) > 0 \alpha \in (r+1, \dots, l)$ s'écrit alors $\lambda_\alpha > 0$.

COROLLAIRE: $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$ étant la base duale de $\varphi_1, \dots, \varphi_l$, la chambre associée à cette suite dans R^{l-r} est le premier quadrant relatif au repère $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$ de R^{l-r} .

En écrivant

$$\bar{\varphi}_{r+j}(z) = (\bar{\varphi}_{r+j}, z), \quad \text{on obtient sans peine.}$$

PROPOSITION: $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$ est la base duale de $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$ dans R^{l-r} .

5.4 Λ -systèmes modulo un sous-système saturé

Soit Δ un Λ -système dans R^l , et Λ_0 un sous-système fermé de Λ ; soit R^{l-r} le supplémentaire orthogonal du support R^r de Λ_0 . Je me propose d'étudier ici la projection orthogonale $\bar{\Delta}$ de Δ sur R^{l-r} ; $\bar{\Delta}$ est le Λ -système Δ modulo Λ_0 .

Si $\Delta = \mathcal{S}$ est un système de racines secondaires de Λ , \mathcal{S} est dit système de racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Si $\Delta = \Lambda$, Λ est dit système de racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$. Cette étude est surtout intéressante lorsque Λ_0 est saturé.

PROPOSITION 5.4: Soit Δ un Λ -système dans R^l , Λ_0 un sous-système fermé de Λ et $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$ la partition de Δ modulo Λ_0 . Chaque face Δ_i se projette sur un point de R^{l-r} : le centre de cette face.

Soient $\mu, \mu' \in \Delta_i$; $\mu' - \mu$ étant dans R^r , μ et μ' ont même projection sur R^{l-r} , et Δ_i se projette sur $\sigma_i \in R^{l-r}$.

Soit maintenant

$$\sigma_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{\alpha \in \Delta_i} \alpha, \quad n_i \text{ nombre d'éléments dans } \Delta_i$$

le centre de Δ_i . Le groupe de Weyl W_0 associé à Λ_0 conserve Δ_i et conserve donc σ_i^* ; cela implique $\sigma_i^* \in R^{l-r}$.

Ainsi, σ_i^* est un point du support plan de Δ_i situé dans R^{l-r} , et on a vu que ce support se projette sur un point σ_i . On a $\sigma_i = \sigma_i^*$ cqfd.

COROLLAIRE: Si Λ_0 est de rang maximum 1, les centres des faces de la partition de Δ mod Λ_0 sont tous en 0.

Ici $R^{l-r} = \{0\}$.

PROPOSITION 5.5: Soit Δ un Λ -système connexe, et Λ_0 un sous-système saturé de rang

r de Λ . Dans la projection orthogonale $R^l \rightarrow R^{l-r}$, deux faces distinctes de Δ modulo Λ_0 ont pour image deux points distincts.

Soient $\tau, \tau' \in \Delta$ se projetant sur $\gamma \in R^{l-r}$.

On a :

$$1) \quad \tau' = \tau + \sum_1^r m_i \alpha_i$$

en supposant que $\alpha_1, \dots, \alpha_r (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_l)$ est une suite fondamentale de Λ_0 (resp. Λ).

Comme Δ est connexe, on peut écrire

$$\tau' = \tau + \sum b_i \beta_i, \quad b_i \in \mathbb{Z}, \quad \beta_i \in \Lambda$$

où

$$\beta_i = \sum_1^l b_{i,k} \alpha_k, \quad b_{i,k} \in \mathbb{Z}$$

d'où encore

$$\tau' - \tau = \sum_{i,k} b_i b_{i,k} \alpha_k = \sum b'_k \alpha_k, \quad b'_k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \tau' = \tau + \sum_1^l b'_k \alpha_k \quad b'_k \in \mathbb{Z}.$$

Comparant 1) et 2), on voit que m_1, \dots, m_r sont entiers, ce qui signifie que τ, τ' sont dans une même face Δ_i de $\Delta \bmod \Lambda_0$.

COROLLAIRE 1: Pour Δ connexe et Λ_0 saturé, les centres des faces de $\Delta \bmod \Lambda_0$ sont distincts.

COROLLAIRE 2: Lorsque Λ_0 est saturé, le système des racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\Delta \bmod \Lambda_0$.

COROLLAIRE 3: Soit \mathcal{S} un système de racines secondaires de Λ , et Λ_0 un sous-système saturé de Λ . Le système $\overline{\mathcal{S}}$ des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces de $\mathcal{S} \bmod \Lambda_0$.

5.5 Sous-systèmes saturés de A_l et loi-quotient

Pour étudier l'algèbre semi-simple A_l , on se sert du simplexe régulier fondamental

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(A_l) = \{\tau_1, \dots, \tau_{l+1}\}$$

où

$$\sum_1^{l+1} \tau_i = 0, \quad (\tau_i, \tau_i) = l/(l+1), \quad (\tau_i, \tau_j) = -1/(l+1).$$

Le système des racines de A_l est constitué par toutes les arêtes de \mathcal{S} .

Pour étudier un sous-système fermé quelconque de A_l (toujours saturé), on se sert

d'une partition

$$p_1 \cup \dots \cup p_{s+1} \quad \text{de} \quad 1, 2, \dots, l+1$$

où p_i a r_i éléments. Les faces de $\mathcal{S} \bmod \Lambda_0$ sont les $s+1$ ensembles

$$P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_i; i = 1, \dots, s+1\}.$$

Le polyèdre des racines secondaires de $\Lambda \mid \Lambda_0$ est constitué par les centres des faces P_i

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \left\{ \mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_{s+1} = \frac{1}{r_{s+1}} \sum_{\alpha \in p_{s+1}} \tau_\alpha \right\}.$$

Cela détermine les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ qui ne sont autres que les arêtes de $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$.

$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$ est un simplexe dans R^{l-r} , en général non régulier. Un calcul simple montre que $l-r=s$.

PROPOSITION 5.6: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes du simplexe constitué par les centres des faces de Λ_0 .*

5.6 Sous-systèmes saturés de B_l et loi-quotient

Si τ_1, \dots, τ_l est un repère orthonormal de R^l , on pose $\mathcal{S} = \mathcal{S}(B_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l, 0\}$ $2l+1$ points. Le système des racines de B_l est formé de toutes les arêtes de \mathcal{S} sauf les $\pm(\tau_i - (-\tau_i)) = \pm 2\tau_i$: on obtient:

$$\Lambda = \Lambda(B_l) = \{\pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j; i, j = 1, \dots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque Λ_0 , il suffit de se donner une partition de $\{1, 2, \dots, l\}$

$$(p_0) \cup p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_k, \quad p_0 \text{ éventuellement vide}$$

p_i ayant r_i éléments, $r_1, \dots, r_k > 0$, r_0 éventuellement nul. Les faces de Λ_0 sont alors

$$P_0 = \{0, \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\}, \quad P_1 = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \quad \dots \quad P_k = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}$$

$$P'_1 = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \quad \dots \quad P'_k = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

On a

$$\Lambda_0 = \text{ensemble de toutes les arêtes des } P_0, P_i, P'_i$$

sauf les $\pm(\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)) = \pm 2\tau_\alpha, \forall \alpha \in p_0$.

$$= \{\pm \tau_\alpha, \pm \tau_\alpha \pm \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_0\} \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_1\} \cup \dots \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_k\}.$$

Le rang de Λ_0 est ici

$$r_0 + (r-1) + \dots + (r_k-1) = \sum r_i - k = l - k = r$$

d'où $l-r=k$.

Le supplémentaire orthogonal $R^{l-r} = R^k$ du support R^r de Λ_0 est engendré par les

centres des faces de $\mathcal{S} \bmod \Lambda_0$:

$$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{0, \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\}; \mu_i = \frac{1}{r_i} \sum_{\alpha \in p_i} \tau_\alpha.$$

Notons que μ_1, \dots, μ_k est un repère orthogonal de R^{l-r} .

