

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	44 (1969)
<b>Artikel:</b>	Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple.
<b>Autor:</b>	Siebenthal, Jean de
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-33753">https://doi.org/10.5169/seals-33753</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur certains modules dans une algèbre de Lie semi-simple

Par JEAN DE SIEBENTHAL (Lausanne)

*Magnificat anima mea Dominum*

## § 1. Introduction

1. Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple de rang  $l$  sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique 0,  $\Lambda$  le système des racines de  $\mathfrak{g}$  sur une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ , avec  $\Lambda' = \Lambda - \{0\}$ . Une suite fondamentale de  $\Lambda$  est une suite libre  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  de  $l$  racines telle que  $\mu \in \Lambda$  implique  $\mu = a_1\varphi_1 + \dots + a_e\varphi_e$ , les  $a_i$  étant des entiers rationnels, tous  $\geq 0$  ou bien tous  $\leq 0$ .  $\Lambda$  engendre un espace euclidien  $R^l$  identifié à son dual au moyen du produit scalaire usuel.

Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ , c'est à dire tel que

$$\Lambda_0 = -\Lambda_0 \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0.$$

Une suite  $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k\} \subset \Lambda$  est une  $\Lambda_0$ -suite si  $\mu_{i+1} - \mu_i \in \Lambda_0$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ); une partie  $A$  de  $\Lambda$  est dite  $\Lambda_0$ -connexe, si pour toute paire  $\gamma, \gamma' \in A$  il existe une  $\Lambda_0$ -suite qui relie  $\gamma$  à  $\gamma'$ .

THÉORÈME: *La partition  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$  de  $\Lambda$  en classes mod  $\Lambda_0$  vérifie:*

- a) *Toute classe  $\Lambda_i$  est  $\Lambda_0$ -connexe*
- b) *Si  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq 0$ , il existe un entier  $k$  tel que  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$ ; de plus*
- b')  *$k \neq 0$  implique  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$   
 $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$*
- b'') *Pour tout  $i$  il existe un  $i'$  tel que*

$$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

2. L'addition dans  $\Lambda$  définit dans  $\Lambda / \Lambda_0$  une loi de composition commutative, associative, non partout définie, ayant un 0 noté  $\Lambda_0$ , tout élément  $\Lambda_i$  ayant un opposé  $\Lambda_{i'}$ .

*Le but du présent mémoire est l'étude de ces structures.* On peut se ramener aux cas suivants :

3. *Une suite fondamentale de  $\Lambda_0$  fait partie d'une suite fondamentale de  $\Lambda$ .*

C'est le cas des sous-systèmes fermés  $\Lambda_0$  dits saturés : l'intersection du sous-espace  $R(\Lambda_0)$  support de  $\Lambda_0$  et de  $\Lambda$  coïncide avec  $\Lambda_0$ .

Lorsque

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\} \subset \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_l\}$$

est l'inclusion de suites fondamentales ci-dessus, et si  $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$  sont les classes de

$\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_l \bmod \Lambda_0$ , alors la classe de

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \text{ est } \bar{\mu} = \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i.$$

Désignant par  $R^{l-r}$  le supplémentaire orthogonal du support de  $\Lambda_0$ , chaque classe  $\Lambda_i$  admet une projection orthogonale sur  $R^{l-r}$  réduite à un point: le centre de gravité de cette classe.

*La loi  $\Lambda | \Lambda_0$  est ici entièrement déterminée par les centres  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s$  des classes  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_s$ .*

#### 4. Le sous-système fermé $\Lambda_0$ est de rang maximal $l$ .

Ici,  $R^{l-r} = \{0\}$ , les centres des classes  $\Lambda_i$  sont tous en 0. Particulièrement intéressants sont ici les simplifiés de  $\Lambda$ , c'est à dire les sous-systèmes fermés  $\Lambda_0$  minimaux de rang  $l$ , tous de type

$$A_{s_1} \oplus \cdots \oplus A_{s_t} \quad s_1 + \cdots + s_t = l.$$

Pour étudier  $\Lambda | \Lambda_0$ , on peut choisir dans le support  $R^l$  de  $\Lambda$  un système de générateurs

$$\tau_{1,1}, \dots, \tau_{1,s_1+1}; \dots; \quad \tau_{t,1}, \dots, \tau_{t,s_t+1}$$

avec

$$\sum_{j=1}^{s_i+1} \tau_{i,j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, t).$$

Les racines de  $\Lambda_0$  sont toutes les différences  $\tau_{i,m} - \tau_{i,m'}$ ; les autres éléments de  $\Lambda$  sont de l'un des types

$$\tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''.$$

Les  $A_7 \subset E_7$ ,  $A_8 \subset E_8$ ,  $A_2 \subset G_2$  conduisent aux expressions connues.

Pour  $A_2 + A_2 + A_2 \subset E_6$ , on obtient, en prenant

$$\begin{array}{lll} \tau_1, \tau_2, \tau_3 & ; & \tau_4, \tau_5, \tau_6 & ; & \tau_7, \tau_8, \tau_9 \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 & \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 = 0 & \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 = 0 \\ \alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, 3\} & \beta, \beta', \dots \in \{4, 5, 6\} & \gamma, \gamma', \dots \in \{7, 8, 9\} \end{array}$$

les expressions suivantes pour les racines de  $E_6$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha - \tau_{\alpha'}; \quad \tau_\beta - \tau_{\beta'}; \quad \tau_\gamma - \tau_{\gamma'} \\ \pm (\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma). \end{aligned} \quad (\text{racines de } \Lambda_0)$$

On a ici trois classes

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \{\tau_\alpha + \tau_\beta + \tau_\gamma\}, \quad \Lambda_{1'} = -\Lambda_1$$

et  $\Lambda | \Lambda_0$  est un groupe cyclique d'ordre 3. On pourra constater ici, lorsque  $\Lambda$  est une structure exceptionnelle  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$  que les  $\Lambda | \Lambda_0$  sont toujours des lois de groupes, sauf dans le cas  $E_8 | 8A_1$ .

5. Cette théorie peut servir à l'étude:

- a) des sous-algèbres réductives  $g_0$  de  $g$  qui correspondent aux systèmes fermés  $\Lambda_0 \subset \Lambda$
- b) des  $g_0$ -modules en lesquels  $g$  se décompose suivant  $\text{ad } g_0$ : A tout  $\mu \in \Lambda$  correspond dans  $g$  un sous-espace 1-dimensionnel  $\mathbf{C}e_\mu$ , avec

$$[h, e_\mu] = \mu(h) e_\mu \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

On a:

$$\begin{aligned} g &= e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'} \mathbf{C}e_\mu \quad \text{où } e_0 = \mathfrak{h} \\ g_0 &= e_0 \oplus \sum_{\mu \in \Lambda'_0} \mathbf{C}e_\mu. \end{aligned}$$

J'écris:

$$g_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{C}e_\alpha \quad \text{d'où}$$

$$1) \quad g = g_0 \oplus g_1 \oplus \cdots \oplus g_s.$$

Les  $g_i$  sont des  $g_0$ -modules, irréductibles si  $i \neq 0$ .

On peut avoir  $[g_i, g_j] = 0$ ; si ce n'est pas le cas, il existe un indice  $k$  tel que  $[g_i, g_j] \subset g_k$ . Lorsque  $k \neq 0$ , on a:  $[g_i, g_j] = g_k$ ;  $[g_0, g_k] = g_k$ .

Enfin, pour tout  $i$ , il existe  $i'$  tel que  $[g_i, g_{i'}] \subset g_0$ .

La connaissance de la loi  $\Lambda \mid \Lambda_0$  implique celle des sur-algèbres de  $g_0$  dans  $g$ , permet de trouver rapidement les sous-algèbres  $g_0$  maximales (du type envisagé). Les sous-algèbres  $g_0$  pour lesquelles 1) se réduit à

$$\begin{aligned} g &= g_0 \oplus g_1 \oplus g_{1'} \quad [g_1, g_{1'}] \subset g_0, \quad \text{ou} \\ g &= g_0 \oplus g_1 \end{aligned}$$

correspondent à certains espaces riemanniens symétriques.

6. Ce travail se rattache à [1] et à [2] chap II où sont étudiés principalement les systèmes fermés  $\Lambda_0$  en eux-mêmes. Ici, la question est reprise dans son ensemble, en portant plutôt l'attention sur l'*insertion* de  $\Lambda_0$  dans  $\Lambda$ . J'ai utilisé les listes données dans [1] ou [2]; celles qui figurent dans [4] permettront d'étudier le cas des sous-systèmes saturés des algèbres simples exceptionnelles, cas qui ne figure pas explicitement dans le § 5.

## Plan

<b>§ 1</b>	<i>Introduction</i>	1
<b>§ 2</b>	<i>Partitions admissibles d'un <math>\Lambda</math>-système</i>	5
1	Notion de $\Lambda$ -système	5
2	$A$ -connexité dans un $\Lambda$ -système	5
3	Sous-systèmes fermés $\Lambda$ .	8
4	Partitions admissibles	9
<b>§ 3</b>	<i>Addition des classes modulo <math>\Lambda_0</math></i>	10
<b>§ 4</b>	<i>Sous-systèmes saturés. Centre et caractères</i>	12
1	Sous-systèmes saturés	12
2	Suites fondamentales	12
3	Centre d'un sous-système	13
4	Structure du centre d'un sous-système saturé	14
5	Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$	15
<b>§ 5</b>	<i>Loi-quotient <math>\Lambda   \Lambda_0</math> lorsque <math>\Lambda_0</math> est saturé</i>	16
1	Détermination pratique	16
2	Inclusions de suites fondamentales	16
3	Chambres de $\Lambda   \Lambda_0$	17
4	Racines secondaires de $\Lambda   \Lambda_0$	18
5	Cas $\Lambda = A_l$ 6 Cas $\Lambda = B_l$ 7 Cas $\Lambda = C_l$ 8 Cas $\Lambda = D_l$	19–23
<b>§ 6</b>	<i>Loi-quotient <math>\Lambda   \Lambda_0</math> lorsque <math>\Lambda_0</math> est de rang maximum</i>	23
1	Construction	23
2	Loi-quotient $\Lambda   \Lambda_0$ pour $\Lambda = A_l, B_l, C_l, D_l$	23
3	Sous-systèmes minimaux de rang $l$ .	25
<b>§ 7</b>	<i>Sur certains produits de modules irréductibles</i>	39
1	Sous algèbre $g_0$ associée à un sous-système $\Lambda_0$ fermé	39
2	Somme directe associée à une partition.	40
3	Sur-algèbres réductives d'une algèbre $g_0$ dans $g$	42
4	Sous-algèbres $g_0$ maximales	43
5	Sur-algèbres réductives d'une algèbre $g_0$ semi-simple.	44

## § 2. Partitions admissibles

### 2.1 Notion de $\Lambda$ -système

Soit  $\Lambda \subset R^l$  le système des vecteurs-racines d'une algèbre semi-simple  $\mathfrak{g}$ . On en déduit:

a) le système inverse

$$\Lambda^* = \{\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha), \forall \alpha \in \Lambda\}$$

b) la symétrie  $S_\alpha: z \mapsto z - (\alpha^*, z)\alpha$ , et le groupe de Weyl  $W$ , engendré par les  $S_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda$ .

c) la grille des poids

$$\gamma(\Lambda) = \{x \in R^l \mid (\alpha^*, x) \in \mathbf{Z}, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

On sait que  $W\gamma(\Lambda) = \gamma(\Lambda)$ . Si  $x \in \gamma(\Lambda)$ , on a

$$S_\alpha x = x + m\alpha \quad \text{où } m \in \mathbf{Z}; \quad \text{les } x + k\alpha, \quad \text{où } k \in ]0, m[ \cap \mathbf{Z}$$

sont alors les intermédiaires stricts.

DÉFINITION 2.1: *J'appelle  $\Lambda$ -système toute partie  $\Delta$  de  $R^l$  qui vérifie:*

- 1)  $\Delta \subset \gamma(\Lambda)$
- 2)  $x \in \Delta \Rightarrow S_\alpha x \in \Delta, \quad \forall \alpha \in \Lambda$
- 3)  $x \in \Delta, \quad S_z x = x + m\alpha \Rightarrow x + k\alpha \in \Delta \quad \forall k \in \mathbf{Z} \cap ]0, m[$ .

Autrement dit,  $\Delta$  est une partie de la grille des poids stables pour  $W$  et qui, avec deux éléments symétriques  $x, S_\alpha x$  contient tous les intermédiaires  $x + k\alpha, (k \in \mathbf{Z})$ . Notons que

$$|S_\alpha x| = |x|, \quad |x + k\alpha| \leq |x|.$$

### 2.2 $A$ -connexité dans un $\Lambda$ -système

DÉFINITION 2.2: *Soit  $\Lambda$  le système des racines d'une algèbre  $\mathfrak{g}$  semi-simple; soient*

- 1)  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système
- 2)  $A \subset \Delta$
- 3)  $B \subset \Delta$

*L'ensemble  $B$  est dit  $A$ -connexe si pour tout couple  $(\mu, \mu') \in B \times B$ , il existe une  $A$ -suite  $\subset B$  qui relie  $\mu$  à  $\mu'$ , c'est à dire une suite*

$$\mu = \mu_0, \quad \mu_1, \dots, \quad \mu_k = \mu'$$

*d'éléments de  $B$  telle que  $\mu_{i+1} - \mu_i \in A, \forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ .  $B$  est dit connexe s'il est  $A$ -connexe.*

Cela posé, j'écris

$$\mu' \equiv \mu \pmod{A} \quad \text{lorsque} \quad \mu' = \mu + \sum n_i \alpha_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

C'est une relation d'équivalence dans  $\Delta$ , qui subit une partition en classes modulo le réseau engendré par  $A$  sur  $\mathbf{Z}$  ou en bref modulo  $A$ :

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s.$$

**PROPOSITION 2.1:** Soient  $\Delta$  un  $A$ -système,  $A \subset \Lambda$ , avec  $0 \in A$ ,  $A = -A$ , et

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$$

la partition de  $\Delta$  en classes mod  $A$ . Chaque classe  $\Delta_m$  est  $A$ -connexe.

*Preuve:* soient  $\mu, \bar{\mu} \in \Delta_m$ , avec

$$1) \quad \bar{\mu} = \mu + \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

Supposons d'abord

$$i) \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) > 0.$$

Je dis qu'il existe un indice  $j$  tel que  $n_j \neq 0$  avec

$$\begin{aligned} \bar{\mu} - \alpha_j &\in \Delta \quad \text{si } n_j > 0 \\ \bar{\mu} + \alpha_j &\in \Delta \quad \text{si } n_j < 0. \end{aligned}$$

En effet, si cet indice n'existe pas,

- a)  $n_j > 0$  implique  $(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$ , soit  $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$
- b)  $n_j < 0$  implique  $(\bar{\mu}, \alpha_j) \geq 0$ , soit  $n_j(\bar{\mu}, \alpha_j) \leq 0$ .

Par exemple, avec a),  $(\bar{\mu}, \alpha_j) > 0$  signifie

$$S_{\alpha_j} \bar{\mu} = \bar{\mu} - (\bar{\mu}, \alpha_j^*) \alpha_j \quad \text{et} \quad \bar{\mu} - \alpha_j \in \Delta,$$

vu que  $\Delta$  est un  $A$ -système.

Multippliant scalairement 1) par  $\bar{\mu}$ , il vient

$$(\bar{\mu}, \bar{\mu}) - (\bar{\mu}, \mu) = \sum n_i (\bar{\mu}, \alpha_i).$$

D'après i), le premier membre est strictement positif, tandis que d'après a) et b) le second membre est négatif. On n'échappe à la contradiction qu'en admettant l'existence de l'indice  $j$ .

Maintenant la condition

$$ii) \quad \bar{\mu} \neq \mu \quad \text{et} \quad (\bar{\mu}, \bar{\mu}) \geq (\mu, \mu)$$

implique i), comme le montre un calcul élémentaire:

si

$$\begin{aligned} |\bar{\mu}| &= 1, \quad |\mu| = r \leq 1 \\ \bar{\mu} &= (1, 0) \\ \mu &= (r \cos t, r \sin t) \end{aligned}$$

dans le plan euclidien, on a  $(\bar{\mu}, \bar{\mu} - \mu) = 1 - r \cos t$ .

Si  $r < 1$ , on a  $1 - r \cos t > 0$ , et si  $r = 1$ , alors  $\cos t < 1$  vu que  $\bar{\mu} \neq \mu$ , d'où encore  $1 - r \cos t > 0$ .

Prenons maintenant dans  $\Delta_m$  un  $\mu'$  de carré scalaire minimum; pour tout  $\delta_0 \neq \mu'$ ,  $\delta_0 \in \Delta_m$ , on a

$$\delta_0 = \mu' + \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A$$

$\delta_0$  et  $\mu'$  vérifiant ii) satisfont à i):  $(\delta_0, \delta_0 - \mu') > 0$ .

