Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Finslersche Zahlen.
Autor: Mazzola, Guerino
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33794

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Finslersche Zahlen

von GUERINO MAZZOLA (Zürich)

Die von Finsler in [1] betrachteten totalendlichen Mengen bilden einen interessanten Bereich $\mathscr{F}$ von endlichen Mengen, der die „natürlichen Zahlen" $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}, \ldots$ enthält: Die gewöhnliche, für natürliche Zahlen definierte Addition und Multiplikation kann auf ganz $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ ausgedehnt werden; $\mathscr{F}$ ist nicht-kommutative reguläre Halbgruppe mit Neutralelement bei beiden Operationen, welche u.a. durch ein Linksdistributivgesetz verknüpft sind.

Zu den Elementen einer „Zahlentheorie" in $\mathscr{F}$ gehören Sätze über die Zerfällbarkeit von Zahlen aus $\mathscr{F}$ in Produkte und Summen von multiplikativ resp. additiv unzerlegbaren Zahlen. Unsere wichtigsten Ergebnisse in dieser Richtung finden sich in den Sätzen 11, 18, 20, 23 und 25 weiter unten.

Der Bequemlichkeit halber sind die meisten der in [1] aufgestellten Sätze hier nochmals kurz bewiesen worden.

I. Definitionen

Die Wendung „dann und nur dann" kürzen wir im folgenden mit „falls" ab. Unter $\bigcup a$ verstehen wir wie üblich die Menge $\{x \mid \text{ex. } y \text{ mit } x \in y \in a\}$. Oft schreiben wir statt $\bigcup a$ auch $\bigcup x_{x \in a}$. Die Menge der natürlichen Zahlen kürzen wir mit ω ab.

Sei a eine Menge.

DEFINITION I: Sei $n \in \omega$. Wir definieren die n-te Vereinigung $\bigcup^n a$ rekursiv durch (i) $\bigcup^0 a := a$. (ii) $\bigcup^{n^+} a := \bigcup(\bigcup^n a)$.

DEFINITION II: a heisst totalendlich (oder Finslerzahl), falls ein n_0 existiert, sodass $\bigcup^{n_0} a = \emptyset$.

DEFINITION III: Das kleinste n_0 mit $\bigcup^{n_0} a = \emptyset$ heisst die Stufe von a. Bezeichnung: $n_0 =: |a|$.

LEMMA 1: *Sei* $a_n := \{\bigcup^{n-1} x / x \in a\}$ $n \geqslant 1$. *Dann ist* $\bigcup^n a = \bigcup a_n$.

Beweis: Induktion nach n. (i) $n = 1$. Dann ist $\bigcup a = \bigcup\{\bigcup^0 x / x \in a\} = \bigcup\{x / x \in a\}$. (ii) $n = m^+$. $\bigcup^{m^+} a = \bigcup(\bigcup^m a) = \bigcup\bigcup\{\bigcup^{m-1} x / x \in a\}$. Zu zeigen ist $f := \bigcup \times \times \{\bigcup^m x\}_{x \in a} = \bigcup\bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a}$. Wir beachten, dass $y \in f$, falls $y \in \bigcup^m x_0$ für ein $x_0 \in a$. Ferner ist $\bigcup^m x_0 = \bigcup(\bigcup^{m-1} x_0)$. Also ist $y \in f$, falls $y \in z \in \bigcup^{m-1} x_0$. Das heisst aber $z \in \bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a}$, somit $y \in \bigcup(\bigcup\{\bigcup^{m-1} x\}_{x \in a})$ QED.

LEMMA 2: *Sei a totalendlich und* $|a|=n_0>0$. *Dann gilt für jedes* $x\in a$ $|x|\leqslant n_0-1$, *und es existiert ein* x_0 *mit* $|x_0|=n_0-1$. *(Also ist jedes x in einer totalendlichen Menge wieder totalendlich.)*

Beweis: $\bigcup^{n_0} a=\emptyset$. Also wegen Lemma 1 $\bigcup a_{n_0}=\emptyset$. Daher ist $\bigcup^{n_0-1} x=\emptyset$ für alle $x\in a$. Also haben wir $|x|\leqslant n_0-1$ für alle $x\in a$. Da ferner $\bigcup^{n_0-1} a\neq\emptyset$, folgt: (i) Wenn $n_0-1=0$, dann ist a nicht $\emptyset$, sondern $\{\emptyset\}$. Also ist $|\emptyset|=0=n_0-1$. (ii) Sei $n_0-1>0$. Dann existiert ein $x_0\in a$ mit $\bigcup^{n_0-2} x_0\neq\emptyset$. Also ergibt sich $|x_0|>n_0-2$. QED.