PROPOSITION 5.7: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont les arêtes de $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire toutes les expressions $\pm \mu_i$, $\pm \mu_i \pm \mu_j$ et de plus toutes les $\pm 2\mu_j$ pour lesquelles $r_j > 1$.*

Exemple:

$$\begin{aligned} p_0 &= \emptyset, & p_1 &= \{1\}, & p_2 &= \{2, 3, 4\} \\ P_0 &= \{0\} & P_1 &= \{\tau_1\} & P_2 &= \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\} \\ & & P'_1 &= \{-\tau_1\} & P'_2 &= \{-\tau_2, -\tau_3, -\tau_4\} \end{aligned}$$

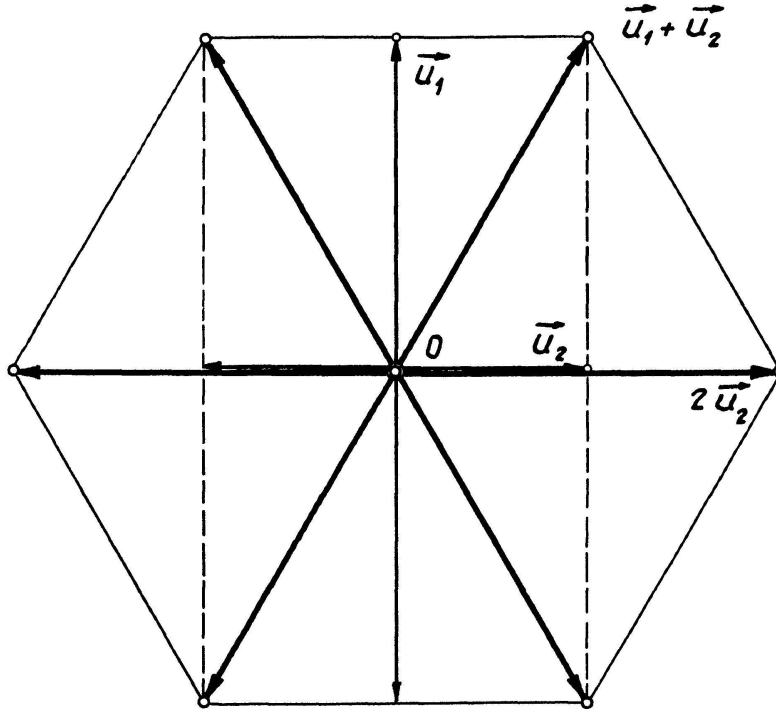
Λ_0 a pour racines: $\pm(\tau_2 - \tau_3)$, $\pm(\tau_3 - \tau_4)$, $\pm(\tau_2 - \tau_4)$ et est du type A_2 .

$\Lambda \mid \Lambda_0$ est déterminée par

$$0, \quad \mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = (\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/3$$

et admet les racines:

$$0, \pm \mu_1, \pm \mu_2, \pm \mu_1 \pm \mu_2, \pm 2\mu_2.$$



5.7 Sous-systèmes saturés de C_l et loi-quotient

Soit τ_1, \dots, τ_l un repère orthonormal de R^l , et

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\} \quad 2l \text{ points.}$$

Les racines de C_l sont toutes les arêtes de \mathcal{S} , sans exception:

$$\Lambda = \{ \pm \tau_i \pm \tau_j, \pm 2\tau_i \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, l \}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque, il suffit de se donner une partition $(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k$ p_i ayant r_i éléments, avec $r_0 \geq 0$; $r_1, \dots, r_k > 0$.

On en déduit une partition de \mathcal{S} :

$$(P_0) = \{ \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0 \} \quad \begin{array}{l} P_i = \{ \tau_\alpha \mid \alpha \in p_i \} \\ P'_i = \{ -\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i \} \end{array} \quad i = 1, \dots, k.$$

Les racines de Λ_0 sont toutes les arêtes de $(P_0), P_1, P'_1, \dots, P_k, P'_k$; le rang de Λ_0 est $l-k$, d'où $l-r=k$. Le supplémentaire R^k du support R^r de Λ_0 est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

et

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\} \quad (0 \text{ si } r_0 > 0).$$

PROPOSITION 5.8: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont toutes les arêtes de $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$, c'est à dire les $\pm \mu_i \pm \mu_j, \pm 2\mu_j$ avec en plus les $\pm \mu_j$ si $r_0 > 0$.*

5.8 Sous-systèmes saturés de D_l et loi-quotient

Soit τ_1, \dots, τ_l un repère orthonormal de R^l et

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(D_l) = \{ \pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l \} \quad 2l \text{ points.}$$

Les racines de D_l sont toutes les arêtes de \mathcal{S} , sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha) = 2\tau_\alpha$:

$$\Lambda = \{ \pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j; i, j = 1, \dots, l \}.$$

Pour constituer un sous-système saturé Λ_0 quelconque, on se donne une partition

$$(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k \quad \text{de } 1, 2, \dots, l$$

p_i ayant r_i éléments: $r_0 \geq 0$; $r_1, \dots, r_k > 0$. On en déduit une partition de \mathcal{S} :

$$(P_0) = \{ \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0 \} \quad \begin{array}{l} P_i = \{ \tau_\alpha \mid \alpha \in p_i \} \\ P'_i = \{ -\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i \} \end{array} \quad i = 1, \dots, k$$

P_0 étant vide si $p_0 = \emptyset$.

Les racines de Λ_0 sont toutes les arêtes des faces P_0, P_i, P'_i , sauf les $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)$, $\forall \alpha \in p_0$.

Le rang de Λ_0 est $l-k$. Ici $R^{l-r} = R^k$ est engendré par les centres:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha \\ \mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) &= \{(0), \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.9: *Les racines de $\Lambda \mid \Lambda_0$ sont les arêtes de $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$*

a) si $r_0 = 0$: $\pm m_i \pm m_j$, et les $2\mu_j$ où $r_j > 1$

b) si $r_0 > 0$: $\pm \mu_i \pm \mu_j$, $\pm \mu_j$, et les $\pm 2\mu_s$ où $r_s > 1$ ($i \neq j$; $i, j = 1, \dots, l$).

§ 6. Loi-quotient lorsque le sous-système Λ_0 est de rang maximum

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ ayant même rang l que L . Le but de ce paragraphe est de donner le principe de la construction de tous les tels Λ_0 contenus dans un système Λ donné.

Je me propose ensuite de donner la forme de la loi-quotient Λ/Λ_0 lorsque Λ est simple, classique (A_l, B_l, C_l, D_l).

Enfin, je crois utile d'étudier Λ/Λ_0 pour toutes les algèbres simples, le système Λ_0 étant minimal (de rang maximal l); il s'agit ici de l'étude des simplifiés de Λ . A tout simplifié de Λ , on peut associer un système de générateurs remarquables de R^l , permettant de donner à l'expression des racines une forme standard.

6.1 Principe de la construction

Soit:

$$1) \quad \varphi_1, \dots, \varphi_{l_1}; \varphi_{l_1+1}, \dots, \varphi_{l_2}; \dots; \varphi_{l_t+1}, \dots, \varphi_{l_{t+1}}$$

une suite fondamentale de Λ , chaque suite partielle correspondant à une composante simple de Λ . Je construis les racines dominantes, respectivement:

$$2) \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{t+1}$$

puis la suite

$$3) \quad \varphi_1 \cdots \varphi_{l_1}, -\omega_1; \varphi_{l_1+1}, \dots, \varphi_{l_2}, -\omega_2; \dots; \varphi_{l_t+1}, \dots, \varphi_{l_{t+1}}, -\omega_{t+1}.$$

En supprimant une racine quelconque dans chaque suite partielle de 3), on obtient une suite fondamentale d'un sous-système Λ_0 fermé de rang maximal.

On recommence sur la suite obtenue l'opération effectuée sur 1) etc, de toutes les façons possibles. Cela fournit tous les Λ_0 du type désiré, d'où possibilité d'étudier toutes les lois Λ/Λ_0 .