On a vu qu'il existe alors dans  $\Delta_m$

$$\delta_1 = \delta_0 - \alpha_j = \mu' + \cdots + (n_j - 1) \alpha_j + \cdots \quad (n_j > 0)$$

ou

$$\delta_1 = \delta_0 + \alpha_j = \mu' + \cdots + (n_j + 1) \alpha_j + \cdots \quad (n_j < 0).$$

Soit

$$\Delta \ni \delta_1 = \mu' + \sum n'_i \alpha_i \quad \sum |n'_i| = \sum |n_i| - 1.$$

Si  $\delta_1 \neq \mu'$ , on recommence l'opération, ... Il se construit une  $A$ -suite

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k, \dots \subset \Delta$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_k &= \mu' + \sum n_i^{(k)} \alpha_i, \quad n_i^{(k)} \in \mathbf{Z}, \alpha_i \in A \\ \sum |n_i^{(k)}| &= \sum |n_i^{(k-1)}| - 1. \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si pour un entier  $k$ , on a  $\delta_k = \mu'$ , alors la  $A$ -suite

$$\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_k = \mu' \text{ relie } \delta_0 \text{ à } \mu'.$$

Cette circonstance se produit nécessairement puisque  $\sum |n_i^{(k)}|$  décroît strictement. Ainsi, on peut relier  $\mu$  et  $\bar{\mu}$ .

Ecrivons la suite obtenue:

$$\mu = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_u = \bar{\mu} \quad \tau_{i+1} - \tau_i \in \Delta_0.$$

Par construction, on a, successivement  $\Delta_m \ni \mu = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_u = \bar{\mu}$  ce qui prouve que  $\Delta_m$  est  $\Delta_0$ -connexe.

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

**PROPOSITION 2.2:** Soient  $\Delta$  un  $A$ -système,  $\tau \in \Delta$ ,  $\alpha, \beta \in A$ , et  $\tau' = \tau + \alpha + \beta \in \Delta$ , où  $\tau \neq \tau'$ . Alors  $\tau + \alpha \in \Delta$  ou  $\tau + \beta \in \Delta$ .

On utilise le raisonnement qui suit i) dans la preuve de la proposition 2.1.

Si  $(\tau', \tau') \geq (\tau, \tau)$ , alors, comme  $\tau \neq \tau'$ , il vient  $(\tau', \tau') - (\tau, \tau) > 0$  d'où  $\tau + \alpha \in \Delta$  ou  $\tau + \beta \in \Delta$ .

Si  $(\tau, \tau') \leq (\tau, \tau)$ , on a  $(\tau, \tau) - (\tau', \tau) > 0$  et  $\tau = \tau' - \alpha - \beta$  montre à nouveau que  $\tau + \alpha \in \Delta$  ou  $\tau + \beta \in \Delta$ .

**PROPOSITION 2.3:** Soit  $\Lambda$  un système de racines de rang 1; pour que  $\{\mu_1, \dots, \mu_l\} \subset \Lambda$  soit une suite fondamentale de  $\Lambda$ , il faut et il suffit qu'on ait

- 1)  $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda \quad \forall i \neq j$  et
- 2) Toute racine  $\mu \in \Lambda$  est  $\mathbf{Z}$ -combinaison linéaire de  $\mu_1, \dots, \mu_l$ .

Si  $m_1, \dots, m_l$  est une suite fondamentale, il est bien connu que 1) et 2) sont vérifiées.

Les conditions 1) et 2) sont suffisantes. En effet, les racines

$$\mu = \sum m_i \mu_i \in \Lambda \quad \text{ont un poids} \quad P(\mu) = \sum_{i=1}^l |m_i|.$$

Les racines de poids 2 sont par hypothèse de la forme  $\pm(\mu_i + \mu_j)$  ( $i \neq j$ ). Raisonnons par récurrence et soit  $\beta$  une racine de poids  $p+1$ ; d'après la proposition 2.1, on peut écrire  $\beta = \mu \pm \mu_i$  où  $\mu$  est une racine de poids  $p$ , donc à coefficients tous  $\geq 0$  par exemple.

Si  $\beta$  a des coefficients tous  $\geq 0$ , il n'y a rien à démontrer; sinon  $\beta = \mu - \mu_i$  avec

$$\mu = m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s, \quad m_j > 0, \quad j = 1, \dots, s \quad \text{et} \quad i \notin \{1, \dots, s\}.$$

Il existe un indice  $j \leq s$ ,  $s$  par exemple, tel que

$$\mu - \mu_s = \alpha \in \Lambda, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \mu_s \in \Lambda, \quad \alpha + \mu_s - \mu_i \in \Lambda.$$

On a:  $\beta = -\mu_i + \alpha + \mu_s$ .

D'après la proposition 2.2, on a  $-\mu_i + \alpha \in \Lambda$  ou bien  $-\mu_i + \mu_s \in \Lambda$ . Le second cas est exclu par hypothèse;  $-\mu_i + \alpha$  est une racine de poids  $p$  à coefficients non tous  $\geq 0$ ; pour éviter la contradiction, il faut poser  $\beta = \mu + \mu_i$ , d'où la conclusion.

### 2.3 Sous-systèmes fermés

**PROPOSITION 2.4:** Supposons  $\Delta = \Lambda$ ,  $A \subset \Lambda$  avec  $A = -A$ ,  $(A + A) \cap \Lambda \subset A$ . Alors la classe  $\Delta_0$  des  $\mu \equiv 0 \pmod{A}$  coïncide avec  $A$ .

On a d'abord  $A \subset \Delta_0$ . Soit maintenant  $\mu \in \Delta_0$ :

$$\mu = \sum n_i \alpha_i \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \alpha_i \in A.$$

La proposition 2.1 affirme l'existence d'une  $A$ -suite qui relie 0 à  $\mu$ :  $0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k = \mu$ .

On a:

$$\begin{aligned} \mu_1 - 0 &= \mu_1 \in A \\ \mu_2 - \mu_1 &\in A \quad \text{d'où} \quad \mu_2 = \mu_1 + \alpha \in (A + A) \cap \Lambda, \quad \text{et} \quad \mu_2 \in A \\ &\dots \\ \mu_k - \mu_{k-1} &\in A \quad \text{d'où} \quad \mu_k = \mu \in A. \end{aligned}$$

Ainsi  $\Delta_0 \subset A$  et  $\Delta_0 = A$ .

DÉFINITION 2.3: *Toute partie  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  qui vérifie  $\Lambda_0 = -\Lambda_0$ ,  $(\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$  est appellée sous-système fermé de  $L$ .*

COROLLAIRE (à la proposition 2.1): *Soient  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système,  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ , et  $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$  la partition de  $\Delta$  en classes mod  $\Lambda_0$ . Chaque classe  $\Delta_m$  est  $\Lambda_0$ -connexe.*

En particulier, si  $\Delta = \Lambda$ , ce dernier subit une partition en classes mod  $\Lambda_0$

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

et chaque classe  $\Lambda_m$  est  $\Lambda_0$ -connexe.  $\Lambda_0$  est celle de ces classes qui contient 0.

#### 2.4 Partitions admissibles d'un $\Lambda$ -système

DÉFINITION 2.4: *Soit  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système dans  $R^l$ , et  $D$  une partition  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$  de  $\Delta$ . Le vecteur  $\tau \rightarrow \tau'$  de  $R^l$  est dit vecteur de  $\Delta$  si  $\tau, \tau' \in \Delta$  et si  $\tau' - \tau \in \Lambda$ . Le vecteur  $\tau \rightarrow \tau'$  est dit vecteur de  $D$  si c'est un vecteur de  $\Delta$  et si  $\tau \equiv \tau' \pmod{D}$ .*

DÉFINITION 2.5: *La partition  $D$  du  $L$ -système  $\Delta$  est dite admissible si*

- 1) *Tout vecteur de  $\Delta$  équivalant à un vecteur de  $D$  est un vecteur de  $D$  et*
- 2) *Tout ensemble de la partition est connexe.*

PROPOSITION 2.5: *Soit  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système et  $D$  une partition de  $\Delta$ . Pour que  $D$  soit la partition de  $\Delta$  en classes modulo un sous-système fermé  $\Lambda_0$ , il faut et il suffit que  $D$  soit une partition admissible.*

a) Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$  et  $D: \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$  la partition de  $\Delta$  en classes mod  $\Lambda_0$ . Considérons pour commencer un vecteur  $\tau \rightarrow \tau'$  de  $D$ ; On a:  $\tau' = \tau + \alpha$ , où  $\alpha \in \Lambda$ .

D'autre part,  $\tau' \equiv \tau \pmod{\Lambda_0}$  implique  $\tau' = \tau + \sum n_i \alpha_i$ ,  $n_i \in \mathbf{Z}$ ,  $\alpha_i \in \Lambda_0$ , d'où  $\alpha = \sum n_i \alpha_i$ , et comme  $\Lambda_0$  est fermé, on a  $\alpha \in \Lambda_0$ .

Maintenant, si  $\gamma \rightarrow \gamma'$  est un vecteur de  $\Delta$  équivalent au vecteur  $\tau \rightarrow \tau'$  de  $D$ , on a:

$$\gamma' = \gamma + \alpha, \quad \text{où} \quad \alpha \in \Lambda_0,$$

soit:  $\gamma' \equiv \gamma \pmod{\Lambda_0}$ .  $\gamma \rightarrow \gamma'$  est un vecteur de  $D$ .

D'après le corollaire à la proposition 2.1, chaque classe  $\Delta_i$  est  $\Lambda_0$ -connexe et la condition 2) de la définition 2.5 est satisfaite.  $D$  est une partition admissible.

b) Soit  $D: \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$  une partition admissible de  $\Delta$ , soit  $\Lambda_0$  l'ensemble des  $\alpha \in \Lambda$  tels qu'il existe  $\tau, \tau' \in \Delta$  avec  $\tau' \equiv \tau \pmod{D}$ ,  $\tau' - \tau = \alpha$ .

Je dis que  $\Lambda_0$  est un sous-système fermé de  $\Lambda$ . On a d'après la définition:  $\Lambda_0 = -\Lambda_0$ , et  $0 \in \Lambda_0$ .

Soient  $\alpha, \beta \in \Lambda_0$ , avec  $\alpha + \beta \in \Lambda - \{0\}$ . Construisons le sous-espace  $R^h$  de  $R^l$  engendré par  $\Delta$ . On a par hypothèse  $\alpha, \beta \in R^h$ , d'où  $\alpha + \beta \in R^h$ . Si, pour tout  $\tau \in \Delta$ , on a  $(\alpha + \beta, \tau) = 0$ , alors  $(\alpha + \beta, R^h) = 0$  ( $\alpha + \beta, \alpha + \beta) = 0$ , ce qui est absurde.

Soit donc  $\tau \in \Delta$  avec  $(\alpha + \beta, \tau) \neq 0$ . En prenant un intermédiaire entre  $\tau$  et  $S_{\alpha+\beta}\tau$ , on obtient  $\mu, \mu' \in \Delta$  avec  $\mu' = \mu + \alpha + \beta$ ,  $\mu \neq \mu'$ .

D'après la proposition 2.2, on a par exemple  $\mu + \alpha \in \Delta$ , et le vecteur  $\mu \rightarrow \mu + \alpha$  est équipollent à un vecteur de  $D$ , d'où  $\mu \equiv \mu + \alpha \pmod{D}$ ; de même,  $\mu + \alpha \rightarrow (\mu + \alpha) + \beta$  est un vecteur de  $D$ , et  $\mu, \mu + \alpha, \mu + \alpha + \beta$  sont congrus mod  $D$ , ce qui prouve que  $\alpha + \beta \in \Lambda_0$ .

Il reste à prouver que  $D$  est la partition de  $\Delta$  en classes mod  $\Lambda_0$ . Supposons  $x, y \in \Delta_m$ ; comme  $\Delta_m$  est connexe, il existe une  $\Lambda_0$ -chaîne qui relie  $x$  à  $y$ , d'où  $y = x + \sum n_i \alpha_i$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_i \in \Lambda_0$ . Réciproquement, si cette dernière relation a lieu entre  $x, y \in \Delta$ , il existe une  $\Lambda_0$ -chaîne reliant  $x$  à  $y$ :  $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ , avec  $x_{i+1} - x_i \in \Lambda_0$ , et  $x_i \rightarrow x_{i+1}$  est un vecteur de  $D$ . De proche en proche:

$$x \in \Delta_m, \quad x_1 \in \Delta_m, \dots, x_k = y \in \Delta_m \quad \text{et} \quad x \equiv y \pmod{D}.$$

### § 3. Addition des classes de $\Delta$ modulo un sous-système fermé $\Lambda_0$

Soient

$\Delta$  le système des racines d'une algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$

$\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Delta$ , et

$\Delta$  un  $\Delta$ -système.

$\Delta$  subit une partition en classes mod  $\Lambda_0$ :  $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$

chaque classe étant  $\Lambda_0$ -connexe. Considérons deux classes  $\Delta_i, \Delta_j$  et formons  $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta$ ; cette intersection peut être vide. Si ce n'est pas le cas, il existe un indice  $k$  tel que  $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta \subset \Delta_k$ . Il s'introduit ainsi une loi de composition entre classes mod  $\Delta_0$ , associative, commutative, non nécessairement partout définie.

Je me propose d'étudier cette loi dans le cas où  $\Delta = \Lambda$ ; alors

$$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s$$

où

$$\Delta'_0 = \Delta_0 - \{0\}, \quad \Delta_0 = \{0, \pm \mu_{0,1}, \dots, \pm \mu_{0,n_0}\}, \quad \Delta_m = \{\mu_{m,1}, \dots, \mu_{m,n_m}\}, \quad m \geq 1.$$

L'addition des classes de  $\Delta$  mod  $\Delta_0$  est une loi de composition associative, commutative, non nécessairement partout définie, pourvue d'un zéro  $\Delta_0$ , chaque classe ayant une opposée. Nous voulons préciser ces diverses propriétés.

Supposons  $(\Delta_i + \Delta_j) \cap \Delta$  non vide, contenue dans  $\Delta_k$  et  $0 \notin \{i, j, k\}$  distincts. Il existe des racines notées

$$\mu_{i_1}, \mu_{j_1}, \mu_{k_1} \quad \text{telles que} \quad \mu_{i_1} + \mu_{j_1} = \mu_{k_1}.$$

Prenons alors  $\mu^* \in \Delta_k$ ; comme  $\Delta_k$  est  $\Delta_0$ -connexe, il existe une  $\Delta_0$ -suite qui relie  $\mu_{k_1}$  à  $\mu^*$ :

$$m_0 = \mu_{k_1}, \quad \mu_1, \dots, \mu_p = m^*.$$

Comme  $0 \notin \Delta_k$ , aucune de ces racines n'est nulle; je dis que  $\mu^*$  est somme d'un élément

de  $\Lambda_i$  et d'un élément de  $\Lambda_j$ ; l'affirmation est vraie pour  $\mu_0$ . Supposons qu'elle soit vraie pour  $\mu_{z-1}$ . On a:

$$\mu_{z-1} = \mu_{i s'} + \mu_{j s''} \quad \mu_z = \mu_{i s'} + \mu_{j s''} + \alpha, \quad \alpha \in \Lambda_0^*.$$

En appliquant la proposition 2.2, on a par exemple:

$$\mu_{i s'} + \alpha \in \Lambda_i \quad \text{et} \quad \mu_z = (\mu_{i s'} + \alpha) + \mu_{j s''} \in (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda.$$

L'affirmation est établie. En résumé:

**LEMME 3.1:** *Les hypothèses:*

$$0 \notin \{i, j, k\}, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$$

impliquent  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$ .

Supposons maintenant  $0=i$ ,  $j \neq 0$ ,  $j=k$ .

On a:  $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_j$ .

Comme  $0 \in \Lambda_0$ , on a  $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$ ; précisons en faisant apparaître  $\Lambda'_0$ :

a) si  $\Lambda_j$  n'a qu'un seul élément  $\mu$ , alors

$$\mu \pm \alpha \notin L, \quad \forall \alpha \in L'_0, \quad \text{et} \quad (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap L = \Lambda_j = \{\mu\}$$

b) si  $\Lambda_j$  a deux éléments  $\mu, \mu'$  au moins, alors la conjonction

$$\mu \in \Lambda_j, \quad \mu \pm \alpha \notin \Lambda, \quad \forall \alpha \in \Lambda'_0$$

est impossible, vu que  $\Lambda_j$  est  $\Lambda_0$ -connexe; il existe donc

$$\alpha \in L'_0 \quad \text{avec} \quad \mu + \alpha \in \Lambda_j, \quad \text{et} \quad \mu \in (\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda, \quad (\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j.$$

**LEMME 3.2:** *On a, pour  $j \neq 0$ :  $(\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$ ; si  $\Lambda_j$  a plus d'un élément,  $(\Lambda'_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j$ .*

Supposons enfin  $i \neq 0$ ,  $\Lambda_i = \{\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n_i}\}$ ; alors  $-\Lambda_i = \{-\mu_{i,1}, \dots, -\mu_{i,n_i}\}$  est une classe de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$ , et il existe  $i' \in \{1, \dots, s\}$  tel que  $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$ . On a:

$(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ . Le cas où  $i = i'$  n'est pas exclu. Ces résultats peuvent être rassemblés.