LEMMA 3: *Es existieren nur endlich viele a zu fester Stufe* n_0.

Beweis: Für $n_0=0$ ist es klar. Sei $n_0>0$. Dann ist $|x|\leqslant n_0-1$ für alle $x\in a$. Also existieren nach Induktionsvoraussetzung nur endlich viele solcher x. Es folgt die Behauptung. QED.

Zu zwei totalendlichen Mengen werden nun rekursiv nach der Stufe dritte totalendliche Mengen definiert:

(i) Die „Summe" kann nach Finsler folgendermassen definiert werden: $\emptyset+b:=b$. $a+b:=\{\alpha+b/\alpha\in a\}$.

(ii) Das „Produkt" durch: $\emptyset b:=\emptyset$. $ab:=\bigcup_{\alpha\in a} b+\alpha b$.

Dazu zwei Bemerkungen: Man sieht sofort, dass $\emptyset+b=b=b+\emptyset$ und $b\emptyset=\emptyset=b\emptyset$ richtig ist. Wir schreiben somit, wie gewöhnlich, „0" für „$\emptyset$". Ähnlich gilt $\{\emptyset\}a=a=a\{\emptyset\}$. Daher schreiben wir auch wieder „1" für „$\{\emptyset\}$".

SATZ 4: $|a+b|=|a|+|b|$.

Beweis: Wir induzieren nach $|a|$. (i) $|a|=0$. Klar. (ii) $|a|=n^+$. Es existiert ein α_0 mit $|\alpha_0|=n$. Also ist $|\alpha_0|+|b|=|\alpha_0+b|$ maximal unter den $|\alpha+b|$, $\alpha\in a$, also ist $(|\alpha_0|+|b|)^+=|a+b|=n^++|b|=|a|+|b|$. QED.

SATZ 5: $|ab|=|a|\,|b|$.

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $|a|=0$. Klar. (ii) $|a|=n^+$. Also existiert ein $\alpha_0\in a$ mit $|\alpha_0|=n$. Also hat $b+\alpha_0 b$ maximale Stufe unter den $x\subset ab$, mithin gilt $|b+\alpha_0 b|=$ $=|ab|=|b|+|\alpha_0|\,|b|=|\alpha_0|^+\cdot|b|=|a|\cdot|b|$. QED.

SATZ 6: $(a+b)+c=a+(b+c)$. *(Assoziativgesetz.)*

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $(0+b)+c=b+c=0+(b+c)$. (ii) $(a+b)+c=$ $=\{\alpha+b\}_{\alpha\in a}+c=\{(\alpha+b)+c\}_{\alpha\in a}=\{\alpha+(b+c)\}_{\alpha\in a}$. QED.

SATZ 7: $(a+b)\,c=ac+bc$. *(Links Distributivgesetz.)*

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $(0+b)\,c=bc=0c+bc$. (ii) $(a+b)\,c=\bigcup_{\delta\in a+b} c+$ $+\delta c=\{\gamma+(\alpha+b)\,c/(\gamma,\alpha)\in c\times a\}=\{\gamma+\alpha c+bc\}_{\gamma,\alpha}=\{\varepsilon+bc/\varepsilon\in ac\}=ac+bc$. QED.

SATZ 8: $(ab)\,c=a(bc)$. *(Assoziativgesetz.)*

Beweis: Stufeninduktion. $(ab)\,c=\bigcup_{\delta\in ab}c+\delta c=\{\gamma+\delta c\}_{\gamma,\delta}=\{\gamma+(\beta+\alpha b)\,c\}_{\alpha,\beta,\gamma}=$ $=\{(\gamma+\beta c)+\alpha(bc)\}_{\alpha,\beta,\gamma}=a(bc)$. QED.

Für die natürliche Interpretation der totalendlichen Mengen und der erklären Operation mit Hilfe von „Verzweigsfiguren" siehe [1].

II. Zerlegungssätze

Es folgen jetzt die wichtigen Sätze 9 und 11 über das Abspalten von Zahlen. (Satz 9 ist das additive Analogon zu Satz 11 und findet sich schon in [1]). Im Anschluss werden einige Folgerungen bewiesen.