Par ailleurs, à chaque tel Λ_0 est associée une partition:

$$4) \quad \mathcal{S} = (\mathcal{S}_0) \cup \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_u$$

d'un système de racines secondaires \mathcal{S} de Λ . Les centres des faces \mathcal{S}_i sont tous en 0. En assimilant chaque \mathcal{S}_i à un élément, on peut déduire de 4) la forme de la loi-quotient.

6.2 Loi-quotient Λ/Λ_0 lorsque Λ est simple du type A_l, B_l, C_l, D_l

ALGÈBRE A_l : Tout sous-système Λ_0 de rang l coïncide avec Λ .

ALGÈBRE B_l : Soit

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(B_l) = \{0, \pm \tau_1, \pm \tau_2, \dots, \pm \tau_l\}$$

et

$$(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k$$

une partition de $1, 2, \dots, l$, p_i ayant r_i éléments, avec $r_0 \geq 0$, $r_1 > 0, \dots, r_k > 0$. Les faces de Λ_0 sont:

$$P_0 = \{0, \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in P_0\}, P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}$$

Λ_0 est de type

$$B_{r_0} \times D_{r_1} \times \dots \times D_{r_k}$$

avec les racines

$$\Lambda_0: \pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j; \pm \tau_i \pm \tau_j; \dots; \pm \tau_i \pm \tau_j, \begin{matrix} i, j \in p_0 \\ i \neq j \end{matrix}, \begin{matrix} i, j \in p_1 \\ i \neq j \end{matrix} \dots \begin{matrix} i, j \in p_k \\ i \neq j \end{matrix}.$$

Les classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$ sont les

$$\begin{aligned} \Lambda_{0i} &= \{\pm \tau_k, \pm \tau_k \pm \tau_j \mid k \in p_i; j \in p_0\} \\ \Lambda_{ij} &= \{\pm \tau_k \pm \tau_m \mid k \in p_i; m \in p_j\} \end{aligned}$$

et la loi-quotient s'exprime par

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{ij} &= \Lambda_0 & \Lambda_{mh} + \Lambda_{hr} &= \Lambda_{mr} \\ 2\Lambda_{0i} &= \Lambda_0 & \Lambda_{mh} + \Lambda_{h'r} &= 0 \end{aligned} \quad (m, h, h', r \text{ distincts})$$

où $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$.

ALGÈBRE C_l : ici

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\}$$

et on prend une partition

$$p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_k \quad (r_i \text{ éléments dans } p_i)$$

de $1, 2, \dots, l$. Les faces de Λ_0 sont toutes de centre 0.

$$P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Λ_0 est de type:

$$C_{r_1} \times \dots \times C_{r_k}.$$

Les classes mod Λ_0 sont les

$$\Lambda_{mh} = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \quad \Lambda_{mh} = \Lambda_{hm}$$

avec les règles de calcul

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{mh} &= \Lambda_0 & \Lambda_{mh} + \Lambda_{hr} &= \Lambda_{mr} \\ & & \Lambda_{mh} + \Lambda_{h'r} &= 0 \end{aligned} \quad (m, h, h', r, \text{ distincts}).$$

ALGÈBRE D_l :

$$\mathcal{S} = (D_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\}.$$

Si $p_1 \cup \dots \cup p_k$ est une partition de $1, 2, \dots, l$ où p_i a $r_i \geq 2$ éléments, on a les faces de Λ_0 :

$$P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Ici

$$\Lambda_0 = \{\pm \tau_i \pm \tau_j; \dots; \pm \tau_i \pm \tau_j\}, \quad \begin{matrix} i, j \in p_1 & \dots & i, j \in p_k \\ i \neq j & & i \neq j \end{matrix}$$

et

$$\Lambda_0 = D_{r_1} \times \dots \times D_{r_k}.$$

Les classes de $\Lambda \bmod \Lambda_0$ sont les

$$\Lambda_{mh} = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \quad L_{mh} = L_{hm}$$

avec les règles:

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{mh} &= \Lambda_0 & \Lambda_{mh} + \Lambda_{hr} &= \Lambda_{mr} \\ \Lambda_{mh} + \Lambda_{h'r} &= 0 & (m, h, h', r, \text{ distincts}). \end{aligned}$$

6.3 Sous-systèmes Λ_0 minimaux de rang maximal

6.3.1 SIMPLEXES DANS R^s

Prenons l'espace euclidien R^{s+1} pourvu d'un repère

1) $\varrho \tau'_1, \dots, \varrho \tau'_{s+1}$ où $\tau'_1, \dots, \tau'_{s+1}$ est orthonormal. Posons $\varepsilon = \tau'_1 + \dots + \tau'_{s+1}$ et soit R^s le s -plan orthogonal à ε . En projetant les vecteurs 1) orthogonalement sur R^s , on obtient

$$2) \quad \tau_1 = \varrho(\tau'_1 - \varepsilon/(s+1)), \dots, \tau_{s+1} = \varrho(\tau'_{s+1} - \varepsilon/(s+1)). \quad \varrho(\dots)$$

Les vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$ forment un système de générateurs remarquables de R^s ; on a:

- a) $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{s+1} = 0$
- b) si $\sum_{i=1}^{s+1} x_i = 0, \sum_{i=1}^{s+1} y_i = 0$, on a $\left(\sum_{i=1}^{s+1} x_i \tau_i, \sum_{i=1}^{s+1} y_i \tau_i \right) = \varrho^2 \sum_{i=1}^{s+1} x_i y_i$
- c) $(\tau_i, \tau_i) = \varrho^2 s/(s+1); \quad (\tau_i, \tau_j) = -\varrho^2/(s+1) (i \neq j)$
 $(\tau_i - \tau_j, \tau_i - \tau_j) = 2\varrho^2.$

Les vecteurs $\tau_i - \tau_j$ forment le système des vecteurs-racines d'une algèbre simple A_s , de longueur $\varrho\sqrt{2}$. Les vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$ sont alors un système de racines secondaires de A_s .

6.3.2 LES SOUS-SYSTÈMES Λ_0 DE RANG MAXIMUM l DANS Λ , minimaux de cette espèce, c'est à dire les simplifiés de Λ , sont tous du type $A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_q}$. Les vecteurs de Λ sont

- a) les racines des A_{s_1}, \dots, A_{s_q}
- b) certaines combinaisons linéaires rationnelles de ces racines.

Lorsque $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_{s+1}}$ est un système de racines secondaires de A_{s_i} , alors les racines du type a) s'écrivent:

$$\text{a) } \tau_{1m} - \tau_{1m'}; \dots; \tau_{qm} - \tau_{qm'} \quad (\text{racines de } A_0)$$

Les autres racines de A sont certaines combinaisons linéaires des τ_{ij} , toujours de l'une des formes

$$2\tau, \quad \tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''$$

comme nous allons nous en assurer. Ci-dessous, je démontre ce fait pour les systèmes simples A de l'un des types D_l, E_6, E_7, E_8 , en donnant les expressions correspondant à chaque $A_0 \subset A$; le fait annoncé est ensuite directement vérifié pour B_l, C_l, F_4, G_2 .

6.3.3 PRENONS:

$$A_0 = \{A_{s_1}, \dots, A_{s_q}\}$$

les racines de A_{s_j} étant les $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$; les vecteurs-racines ont ici tous la même longueur $\sqrt{2}$ et $\varrho = 1$.

On veut trouver tous les vecteurs du type

$$\omega = \sum_i x_{1i} \tau_{1i} + \dots + \sum_i x_{qi} \tau_{qi} \quad \text{où} \quad \sum_i x_{1i} = 0, \dots, \sum_i x_{qi} = 0$$

capables de former avec les $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$ un système de vecteurs-racines d'un A .