**THÉORÈME 3.1:** *La partition  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$  du système  $\Lambda$  en classes modulo le sous-système fermé  $\Lambda_0$  a les propriétés suivantes:*

- a) toute classe  $\Lambda_m$  est  $\Lambda_0$ -connexe
- b) si  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$ , il existe  $k \leq s$  tel que  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cup \Lambda \subset \Lambda_k$ ; de plus
- b')  $k \neq 0$  implique  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k$ ,  $(\Lambda_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$  avec  $(\Lambda'_0 + \Lambda_k) \cap \Lambda = \Lambda_k$  si  $\Lambda_k$  a plus d'un élément.

b'' pour tout  $i$ , il existe un indice  $i'$  et un seul tel que  $\Lambda_{i'} = -\Lambda_i$ , ou  $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$ .

L'ensemble quotient est ainsi pourvu d'une loi de composition, qui est précisée par le théorème.

Lorsque  $\Lambda'_0 = \emptyset$ , on retrouve  $\Lambda$ , chaque classe ayant un seul élément.

On peut adopter une notation abrégée, en écrivant autrement les relations du théorème:

$$\begin{aligned} (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset &\quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \\ (\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_k &\quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k \\ (\Lambda_0 + \Lambda_j) \cap \Lambda = \Lambda_j &\quad \text{devient} \quad \Lambda_0 + \Lambda_j = \Lambda_j \\ (\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0 &\quad \text{devient} \quad \Lambda_i + \Lambda_{i'} = \Lambda_0. \end{aligned}$$

Lorsque  $\Lambda'_0 = \emptyset$ ,  $\Lambda_i = \{\mu_i\}$ , on a toujours, pour  $i \neq 0$ :  $2\Lambda_i = \emptyset$ . Lorsque  $\Lambda'_0 \neq \emptyset$ , on peut avoir des classes  $\Lambda_i$ ,  $2\Lambda_i, \dots, p\Lambda_i$  non vides,  $(p+1)\Lambda_i = \emptyset$ ;  $p$  pouvant prendre l'une quelconque des valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dans certains cas, on peut aussi obtenir:

$\Lambda_1, 2\Lambda_1, \dots, p\Lambda_1$  non vides,  $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$ ,  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p$  formant un groupe cyclique.

#### § 4. Sous-systèmes saturés. Centre et caractères

##### 4.1

**DÉFINITION 4.1:** Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé du système  $\Lambda$ ; *le saturé*  $\bar{\Lambda}_0$  de  $\Lambda_0$  dans  $\Lambda$  est l'intersection du support  $R^r$  de  $\Lambda_0$  et de  $\Lambda$ . C'est un sous-système fermé, qui vérifie  $\bar{\bar{\Lambda}}_0 = \bar{\Lambda}_0$ . On a  $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda$  lorsque  $\Lambda_0$  est de rang 1.

**DÉFINITION** On dit que le sous-système fermé  $\Lambda_0^*$  de  $\Lambda$  est un *simplifié* de  $\Lambda_0$  si  $\Lambda_0^*$  et  $\Lambda_0$  ont même rang, si  $\Lambda_0^* \subset \Lambda_0$  et si  $\Lambda_0^*$  ne contient aucun sous-système fermé  $\neq 0$  propre de même rang.

Tout sous-système fermé  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  admet un saturé unique  $\bar{\Lambda}_0$ ; il admet au moins un simplifié  $\Lambda_0^*$ . Tout simplifié est du type  $A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_k}$ , et tout sous-système fermé d'un simplifié est encore un simplifié.

**PROPOSITION 4.1:** *Tout sous-système fermé  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  est saturé dans un système de rang maximum.*

Si  $\mu_1, \dots, \mu_r$  ( $r < 1$ ) est une base entière de  $\Lambda_0$ , on prend  $\mu_{r+1}, \dots, \mu_l \in \Lambda$  en sorte que  $\mu_1, \dots, \mu_l$  soient libres dans  $R^l$ . Les éléments de  $\Lambda$  qui sont des  $\mathbb{Z}$ -combinaisons linéaires de  $\mu_1, \dots, \mu_l$  forment un sous-système fermé  $\Lambda_0^*$  de rang  $l$  dans lequel  $\Lambda_0$  est saturé.

##### 4.2 Sous-systèmes saturés et suites fondamentales

**PROPOSITION 4.2:** *Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ ; pour que  $\Lambda_0$  soit saturé dans  $\Lambda$ , il faut et il suffit qu'il existe une suite fondamentale de  $\Lambda_0$  contenue dans une suite fondamentale de  $\Lambda$ .*

Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  est une suite fondamentale de  $\Lambda_0$ , contenue dans la suite fondamentale  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$  de  $\Lambda$ , alors, d'après la définition,  $\Lambda_0$  est saturé dans  $\Lambda$ .

Réiproquement, supposons  $\Lambda_0$  saturé dans  $\Lambda$ ; soient  $R'$  le support de  $\Lambda_0$  ( $r < l$ ),  $R^{l-r}$  le supplémentaire orthogonal de  $R'$  dans  $R^l$ .

Si  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda \notin \Lambda_0$  on a  $\lambda \notin R'$ ; la restriction  $\bar{\lambda}$  de  $\lambda$  à  $R^{l-r}$  n'est pas nulle;  $\bar{\lambda} = 0$  définit un  $(l-r-1)$ -plan de  $R^{l-r}$ , noté  $\pi_\lambda$ . La réunion de tous les  $\pi_\lambda$  est une partie  $F$  fermée de  $R^{l-r}$ .

Je désigne par  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$  les composantes connexes du complémentaire de  $F$  dans  $R^{l-r}$ ; ces  $\mathcal{D}_1$  sont ouverts, connexes, et même convexes: ce sont les chambres de  $\Lambda \setminus \Lambda_0$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}$ ; une chambre de Weyl (ouverte)  $P_\varphi$  de  $\Lambda$  est dite adjacente à  $x$  si  $x$  est adhérent à  $P_\varphi$ :  $x \in \bar{P}_\varphi$ ; si dans ce cas,  $y \in P_\varphi$ , le segment  $u = (x, y)$  est dans  $\bar{P}_\varphi$ . Sur  $y$ , les racines  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  qui définissent  $P_\varphi$  sont toutes  $> 0$ ; il en est de même en chaque point de  $u$ , sauf en  $x$ , où elles sont  $\geq 0$ . Avec de bonnes notations:

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} \varphi_1(x) &= \dots = \varphi_{r'}(x) = 0 \\ \varphi_{r'+1}(x) &> 0, \dots, \varphi_l(x) > 0. \end{aligned}$$

La forme  $\varphi_j$  ( $j \leq r'$ ) étant nulle en un point  $x$  intérieur à  $\mathcal{D}_1$  est, par définition de  $F$ , nulle sur  $R^{l-r}$ ; alors

$$\begin{aligned} \varphi_j &\in R' \cap \Lambda, \quad \text{d'où} \\ \varphi_1, \dots, \varphi_{r'} &\in \Lambda_0. \end{aligned}$$

D'autre part, soit  $\mu \in \Lambda_0$ ; on a

$$\mu = \sum_1^l m_i \varphi_i \quad m_i \in \mathbf{Z}, \quad m_i \text{ nuls ou tous de même signe.}$$

Alors

$$0 = \mu(x) = m_{r'+1} \varphi_{r'+1}(x) + \dots + m_l \varphi_l(x)$$

et par a):  $m_{r'+1} = \dots = m_l = 0$ ; il vient

$$\mu = m_1 \varphi_1 + \dots + m_{r'} \varphi_{r'}, \quad \text{et} \quad r' = r.$$

Ainsi  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  est une suite fondamentale de  $\Lambda_0$ , contenue dans  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l\}$ , qui est une suite fondamentale de  $\Lambda$ .

Par usage du groupe de Weyl de  $\Lambda_0$ , on voit de plus que toute suite fondamentale de  $\Lambda_0$  a aussi cette propriété.

**COROLLAIRE:** *On obtient tous les sous-systèmes  $\Lambda_0$  saturés dans  $\Lambda$ , en prenant une partie quelconque  $\mu_1, \dots, \mu_r$  d'une suite fondamentale  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  de  $\Lambda$ .  $\Lambda_0$  est constitué par les  $\mathbf{Z}$ -combinaisons linéaires de  $\mu_1, \dots, \mu_r$  qui appartiennent à  $\Lambda$ .*

#### 4.3 Centre d'un sous-système

**DÉFINITION 4.2:** *Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ .*

$$\mathcal{Z}_0 = \{x \in R^l \mid (x, \Lambda_0) \subset \mathbf{Z}\}$$

*est par définition le centre de  $\Lambda_0$  dans  $R^l$ .*

Le centre  $\mathcal{Z}_0$  est un sous-groupe additif de  $R^l$ . A une inclusion de sous-systèmes fermés  $\{0\} \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \dots \subset \Lambda$  correspond  $R^l \supset \mathcal{Z}_0 \supset \mathcal{Z}_0^* \supset \dots \supset \mathcal{Z}$ .

**PROPOSITION 4.3:** *Si  $\Lambda_0, \Lambda_0^*$  sont deux sous-systèmes fermés de  $\Lambda$ , distincts, alors les centres  $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_0^*$  sont distincts.*

Soit  $\mu_1, \dots, \mu_r$  une base entière de  $\Lambda_0$ , sous-tendant  $R^r$ ; prenons  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda \notin \Lambda_0$ . Il suffit de montrer qu'il existe un  $v \in \mathcal{Z}_0$ , avec  $\lambda(v) \notin \mathbf{Z}$ .

Deux cas se présentent:

$$\text{a)} \quad \lambda = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r \quad \text{avec} \quad m_i \notin \mathbf{Z}.$$

Ici on prend  $v \in R^r$ , avec  $\mu_1(v) = 1, \mu_2(v) = \dots = \mu_r(v) = 0$  alors  $v \in \mathcal{Z}_0$ , et  $\lambda(v) = m_1 \notin \mathbf{Z}$ .

$$\text{b)} \quad \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r \quad \text{sont linéairement indépendants.}$$

On prend  $v \in R^l$  tel que  $\lambda(v) = \frac{1}{2}, \mu_1(v) = \dots = \mu_r(v) = 0$ .

**PROPOSITION 4.4:** *Toute forme linéaire sur  $R^l$ , entière sur le centre  $\mathcal{Z}_0$  du sous-système fermé  $\Lambda_0$ , est  $\mathbf{Z}$ -combinaison linéaire d'éléments de  $\Lambda_0$ .*

Si  $\varrho$  est cette forme, elle s'annule sur le supplémentaire  $R^{l-r}$  du support  $R^r$  de  $\Lambda_0$ . Si  $\mu_1, \dots, \mu_r$  est une base entière de  $\Lambda_0$ , on a  $\varrho = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r$ . Il existe  $v_1, \dots, v_r \in R^r$  avec  $\mu_i(v_j) = \delta_{ij}$  (Symbole de Kronecker); ainsi  $v_1, \dots, v_r \in \mathcal{Z}_0$ ,  $\varrho(v) = m_j \in \mathbf{Z}$  cqfd.

#### 4.4 Structure du centre d'un sous-système saturé

**PROPOSITION 4.5:** *Soient  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ ,  $\mathcal{Z}_0$  son centre,  $\mathcal{Z}$  celui de  $\Lambda$ . Pour que  $\Lambda_0$  soit saturé dans  $\Lambda$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$  soit un tore.*

Supposons  $\Lambda_0$  saturé; soit  $R^r$  son support, de supplémentaire  $R^{l-r}$ . Il suffit de prouver que toute classe de  $\mathcal{Z}_0 \bmod R^{l-r}$  contient un élément de  $\mathcal{Z}$ .

Soit  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  une suite fondamentale de  $\Lambda_0$  contenue dans une suite fondamentale  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l\}$  de  $\Lambda$ .

Pour  $v \in \mathcal{Z}_0$ , on a

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2, \quad \text{où} \quad v_1 \in R^r, \quad v_2 \in R^{l-r}, \quad \text{et} \\ \varphi_i(v) &= \varphi_i(v_1) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $v_1 \in \mathcal{Z}_0$ . Cherchons  $u \in R^{l-r}$  en sorte que

$$\varphi_i(v + u) \in \mathbf{Z}, \quad v_1 = 1, 2, \dots, l$$

c'est à dire  $v_1 + u \in \mathcal{Z}$ . On a

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(v_1 + u) &= \varphi_1(v_1) \in \mathbf{Z} \\ \varphi_r(v_1 + u) &= \varphi_r(v_1) \in \mathbf{Z} \end{aligned} \right\} \quad \forall u \in R^{l-r}.$$

Posons  $\varphi_i(v_1 + u) = 0 \quad i = r+1, \dots, l$ , d'où  $\varphi_i(u) = -\varphi_i(v_1)$ .

On a un système de  $l-r$  équations indépendantes pour  $u \in R^{l-r}$ ; il y a une solution  $u_0$  et une seule, et  $v_1 + u_0 \in \mathcal{Z}$ .

Réiproquement, supposons que  $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$  soit un tore, c'est à dire que chaque classe de  $\mathcal{Z}_0 \bmod R^{l-r}$  contienne un élément de  $\mathcal{Z}$ .

Soit  $v + R^{l-r}$  une classe de  $\mathcal{Z}_0 \bmod R^{l-r}$ , où

$$v = v_1 + v_2 \in \mathcal{Z}_0, \quad v_1 \in \mathcal{Z}_0.$$

Il existe  $x \in R^{l-r}$  avec  $v_1 + x \in \mathcal{Z}$ .

Si  $\mu_1, \dots, \mu_r$  est une base entière de  $\Lambda_0$ , et si

$$\mu = m_1 \mu_1 + \dots + m_r \mu_r \in \bar{\Lambda}_0, \quad \text{on a}$$

$$\mu(v_1 + x) \in \mathbf{Z}, \quad m(v_1) \in \mathbf{Z}; \quad \text{ainsi}$$

$$\mu(v) \in \mathbf{Z}, \quad \forall v \in \mathcal{Z}_0 \quad \text{et} \quad \mu \in \Lambda_0.$$

On a  $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0$  cqfd.

**REMARQUE 1:** Lorsque  $\Lambda_0$  n'est pas saturé, on a  $\Lambda_0 \subset \bar{\Lambda}_0 \subset \Lambda$ , d'où

$$\mathcal{Z}_0 \supset \bar{\mathcal{Z}}_0 \supset \mathcal{Z} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_0 \mid \bar{\mathcal{Z}}_0 \sim (\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}) / (\bar{\mathcal{Z}}_0 \mid \mathcal{Z}).$$

$\mathcal{Z}_0 \mid \bar{\mathcal{Z}}_0$  est un groupe fini, tandis que  $\bar{\mathcal{Z}}_0 \mid \mathcal{Z}$  est un tore; ainsi

$\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$  est une extension de ce tore par un groupe fini.

**REMARQUE 2:** Lorsque  $\Lambda_0$  n'est pas saturé, on a encore  $\Lambda_0$  saturé dans un  $\Lambda_0^*$  de rang maximal:

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* \subset \Lambda \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_0 \supset \mathcal{Z}_0^* \supset \mathcal{Z} \quad \text{avec} \quad \mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}_0^* \sim (\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}) / (\mathcal{Z}_0^* \mid \mathcal{Z}).$$

Le premier membre est un tore, tandis que  $\mathcal{Z}_0^* \mid \mathcal{Z}$  est un groupe fini.  $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$  contient ce groupe fini, avec un quotient toroïdal.

#### 4.5 Caractères d'une inclusion $\Lambda_0 \subset \Lambda$

Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé du système  $\Lambda$ , et  $\mathcal{Z}_0$  son centre dans  $R^l$ ; soit

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de  $\Lambda$  en classes mod  $\Lambda_0$ . Soit  $\mu \in \Lambda$ ; je pose

$$\mu^* = (\mu \mid \mathcal{Z}_0) \bmod 1.$$

C'est par définition le caractère de  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  associé à  $\mu$ ;  $\mu^*$  est une fonction définie sur  $\mathcal{Z}_0 \mid \mathcal{Z}$ , à valeurs dans  $T = R/\mathbf{Z}$ .

Si  $\mu, \mu' \in \Lambda_i$ , on a

$$\mu' = \mu + \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z}, \quad \mu_1, \dots, \mu_r \quad \text{base entière de } \Lambda_0.$$

Sur  $\mathcal{Z}_0$  les  $\mu_i$  sont entiers, d'où  $\mu'^* = \mu^*$ .