SATZ 9: *$a+b=c+d$ und $|a|=|c|$, falls $a=c$ und $b=d$.*

Beweis: Die Inklusion von rechts nach links ist klar. Die andere ergibt sich durch Induktion nach $|a|=|c|$.

(i) Aus $|a|=0=|c|$ folgt $a=c=0$ und $b=d$.

(ii) Sei $\{\alpha+b\}_{\alpha\in a}=a+b=c+d=\{\gamma+d\}_{\gamma\in c}$. Also existiert für jedes $\alpha\in a$ ein $\gamma\in c$ mit $\alpha+b=\gamma+d$. Somit ist nach Voraussetzung $\alpha=\gamma$ und $b=d$. Daher ist $a\subset c$. Genauso wird $c\subset a$, mithin $a=c$. QED.

LEMMA 10: *Wenn $a+b=c+d$, dann ist $b=x+d$ oder $y+b=d$.*

Beweis: Seien a und c nicht 0, da es sonst klar ist. Dann gibt es für jedes $\alpha\in a$ ein γ aus c, sodass $\alpha+b=\gamma+d$. Nach Induktionsannahme folgt das Lemma. QED.

SATZ 11: *Es ist $ab=cd\neq 0$ und $|a|=|c|$, falls $a=c\neq 0$ und $b=d\neq 0$.*

Beweis: Wir führen Induktion nach $|a|=|c|$.

(i) $|a|=1$. Dann ist $a=c=1$ und daher $b=d$. Die Behauptung sei bewiesen für alle Stufen $|a|=|c|\leqslant n+1$.

(ii) Sei $|a|=n^{++}$. Wir haben $ab=\{\beta+\alpha b\}_{\alpha,\beta}=\{\delta+\gamma d\}_{\gamma,\delta}$. Zu α_0, β_0 mit maximalen Stufen existieren ein γ_0 und ein δ_0 mit maximalen Stufen, sodass $\beta_0+\alpha_0 b=\delta_0+\gamma_0 d$. Also folgt $\alpha_0=\gamma_0$ und $b=d$, denn es ist $|\beta_0|=|\delta_0|=|b|-1=|d|-1$. Somit haben a und c die gleichen maximalen Elemente. Wenn einzusehen ist, dass $\bigcup_{\alpha\neq\max.}b+\alpha b=$ $=\bigcup_{\gamma\neq\max.}d+\gamma d$ ist, dann folgt zunächst einmal $a':=\{\alpha/|\alpha|\neq\text{maximal}\}=\{\gamma/|\gamma|\neq$ $\neq\text{maximal}\}=:c'$, und damit $a=c$. Die geforderte Gleichung gilt, wenn für alle $|\alpha_1|=\text{maximal}$ und für alle $|\alpha_0|\neq\text{maximal}$ $\emptyset=[b+\alpha_1 b]\cap[b+\alpha_0 b]$ ist, und ebenso für $|\gamma_1|=\text{maximal}$ und für alle $|\gamma_0|\neq\text{maximal}$ $\emptyset=[d+\gamma_1 d]\cap[d+\gamma_0 d]$ ist. (Wenn es keine nicht maximale α_0 und γ_0 gibt, sind wir fertig.) Wir beweisen indirekt etwa die erste Gleichung. Wäre dieser Durchschnitt nicht $\emptyset$, so existierten $\beta,\beta'\in b$, sodass $\beta+\alpha_1 b=\beta'+\alpha_0 b$. Nun ist $|\alpha_1 b|>|\alpha_0 b|$. Dann wäre nach Lemma 10 $\alpha_1 b=x+\alpha_0 b$. Jetzt vergleichen wir die Stufen auf beiden Seiten der Gleichung. Links: $|\alpha_1 b|=|ab|-|b|$. Rechts: $|x|+|\alpha_0|\,|b|<|ab|-k|b|$ mit $k\geqslant 1$. Also ist $0<-k'|b|$

mit $k' \geqslant 0$. Das ist ein Widerspruch. Genauso geht der andere Beweis. Also können wir die maximalen Elemente wegtrennen. QED.

SATZ 12: *Im Produkt* $ab = \bigcup_{\alpha \in a} b + \alpha b$ *ist die Vereinigung über die* $\alpha \in a$ *disjunkt:* $ab = \bigcup_{dis} b + \alpha b$.