On a:

$$(\omega, \omega) = 2, \quad \frac{2(\tau_{1m} - \tau_{1m'}, \omega)}{(\omega, \omega)} \in \{0, \pm 1\}$$

d'où $x_{1m} - x_{1m'} \in \{0, \pm 1\}$. $x_{11} - x_{11}, x_{11} - x_{12}, x_{11} - x_{13}, \dots, x_{11} - x_{1s_1+1}$ sont des entiers, ce qui implique $x_{11} = u_{11}/(s_1 + 1)$, $u_{11} \in \mathbb{Z}$; de même $x_{ij} = u_{ij}/(s_i + 1)$, $u_{ij} \in \mathbb{Z}$.

$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, s_1+1}$ sont des entiers dont les différences deux à deux ne peuvent prendre que l'une des valeurs $0, s_1 + 1, -s_1 - 1$.

Ils se partagent en deux classes d'entiers égaux à $u_1, u_1 + s_1 + 1$ et

$$\omega = [u_1(\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) + (u_1 + s_1 + 1)(\tau_{1, r_1+1} + \dots + \tau_{1, s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \dots$$

En exprimant que $\sum x_{1i} = 0$, on obtient:

$$\omega = [(r_1 - s_1 - 1)(\tau_{11} + \dots + \tau_{1, r_1}) + r_1(\tau_{1, r_1+1} + \dots + \tau_{1, s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \dots$$

Tenons compte de $\sum \tau_{1i} = 0$:

$$\omega = -(\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) - \dots - (\tau_{q1} + \dots + \tau_{qr_q}).$$

Enfin, tenant compte encore de $\sum_i \tau_{ji} = 0$, on a:

$$\omega = \pm(\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) \pm \dots \pm (\tau_{q1} + \dots + \tau_{qr_q}); \quad 2r_j \leq s_j + 1.$$

Il reste à vérifier que $\sum r_j = 3$ ou 4. On peut, pour la racine ω considérée, remplacer certains systèmes $\tau_{i1}, \dots, \tau_{i, s_i+1}$ par les opposés, d'où

$$\begin{aligned}\omega &= (\tau_{11} + \dots + \tau_{1, r_1}) + \dots + (\tau_{q1} + \dots + \tau_{q, r_q}) \quad 2r_j \leq s_j + 1 \\ \omega &= -(\tau_{1, r_1+1} + \dots + \tau_{1, s_1+1}) - \dots - (\tau_{q, r_q+1} + \dots + \tau_{q, s_q+1}) \\ (\omega, \omega) &= \frac{r_1(s_1 + 1 - r_1)}{s_1 + 1} + \dots + \frac{r_q(s_q + 1 - r_q)}{s_q + 1} \\ (\omega, \omega) &= \sum r_j - \sum \frac{r_j^2}{s_j + 1}.\end{aligned}$$

En faisant usage de symétrie $S_{\tau_{i, m}} - \tau'_{i, m}$, on peut transformer les racines ω en

$$\omega' = (\tau_{1, r_1+1} + \dots + \tau_{1, 2r_1+1}) + \dots + (\tau_{q, r_q+1} + \dots + \tau_{q, 2r_q+1}).$$

On supprime les termes pour lesquels $r_j = 0$. Alors

$$\begin{aligned}(\omega, \omega') &= - \sum_j \frac{r_j^2}{s_j + 1} \\ (\omega, \omega) - (\omega, \omega') &= \sum r_j.\end{aligned}$$

Si $\omega' = -\omega$, on a

$$(\omega, \omega') = -(\omega, \omega) = -2 \quad \text{et} \quad \sum r_j = 4;$$

Si $\omega' \neq -\omega$, on a $(\omega, \omega') = -1$, et $\sum r_j = 3$.

Le fait annoncé est établi. Nous allons donner les expressions dans chaque cas.

6.3.4 SOUS-SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG MAXIMAL DES SYSTÈMES SIMPLES D_l, E_6, E_7, E_8

ALGÈBRE D_l : $\pm \tau_i \pm \tau_j$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, l$) étant les racines de D_l , on obtient tous les sous-systèmes désirés en prenant une solution (k, k') quelconque de l'équation

$$3k + 2k' = l \quad K, K' \text{ entiers } \geq 0$$

et une partition de $1, 2, \dots, l$ du type (k, k') notée:

$$11, 12, 13; 21, 22, 23; \dots; k1, k2, k3; 1'1, 1'2; \dots; k'1, k'2.$$

Les racines secondaires du sous-système minimal de type (K, K') sont alors:

$$\begin{cases} \mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \\ \mu_{p2} = \tau_{p1} - \mu_{p1} \\ \mu_{p3} = \tau_{p2} - \mu_{p1} \\ \mu_{p4} = \tau_{p3} - \mu_{p1} \\ p = 1, \dots, k \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\ \mu_{q'2} = -\mu_{q'1} \\ \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - \mu_{q'1} \\ \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - \mu_{q'1} \\ q' = 1, \dots, k' \end{cases}.$$

On en déduit les racines de D_l sous la forme:

$$\begin{array}{ll} \mu_{pi} - \mu_{pj}, \mu_{q'i} - \mu_{q'j} & (\text{système } A_0) \\ \mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} & K A_3 \times 2 K' A_1 \subset D_l. \\ \mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \\ \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} \neq 0 \end{array}$$

Notons ici que les racines secondaires de D_l : $\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l$ s'écrivent:

$$\mu_{pi} + \mu_{pj}, \quad \text{et} \quad \mu_{q'i} + \mu_{q'j}$$

cette dernière devant être $\neq 0$.

ALGÈBRE E_6 : Les racines sont $\tau_i - \tau_j, \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k), \pm \sum_i \tau_i$ (i, j, k distincts $\in \{1, 2, \dots, 6\}$) avec $-3\varepsilon = \sum \tau_i$. On peut poser:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = \tau_1 - \tau_2 & \varphi_4 = \tau_4 - \tau_5 \\ \varphi_2 = \tau_2 - \tau_3 & \varphi_5 = \tau_5 - \tau_6 \\ \varphi_3 = \tau_3 - \tau_4 & \varphi_6 = \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 \end{array} \quad (\text{suite fondamentale}).$$

La racine dominante est ici:

$$\begin{aligned} -3\varepsilon &= \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 \\ &\quad + 2\varphi_6 \end{aligned}$$

Par suppression de φ_3 dans la figure

$$\begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ 3\varepsilon \end{array}$$

on obtient une suite fondamentale d'un sous-système A_0 du type $3A_2$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad 3\varepsilon.$$

Posant:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_4 = -\tau_4 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_7 = -\varepsilon - \frac{2}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ \mu_2 = \tau_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_5 = -\tau_5 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_8 = -\varepsilon + \frac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ \mu_3 = \tau_3 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_6 = -\tau_6 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_9 = 2\varepsilon + \frac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \end{array}$$

puis $\alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, 3\}$ $\beta, \beta', \dots \in \{4, 5, 6\}$ $\gamma, \gamma', \dots \in \{7, 8, 9\}$,

on peut écrire ainsi les racines de E_6

$$\begin{array}{c} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \end{array} \quad 3A_2 \subset E_6.$$

$E_6/3A_2$ est cyclique d'ordre 3.

Notons que les racines secondaires $-\tau_i + \varepsilon, -\tau_i - 2\varepsilon, \tau_i + \tau_j + \varepsilon$ deviennent:

$$\mu_\beta - \mu_\gamma; \quad \mu_\gamma - \mu_\alpha; \quad \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Par suppression de φ_6 , on obtient une suite fondamentale de $A_5 + A_1 \subset E_6$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad -3\varepsilon.$$

D'où les racines secondaires de $A_5 + A_1$:

$$\mu_i = \tau_i + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad \mu_7 = 3\varepsilon/2, \quad \mu_8 = -3\varepsilon/2.$$

Posant $\alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, \dots, 6\}; \beta, \beta', \dots \in \{7, 8\}$ on écrit les racines de E_6 :

$$\begin{array}{c} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} + \mu_{\alpha''} + \mu_\beta \end{array} \quad A_5 + A_1 \subset E_6.$$

$E_6/(A_5 + A_1)$ est cyclique d'ordre 2.