Réiproquement, si  $\mu, \mu' \in \Lambda$  sont tels que  $\mu^* = \mu'^*$ , alors  $\mu' - \mu$  est une forme linéaire

sur  $R^l$  entière sur  $\mathcal{Z}_0$ ; d'après la proposition 2 de 4.3, on a

$$\mu' - \mu = \sum_1^r m_i \mu_i \quad m_i \in \mathbf{Z} \quad \text{d'où} \quad \mu, \mu' \in \Lambda_k.$$

Par ailleurs, si  $\mu, \mu', \mu + \mu' \in \Lambda$ , on a  $(\mu + \mu')^* = \mu^* + \mu'^*$ .

**PROPOSITION 4.6:** *La loi  $\mu \rightarrow \mu^*$  détermine un isomorphisme de  $\Lambda | \Lambda_0$  sur l'ensemble des caractères de  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ .*

Lorsque  $\Lambda_0$  est saturé, chaque caractère est défini sur le tore  $T^{l-r}$ .

## § 5. Loi-quotient $\Lambda | \Lambda_0$ lorsque $\Lambda_0$ est saturé dans $\Lambda$

### 5.1 Détermination pratique de la loi-quotient

**PROPOSITION 5.1:** *Soit  $\Lambda_0$  un sous-système saturé dans  $\Lambda$ ; pour que deux racines  $\mu, \mu' \in \Lambda$  appartiennent à une même classe mod  $\Lambda_0$ , il faut et il suffit que leurs restrictions  $\bar{\mu}, \bar{\mu}'$  au supplémentaire orthogonal  $R^{l-r}$  du support de  $\Lambda_0$  coïncident.*

Si  $\mu, \mu' \in \Lambda_i$ ,  $\mu' - \mu$  est une forme entière sur  $\mathcal{Z}_0$ , entière sur  $R^{l-r}$ , donc nulle sur ce sous-espace.

Réciproquement, si  $\bar{\mu} = \bar{\mu}'$ , on a  $\mu^* = \mu'^*$  sur le tore  $\mathcal{Z}_0 | \mathcal{Z}$ , et  $\mu, \mu'$  sont dans une même classe mod  $\Lambda_0$ .

Ainsi, on déduit  $\Lambda | \Lambda_0$  de  $\Lambda$  en prenant les restrictions à  $R^{l-r}$  des  $\mu \in \Lambda$ . Pratiquement, si

$$\Lambda = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l, \dots, \sum_1^l m_i \varphi_i, \dots\}$$

il suffit de supprimer partout  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ,

$$\Lambda | \Lambda_0 = \{\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l, \dots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \dots\}.$$

Les éléments de  $\Lambda | \Lambda_0$  sont des  $\mathbf{Z}$ -combinaisons linéaires de  $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$  à coefficients nuls ou tous de même signe.

### 5.2 Ensemble des inclusions de suites fondamentales correspondant à $\Lambda_0 \subset \Lambda$

**PROPOSITION 5.2:** *Soit  $\Lambda_0$  un sous-système saturé dans  $\Lambda$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  une suite fondamentale de  $\Lambda_0$  et  $\mu_1, \dots, \mu_s$  classes de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$ . Pour qu'il existe  $\mu_i \in \bar{\mu}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) de façon que  $\varphi_1, \dots, \varphi_2, \mu_1, \dots, \mu_s$  soit une suite fondamentale de  $\Lambda$ , il faut et il suffit que*

- 1) Pour tout couple  $(i, j)$   $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, s$ :  $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda | \Lambda_0$ , et
- 2)  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$  forment une base entière de  $\Lambda | \Lambda_0$ , ( $s = l - r$ ).

*La condition est nécessaire:* Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_2, \mu_1, \dots, \mu_s$  est une suite fondamentale de  $\Lambda$  alors  $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j$  n'est pas une classe vu que  $\mu_i - \mu_j \notin \Lambda$ , et  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$  engendrent  $\Lambda | \Lambda_0$  par combinaisons linéaires à coefficients entiers.

*La condition est suffisante:* soient  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$ ,  $s = l - r$  classes vérifiant 1) et 2). Pre-

nons  $\mu_i \in \bar{\mu}_i$  tel que  $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda$ ,  $j = 1, \dots, r$ . On a par ailleurs  $\mu_i - \mu_k \notin \Lambda$  ( $i \neq k$ ), sinon  $\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_k$  serait une classe. Ainsi la différence des deux racines quelconques dans  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_s$  n'est pas une racine.

Soit  $\mu \in \Lambda$ ; on a par hypothèse  $\bar{\mu} = m_1 \bar{\mu}_1 + \dots + m_s \bar{\mu}_s$ ,  $m_i \in \mathbf{Z}$ .

Alors  $m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s$  est de la forme

$$\mu - \sum_1^r n_i \varphi_i, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \text{d'où} \quad \mu = \sum_1^r n_i \varphi_i + \sum_1^s m_i \mu_i.$$

Ainsi  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_{l-r}$  est une base entière de  $\Lambda$  telle que la différence de deux de ses éléments distincts quelconques ne soit pas dans  $\Lambda$ . D'après la proposition 2.3,  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_1, \dots, \mu_{l-r}$  est une suite fondamentale de  $\Lambda$ .

**SCHOLIE:** Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  une suite fondamentale du sous-système  $\Lambda_0$  saturé dans  $\Lambda$ , et  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \dots, \varphi_l$  une suite fondamentale de  $\Lambda$  contenant la précédente. On obtient toutes les suites fondamentales de  $\Lambda$  qui contiennent  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  en constituant la loi-quotient:

$$1) \quad \pm \bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \pm \bar{\varphi}_l, \dots, \sum_{r+1}^l m_i \bar{\varphi}_i, \dots$$

puis en déterminant les suites  $\bar{\mu}_{r+1}, \dots, \bar{\mu}_l$  extraites de 1) telles que

$$\text{a)} \quad \bar{\mu}_i - \bar{\mu}_j \notin \Lambda \mid \Lambda_0 \quad \text{b)} \quad \bar{\mu}_{r+1}, \dots, \bar{\mu}_l \text{ base entière de } \Lambda \mid \Lambda_0.$$

Les  $\mu_i \in \bar{\mu}_i$  tels que  $\mu_i - \varphi_j \notin \Lambda$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ) constituent avec  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  une telle suite fondamentale  $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_l$  de  $\Lambda$ .

### 5.3 Caractérisation des domaines $\mathcal{D}_i$

**PROPOSITION 5.3:** Soit  $\Lambda_0$  un sous-système saturé de  $\Lambda$ ; toute chambre  $\mathcal{D}$  de  $\Lambda \mid \Lambda_0$  est définie par des relations

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_r = 0, \quad \varphi_{r+1} > 0, \dots, \varphi_l > 0$$

où  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  ( $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ ) est une suite fondamentale de  $\Lambda$  resp. ( $\Lambda_0$ ).

Reprendons les notations de 4.2, avec  $x \in \mathcal{D}_1$ ; on a

$$1) \quad \varphi_1(x) = \dots = \varphi_r(x) = 0, \quad \varphi_{r+1}(x) > 0, \dots, \varphi_l(x) > 0.$$

Par définition de  $\mathcal{D}_1$ , chaque racine de  $\Lambda$  est ou bien nulle sur  $\mathcal{D}_1$ , ou bien garde un signe constant. Les relations 1) ont donc lieu pour tout  $y \in \mathcal{D}_1$ .

Réciproquement, soit  $z \in R^l$  vérifiant

$$\varphi_1(z) = \dots = \varphi_r(z) = 0; \quad \varphi_{r+1}(z) > 0, \dots, \varphi_l(z) > 0.$$

On a d'abord  $z \in R^{l-r}$ ; sur le segment  $(z, x)$ , la forme  $\varphi_{r+j}$  ( $1 \leq j \leq l-r$ ), qui est positive aux extrémités, est positive sur tout le segment; il en est de même de  $\bar{\varphi}_{r+j}$ .

Toutes les formes  $\lambda \in \Lambda | \Lambda_0$  gardent alors un signe constant sur  $(z, x)$ , d'où  $(z, x) \subset D_1, z \in \mathcal{D}_1$ .

Maintenant, si  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$  est la base duale de  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_i, \varphi_j) &= \delta_{ij}; \quad \text{on a} \\ z &= \lambda_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \dots + \lambda_l \varepsilon_l \end{aligned}$$

car  $R^{l-r}$  est engendré par  $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$ ;  $\varphi_\alpha(z) > 0 \ \alpha \in (r+1, \dots, l)$  s'écrit alors  $\lambda_\alpha > 0$ .

**COROLLAIRE:**  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$  étant la base duale de  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ , la chambre associée à cette suite dans  $R^{l-r}$  est le premier quadrant relatif au repère  $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$  de  $R^{l-r}$ .

En écrivant

$$\bar{\varphi}_{r+j}(z) = (\bar{\varphi}_{r+j}, z), \quad \text{on obtient sans peine.}$$

**PROPOSITION:**  $\bar{\varphi}_{r+1}, \dots, \bar{\varphi}_l$  est la base duale de  $\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_l$  dans  $R^{l-r}$ .

#### 5.4 $\Lambda$ -systèmes modulo un sous-système saturé

Soit  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système dans  $R^l$ , et  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ ; soit  $R^{l-r}$  le supplémentaire orthogonal du support  $R^r$  de  $\Lambda_0$ . Je me propose d'étudier ici la projection orthogonale  $\bar{\Delta}$  de  $\Delta$  sur  $R^{l-r}$ ;  $\bar{\Delta}$  est le  $\Lambda$ -système  $\Delta$  modulo  $\Lambda_0$ .

Si  $\Delta = \mathcal{S}$  est un système de racines secondaires de  $\Lambda$ ,  $\mathcal{S}$  est dit système de racines secondaires de  $\Lambda | \Lambda_0$ . Si  $\Delta = \Lambda$ ,  $\Lambda$  est dit système de racines de  $\Lambda | \Lambda_0$ . Cette étude est surtout intéressante lorsque  $\Lambda_0$  est saturé.

**PROPOSITION 5.4:** Soit  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système dans  $R^l$ ,  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$  et  $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_s$  la partition de  $\Delta$  modulo  $\Lambda_0$ . Chaque face  $\Delta_i$  se projette sur un point de  $R^{l-r}$ : le centre de cette face.

Soient  $\mu, \mu' \in \Delta_i$ ;  $\mu' - \mu$  étant dans  $R^r$ ,  $\mu$  et  $\mu'$  ont même projection sur  $R^{l-r}$ , et  $\Delta_i$  se projette sur  $\sigma_i \in R^{l-r}$ .

Soit maintenant

$$\sigma_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{\alpha \in \Delta_i} \alpha, \quad n_i \text{ nombre d'éléments dans } \Delta_i$$

le centre de  $\Delta_i$ . Le groupe de Weyl  $W_0$  associé à  $\Lambda_0$  conserve  $\Delta_i$  et conserve donc  $\sigma_i^*$ ; cela implique  $\sigma_i^* \in R^{l-r}$ .

Ainsi,  $\sigma_i^*$  est un point du support plan de  $\Delta_i$  situé dans  $R^{l-r}$ , et on a vu que ce support se projette sur un point  $\sigma_i$ . On a  $\sigma_i = \sigma^*$  cqfd.

**COROLLAIRE:** Si  $\Lambda_0$  est de rang maximum 1, les centres des faces de la partition  $\Delta$  mod  $\Lambda_0$  sont tous en 0.

Ici  $R^{l-r} = \{0\}$ .

**PROPOSITION 5.5:** Soit  $\Delta$  un  $\Lambda$ -système connexe, et  $\Lambda_0$  un sous-système saturé de rang

$r$  de  $\Lambda$ . Dans la projection orthogonale  $R^l \rightarrow R^{l-r}$ , deux faces distinctes de  $\Lambda$  modulo  $\Lambda_0$  ont pour image deux points distincts.

Soient  $\tau, \tau' \in \Lambda$  se projetant sur  $\gamma \in R^{l-r}$ .

On a:

$$1) \quad \tau' = \tau + \sum_1^r m_i \alpha_i$$

en supposant que  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ( $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_l$ ) est une suite fondamentale de  $\Lambda_0$  (resp.  $\Lambda$ ).

Comme  $\Lambda$  est connexe, on peut écrire

$$\tau' = \tau + \sum b_i \beta_i, \quad b_i \in \mathbf{Z}, \quad \beta_i \in \Lambda$$

où

$$\beta_i = \sum_1^l b_{i,k} \alpha_k, \quad b_{i,k} \in \mathbf{Z}$$

d'où encore

$$\tau' - \tau = \sum_{i,k} b_i b_{i,k} \alpha_k = \sum b'_k \alpha_k, \quad b'_k \in \mathbf{Z}$$

$$2) \quad \tau' = \tau + \sum_1^l b'_k \alpha_k \quad b'_k \in \mathbf{Z}.$$

Comparant 1) et 2), on voit que  $m_1, \dots, m_r$  sont entiers, ce qui signifie que  $\tau, \tau'$  sont dans une même face  $\Lambda_i$  de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$ .

COROLLAIRE 1: Pour  $\Lambda$  connexe et  $\Lambda_0$  saturé, les centres des faces de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$  sont distincts.

COROLLAIRE 2: Lorsque  $\Lambda_0$  est saturé, le système des racines de  $\Lambda | \Lambda_0$  est constitué par les centres des faces de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$ .

COROLLAIRE 3: Soit  $\mathcal{S}$  un système de racines secondaires de  $\Lambda$ , et  $\Lambda_0$  un sous-système saturé de  $\Lambda$ . Le système  $\overline{\mathcal{S}}$  des racines secondaires de  $\Lambda | \Lambda_0$  est constitué par les centres des faces de  $\mathcal{S}$  mod  $\Lambda_0$ .

### 5.5 Sous-systèmes saturés de $A_l$ et loi-quotient

Pour étudier l'algèbre semi-simple  $A_l$ , on se sert du simplexe régulier fondamental

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(A_l) = \{\tau_1, \dots, \tau_{l+1}\}$$

où

$$\sum_1^{l+1} \tau_i = 0, \quad (\tau_i, \tau_i) = l/(l+1), \quad (\tau_i, \tau_j) = -1/(l+1).$$

Le système des racines de  $A_l$  est constitué par toutes les arêtes de  $\mathcal{S}$ .

Pour étudier un sous-système fermé quelconque de  $A_l$  (toujours saturé), on se sert

d'une partition

$$p_1 \cup \dots \cup p_{s+1} \text{ de } 1, 2, \dots, l+1$$

où  $p_i$  a  $r_i$  éléments. Les faces de  $\mathcal{S}$  mod  $\Lambda_0$  sont les  $s+1$  ensembles

$$P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad \text{et} \quad \Lambda_0 = \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_i; i = 1, \dots, s+1\}.$$

Le polyèdre des racines secondaires de  $\Lambda \mid \Lambda_0$  est constitué par les centres des faces  $P_i$

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \left\{ \mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_{s+1} = \frac{1}{r_{s+1}} \sum_{\alpha \in p_{s+1}} \tau_\alpha \right\}.$$

Cela détermine les racines de  $\Lambda \mid \Lambda_0$  qui ne sont autres que les arêtes de  $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$ .

$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$  est un simplexe dans  $R^{l-r}$ , en général non régulier. Un calcul simple montre que  $l-r=s$ .

**PROPOSITION 5.6:** *Les racines de  $\Lambda \mid \Lambda_0$  sont toutes les arêtes du simplexe constitué par les centres des faces de  $\Lambda_0$ .*

### 5.6 Sous-systèmes saturés de $B_l$ et loi-quotient

Si  $\tau_1, \dots, \tau_l$  est un repère orthonormal de  $R^l$ , on pose  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(B_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l, 0\}$   $2l+1$  points. Le système des racines de  $B_l$  est formé de toutes les arêtes de  $\mathcal{S}$  sauf les  $\pm(\tau_i - (-\tau_i)) = \pm 2\tau_i$ : on obtient:

$$\Lambda = \Lambda(B_l) = \{\pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j; i, j = 1, \dots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque  $\Lambda_0$ , il suffit de se donner une partition de  $\{1, 2, \dots, l\}$

$$(p_0) \cup p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_k, \quad p_0 \text{ éventuellement vide}$$

$p_i$  ayant  $r_i$  éléments,  $r_1, \dots, r_k > 0$ ,  $r_0$  éventuellement nul. Les faces de  $\Lambda_0$  sont alors

$$P_0 = \{0, \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\}, \quad P_1 = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \dots P_k = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\} \\ P'_1 = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\} \dots P'_k = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

On a

$$\Lambda_0 = \text{ensemble de toutes les arêtes des } P_0, P_i, P'_i$$

sauf les  $\pm(\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)) = \pm 2\tau_\alpha, \forall \alpha \in p_0$ .

$$= \{\pm \tau_\alpha, \pm \tau_\alpha \pm \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_0\} \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_1\} \cup \dots \cup \{\tau_\alpha - \tau_\beta \mid \alpha, \beta \in p_k\}.$$

Le rang de  $\Lambda_0$  est ici

$$r_0 + (r-1) + \dots + (r_k-1) = \sum r_i - k = l - k = r$$

d'où  $l-r=k$ .