ALGÈBRE E_7 : Les racines sont $\tau_i - \tau_j, \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m$ où i, j, k, m sont distincts, arbitraires dans $\{1, \dots, 8\}$ avec $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_8 = 0$. On peut poser

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 & \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 & \varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4 & \varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \\ \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 & \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 & \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4. \end{array}$$

La racine dominante est ici:

$$\omega = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 3\varphi_5 + 2\varphi_6 + 2\varphi_7 = \tau_7 - \tau_8.$$

Dans la figure $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7, -\omega$, on peut procéder par suppression de divers éléments.

$A_7 \subset E_7$ est obtenue par suppression de φ_7 , d'où la suite simple

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \dots, \quad -\tau_7 + \tau_8.$$

Les racines de E_7 correspondant à $A_7 \subset E_7$ sont ici précisément les expressions déjà données

$$\begin{array}{ll} \tau_i - \tau_j & i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, 8\} \\ \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m & i, j, k, m \text{ distincts} \in \{1, 2, \dots, 8\} \end{array}$$

les racines secondaires sont les $\pm(\tau_i + \tau_j)$.

E_7/A_7 est cyclique d'ordre 2.

Par suppression de φ_3 , on obtient:

$$A_2 + A_5 \subset E_7$$

$$\varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 \quad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 \quad \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$$

$$\varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \quad \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 \quad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 \quad -\omega = -\tau_7 + \tau_8$$

d'où:

$$\mu_1 = -\tau_1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_2 = -\tau_2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_3 = -\tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_4 = -2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_5 = \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_6 = \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_7 = \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \quad \mu_8 = \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

$$\mu_9 = \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$$

Si $\alpha, \alpha', \dots, \in \{1, 2, 3\}$, $\beta, \beta', \dots, \in \{4, 5, \dots, 9\}$,
les racines de E_7 s'écrivent

$$\begin{aligned} &\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ &\pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) \end{aligned} \quad A_2 + A_5 \subset E_7.$$

$E_7/(A_2 + A_5)$ est cyclique d'ordre 3.

Par suppression de φ_2 , on obtient un $A_1 + D_6$, qui fournit $A_1 + 2A_3$ et un $7A_1$

$$A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

La suite fondamentale est

$$-\tau_1 + \tau_2; \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_4 + \tau_5, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4;$$

$$\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_6 + \tau_7, \quad -\tau_7 + \tau_8$$

d'où les racines secondaires de $A_1 + 2A_3$:

$$\mu_1 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1$$

$$\mu_2 = (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2$$

$$\mu_3 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_4 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_5 = (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_6 = -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - 3(\tau_1 + \tau_2)/4$$

$$\mu_7 = (\tau_1 + \tau_2)/4 - (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2$$

$$\mu_8 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_6$$

$$\mu_9 = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_7$$

$$\mu_{10} = (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_8.$$

Les racines de E_7 s'écrivent alors, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4, 5, 6\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{7, 8, 9, 10\}$$

$$\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

$$\pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma)$$

$$\mu_\beta + \mu_{\beta'} + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}$$

La loi $E_7/(A_1 + 2A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$$

$7A_1 \subset E_7$ La suite fondamentale est

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_7 + \tau_8;$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6, \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6$$

d'où les racines secondaires de $7A_1$:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_2 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_3 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_4 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_5 &= \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_6 &= \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 \\ \mu_7 &= \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2 & \mu_8 &= \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_{10} &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_{11} &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6)/2 \\ \mu_{13} &= (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_{14} &= -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/2 \end{aligned}$$

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\}$$

$$\varepsilon, \varepsilon' \in \{9, 10\}; \quad \tau, \tau' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}.$$

Les racines de E_7 prennent la forme

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \quad 7A_1 \subset E_7. \\ \mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'}; \quad \mu_\tau - \mu_{\tau'}; \quad \mu_\nu - \mu_{\nu'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu \\ \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu \\ \mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\tau \\ \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\tau \\ \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\tau + \mu_\nu \\ \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\nu \end{aligned}$$

$E_7/7A_1$ est un groupe, produit direct des trois sous-groupes

$$\begin{aligned} \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta\} \\ \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu\} \\ \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu\}. \end{aligned}$$

ALGÈBRE E_8 : On prend τ_1, \dots, τ_9 dans R^8 avec $\sum \tau_i = 0$;

Les racines sont:

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm (\tau_i + \tau_j + \tau_k) \quad i, j, k \text{ distincts} \\ i, j, k \in \{1, 2, \dots, 9\}.$$

Une suite fondamentale est

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_2 - \tau_3 & \varphi_4 &= \tau_5 - \tau_6 & \varphi_7 &= \tau_8 - \tau_9 \\ \varphi_2 &= \tau_3 - \tau_4 & \varphi_5 &= \tau_6 - \tau_7 & \varphi_8 &= \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \\ \varphi_3 &= \tau_4 - \tau_5 & \varphi_6 &= \tau_7 - \tau_8 \end{aligned}$$

avec la racine dominante:

$$= 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 + 5\varphi_4 + 6\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_7 + 3\varphi_8 = -\tau_1 + \tau_2$$

d'où la figure initiale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \\ \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9.$$

En appliquant le processus connu, on obtient les sous-systèmes simplifiés Λ_0 et les Λ/Λ_0 . On constate que deux sous-systèmes Λ_0 de même type sont conjugués.

$$2A_1 + 2A_3 \subset E_8$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 & \mu_3 &= (\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_2 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 & \mu_4 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_5 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_9 &= (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 + 3\tau_9/4 \\ \mu_6 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{10} &= \tau_6 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{11} &= \tau_7 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 + 3\tau_9/4 & \mu_{12} &= \tau_8 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4. \end{aligned}$$

Posons

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma', \dots, \in \{5, 6, 7, 8\} \\ \delta, \delta', \dots, \in \{9, 10, 11, 12\}.$$

Les racines de E_8 s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \quad \text{racines de } \Lambda_0. \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} \quad \pm (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta) \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_{\delta'} \quad \pm (\mu_\beta + \mu_\gamma - \mu_\delta) \\ \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'} \end{aligned}$$

$E_8/(2A_1 + 2A_3)$ a huit classes qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes :

$$\{\Lambda_0, (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta), (\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'}), (-\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta)\} \\ \{\Lambda_0, (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})\}.$$

Le premier est cyclique d'ordre 4.

$$A_1 + A_2 + A_5 \subset E_8$$

La suite fondamentale :

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9;$$

$$\tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

conduit aux expressions :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 & \mu_3 &= (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_8 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_2 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 & \mu_4 &= (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_9 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ & & \mu_5 &= -2(\tau_1 + \tau_2)/3 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_6 &= (\tau_1 + \tau_2)/6 + \tau_3 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_6 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_7 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_4 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_{10} &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_7 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_5 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_{11} &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - 2(\tau_8 + \tau_9)/3. \end{aligned}$$

Avec $\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}$; $\beta, \beta', \dots \in \{3, 4, 5\}$; $\gamma, \gamma', \dots \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ les racines de E_8 sont :

$$\begin{aligned} &\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } \Lambda_0. \\ &\pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \\ &\pm (-\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) \\ &\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} \end{aligned}$$

$E_8/(A_1 + A_2 + A_5)$ est cyclique d'ordre 6, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma.$$

$$A_1 + A_7 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2; \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9$$

conduit à :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 & \mu_3 &= \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_2 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 & \mu_4 &= \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_5 &= \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_8 &= \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_6 &= \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_9 &= \tau_9 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_7 &= \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_{10} &= -3(\tau_1 + \tau_2)/4 \end{aligned}$$

On pose :

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \gamma, \gamma', \dots, \in \{3, 4, \dots, 10\}.$$

Les racines de E_8 s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} &\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } A_0. \\ &\pm (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) \\ &\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} + \mu_{\gamma'''} \end{aligned}$$