Le supplémentaire orthogonal  $R^{l-r} = R^k$  du support  $R^r$  de  $\Lambda_0$  est engendré par les

centres des faces de  $\mathcal{S} \text{ mod } \Lambda_0$ :

$$\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\Lambda | \Lambda_0) = \{0, \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\}; \mu_i = \frac{1}{r_i} \sum_{\alpha \in p_i} \tau_\alpha.$$

Notons que  $\mu_1, \dots, \mu_k$  est un repère orthogonal de  $R^{l-r}$ .

**PROPOSITION 5.7:** *Les racines de  $\Lambda | \Lambda_0$  sont les arêtes de  $\mathcal{S}(\Lambda | \Lambda_0)$ , c'est à dire toutes les expressions  $\pm \mu_i, \pm \mu_i \pm \mu_j$  et de plus toutes les  $\pm 2\mu_j$  pour lesquelles  $r_j > 1$ .*

*Exemple:*

$$\begin{aligned} p_0 &= \emptyset, & p_1 &= \{1\}, & p_2 &= \{2, 3, 4\} \\ P_0 &= \{0\} & P_1 &= \{\tau_1\} & P_2 &= \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\} \\ P'_0 &= \{-\tau_1\} & P'_1 &= \{-\tau_1\} & P'_2 &= \{-\tau_2, -\tau_3, -\tau_4\} \end{aligned}$$

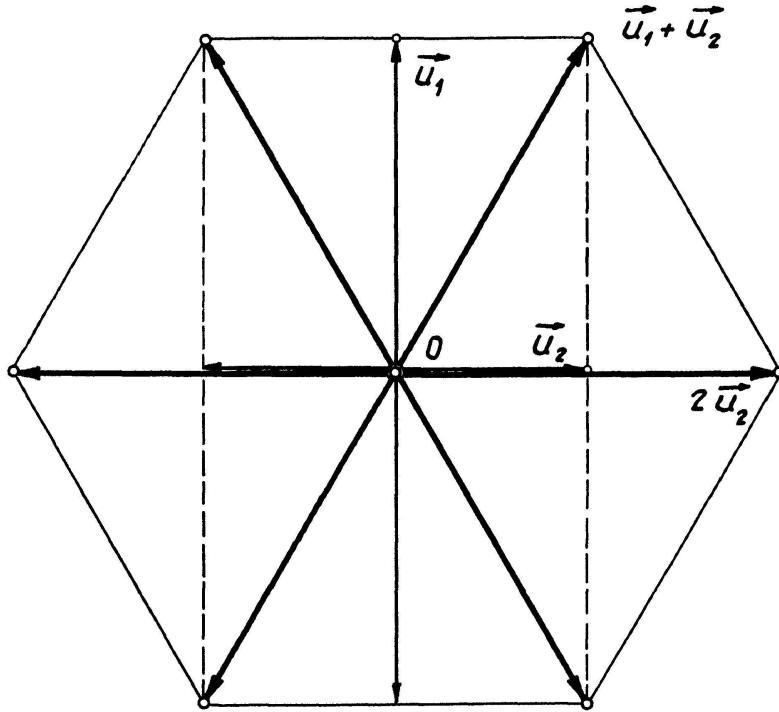
$\Lambda_0$  a pour racines:  $\pm(\tau_2 - \tau_3), \pm(\tau_3 - \tau_4), \pm(\tau_2 - \tau_4)$  et est du type  $A_2$ .

$\Lambda | \Lambda_0$  est déterminée par

$$0, \quad \mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = (\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/3$$

et admet les racines:

$$0, \pm \mu_1, \pm \mu_2, \pm \mu_1 \pm \mu_2, \pm 2\mu_2.$$



### 5.7 Sous-systèmes saturés de $C_l$ et loi-quotient

Soit  $\tau_1, \dots, \tau_l$  un repère orthonormal de  $R^l$ , et

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\} \quad 2l \text{ points.}$$

Les racines de  $C_l$  sont toutes les arêtes de  $\mathcal{S}$ , sans exception:

$$\Lambda = \{\pm \tau_i \pm \tau_j, \pm 2\tau_i \mid i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, l\}.$$

Pour étudier un sous-système saturé quelconque, il suffit de se donner une partition  $(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k$  ayant  $r_i$  éléments, avec  $r_0 \geq 0; r_1, \dots, r_k > 0$ .

On en déduit une partition de  $\mathcal{S}$ :

$$(P_0) = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\} \quad P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad P'_i = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad i = 1, \dots, k.$$

Les racines de  $\Lambda_0$  sont toutes les arêtes de  $(P_0), P_1, P'_1, \dots, P_k, P'_k$ ; le rang de  $\Lambda_0$  est  $l-k$ , d'où  $l-r=k$ . Le supplémentaire  $R^k$  du support  $R^r$  de  $\Lambda_0$  est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

et

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\} \quad (0 \text{ si } r_0 > 0).$$

**PROPOSITION 5.8:** *Les racines de  $\Lambda \mid \Lambda_0$  sont toutes les arêtes de  $\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0)$ , c'est à dire les  $\pm \mu_i \pm \mu_j, \pm 2\mu_j$  avec en plus les  $\pm \mu_j$  si  $r_0 > 0$ .*

### 5.8 Sous-systèmes saturés de $D_l$ et loi-quotient

Soit  $\tau_1, \dots, \tau_l$  un repère orthonormal de  $R^l$  et

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(D_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\} \quad 2l \text{ points.}$$

Les racines de  $D_l$  sont toutes les arêtes de  $\mathcal{S}$ , sauf les  $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha) = 2\tau_\alpha$ :

$$\Lambda = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \neq j; i, j = 1, \dots, l\}.$$

Pour constituer un sous-système saturé  $\Lambda_0$  quelconque, on se donne une partition

$$(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k \quad \text{de} \quad 1, 2, \dots, l$$

$p_i$  ayant  $r_i$  éléments:  $r_0 \geq 0; r_1, \dots, r_k > 0$ . On en déduit une partition de  $\mathcal{S}$ :

$$(P_0) = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_0\} \quad P_i = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad P'_i = \{-\tau_\alpha \mid \alpha \in p_i\} \quad i = 1, \dots, k$$

$P_0$  étant vide si  $p_0 = \emptyset$ .

Les racines de  $\Lambda_0$  sont toutes les arêtes des faces  $P_0, P_i, P'_i$ , sauf les  $\tau_\alpha - (-\tau_\alpha)$ ,  $\forall \alpha \in p_0$ .

Le rang de  $\Lambda_0$  est  $l-k$ . Ici  $R^{l-r} = R^k$  est engendré par les centres:

$$\mu_1 = \frac{1}{r_1} \sum_{\alpha \in p_1} \tau_\alpha, \dots, \mu_k = \frac{1}{r_k} \sum_{\alpha \in p_k} \tau_\alpha$$

$$\mathcal{S}(\Lambda \mid \Lambda_0) = \{(0), \pm \mu_1, \dots, \pm \mu_k\}.$$

**PROPOSITION 5.9:** *Les racines de  $\Lambda | \Lambda_0$  sont les arêtes de  $\mathcal{S}(\Lambda | \Lambda_0)$*

- a) si  $r_0 = 0$ :  $\pm m_i \pm m_j$ , et les  $2\mu_j$  où  $r_j > 1$
- b) si  $r_0 > 0$ :  $\pm \mu_i \pm \mu_j$ ,  $\pm \mu_j$ , et les  $\pm 2\mu_s$  où  $r_s > 1$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, l$ ).

## § 6. Loi-quotient lorsque le sous-système $\Lambda_0$ est de rang maximum

Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$  ayant même rang  $l$  que  $L$ . Le but de ce paragraphe est de donner le principe de la construction de tous les tels  $\Lambda_0$  contenus dans un système  $\Lambda$  donné.

Je me propose ensuite de donner la forme de la loi-quotient  $\Lambda/\Lambda_0$  lorsque  $\Lambda$  est simple, classique ( $A_l, B_l, C_l, D_l$ ).

Enfin, je crois utile d'étudier  $\Lambda/\Lambda_0$  pour toutes les algèbres simples, le système  $\Lambda_0$  étant minimal (de rang maximal  $l$ ); il s'agit ici de l'étude des simplifiés de  $\Lambda$ . A tout simplifié de  $\Lambda$ , on peut associer un système de générateurs remarquables de  $R^l$ , permettant de donner à l'expression des racines une forme standard.

### 6.1 Principe de la construction

Soit:

$$1) \quad \varphi_1, \dots, \varphi_{l_1}; \varphi_{l_1+1}, \dots, \varphi_{l_2}; \dots; \varphi_{l_t+1}, \dots, \varphi_{l_{t+1}}$$

une suite fondamentale de  $\Lambda$ , chaque suite partielle correspondant à une composante simple de  $\Lambda$ . Je construis les racines dominantes, respectivement:

$$2) \quad \omega_1, \quad \omega_2, \dots, \quad \omega_{t+1}$$

puis la suite

$$3) \quad \varphi_1 \cdots \varphi_{l_1}, -\omega_1; \varphi_{l_1+1}, \dots, \varphi_{l_2}, -\omega_2; \dots; \varphi_{l_t+1}, \dots, \varphi_{l_{t+1}}, -\omega_{t+1}.$$

En supprimant une racine quelconque dans chaque suite partielle de 3), on obtient une suite fondamentale d'un sous-système  $\Lambda_0$  fermé de rang maximal.

On recommence sur la suite obtenue l'opération effectuée sur 1) etc, de toutes les façons possibles. Cela fournit tous les  $\Lambda_0$  du type désiré, d'où possibilité d'étudier toutes les lois  $\Lambda/\Lambda_0$ .

Par ailleurs, à chaque tel  $\Lambda_0$  est associée une partition:

$$4) \quad \mathcal{S} = (\mathcal{S}_0) \cup \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$$

d'un système de racines secondaires  $\mathcal{S}$  de  $\Lambda$ . Les centres des faces  $\mathcal{S}_i$  sont tous en 0. En assimilant chaque  $\mathcal{S}_i$  à un élément, on peut déduire de 4) la forme de la loi-quotient.

### 6.2 Loi-quotient $\Lambda/\Lambda_0$ lorsque $\Lambda$ est simple du type $A_l, B_l, C_l, D_l$

**ALGÈBRE  $A_l$ :** Tout sous-système  $\Lambda_0$  de rang  $l$  coïncide avec  $\Lambda$ .

**ALGÈBRE  $B_l$ :** Soit

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(B_l) = \{0, \pm \tau_1, \pm \tau_2, \dots, \pm \tau_l\}$$

et

$$(p_0) \cup p_1 \cup \dots \cup p_k$$

une partition de  $1, 2, \dots, l$ ,  $p_i$  ayant  $r_i$  éléments, avec  $r_0 \geq 0$ ,  $r_1 > 0, \dots, r_k > 0$ . Les faces de  $\Lambda_0$  sont:

$$P_0 = \{0, \pm \tau_\alpha \mid \alpha \in P_0\}, P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in P_k\}$$

$\Lambda_0$  est de type

$$B_{r_0} \times D_{r_1} \times \dots \times D_{r_k}$$

avec les racines

$$\Lambda_0: \pm \tau_i, \quad \pm \tau_i \pm \tau_j; \quad \pm \tau_i \pm \tau_j; \quad \dots; \quad \pm \tau_i \pm \tau_j, \quad \begin{matrix} i, j \in p_0 \\ i \neq j \end{matrix}, \quad \begin{matrix} i, j \in p_1 \\ i \neq j \end{matrix}, \dots \quad \begin{matrix} i, j \in p_k \\ i \neq j \end{matrix}.$$

Les classes de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$  sont les

$$\begin{aligned} \Lambda_{0,i} &= \{\pm \tau_k, \pm \tau_k \pm \tau_j \mid k \in p_i; j \in p_0\} \\ \Lambda_{i,j} &= \{\pm \tau_k \pm \tau_m \mid k \in p_i; m \in p_j\} \end{aligned}$$

et la loi-quotient s'exprime par

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{i,j} &= \Lambda_0 & \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h,r} &= \Lambda_{m,r} \\ 2\Lambda_{0,i} &= \Lambda_0 & \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h',r=0} & \quad (m, h, h', r \text{ distincts}) \end{aligned}$$

où  $\Lambda_{i,j} = \Lambda_{j,i}$ .

**ALGÈBRE  $C_l$ :** ici

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(C_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\}$$

et on prend une partition

$$p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_k \quad (r_i \text{ éléments dans } p_i)$$

de  $1, 2, \dots, l$ . Les faces de  $\Lambda_0$  sont toutes de centre 0.

$$P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

$\Lambda_0$  est de type:

$$C_{r_1} \times \dots \times C_{r_k}.$$

Les classes mod  $\Lambda_0$  sont les

$$\Lambda_{m,h} = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \quad \Lambda_{m,h} = \Lambda_{h,m}$$

avec les règles de calcul

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{m,h} &= \Lambda_0 & \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h,r} &= \Lambda_{m,r} \\ \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h',r=0} & \quad (m, h, h', r, \text{ distincts}). \end{aligned}$$

ALGÈBRE  $D_l$ :

$$\mathcal{S} = (D_l) = \{\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l\}.$$

Si  $p_1 \cup \dots \cup p_k$  est une partition de  $1, 2, \dots, l$  où  $p_i$  a  $r_i \geq 2$  éléments, on a les faces de  $\Lambda_0$ :

$$P_1 = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_1\}, \dots, P_k = \{\pm \tau_\alpha \mid \alpha \in p_k\}.$$

Ici

$$\Lambda_0 = \{\pm \tau_i \pm \tau_j; \dots; \pm \tau_i \pm \tau_j\}, \quad \begin{matrix} i, j \in p_1 & \dots & i, j \in p_k \\ i \neq j & & i \neq j \end{matrix}$$

et

$$\Lambda_0 = D_{r_1} \times \dots \times D_{r_k}.$$

Les classes de  $\Lambda$  mod  $\Lambda_0$  sont les

$$\Lambda_{m,h} = \{\pm \tau_i \pm \tau_j \mid i \in p_m, j \in p_h\}, \quad L_{m,h} = L_{h,m}$$

avec les règles:

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{m,h} &= \Lambda_0 & \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h,r} &= \Lambda_{m,r} \\ \Lambda_{m,h} + \Lambda_{h',r} &= 0 & (m, h, h', r, \text{distincts}). \end{aligned}$$

### 6.3 Sous-systèmes $\Lambda_0$ minimaux de rang maximal

#### 6.3.1 SIMPLEXES DANS $R^s$

Prenons l'espace enclidien  $R^{s+1}$  pourvu d'un repère

1)  $\varrho \tau'_1, \dots, \varrho \tau'_{s+1}$  où  $\tau'_1, \dots, \tau'_{s+1}$  est orthonormal. Posons  $\varepsilon = \tau'_1 + \dots + \tau'_{s+1}$  et soit  $R^s$  le s-plan orthogonal à  $\varepsilon$ . En projetant les vecteurs 1) orthogonalement sur  $R^s$ , on obtient

$$2) \quad \tau_1 = \varrho(\tau'_1 - \varepsilon/(s+1)), \dots, \tau_{s+1} = \varrho(\tau'_{s+1} - \varepsilon/(s+1)). \quad \varrho(\dots)$$

Les vecteurs  $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$  forment un système de générateurs remarquables de  $R^s$ ; on a:

$$a) \quad \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{s+1} = 0$$

$$b) \quad \text{si } \sum_{i=1}^{s+1} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{s+1} y_i = 0, \quad \text{on a } \left( \sum_{i=1}^{s+1} x_i \tau_i, \sum_{i=1}^{s+1} y_i \tau_i \right) = \varrho^2 \sum_{i=1}^{s+1} x_i y_i$$

$$c) \quad (\tau_i, \tau_i) = \varrho^2 s/(s+1); \quad (\tau_i, \tau_j) = -\varrho^2/(s+1) (i \neq j) \\ (\tau_i - \tau_j, \tau_i - \tau_j) = 2\varrho^2.$$

Les vecteurs  $\tau_i - \tau_j$  forment le système des vecteurs-racines d'une algèbre simple  $A_s$ , de longueur  $\varrho\sqrt{2}$ . Les vecteurs  $\tau_1, \dots, \tau_{s+1}$  sont alors un système de racines secondaires de  $A_s$ .

6.3.2 LES SOUS-SYSTÈMES  $\Lambda_0$  DE RANG MAXIMUM  $l$  DANS  $\Lambda$ , minimaux de cette espèce, c'est à dire les simplifiés de  $\Lambda$ , sont tous du type  $A_{s_1} \oplus \dots \oplus A_{s_q}$ . Les vecteurs de  $\Lambda$  sont

- a) les racines des  $A_{s_1}, \dots, A_{s_q}$
- b) certaines combinaisons linéaires rationnelles de ces racines.

Lorsque  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_{s+1}}$  est un système de racines secondaires de  $A_{s_i}$ , alors les racines du type a) s'écrivent:

a)  $\tau_{1m} - \tau_{1m'}, \dots, \tau_{qm} - \tau_{qm'}$  (racines de  $\Lambda_0$ )

Les autres racines de  $\Lambda$  sont certaines combinaisons linéaires des  $\tau_{ij}$ , toujours de l'une des formes

$$2\tau, \quad \tau + \tau', \quad \tau + \tau' \pm \tau'', \quad \tau + \tau' + \tau'' + \tau'''$$

comme nous allons nous en assurer. Ci-dessous, je démontre ce fait pour les systèmes simples  $\Lambda$  de l'un des types  $D_l, E_6, E_7, E_8$ , en donnant les expressions correspondant à chaque  $\Lambda_0 \subset \Lambda$ ; le fait annoncé est ensuite directement vérifié pour  $B_l, C_l, F_4, G_2$ .

### 6.3.3 PRENONS:

$$\Lambda_0 = \{A_{s_1}, \dots, A_{s_q}\}$$

les racines de  $A_{sj}$  étant les  $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$ ; les vecteurs-racines ont ici tous la même longueur  $\sqrt{2}$  et  $\varrho = 1$ .

On veut trouver tous les vecteurs du type

$$\omega = \sum_i x_{1i} \tau_{1i} + \dots + \sum_i x_{qi} \tau_{qi} \quad \text{où} \quad \sum_i x_{1i} = 0, \dots, \sum_i x_{qi} = 0$$

capables de former avec les  $\tau_{jm} - \tau_{jm'}$  un système de vecteurs-racines d'un  $\Lambda$ .

On a:

$$(\omega, \omega) = 2, \quad \frac{2(\tau_{1m} - \tau_{1m'}, \omega)}{(\omega, \omega)} \in \{0, \pm 1\}$$

d'où  $x_{1m} - x_{1m'} \in \{0, \pm 1\}$ .  $x_{11} - x_{11}, x_{11} - x_{12}, x_{11} - x_{13}, \dots, x_{11} - x_{1s_1+1}$  sont des entiers, ce qui implique  $x_{11} = u_{11}/(s_1 + 1), u_{11} \in \mathbf{Z}$ ; de même  $x_{ij} = u_{ij}/(s_i + 1), u_{ij} \in \mathbf{Z}$ .

$u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1, s_1+1}$  sont des entiers dont les différences deux à deux ne peuvent prendre que l'une des valeurs  $0, s_1 + 1, -s_1 - 1$ .

Ils se partagent en deux classes d'entiers égaux à  $u_1, u_1 + s_1 + 1$  et

$$\omega = [u_1(\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) + (u_1 + s_1 + 1)(\tau_{1,r_1+1} + \dots + \tau_{1,s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \dots$$

En exprimant que  $\sum x_{1i} = 0$ , on obtient:

$$\omega = [(r_1 - s_1 - 1)(\tau_{11} + \dots + \tau_{1,r_1}) + r_1(\tau_{1,r_1+1} + \dots + \tau_{1,s_1+1})]/(s_1 + 1). \\ + \dots$$

Tenons compte de  $\sum \tau_{1i} = 0$ :

$$\omega = -(\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) - \dots - (\tau_{q1} + \dots + \tau_{qr_q}).$$

Enfin, tenant compte encore de  $\sum \tau_{ji} = 0$ , on a:

$$\omega = \pm (\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) \pm \dots \pm (\tau_{q1} + \dots + \tau_{qr_q}); \quad 2r_j \leq s_j + 1.$$

Il reste à vérifier que  $\sum r_j = 3$  ou  $4$ . On peut, pour la racine  $\omega$  considérée, remplacer certains systèmes  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_s}, \tau_{i_{s+1}}$  par les opposés, d'où

$$\begin{aligned}\omega &= (\tau_{11} + \dots + \tau_{1r_1}) + \dots + (\tau_{q1} + \dots + \tau_{qr_q}) \quad 2r_j \leq s_j + 1 \\ \omega &= -(\tau_{1,r_1+1} + \dots + \tau_{1,s_1+1}) - \dots - (\tau_{q,r_q+1} + \dots + \tau_{q,s_q+1}) \\ (\omega, \omega) &= \frac{r_1(s_1 + 1 - r_1)}{s_1 + 1} + \dots + \frac{r_q(s_q + 1 - r_q)}{s_q + 1} \\ (\omega, \omega) &= \sum r_j - \sum \frac{r_j^2}{s_j + 1}.\end{aligned}$$

En faisant usage de symétrie  $S_{\tau_{i_m}} - \tau'_{i_m}$ , on peut transformer les racines  $\omega$  en

$$\omega' = (\tau_{1,r_1+1} + \dots + \tau_{1,2r_1+1}) + \dots + (\tau_{q,r_q+1} + \dots + \tau_{q,2r_q+1}).$$

On supprime les termes pour lesquels  $r_j = 0$ . Alors

$$\begin{aligned}(\omega, \omega') &= - \sum_j \frac{r_j^2}{s_j + 1} \\ (\omega, \omega) - (\omega, \omega') &= \sum r_j.\end{aligned}$$

Si  $\omega' = -\omega$ , on a

$$(\omega, \omega') = -(\omega, \omega) = -2 \quad \text{et} \quad \sum r_j = 4;$$

Si  $\omega' \neq -\omega$ , on a  $(\omega, \omega') = -1$ , et  $\sum r_j = 3$ .

Le fait annoncé est établi. Nous allons donner les expressions dans chaque cas.

#### 6.3.4 SOUS-SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG MAXIMAL DES SYSTÈMES SIMPLES $D_l, E_6, E_7, E_8$

**ALGÈBRE  $D_l$ :**  $\pm \tau_i \pm \tau_j$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, l$ ) étant les racines de  $D_l$ , on obtient tous les sous-systèmes désirés en prenant une solution  $(k, k')$  quelconque de l'équation

$$3k + 2k' = l \quad K, K' \text{ entiers } \geq 0$$

et une partition de  $1, 2, \dots, l$  du type  $(k, k')$  notée:

$$11, 12, 13; 21, 22, 23; \dots; k1, k2, k3; 1'1, 1'2; \dots; k'1, k'2.$$

*Les racines secondaires du sous-système minimal de type  $(K, K')$  sont alors:*

$$\begin{cases} \mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 \\ \mu_{p2} = \tau_{p1} - \mu_{p1} \\ \mu_{p3} = \tau_{p2} - \mu_{p1} \\ \mu_{p4} = \tau_{p3} - \mu_{p1} \\ p = 1, \dots, k \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\ \mu_{q'2} = -\mu_{q'1} \\ \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - \mu_{q'1} \\ \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - \mu_{q'1} \\ q' = 1, \dots, k' \end{cases}.$$

On en déduit les racines de  $D_l$  sous la forme:

$$\begin{aligned} \mu_{p_i} - \mu_{p_j}, \mu_{q'_i} - \mu_{q'_j} & \quad (\text{système } A_0) \\ \mu_{p_i} + \mu_{p_j} + \mu_{r_m} + \mu_{r_n} & \quad KA_3 \times 2K'A_1 \subset D_l. \\ \mu_{p_i} + \mu_{p_j} + \mu_{r'_m} + \mu_{r'_n} \\ \mu_{q'_i} + \mu_{q'_j} + \mu_{r'_m} + \mu_{r'_n} \quad \mu_{q'_i} + \mu_{q'_j} \neq 0 \end{aligned}$$

Notons ici que les racines secondaires de  $D_l$ :  $\pm \tau_1, \dots, \pm \tau_l$  s'écrivent:

$$\mu_{p_i} + \mu_{p_j}, \quad \text{et} \quad \mu_{q'_i} + \mu_{q'_j}$$

cette dernière devant être  $\neq 0$ .

**ALGÈBRE  $E_6$ :** Les racines sont  $\tau_i - \tau_j, \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k), \pm \sum_i \tau_i$  ( $i, j, k$  distincts  $\in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) avec  $-3\varepsilon = \sum \tau_i$ . On peut poser:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 - \tau_2 & \varphi_4 &= \tau_4 - \tau_5 \\ \varphi_2 &= \tau_2 - \tau_3 & \varphi_5 &= \tau_5 - \tau_6 \\ \varphi_3 &= \tau_3 - \tau_4 & \varphi_6 &= \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 \quad (\text{suite fondamentale}). \end{aligned}$$

La racine dominante est ici:

$$\begin{aligned} -3\varepsilon &= \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 \\ &\quad + 2\varphi_6 \end{aligned}$$

Par suppression de  $\varphi_3$  dans la figure

$$\begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ 3\varepsilon \end{array}$$

on obtient une suite fondamentale d'un sous-système  $A_0$  du type  $3A_2$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad 3\varepsilon.$$

Posant:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_4 &= -\tau_4 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_7 &= -\varepsilon - \frac{2}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ \mu_2 &= \tau_2 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_5 &= -\tau_5 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_8 &= -\varepsilon + \frac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \\ \mu_3 &= \tau_3 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} & \mu_6 &= -\tau_6 + \frac{\tau_4 + \tau_5 + \tau_6}{3} & \mu_9 &= 2\varepsilon + \frac{1}{3}(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6) \end{aligned}$$

puis  $\alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, 3\}$   $\beta, \beta', \dots \in \{4, 5, 6\}$   $\gamma, \gamma', \dots \in \{7, 8, 9\}$ ,

on peut écrire ainsi les racines de  $E_6$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad 3A_2 \subset E_6. \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \end{aligned}$$

$E_6/3A_2$  est cyclique d'ordre 3.

Notons que les racines secondaires  $-\tau_i + \varepsilon, -\tau_i - 2\varepsilon, \tau_i + \tau_j + \varepsilon$  deviennent:

$$\mu_\beta - \mu_\gamma; \quad \mu_\gamma - \mu_\alpha; \quad \mu_\alpha - \mu_\beta.$$

Par suppression de  $\varphi_6$ , on obtient une suite fondamentale de  $A_5 + A_1 \subset E_6$

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad -3\varepsilon.$$

D'où les racines secondaires de  $A_5 + A_1$ :

$$\mu_i = \tau_i + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad \mu_7 = 3\varepsilon/2, \quad \mu_8 = -3\varepsilon/2.$$

Posant  $\alpha, \alpha', \dots \in \{1, 2, \dots, 6\}; \beta, \beta', \dots \in \{7, 8\}$  on écrit les racines de  $E_6$ :

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \quad A_5 + A_1 \subset E_6. \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} + \mu_{\alpha''} + \mu_\beta \end{aligned}$$

$E_6/(A_5 + A_1)$  est cyclique d'ordre 2.

**ALGÈBRE  $E_7$ :** Les racines sont  $\tau_i - \tau_j, \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m$  où  $i, j, k, m$  sont distincts, arbitraires dans  $\{1, \dots, 8\}$  avec  $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_8 = 0$ . On peut poser

$$\begin{aligned} \varphi_1 = -\tau_1 + \tau_2 & \quad \varphi_2 = -\tau_2 + \tau_3 & \quad \varphi_3 = -\tau_3 + \tau_4 & \quad \varphi_4 = -\tau_4 + \tau_5 \\ \varphi_5 = -\tau_5 + \tau_6 & \quad \varphi_6 = -\tau_6 + \tau_7 & \quad \varphi_7 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4. \end{aligned}$$

La racine dominante est ici:

$$\omega = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 3\varphi_5 + 2\varphi_6 + 2\varphi_7 = \tau_7 - \tau_8.$$

Dans la figure  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7, -\omega$ , on peut procéder par suppression de divers éléments.

$A_7 \subset E_7$  est obtenue par suppression de  $\varphi_7$ , d'où la suite simple

$$-\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \dots, \quad -\tau_7 + \tau_8.$$

Les racines de  $E_7$  correspondant à  $A_7 \subset E_7$  sont ici précisément les expressions déjà données

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_j & \quad i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, 8\} \\ \tau_i + \tau_j + \tau_k + \tau_m & \quad i, j, k, m \text{ distincts} \in \{1, 2, \dots, 8\} \end{aligned}$$

les racines secondaires sont les  $\pm(\tau_i + \tau_j)$ .

$E_7/A_7$  est cyclique d'ordre 2.

Par suppression de  $\varphi_3$ , on obtient:

$$A_2 + A_5 \subset E_7$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\tau_1 + \tau_2 & \varphi_2 &= -\tau_2 + \tau_3 & \varphi_7 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 \\ \varphi_4 &= -\tau_4 + \tau_5 & \varphi_5 &= -\tau_5 + \tau_6 & \varphi_6 &= -\tau_6 + \tau_7 & -\omega &= -\tau_7 + \tau_8\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= -\tau_1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 & \mu_2 &= -\tau_2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_3 &= -\tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 & \mu_4 &= -2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_5 &= \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 & \mu_6 &= \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_7 &= \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 & \mu_8 &= \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_9 &= \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3\end{aligned}$$

Si  $\alpha, \alpha', \dots, \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\beta, \beta', \dots, \in \{4, 5, \dots, 9\}$ ,

les racines de  $E_7$  s'écrivent

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, & \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) &\end{aligned} \quad A_2 + A_5 \subset E_7.$$

$E_7/(A_2 + A_5)$  est cyclique d'ordre 3.

Par suppression de  $\varphi_2$ , on obtient un  $A_1 + D_6$ , qui fournit  $A_1 + 2A_3$  et un  $7A_1$

$$A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

La suite fondamentale est

$$\begin{aligned}-\tau_1 + \tau_2, & \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_4 + \tau_5, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4; \\ & \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_6 + \tau_7, \quad -\tau_7 + \tau_8\end{aligned}$$

d'où les racines secondaires de  $A_1 + 2A_3$ :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 & \mu_2 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 \\ \mu_3 &= (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_4 &= (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_5 &= (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_6 &= -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 - 3(\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_7 &= (\tau_1 + \tau_2)/4 - (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 & \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_6 \\ \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_7 & \mu_{10} &= (\tau_1 + \tau_2)/4 + (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5)/2 + \tau_8.\end{aligned}$$

Les racines de  $E_7$  s'écrivent alors, avec

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2, \dots\}; \beta, \beta' \in \{3, 4, 5, 6\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{7, 8, 9, 10\}$$

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, & \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} &\end{aligned} \quad A_1 + 2A_3 \subset E_7.$$

La loi  $E_7/(7A_1)$  est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma$$

$7A_1 \subset E_7$  La suite fondamentale est

$$\begin{aligned} -\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_5 + \tau_6, \quad -\tau_7 + \tau_8; \\ \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6, \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 \end{aligned}$$

d'où les racines secondaires de  $7A_1$ :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_2 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_3 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_4 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_5 &= \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_6 &= \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 \\ \mu_7 &= \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2 & \mu_8 &= \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_{10} &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_{11} &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_5 + \tau_6)/2 \\ \mu_{13} &= (\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_{14} &= -(\tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/2 \\ \alpha, \alpha' &\in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\} \\ \varepsilon, \varepsilon' &\in \{9, 10\}; \quad \tau, \tau' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}. \end{aligned}$$

Les racines de  $E_7$  prennent la forme

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}, \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} &\quad 7A_1 \subset E_7, \\ \mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'}, \quad \mu_\tau - \mu_{\tau'}, \quad \mu_\nu - \mu_{\nu'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu \\ \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu \\ \mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\tau \\ \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\tau \\ \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\tau + \mu_\nu \\ \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\varepsilon + \mu_\nu \end{aligned}$$

$E_7/7A_1$  est un groupe, produit direct des trois sous-groupes

$$\begin{aligned} \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta\} \\ \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\tau + \mu_\nu\} \\ \{\Lambda_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\varepsilon + \mu_\nu\}. \end{aligned}$$

ALGÈBRE  $E_8$ : On prend  $\tau_1, \dots, \tau_9$  dans  $R^8$  avec  $\sum \tau_i = 0$ ;

Les racines sont:

$$\tau_i - \tau_j, \quad \pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k) \quad i, j, k \text{ distincts} \\ i, j, k \in \{1, 2, \dots, 9\}.$$

Une suite fondamentale est

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_2 - \tau_3 & \varphi_4 &= \tau_5 - \tau_6 & \varphi_7 &= \tau_8 - \tau_9 \\ \varphi_2 &= \tau_3 - \tau_4 & \varphi_5 &= \tau_6 - \tau_7 & \varphi_8 &= \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \\ \varphi_3 &= \tau_4 - \tau_5 & \varphi_6 &= \tau_7 - \tau_8 \end{aligned}$$

avec la racine dominante:

$$= 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3 + 5\varphi_4 + 6\varphi_5 + 4\varphi_6 + 2\varphi_7 + 3\varphi_8 = -\tau_1 + \tau_2$$

d'où la figure initiale

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \\ \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9. \end{aligned}$$

En appliquant le processus connu, on obtient les sous-systèmes simplifiés  $\Lambda_0$  et les  $\Lambda/\Lambda_0$ . On constate que deux sous-systèmes  $\Lambda_0$  de même type sont conjugués.

$$2A_1 + 2A_3 \subset E_8$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_4 & \mu_3 &= (\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_2 &= (\tau_4 + \tau_5)/2 - \tau_5 & \mu_4 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_9)/2 \\ \mu_5 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_9 &= (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 + 3\tau_9/4 \\ \mu_6 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{10} &= \tau_6 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 - \tau_9/4 & \mu_{11} &= \tau_7 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4 \\ \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/2 + 3\tau_9/4 & \mu_{12} &= \tau_8 - (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8)/2 - \tau_9/4. \end{aligned}$$