$E_8/(A_1 + A_7)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}.$$

$$4A_2 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6;$$

$$\tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9$$

donne

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_1 & \mu_4 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_4 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_2 & \mu_5 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_5 \\ \mu_3 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_3 & \mu_6 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_6 \\ \mu_7 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_7 & \mu_{10} &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 - (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 \\ \mu_8 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_8 & \mu_{11} &= (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_9 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_9 & \mu_{12} &= (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 - (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \alpha, \alpha', \dots &\in \{1, 2, 3\}; & \beta, \beta', \dots &\in \{4, 5, 6\} \\ \gamma, \gamma', \dots &\in \{7, 8, 9\}; & \delta, \delta', \dots &\in \{10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Les racines de E_8 s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \quad \text{racines de } A_0 \\ &\pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \\ &\pm (\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta) \\ &\pm (\mu_\alpha - \mu_\beta + \mu_\delta) \\ &\pm (\mu_\beta - \mu_\gamma + \mu_\delta) \end{aligned} \quad 4A_2 \subset E_8.$$

$E_8/4A_2$ est un groupe d'ordre 9, produit direct des sous-groupes (cycliques d'ordre 3)

$$\begin{aligned} &\{A_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma, -\mu_\alpha - \mu_\beta - \mu_\gamma\} \\ &\{A_0, \mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta, -\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta\}. \end{aligned}$$

$$2A_4 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit à

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_6 &= -3(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 \\ \mu_2 &= \tau_2 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_7 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_6 \\ \mu_3 &= \tau_3 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_8 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_7 \\ \mu_4 &= \tau_4 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_9 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_8 \\ \mu_5 &= \tau_5 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_{10} &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_9 \\ \alpha, \alpha', \dots &\in \{1, 2, \dots, 5\}; & \beta, \beta', \dots &\in \{6, 7, \dots, 10\} \end{aligned}$$

et les racines de E_8 sont

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} & \quad \text{racines de } A_0 \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta) & \quad 2A_4 \subset E_8. \end{aligned}$$

$E_8/2A_4$ est un groupe cyclique d'ordre 5.

$$A_8 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \dots, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit aux expressions connues:

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_j & \\ \pm (\tau_i + \tau_j + \tau_k) & \quad \text{racines de } A_0. \end{aligned}$$

E_8/A_8 est un groupe cyclique d'ordre 3.

$$8A_1 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9; \quad \tau_3 - \tau_4; \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_9; \\ \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_5 + \tau_6 + \tau_9; \quad \tau_7 - \tau_8; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \end{aligned}$$

conduit aux expressions

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_2 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_5 &= \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_7 &= \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_6 &= \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_8 &= \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{11} &= (\tau_3 + \tau_4)/2 + (\tau_9)/2 \\ \mu_{10} &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 - (\tau_9)/2 \\ \mu_{13} &= (\tau_5 + \tau_6)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{15} &= (\tau_7 + \tau_8)/2 + (\tau_9)/2 \\ \mu_{14} &= -(\tau_5 + \tau_6)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{16} &= -(\tau_7 + \tau_8)/2 - (\tau_9)/2. \end{aligned}$$

Les racines de E_8 s'écrivent, avec

$$\begin{aligned} \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\} \\ \lambda, \lambda' \in \{9, 10\}; \quad \mu, \mu' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}; \quad \varrho, \varrho' \in \{15, 16\} \end{aligned}$$

$$\mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'} \quad \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \varrho\} \quad \varepsilon' = -\varepsilon$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho \quad \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\nu \quad \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\varrho$$

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\mu \quad \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\nu + \mu_\varrho$$

$$\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\lambda \quad \mu_\alpha + \mu_\mu + \mu_\nu + \mu_\varrho$$

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\mu \quad \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\nu + \mu_\varrho$$

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\nu \quad \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\mu + \mu_\varrho$$

$$\mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\varrho \quad \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\mu + \mu_\nu$$

$$8A_1 \subset E_8.$$

$E_8/8A_1$ n'est pas un groupe, car

$$(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho) + (\mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu)$$

n'est pas définie.

6.3.5 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG MAXIMAL DES SYSTÈMES SIMPLES B_l, C_l, F_4

ALGÈBRE B_l : Si $\pm\tau_i, \pm\tau_i \pm \tau_j$ sont les racines de B_l , on a des sous-algèbres semi-simples minimales de rang l de deux types:

a) (k, k') solution de $3k + 2k' = l$

b) (k, k') solution de $3k + 2k' = l - 1$.

Dans le premier cas, on a un sous-système $kA_3 + k'2A_1 = kD_3 + k'D_2$, comme en 6.3.4 pour D_l ;

les racines secondaires sont:

$$\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2$$

$$\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2$$

$$\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2$$

$$\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2$$

$$p = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

$$\mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

$$\mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

$$\mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2$$

$$q' = 1, 2, \dots, k'.$$

Les racines de B_l s'écrivent:

$$\mu_{pi} - \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} - \mu_{q'j}$$

$$i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad \text{ou} \quad i, j \in \{3, 4\}$$

$$\mu_{pi} + \mu_{pj} \quad i \neq j; \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$p = 1, 2, \dots, k$$

racines de $kD_3 + k'D_2$

type $\pm\tau_{p1}, \pm\tau_{p2}, \pm\tau_{p3}$

$$\begin{array}{ll}
\mu_{q'i} + \mu_{q'j} & i \neq j \quad \text{type } \pm \tau_{q'1}, \pm \tau_{q'2} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} & i \neq j \quad \text{type } \pm \tau_{pi} \pm \tau_{rj} \\
& m \neq n \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \text{type } \pm \tau_{pi} \pm \tau_{r'j} \\
\mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \text{type } \pm \tau_{q'i} \pm \tau_{r'j}.
\end{array}$$

On a la classe A_0 et $k+k'$ classes génératrices

$$A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{k+k'} \quad A_p = \{\mu_{pi} + \mu_{pj}\}, \quad A_{q'} = \{\mu_{q'i} + \mu_{q'j}\}$$

Dans le deuxième cas, on a un sous-système

$kD_3 + k'D_2 + B_1$, avec les racines secondaires:

$$\begin{array}{lll}
\mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''1} = \tau_l/2 \\
\mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''2} = -\tau_l/2 \\
\mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \\
\mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 &
\end{array}$$

Les racines de B_l sont

$$\begin{array}{ll}
\mu_{pi} - \mu_{pj}; & \mu_{q'i} - \mu_{q'j}; \quad \mu_{r''1} - \mu_{r''2} = \pm 2\mu_{r''1} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj}; & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} & \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + 2\mu_{r''m} \\
\mu_{pi} + \mu_{pj} + 2\mu_{r''m} &
\end{array}$$

ALGÈBRE C_l : Il y a un seul sous-système semi-simple minimal de rang l : $lA_1 \subset C_l$. Les racines étant:

$$\pm 2\tau_i, \quad \pm \tau_i \pm \tau_j$$

on prend $2l$ vecteurs:

$$\mu_1, \mu_2; \mu_3, \mu_4; \dots; \mu_{2l-1}, \mu_{2l} \quad \text{où} \quad \mu_{2p-1} = \tau_p \\
\mu_{2p} = -\tau_p.$$

Les racines de C_l sont les

$$\begin{array}{ll}
\mu_\alpha - \mu_{\alpha'} & \alpha, \alpha' \in \{2p-1, 2p\} \quad \text{racines de } A_0. \\
\mu_\alpha + \mu_\beta &
\end{array}$$

ALGÈBRE F_4 : Les racines étant: $\pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j; \frac{1}{2}(\pm \tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \tau_4)$ où $i \neq j; i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a une suite fondamentale complétée

$$\tau_1, \quad \frac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4), \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4.$$