Posons

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma', \dots, \in \{5, 6, 7, 8\} \\ \delta, \delta', \dots, \in \{9, 10, 11, 12\}.$$

Les racines de  $E_8$  s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}, \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} &\quad \text{racines de } \Lambda_0. \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} &\quad \pm(\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta) \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_{\delta'} &\quad \pm(\mu_\beta + \mu_\gamma - \mu_\delta) \\ \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'} \end{aligned}$$

$E_8/(2A_1 + 2A_3)$  a huit classes qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes:

$$\begin{aligned} & \{\Lambda_0, (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta), (\mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_\delta + \mu_{\delta'}), (-\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta)\} \\ & \{\Lambda_0, (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'})\}. \end{aligned}$$

Le premier est cyclique d'ordre 4.

$$A_1 + A_2 + A_5 \subset E_8$$

La suite fondamentale:

$$\begin{aligned} & \tau_1 - \tau_2, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9; \\ & \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \end{aligned}$$

conduit aux expressions:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 & \mu_3 &= (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_8 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_2 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 & \mu_4 &= (\tau_1 + \tau_2)/3 + \tau_9 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ & & \mu_5 &= -2(\tau_1 + \tau_2)/3 - (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_6 &= (\tau_1 + \tau_2)/6 + \tau_3 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_6 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_7 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_4 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_{10} &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_7 + (\tau_8 + \tau_9)/3 \\ \mu_8 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + \tau_5 + (\tau_8 + \tau_9)/3 & \mu_{11} &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - 2(\tau_8 + \tau_9)/3. \end{aligned}$$

Avec  $\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \beta, \beta', \dots, \in \{3, 4, 5\}; \gamma, \gamma', \dots, \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  les racines de  $E_8$  sont:

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}, \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } \Lambda_0. \\ & \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \\ & \pm(-\mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) \\ & \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} \end{aligned}$$

$E_8/(A_1 + A_2 + A_5)$  est cyclique d'ordre 6, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma.$$

$$A_1 + A_7 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9, \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9$$

conduit à:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_1 & \mu_3 &= \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_2 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 - \tau_2 & \mu_4 &= \tau_4 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_5 &= \tau_5 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_8 &= \tau_8 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_6 &= \tau_6 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_9 &= \tau_9 + (\tau_1 + \tau_2)/4 \\ \mu_7 &= \tau_7 + (\tau_1 + \tau_2)/4 & \mu_{10} &= -3(\tau_1 + \tau_2)/4 \end{aligned}$$

On pose:

$$\alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \gamma, \gamma', \dots, \in \{3, 4, \dots, 10\}.$$

Les racines de  $E_8$  s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'} \quad \text{racines de } A_0. \\ & \pm (\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}) \\ & \mu_\gamma + \mu_{\gamma'} + \mu_{\gamma''} + \mu_{\gamma'''} \end{aligned}$$

$E_8/(A_1 + A_7)$  est cyclique d'ordre 4, avec le générateur

$$\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_{\gamma'}.$$

$$4A_2 \subset E_8$$

La suite fondamentale

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3; \quad \tau_4 - \tau_5, \quad \tau_5 - \tau_6; \\ \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_1 & \mu_4 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_4 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_2 & \mu_5 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_5 \\ \mu_3 &= -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 + \tau_3 & \mu_6 &= -(\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 + \tau_6 \\ \mu_7 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_7 & \mu_{10} &= (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 - (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 \\ \mu_8 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_8 & \mu_{11} &= (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3 \\ \mu_9 &= -(\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3 + \tau_9 & \mu_{12} &= (\tau_4 + \tau_5 + \tau_6)/3 - (\tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/3. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \alpha, \alpha', \dots &\in \{1, 2, 3\}; \quad \beta, \beta', \dots \in \{4, 5, 6\} \\ \gamma, \gamma', \dots &\in \{7, 8, 9\}; \quad \delta, \delta', \dots \in \{10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Les racines de  $E_8$  s'écrivent:

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \quad \text{racines de } A_0 \\ & \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) \\ & \pm (\mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta) \\ & \pm (\mu_\alpha - \mu_\beta + \mu_\delta) \\ & \pm (\mu_\beta - \mu_\gamma + \mu_\delta) \end{aligned} \quad 4A_2 \subset E_8.$$

$E_8/4A_2$  est un groupe d'ordre 9, produit direct des sous-groupes (cycliques d'ordre 3)

$$\begin{aligned} & \{A_0, \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma, -\mu_\alpha - \mu_\beta - \mu_\gamma\} \\ & \{A_0, \mu_\alpha - \mu_\gamma - \mu_\delta, -\mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta\}. \end{aligned}$$

$2A_4 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \quad \tau_3 - \tau_4, \quad \tau_4 - \tau_5; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9, \quad \tau_6 - \tau_7, \quad \tau_7 - \tau_8, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit à

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_6 &= -3(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 \\ \mu_2 &= \tau_2 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_7 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_6 \\ \mu_3 &= \tau_3 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_8 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_7 \\ \mu_4 &= \tau_4 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_9 &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_8 \\ \mu_5 &= \tau_5 + (\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 & \mu_{10} &= 2(\tau_6 + \tau_7 + \tau_8 + \tau_9)/5 - \tau_9 \\ \alpha, \alpha', \dots &\in \{1, 2, \dots, 5\}; \quad \beta, \beta', \dots \in \{6, 7, \dots, 10\} \end{aligned}$$

et les racines de  $E_8$  sont

$$\begin{aligned} \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} &\quad \text{racines de } A_0 \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'}) & \\ \pm(\mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta) & \quad 2A_4 \subset E_8. \end{aligned}$$

$E_8/2A_4$  est un groupe cyclique d'ordre 5.

$A_8 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\tau_1 - \tau_2, \quad \tau_2 - \tau_3, \dots, \quad \tau_8 - \tau_9$$

conduit aux expressions connues:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_i - \tau_j}{\pm(\tau_i + \tau_j + \tau_k)} &\quad \text{racines de } A_0. \end{aligned}$$

$E_8/A_8$  est un groupe cyclique d'ordre 3.

$8A_1 \subset E_8$

La suite fondamentale

$$\begin{aligned} \tau_1 - \tau_2; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_9; \quad \tau_3 - \tau_4; \quad \tau_3 + \tau_4 + \tau_9; \\ \tau_5 - \tau_6; \quad \tau_5 + \tau_6 + \tau_9; \quad \tau_7 - \tau_8; \quad \tau_7 + \tau_8 + \tau_9 \end{aligned}$$

conduit aux expressions

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_2 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_5 &= \tau_5 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_7 &= \tau_7 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_6 &= \tau_6 - (\tau_5 + \tau_6)/2 & \mu_8 &= \tau_8 - (\tau_7 + \tau_8)/2 \\ \mu_9 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{11} &= (\tau_3 + \tau_4)/2 + (\tau_9)/2 \\ \mu_{10} &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{12} &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 - (\tau_9)/2 \\ \mu_{13} &= (\tau_5 + \tau_6)/2 + (\tau_9)/2 & \mu_{15} &= (\tau_7 + \tau_8)/2 + (\tau_9)/2 \\ \mu_{14} &= -(\tau_5 + \tau_6)/2 - (\tau_9)/2 & \mu_{16} &= -(\tau_7 + \tau_8)/2 - (\tau_9)/2. \end{aligned}$$

Les racines de  $E_8$  s'écrivent, avec

$$\begin{aligned}
 & \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, 4\}; \quad \gamma, \gamma' \in \{5, 6\}; \quad \delta, \delta' \in \{7, 8\} \\
 & \lambda, \lambda' \in \{9, 10\}; \quad \mu, \mu' \in \{11, 12\}; \quad \nu, \nu' \in \{13, 14\}; \quad \varrho, \varrho' \in \{15, 16\} \\
 & \mu_\varepsilon - \mu_{\varepsilon'} \quad \varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \varrho\} \quad \varepsilon' = -\varepsilon \\
 & \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho \quad \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu \\
 & \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\nu \quad \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\varrho \\
 & \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\mu \quad \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
 & \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\lambda \quad \mu_\alpha + \mu_\mu + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
 & \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\lambda + \mu_\mu \quad \mu_\gamma + \mu_\delta + \mu_\nu + \mu_\varrho \\
 & \mu_\alpha + \mu_\gamma + \mu_\lambda + \mu_\nu \quad \mu_\beta + \mu_\delta + \mu_\mu + \mu_\varrho \\
 & \mu_\alpha + \mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\varrho \quad \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\mu + \mu_\nu \\
 & 8A_1 \subset E_8.
 \end{aligned}$$

$E_8/8A_1$  n'est pas un groupe, car

$$(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\varrho) + (\mu_\delta + \mu_\lambda + \mu_\mu + \mu_\nu)$$

n'est pas définie.

### 6.3.5 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG MAXIMAL DES SYSTÈMES SIMPLES $B_l, C_l, F_4$

**ALGÈBRE  $B_l$ :** Si  $\pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j$  sont les racines de  $B_l$ , on a des sous-algèbres semi-simples minimales de rang  $l$  de deux types:

- a)  $(k, k')$  solution de  $3k + 2k' = l$
- b)  $(k, k')$  solution de  $3k + 2k' = l - 1$ .

Dans le premier cas, on a un sous-système  $kA_3 + k'2A_1 = kD_3 + k'D_2$ , comme en 6.3.4 pour  $D_l$ ;

les racines secondaires sont:

$$\begin{aligned}
 \mu_{p1} &= (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'1} &= (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
 \mu_{p2} &= \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'2} &= -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
 \mu_{p3} &= \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'3} &= \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
 \mu_{p4} &= \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'4} &= \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 \\
 p &= 1, 2, \dots, k & q' &= 1, 2, \dots, k'.
 \end{aligned}$$

Les racines de  $B_l$  s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 & \mu_{pi} - \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} - \mu_{q'j} & \text{racines de } kD_3 + k'D_2 \\
 & i, j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad \text{ou} \quad i, j \in \{3, 4\} \\
 & \mu_{pi} + \mu_{pj} \quad i \neq j; \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\} & \text{type } \pm \tau_{p1}, \pm \tau_{p2}, \pm \tau_{p3} \\
 & p = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned}$$

$\mu_{q'i} + \mu_{q'j}$	$i \neq j$	type $\pm \tau_{q'1}, \pm \tau_{q'2}$
$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn}$	$i \neq j$	type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{rj}$
$m \neq n$		
$\mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$		type $\pm \tau_{pi} \pm \tau_{r'j}$
$\mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n}$		type $\pm \tau_{q'i} \pm \tau_{r'j}$ .

On a la classe  $A_0$  et  $k+k'$  classes génératrices

$$\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \quad \Lambda_{k+1}, \dots, \Lambda_{k+k'} \quad \Lambda_p = \{\mu_{pi} + \mu_{pj}\}, \quad \Lambda_{q'} = \{\mu_{q'i} + \mu_{q'j}\}$$

Dans le deuxième cas, on a un sous-système

$kD_3 + k'D_2 + B_l$ , avec les racines secondaires:

$$\begin{array}{lll} \mu_{p1} = (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'1} = (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''1} = \tau_l/2 \\ \mu_{p2} = \tau_{p1} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'2} = -(\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \mu_{r''2} = -\tau_l/2 \\ \mu_{p3} = \tau_{p2} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'3} = \tau_{q'1} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \\ \mu_{p4} = \tau_{p3} - (\tau_{p1} + \tau_{p2} + \tau_{p3})/2 & \mu_{q'4} = \tau_{q'2} - (\tau_{q'1} + \tau_{q'2})/2 & \end{array}$$

Les racines de  $B_l$  sont

$$\begin{aligned} & \mu_{pi} - \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} - \mu_{q'j}; \quad \mu_{r''1} - \mu_{r''2} = \pm 2\mu_{r''1} \\ & \mu_{pi} + \mu_{pj}; \quad \mu_{q'i} + \mu_{q'j} \\ & \mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{rm} + \mu_{rn} \quad \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} \\ & \mu_{pi} + \mu_{pj} + \mu_{r'm} + \mu_{r'n} \quad \mu_{q'i} + \mu_{q'j} + 2\mu_{r''m} \\ & \mu_{pi} + \mu_{pj} + 2\mu_{r''m} \end{aligned}$$

ALGÈBRE  $C_l$ : Il y a un seul sous-système semi-simple minimal de rang  $l$ :  $lA_1 \subset C_l$ . Les racines étant:

$$\pm 2\tau_i, \quad \pm \tau_i \pm \tau_j$$

on prend  $2l$  vecteurs:

$$\begin{aligned} & \mu_1, \mu_2; \mu_3, \mu_4; \dots; \mu_{2l-1}, \mu_{2l} \quad \text{où} \quad \mu_{2l-1} = \tau_p \\ & \mu_{2l} = -\tau_p. \end{aligned}$$

Les racines de  $C_l$  sont les

$$\begin{aligned} & \mu_\alpha - \mu_{\alpha'}, \quad \alpha, \alpha' \in \{2p-1, 2p\} \quad \text{racines de } A_0. \\ & \mu_\alpha + \mu_\beta \end{aligned}$$

ALGÈBRE  $F_4$ : Les racines étant:  $\pm \tau_i, \pm \tau_i \pm \tau_j; \frac{1}{2}(\pm \tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \tau_4)$  où  $i \neq j; i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on a une suite fondamentale complétée

$$\tau_1, \quad \frac{1}{2}(-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4), \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & 4A_1 \subset F_4 \\ & -\tau_1 + \tau_2, \quad +\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_3 + \tau_4, \quad \tau_3 + \tau_4 \end{aligned}$$

d'où les racines secondaires de  $4A_1$ :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_2)/2 & \mu_4 &= \tau_2 - (\tau_1 + \tau_2)/2 \\ \mu_5 &= (\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_7 &= \tau_3 - (\tau_3 + \tau_4)/2 \\ \mu_6 &= -(\tau_3 + \tau_4)/2 & \mu_8 &= \tau_4 - (\tau_3 + \tau_4)/2.\end{aligned}$$

Les racines de  $F_4$  s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'}; \quad \mu_\gamma - \mu_{\gamma'}; \quad \mu_\delta - \mu_{\delta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\beta + \mu_\gamma, \quad \mu_\alpha + \mu_\gamma \\ \mu_\beta + \mu_\delta, \quad \mu_\alpha + \mu_\delta, \quad \mu_\gamma + \mu_\delta \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma + \mu_\delta.\end{aligned}$$

Il y a 8 classes, toutes d'ordre 2 (sauf la classe nulle  $A_0$ ), qui forment un groupe, produit direct des sous-groupes

$$\{A_0, \mu_\alpha + \mu_\beta\}, \quad \{A_0, \mu_\gamma + \mu_\delta\}, \quad \{A_0, \mu_\alpha + \mu_\gamma\}.$$

$$A_1 + A_3 \subset F_4$$

La suite fondamentale est:

$$\frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}; \quad \tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de  $A_1 + A_3$ :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (\tau_1 + \tau_4)/4 - (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_4 &= -\tau_2 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_2 &= -(\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_5 &= -\tau_3 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 \\ \mu_3 &= \tau_1 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4 & \mu_6 &= \tau_4 - (\tau_1 + \tau_4)/4 + (\tau_2 + \tau_3)/4.\end{aligned}$$

Les racines de  $F_4$  s'écrivent:

$$\begin{aligned}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; \quad \mu_\beta - \mu_{\beta'} \quad \alpha, \alpha' \in \{1, 2\}; \quad \beta, \beta' \in \{3, \dots, 6\}. \\ \pm (\mu_\alpha + \mu_\beta) \\ \left\{ \begin{array}{l} 2\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_{\beta'} \\ \mu_\beta + \mu_{\beta'} \end{array} \right.\end{aligned}$$

$F_4/(A_1 + A_3)$  est cyclique d'ordre 4, avec le générateur  $\mu_\alpha + \mu_\beta$ .

$$2A_2 \subset F_4$$

La suite fondamentale est:

$$\tau_1, \quad \frac{-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}{2}, \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_3 - \tau_4$$

d'où les racines secondaires de  $2A_2$ :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_4 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_2 - \tau_4/3 \\ \mu_2 &= -\tau_1/2 - \tau_4/6 + (\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_5 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 - \tau_3 - \tau_4/3 \\ \mu_3 &= 2\tau_4/6 - 2(\tau_2 + \tau_3)/6 & \mu_6 &= (\tau_2 + \tau_3)/3 + 2\tau_4/3.\end{aligned}$$

Les racines de  $F_4$  ont pour expressions:

$$\begin{array}{lll}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'} & \text{racines de } A_0 \\ \mu_\alpha + \mu_\beta & & \alpha, \alpha' = 1, 2, 3 \\ \mu_\alpha + \mu_{\alpha'} - \mu_\beta & & \beta, \beta' = 4, 5, 6.\end{array}$$

$F_4/2A_2$  est un groupe cyclique d'ordre 3.