On en déduit

$$\begin{array}{c}
4A_1 \subset F_4 \\
-\tau_1 + \tau_2, \quad +\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad \tau_3 + \tau_4
\end{array}$$

d'où les racines secondaires de $4A_1$:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_5 &= (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_6 &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_8 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2.\end{aligned}$$

Les racines de F_4 s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\beta + \mu_\gamma, \quad \mu_\alpha + \mu_\gamma \\ \mu_\beta + \mu_\delta, \quad \mu_\alpha + \mu_\delta, \quad \mu_\gamma + \mu_\delta \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta.\end{aligned}$$

Il y a 8 classes, toutes d'ordre 2 (sauf la classe nulle A_0), qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes

$$\{A_0, \mu_\alpha + \mu_\beta\}, \quad \{A_0, \mu_\gamma + \mu_\delta\}, \quad \{A_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma\}.$$

$$A_1 + A_3 \subset F_4$$

La suite fondamentale est:

$$\frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}; \quad \tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $A_1 + A_3$:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_4)/4 - (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_4 &= -\tau_2 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_5 &= -\tau_3 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_6 &= \tau_4 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4.\end{aligned}$$

Les racines de F_4 s'écrivent:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \quad \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, \dots, 6\}. \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'} \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} \end{array} \right.\end{aligned}$$

$F_4/(A_1 + A_3)$ est cyclique d'ordre 4, avec le générateur $\mu_\alpha + \mu_\beta$.

$$2A_2 \subset F_4$$

La suite fondamentale est:

$$\tau_1, \quad \frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de $2A_2$:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_4 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_2 - \tau_4/3 \\ \mu_2 &= -\tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_5 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_3 - \tau_4/3 \\ \mu_3 &= 2\tau_4/6 - 2(\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_6 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 + 2\tau_4/3.\end{aligned}$$

Les racines de F_4 ont pour expressions:

$$\begin{array}{ll}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta & \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{racines de } A_0 \\ \alpha, \alpha' = 1, 2, 3 \\ \beta, \beta' = 4, 5, 6.\end{array}$$

$F_4/2A_2$ est un groupe cyclique d'ordre 3.

6.3.6 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG 2 DANS G_2

Les racines sont: $\pm \tau_i, \tau_i - \tau_j$, avec $i, j \in \{1, 2, 3\}, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Une suite fondamentale complétée est:

$$\begin{aligned}\tau_1, & \quad -\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3 \quad \text{dont on tire} \\ & \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_1 + \tau_2: A_2 \subset G_2\end{aligned}$$

avec les racines secondaires:

$$\mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = \tau_2, \quad \mu_3 = \tau_3.$$

Les racines de G_2 sont ici:

$$\mu_i - \mu_j \quad \text{et} \quad \pm \mu_i$$

G_2/A_2 est cyclique d'ordre 3.

On obtient aussi:

$$-\tau_2 + \tau_3, \tau_1 \quad A_1 + A_1 \subset G_2$$

d'où les racines secondaires

$$\mu_1 = \tau_2 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_3 = \tau_1/2 \quad \mu_2 = \tau_3 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_4 = -\tau_1/2$$

et les racines de G_2

$$\begin{array}{ll}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta, & \mu_\alpha + 3\mu_\beta\end{array}$$

$G_2/2A_1$ est cyclique d'ordre 2.

§ 7. Decomposition d'algèbres de Lie semi-simples

7.1 Sous-algèbre \mathfrak{g}_0 associée à un sous-système fermé Λ

Soient

\mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple sur un corps \mathbb{K} (§ 1)

Λ le système des racines de \mathfrak{g} sur une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} , avec

$$\Lambda' = \Lambda - \{0\},$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'} \mathbf{K} e_\alpha$$

la décomposition de Cartan associée à \mathfrak{h} ,

Λ_0 un sous-système fermé de Λ :

$$1) \quad \Lambda_0 = -\Lambda_0; \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

et

$$2) \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha$$

le sous-espace de \mathfrak{g} associé à Λ_0 . Les relations 1) impliquent que \mathfrak{g}_0 est une sous-algèbre réductive dont le centre est

$$\mathfrak{C} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Lambda'_0\}$$

Ainsi $\text{ad } h: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$x \mapsto [h, x]$$

où $h \in \mathfrak{C}$, est un endomorphisme semi-simple de \mathfrak{g} . Cela signifie que \mathfrak{g} est un \mathfrak{g}_0 -module complètement réductible.

Par ailleurs, lorsque Λ_0 est de rang maximum l , $\mathfrak{C} = \{0\}$, la sous-algèbre \mathfrak{g}_0 est semi-simple.

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'étudier *l'insertion* de \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g} .

7.2 Somme directe associée à une partition de $\Lambda \bmod \Lambda_0$

Soit Λ_0 un sous-système fermé de Λ , et

$$3) \quad \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en classes $\bmod \Lambda_0$ (§ 2). On a

$$4) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

où \mathfrak{g}_0 est donné par 2) et où

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geq 1).$$

Le but de ce paragraphe 7 est l'étude des propriétés de la somme directe 4) associée à 3).

Je pose

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{0, \pm \mu_{0_1}, \dots, \pm \mu_{0_{n_0}}\} \\ \Lambda_i &= \{\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_{n_i}}\} \quad (i \geq 1). \end{aligned}$$

De plus, je vais désigner par $[g_i, g_j]$ le sous-espace de g engendré par les $[g_i, g_j]$, où g_i, g_j décrivent g_i, g_j respectivement.

$[g_i, g_j]$ est engendré par les $[e_{\mu_{i,m}}, e_{\mu_{j,m'}}]$ si $i \geq 1, j \geq 1$.

PROPOSITION 7.1: Les sous-espaces g_i ($i \geq 1$) sont des g_0 modules irréductibles et $[g_0, g_i] = g_i$

$$(\Lambda_0 + \Lambda_i) \cap \Lambda \subset \Lambda_i \quad \text{implique} \\ [g_0, g_i] \subset g_i$$

ce qui prouve que g_i est un g_0 -module. Maintenant:

LEMME 7.1: Tout sous-espace $H \subset g_1 \oplus \dots \oplus g_s$ stable pour $\text{ad } h$ est de la forme $\sum k e_\alpha$, où $\alpha \in L \subset \Lambda'$.

Deux racines distinctes $\alpha, \beta \in \Lambda'$ étant données, on peut trouver $z \in h$ tel que $\alpha(z) = 1, \beta(z) = 0$. Soit alors

$$x = k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha'} e_{\alpha'} + \dots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H \\ k_\alpha k_{\alpha'} \dots k_{\alpha(p)} \neq 0.$$

On prend un $z \in h$ associé à $\beta = \alpha'$, d'où

$$x' = k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha''} e_{\alpha''} + \dots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H$$

etc. On obtient finalement $k_\alpha e_\alpha \in H$, d'où $Ke_\alpha \subset H$, et le lemme est établi.

Soit maintenant H un g_0 -module non trivial, avec $H \subset g_i$. D'après $h \subset g_0$ et le lemme 7.1, on a

$$H = Ke_{\mu_{i+1}} \oplus \dots \oplus Ke_{\mu_{i v_i}} \quad v_i \leq n_i$$

avec de bonnes notations. Comme Λ_i est Λ_0 -connexe, on a nécessairement $e_{\mu_{i t}} \in H$, $\forall t \in \{1, \dots, n_i\}$, ce qui implique $H = g_i$.

Les g_0 -modules g_1, \dots, g_s sont bien irréductibles.

On peut encore écrire:

$$[g_0 [g_0 g_i]] \subseteq [[g_0 g_0] g_i] + [g_0 [g_0 g_i]] \\ \subseteq |g_0 g_i| \subset g_i$$

et $[g_0, g_i]$ est un g_0 -module non trivial dans g_i qui est irréductible. Alors:

$$[g_0, g_i] = g_i.$$

PROPOSITION 7.2: Soient $i, j \geq 1$: on a $[g_i, g_j] = 0$ ou bien il existe $k \in \{0, 1, \dots, s\}$ tels que $[g_i, g_j] \subset g_k$; lorsque $k \neq 0$, on a $[g_i, g_j] = g_k$.