### 6.3.6 SYSTÈMES MINIMAUX DE RANG 2 DANS $G_2$

Les racines sont:  $\pm\tau_i, \tau_i - \tau_j$ , avec  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ . Une suite fondamentale complétée est:

$$\begin{aligned}\tau_1, & \quad -\tau_1 + \tau_2, \quad -\tau_2 + \tau_3 \quad \text{dont on tire} \\ & \quad -\tau_2 + \tau_3, \quad -\tau_1 + \tau_2: A_2 \subset G_2\end{aligned}$$

avec les racines secondaires:

$$\mu_1 = \tau_1, \quad \mu_2 = \tau_2, \quad \mu_3 = \tau_3.$$

Les racines de  $G_2$  sont ici:

$$\mu_i - \mu_j \quad \text{et} \quad \pm \mu_i$$

$G_2/A_2$  est cyclique d'ordre 3.

On obtient aussi:

$$-\tau_2 + \tau_3, \tau_1 \quad A_1 + A_1 \subset G_2$$

d'où les racines secondaires

$$\mu_1 = \tau_2 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_3 = \tau_1/2 \quad \mu_2 = \tau_3 - (\tau_2 + \tau_3)/2 \quad \mu_4 = -\tau_1/2$$

et les racines de  $G_2$

$$\begin{array}{ll}\mu_\alpha - \mu_{\alpha'}; & \mu_\beta - \mu_{\beta'} \\ \mu_\alpha + \mu_\beta, & \mu_\alpha + 3\mu_\beta\end{array}$$

$G_2/2A_1$  est cyclique d'ordre 2.

## § 7. Décomposition d'algèbres de Lie semi-simples

### 7.1 Sous-algèbre $g_0$ associée à un sous-système fermé $A$

Soient

$g$  une algèbre de Lie semi-simple sur un corps  $\mathbf{K}$  (§ 1)

$\Lambda$  le système des racines de  $\mathfrak{g}$  sur une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$ , avec

$$\Lambda' = \Lambda - \{0\},$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda' \setminus \{0\}} \mathbf{K} e_\alpha$$

la décomposition de Cartan associée à  $\mathfrak{h}$ ,

$\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ :

$$1) \quad \Lambda_0 = -\Lambda_0; \quad (\Lambda_0 + \Lambda_0) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$$

et

$$2) \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha$$

le sous-espace de  $\mathfrak{g}$  associé à  $\Lambda_0$ . Les relations 1) impliquent que  $\mathfrak{g}_0$  est une sous-algèbre réductive dont le centre est

$$\mathfrak{C} = \{h \in \mathfrak{h} \mid \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Lambda'_0\}$$

Ainsi  $\text{ad } h: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$x \mapsto [h, x]$$

où  $h \in \mathfrak{G}$ , est un endomorphisme semi-simple de  $\mathfrak{g}$ . Cela signifie que  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathfrak{g}_0$ -module complètement réductible.

Par ailleurs, lorsque  $\Lambda_0$  est de rang maximum  $l$ ,  $\mathfrak{G} = \{0\}$ , la sous-algèbre  $\mathfrak{g}_0$  est semi-simple.

Les résultats des paragraphes précédents permettent d'étudier *l'insertion* de  $\mathfrak{g}_0$  dans  $\mathfrak{g}$ .

## 7.2 Somme directe associée à une partition de $\Lambda$ mod $\Lambda_0$

Soit  $\Lambda_0$  un sous-système fermé de  $\Lambda$ , et

$$3) \quad \Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de  $\Lambda$  en classes mod  $\Lambda_0$  (§ 2). On a

$$4) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

où  $\mathfrak{g}_0$  est donné par 2) et où

$$\mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geq 1).$$

Le but de ce paragraphe 7 est l'étude des propriétés de la somme directe 4) associée à 3).

Je pose

$$\Lambda_0 = \{0, \pm \mu_{0,1}, \dots, \pm \mu_{0,n_0}\}$$

$$\Lambda_i = \{\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n_i}\} \quad (i \geq 1).$$

De plus, je vais désigner par  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$  le sous-espace de  $\mathfrak{g}$  engendré par les  $[g_i, g_j]$ , où  $g_i, g_j$  décrivent  $\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j$  respectivement.

$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$  est engendré par les  $[e_{\mu_{i,m}}, e_{\mu_{j,m'}}]$  si  $i \geq 1, j \geq 1$ .

**PROPOSITION 7.1:** *Les sous-espaces  $\mathfrak{g}_i$  ( $i \geq 1$ ) sont des  $\mathfrak{g}_0$  modules irréductibles et  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$*

$$\begin{aligned} (\Lambda_0 + \Lambda_i) \cap \Lambda &\subset \Lambda_i \quad \text{implique} \\ [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] &\subset \mathfrak{g}_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\mathfrak{g}_i$  est un  $\mathfrak{g}_0$ -module. Maintenant:

**LEMME 7.1:** *Tout sous-espace  $H \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$  stable pour  $\text{ad } \mathfrak{h}$  est de la forme  $\sum k_\alpha e_\alpha$ , où  $\alpha \in L \subset \Lambda'$ .*

Deux racines distinctes  $\alpha, \beta \in \Lambda'$  étant données, on peut trouver  $z \in \mathfrak{h}$  tel que  $\alpha(z) = 1, \beta(z) = 0$ . Soit alors

$$\begin{aligned} x &= k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha'} e_{\alpha'} + \dots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H \\ k_\alpha k_{\alpha'} \dots k_{\alpha(p)} &\neq 0. \end{aligned}$$

On prend un  $z \in \mathfrak{h}$  associé à  $\beta = \alpha'$ , d'où

$$x' = k_\alpha e_\alpha + k_{\alpha''} e_{\alpha''} + \dots + k_{\alpha(p)} e_{\alpha(p)} \in H$$

etc. On obtient finalement  $k_\alpha e_\alpha \in H$ , d'où  $Ke_\alpha \subset H$ , et le lemme est établi.

Soit maintenant  $H$  un  $\mathfrak{g}_0$ -module non trivial, avec  $H \subset \mathfrak{g}_i$ . D'après  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$  et le lemme 7.1, on a

$$H = Ke_{\mu_{i+1}} \oplus \dots \oplus Ke_{\mu_{i+n_i}} \quad n_i \leq n_i$$

avec de bonnes notations. Comme  $\Lambda_i$  est  $\Lambda_0$ -connexe, on a nécessairement  $e_{\mu_{i,t}} \in H$ ,  $\forall t \in \{1, \dots, n_i\}$ , ce qui implique  $H = \mathfrak{g}_i$ .

Les  $\mathfrak{g}_0$ -modules  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$  sont bien irréductibles.

On peut encore écrire:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_0 [\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i]] &\subseteq [[\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_0] \mathfrak{g}_i] + [\mathfrak{g}_0 [\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i]] \\ &\subseteq |\mathfrak{g}_0 \mathfrak{g}_i| \subset \mathfrak{g}_i \end{aligned}$$

et  $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i]$  est un  $\mathfrak{g}_0$ -module non trivial dans  $\mathfrak{g}_i$  qui est irréductible. Alors:

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i.$$

**PROPOSITION 7.2:** *Soient  $i, j \geq 1$ : on a  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$  ou bien il existe  $k \in \{0, 1, \dots, s\}$  tels que  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$ ; lorsque  $k \neq 0$ , on a  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_k$ .*

Si

$$(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda = \emptyset, \text{ on a } [e_{\mu_{i,m}}, e_{\mu_{j,m'}}] = 0, \quad \forall m, m' \text{ et } [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0.$$

Supposons  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \neq \emptyset$ ; il existe  $k$  avec  $(\Lambda_i + \Lambda_j) \cap \Lambda \subset \Lambda_k$ , d'où  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_k$ .

Or

$$[g_0[g_i, g_j]] \subseteq [[g_0 g_i] g_j] + [g_j [g_0 g_i]] \subseteq [g_i g_j].$$

Ainsi  $[g_i, g_j]$  est un  $g_0$ -module non trivial, contenu dans  $g_k$ . Si  $k \neq 0$ ,  $g_k$  est irréductible, et  $[g_i, g_j] = g_k$ .

**PROPOSITION 7.3:** *Pour tout  $i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$  il existe  $i' \in I$  tel que  $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$ .*

Soit  $\Lambda_i$ ; il existe  $i'$  tel que  $(\Lambda_i + \Lambda_{i'}) \cap \Lambda \subset \Lambda_0$  (§ 3) ce qui entraîne  $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$ . Il faut noter que le cas  $i = i'$  n'est pas exclu.

Il convient de rassembler les résultats du présent numéro :

**THÉORÈME 7.1:** *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple sur le corps  $\mathbf{K}$  (§ 1),  $\Lambda$  le système des racines de  $\mathfrak{g}$  sur une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ ,*

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

*la partition de  $\Lambda$  en classes mod  $\Lambda_0$  où  $\Lambda_0$  est un sous-système fermé, et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$$

*la somme directe associée, où*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda'_0} \mathbf{K} e_\alpha \quad \mathfrak{g}_i = \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \mathbf{K} e_\alpha \quad (i \geq 1).$$

*Alors  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$  sont des  $g_0$ -modules irréductibles dans  $\text{ad}_{\mathfrak{g}} g_0$  et*

$$[g_0, g_0] \subseteq g_0 \quad [g_0, g_i] = g_i \quad (i \geq 1);$$

*si  $i, j \geq 1$ :  $[g_i, g_j] = 0$  ou bien il existe  $k$  tel que  $[g_i, g_j] \subseteq g_k$  avec  $[g_i, g_j] = g_k$  si  $k \neq 0$ ;*

*enfin  $\forall i \in I = \{0, 1, \dots, s\}$ ,  $\exists i' \in I$  avec  $[g_i, g_{i'}] \subseteq g_0$ . En bref, la somme directe  $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$  vérifie  $[g_i, g_j] \subseteq g_k \forall i, j$ ; je dirai que cette somme directe est la décomposition associée au sous-système fermé  $\Lambda_0$ . Elle fournit un produit de  $g_0$ -modules irréductibles régi par la loi  $\Lambda/\Lambda_0$ . Les résultats des paragraphes 5 et 6 peuvent en particulier être utilisés. On peut considérer  $\sum_0^s \mathfrak{g}_i$  comme une graduation de  $\mathfrak{g}$  par le groupe local  $\Lambda/\Lambda_0$ .*

### 7.3 Sur-algèbre réductive de $g_0$ dans $\mathfrak{g}$

Soient

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_s$$

la partition de  $\Lambda$  modulo un sous-système fermé  $\Lambda_0$ ;

$$Q = \{0, i_1, \dots, i_q\}, \quad S = \{0, 1, 2, \dots, s\} \quad Q \subset S,$$

$$\Lambda_Q = \Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \dots \cup \Lambda_{i_q}.$$

On a sans difficulté la

**PROPOSITION 7.4:** Pour que  $\Lambda_Q$  soit un sous-système fermé de  $\Lambda$ , il faut et il suffit que

- 1)  $(\forall i, j \in Q) (\exists k \in Q) (\Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$  si  $\Lambda_i + \Lambda_j \neq \emptyset$
- 2)  $(\forall i \in Q) (\exists i' \in Q) (\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$

Alors, avec les notations connues  $g_Q = g_0 \oplus g_{i_1} \oplus \cdots \oplus g_{i_q}$ , où est  $\Lambda_Q$  fermé dans  $\Lambda$ , est une sous-algèbre réductive de  $g$  qui contient  $g_0$ ; on a une sur-algèbre réductive de  $g_0$  dans  $g$ , et, de cette manière on les obtient toutes:

**PROPOSITION 7.5:** Soit  $g = g_0 \oplus g_1 \oplus \cdots \oplus g_s$  la décomposition de l'algèbre semi-simple  $g$  associée à la partition

$$\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$$

du système  $\Lambda$  modulo un sous-système fermé  $\Lambda_0$ .

Pour que

$$g_Q = g_0 \oplus g_{i_1} \oplus \cdots \oplus g_{i_q} \quad (Q = \{0, i_1, \dots, i_q\})$$

soit une sur-algèbre réductive de  $g_0$  dans  $g$ , il faut et il suffit que

$$(\forall i, j \in Q) (\Lambda_i + \Lambda_j = \emptyset \text{ ou } \exists k \in Q: \Lambda_i + \Lambda_j = \Lambda_k)$$

et que  $(\forall i \in Q) (\exists i' \in Q) (\Lambda_{i'} = -\Lambda_i)$ .

Les sur-algèbres réductives de  $g_0$  correspondent aux systèmes  $\Lambda_0 \cup \Lambda_{i_1} \cup \cdots \cup \Lambda_{i_q}$  identiques à leurs opposés et stables pour l'addition.

#### 7.4 Sous-algèbres $g_0$ maximales

Les sous-algèbres  $g_0$  sont maximales dans  $g$  si elles n'admettent aucune sur-algèbre distincte de  $g_0$ ,  $g$ ; il s'agit ici uniquement d'algèbres réductives.

Considérons  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$  et soit  $\Lambda_1$  une classe arbitraire distincte de  $\Lambda_0$ ; dans  $\Lambda/\Lambda_0$  elle engendre un système de l'un des types suivants:

- a)  $\Lambda^* = \{-p\Lambda_1, \dots, -\Lambda_1, \Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1\}$

où  $(p+1)\Lambda_1 = \emptyset$

- b)  $\Lambda^* = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1\}$

où  $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$ .

Pour que  $g_0$  soit maximale, il est nécessaire que  $\Lambda^* = \Lambda$ , c'est à dire que  $\Lambda/\Lambda_0$  soit monothétique, au sens a) ou au sens b).

De plus, dans le cas a)  $-p\Lambda_1, \Lambda_0, p\Lambda_1$  détermine une sur-algèbre réductive de  $g_0$ ; on a nécessairement:  $p=1$ .

Dans le cas b), les classes  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, p\Lambda_1$  forment un groupe cyclique d'ordre  $p+1$  et pour que  $g_0$  soit maximale (réductive) il est nécessaire que  $p+1$  soit premier. Ces conditions sont aussi suffisantes. D'où

**PROPOSITION 7.6:** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$  la décomposition de l'algèbre de Lie semi-simple  $\mathfrak{g}$  associée à la partition  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$  du système  $\Lambda$  des racines de  $\mathfrak{g}$  modulo le sous-système fermé  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$ .

Pour que  $\mathfrak{g}_0$  soit réductive maximale dans  $\mathfrak{g}$  il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée.

- a)  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_1'$ ,  $2\Lambda_1 = \emptyset$
- b)  $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_p$ ,  $(p+1)\Lambda_1 = \Lambda_0$ ,  $p+1$  premier.

cf. ([1]), théorème 6.

### 7.5 Sur-algèbres réductives d'une algèbre $\mathfrak{g}_0$ semi-simple

Lorsque le sous-système fermé  $\Lambda_0$  est de rang maximal, la sous-algèbre  $\mathfrak{g}_0$  correspondante est semi-simple; alors  $\mathfrak{g}$  se présente comme extension d'une algèbre semi-simple  $\mathfrak{g}_0$  par «un groupe local»  $\Lambda/\Lambda_0$ . On a vu, dans le cas des algèbres simples exceptionnelles, que  $\Lambda/\Lambda_0$  est toujours un groupe, avec une seule exception:  $E_8/8A_1$ .

Par exemple:

- |                     |  |
|---------------------|--|
| $E_6$               | est extension de $3A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.                            |
| $E_7$               | est extension de $A_2 + A_5$ par un groupe cyclique d'ordre 3.                       |
| $E_8$               | est extension de $2A_4$ par un groupe cyclique d'ordre 5.                            |
| $F_4$               | est extension de $2A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.                            |
| $G_2$               | est extension de $A_2$ par un groupe cyclique d'ordre 3.                             |
| $D_{2m}, B_{2m}C_l$ | sont extension de $lA_1$ par des groupes locaux à éléments d'ordre 2.<br>( $l=2m$ ). |
| $B_l = B_{2m+1}$    | est extension de $B_1 + (l-1)A_1$ .  |
| $D_l = D_{2m+1}$    | est extension de $A_3 + 2(m-1)A_1$ .   |

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et J. DE SIEBENTHAL, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*, Comment. Math. Helv., 23 (1949), 200–221.
- [2] DYNKIN, E. B., *Semi-simple subalgebras of semi-simple Lie algebras*, Mat. Sbornik. N.S. 30 (72) (1952), 349–462. Amer. Math. Soc. Translations (Série 2, 6, p. 111–244).
- [3] JACOBSON, N., *Lie algebras* (Interscience Publishers, New York, London 1962).
- [4] TITS, J., *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen* (Springer-Verlag, 1967 [Lecture Notes in Mathematics]).

L'aide du *Fonds National Suisse de la recherche scientifique*  
a rendu possible le présent travail (contrat no 2326).

Reçu le 12 juillet 1967.