Si

$$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset, \text{ on a } [e_{\mu_{i,m}}, e_{\mu_{j,m'}}] = 0, \quad \forall m, m' \quad \text{et} \quad [g_i, g_j] = 0.$$

Supposons $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$; il existe k avec $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$, d'où $[g_i, g_j] \subset g_k$.

Or

$$[g_0 [g_i, g_j]] \subseteq [[g_0 g_i] g_j] + [g_j [g_0 g_i]] \subseteq [g_i g_j].$$

Ainsi $[g_i, g_j]$ est un g_0 -module non trivial, contenu dans g_k . Si $k \neq 0$, g_k est irréductible, et $[g_i, g_j] = g_k$.

PROPOSITION 7.3: *Pour tout $i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$ il existe $i' \in I$ tel que $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$.*

Soit Λ_i ; il existe i' tel que $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ (§ 3) ce qui entraîne $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$. Il faut noter que le cas $i = i'$ n'est pas exclu.

Il convient de rassembler les résultats du présent numéro:

THÉOREME 7.1: *Soient g une algèbre de Lie semi-simple sur le corps K (§ 1), Λ le système des racines de g sur une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de g ,*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ en classes mod Λ_0 où Λ_0 est un sous-système fermé, et

$$g = g_0 \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_s$$

la somme directe associée, où

$$g_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} K e_\alpha \quad g_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} K e_\alpha \quad (i \geq 1).$$

Alors g_1, \dots, g_s sont des g_0 -modules irréductibles dans $\text{ad}_g g_0$ et

$$[g_0, g_0] \subseteq g_0 \quad [g_0, g_i] = g_i \quad (i \geq 1);$$

si $i, j \geq 1$: $[g_i, g_j] = 0$ ou bien il existe k tel que $[g_i, g_j] \subseteq g_k$ avec $[g_i, g_j] = g_k$ si $k \neq 0$;

enfin $\forall i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$, $\exists i' \in I$ avec $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$. En bref, la somme directe $\sum_0^s g_i$

vérifie $[g_i, g_j] \subseteq g_k \forall i, j$; je dirai que cette somme directe est la décomposition associée au sous-système fermé Λ_0 . Elle fournit un produit de g_0 -modules irréductibles régi par la loi Λ/Λ_0 . Les résultats des paragraphes 5 et 6 peuvent en particulier être utilisés. On peut considérer $\sum_0^s g_i$ comme une graduation de g par le groupe local Λ/Λ_0 .

7.3 Sur-algèbre réductive de g_0 dans g

Soient

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de Λ modulo un sous-système fermé Λ_0 ;

$$Q = \{0, i_1, \dots, i_q\}, \quad S = \{0, 1, 2, \dots, s\} \quad Q \subset S,$$

$$\Lambda_Q = \Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \dots \cup \Lambda_{i_q}.$$

On a sans difficulté la

PROPOSITION 7.4: *Pour que Λ_Q soit un sous-système fermé de Λ , il faut et il suffit que*

- 1) $(\forall i, j \in Q) (\exists k \in Q) (\Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k) \quad \text{si} \quad \Lambda_i + \Lambda_j \neq \emptyset$
- 2) $(\forall i \in Q) (\exists i' \in Q) (\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$

Alors, avec les notations connues $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{i_q}$, où est Λ_Q fermé dans Λ , est une sous-algèbre réductive de \mathfrak{g} qui contient \mathfrak{g}_0 ; on a une sur-algèbre réductive de \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g} , et, de cette manière on les obtient toutes:

PROPOSITION 7.5: Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$ la décomposition de l'algèbre semi-simple \mathfrak{g} associée à la partition

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

du système Λ modulo un sous-système fermé Λ_0 .

Pour que

$$\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{i_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{i_q} \quad (Q = \{0, i_1, \dots, i_q\})$$

soit une sur-algèbre réductive de \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g} , il faut et il suffit que

$$(\forall i, j \in Q) (\Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \text{ ou } \exists k \in Q: \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$$

et que $(\forall i \in Q) (\exists i' \in Q) (\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$.

Les sur-algèbres réductives de \mathfrak{g}_0 correspondent aux systèmes $\Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \dots \cup \Lambda_{i_q}$ identiques à leurs opposés et stables pour l'addition.

7.4 Sous-algèbres \mathfrak{g}_0 maximales

Les sous-algèbres \mathfrak{g}_0 sont maximales dans \mathfrak{g} si elles n'admettent aucune sur-algèbre distincte de \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{g} ; il s'agit ici uniquement d'algèbres réductives.

Considérons $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$ et soit Λ_1 une classe arbitraire distincte de Λ_0 ; dans Λ/Λ_0 elle engendre un système de l'un des types suivants:

$$\text{a) } \Lambda^* = \{-p\Lambda_1, \dots, -\Lambda_1, \Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \emptyset$

$$\text{b) } \Lambda^* = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1\}$$

où $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$.

Pour que \mathfrak{g}_0 soit maximale, il est nécessaire que $\Lambda^* = \Lambda$, c'est à dire que Λ/Λ_0 soit monothétique, au sens a) ou au sens b).

De plus, dans le cas a) $-p\Lambda_1, \Lambda_0, p\Lambda_1$ détermine une sur-algèbre réductive de \mathfrak{g}_0 ; on a nécessairement: $p=1$.

Dans le cas b), les classes $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1$ forment un groupe cyclique d'ordre $p+1$ et pour que \mathfrak{g}_0 soit maximale (réductive) il est nécessaire que $p+1$ soit premier. Ces conditions sont aussi suffisantes. D'où

PROPOSITION 7.6: Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$ la décomposition de l'algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} associée à la partition $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ du système Λ des racines de \mathfrak{g} modulo le sous-système fermé Λ_0 de Λ .

Pour que \mathfrak{g}_0 soit réductive maximale dans \mathfrak{g} il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée.

- a) $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_1, \quad 2\Lambda_1 = \emptyset$
- b) $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p, \quad (p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0, \quad p+1 \text{ premier.}$

cf. ([1]), théorème 6.

7.5 Sur-algèbres réductives d'une algèbre \mathfrak{g}_0 semi-simple

Lorsque le sous-système fermé Λ_0 est de rang maximal, la sous-algèbre \mathfrak{g}_0 correspondante est semi-simple; alors \mathfrak{g} se présente comme extension d'une algèbre semi-simple \mathfrak{g}_0 par «un groupe local» Λ/Λ_0 . On a vu, dans le cas des algèbres simples exceptionnelles, que Λ/Λ_0 est toujours un groupe, avec une seule exception: $E_8/8A_1$.

Par exemple:

- E_6 est extension de $3A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.
- E_7 est extension de $A_2 + A_5$ par un groupe cyclique d'ordre 3.
- E_8 est extension de $2A_4$ par un groupe cyclique d'ordre 5.
- F_4 est extension de $2A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.
- G_2 est extension de A_2 par un groupe cyclique d'ordre 3.
- $D_{2m}, B_{2m}C_l$ sont extension de lA_1 par des groupes locaux à éléments d'ordre 2. ($l=2m$).
- $B_l = B_{2m+1}$ est extension de $B_1 + (l-1)A_1$.
- $D_l = D_{2m+1}$ est extension de $A_3 + 2(m-1)A_1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv., 23 (1949), 200–221.
- [2] DYNKIN, E. B., *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, Mat. Sbornik. N.S. 30 (72) (1952), 349–462. Amer. Math. Soc. Translations (Série 2, 6, p. 111–244).
- [3] JACOBSON, N., *Lie algebras* (Interscience Publishers, New York, London 1962).
- [4] TITS, J., *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen* (Springer-Verlag, 1967 [Lecture Notes in Mathematics]).

L'aide du Fonds National Suisse de la recherche scientifique
a rendu possible le présent travail (contrat no 2326).

Reçu le 12 juillet 1967.