Beweis: Sei $|\alpha'| = |\alpha|$ und $\alpha' \neq \alpha$. Dann ist wegen Satz 9 und 11 $[b + \alpha b] \cap [b + \alpha' b] = \emptyset$. Sei $|\alpha'| > |\alpha|$. Wenn wir einen nichtleeren Schnitt haben, ist $\alpha' b = x + \alpha b$, also $|x| \geqslant |b|$. Das ist ein Widerspruch. QED.

KOROLLAR 13: *Es ist* $\operatorname{card}(ab) = \operatorname{card}(a) \operatorname{card}(b)$.

Nun einige Bemerkungen zum Begriff der natürlichen Zahlen. Offensichtlich sind die endlichen Ordinalzahlen $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ totalendlich. Mithin ist für diese Produkt und Summe definiert. Man sieht aber ohne Mühe, dass sich die Finslerschen Operationen auf $\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ von den in der ordinalen Arithmetik üblichen arithmetischen Operationen unterscheiden. Hingegen gibt es unter den totalendlichen Mengen eine Teilfamilie, die bezüglich Addition und Multiplikation isomorph zu ω ist. Diese besteht aus den Mengen: 0, 1, $\{1\}$, $\{\{1\}\}$,. Sie... spielt daher die Rolle der natürlichen Zahlen unter den Finslerzahlen. Wir bezeichnen sie mit ω^*. Es ist etwa die n-fache Summe $a + a + \cdots + a = na$, wo $n \in \omega^*$.

SATZ 14: *Es ist* $a + b = b + a$, *falls* $a = mc$ *und* $b = nc$, *wo* $m, n \in \omega^*$.

Beweis: Induktion nach $(a, b) := \operatorname{Max.}(|a|, |b|)$. Sei $|a| \neq |b|$, sonst ist es klar wegen Satz 9.

(i) $(a, b) = 0$. Klar. (ii) $(a, b) > 0$. Wegen Lemma 10 ist entweder $b = x + a$ oder $a = y + b$. Sei etwa $a = y + b$. Dann ist $a + b = y + b + b = b + y + b$. Also ist wegen Satz 9 $y + b = b + y$. Ferner gilt $(y, b) < (a, b)$, da $|b| < |a|$ und $|y| < |a|$. Also ist $y = m' \cdot c$ und $b = nc$. Hiermit ist $a = (m' + n)\, c = mc$. QED.

SATZ 15: *Wenn* $mb = na \neq 0$, *wo* $m, n \in \omega^*$, *dann ist* $a = k'c$ *und* $b = k''c$ *und* $mb = kc$, *wo das* $\operatorname{kgV}(k', k'')$ k *teilt.*

Beweis: Wir nehmen wegen Satz 11 $|a| \neq |b|$, etwa $|b| > |a|$ an. $na = a + (n-1)\, a = b + (m-1)\, b$. Also ist $(n-1)\, a = \delta + (m-1)\, b$, somit $b = a + \delta$. Anderseits ist auch $(n-1)\, a + a = (m-1)\, b + b$, also $b = \gamma + a$, wo $|\gamma| = |\delta|$. Das ergibt:

$$(a + \delta) + (a + \delta) + \cdots + (a + \delta) = (\gamma + a) + (\gamma + a) + \cdots + (\gamma + a),$$

und

$$\delta + (a + \delta) + \cdots + (a + \delta) = \gamma + a + (\gamma + a) + \cdots + \gamma\ ,$$

was $\gamma = \delta$ zeigt. Deshalb ist nach Satz 14 $a = k'c$ und $\delta = m'c$, somit wird $b = (k' + m')\, c = k''c$, und $mb = mk''$. $c = na = nk'c$, das heisst $mk'' = nk'$; und daraus folgt mit $k := mk''$, dass das $kgV(k', k'')$ k teile. QED.

Endlich noch ein einfaches Korollar zum Links-Distributivgesetz.

KOROLLAR 16: $a_0 a_1 \ldots a_n = \{\alpha_n + \alpha_{n-1} a_n + \alpha_{n-2} a_{n-1} a_n + \cdots + \alpha_0 a_1 \ldots a_n\}$ *alle* $\alpha_i \in a_i$.

Wir fragen nun:

Wie zerfällt eine totalendliche Menge additiv und multiplikativ? Dazu zwei Definitionen:

DEFINITION

IV) a heisst mono, falls aus $a = a_1 + a_2$ folgt $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$ (also 0 ist Monozahl)

V) a heisst prim, falls aus $a = a_1 a_2$ folgt $a_1 = 1$ oder $a_2 = 1$ (also 0 ist keine Primzahl, aber 1 ist Primzahl)

SATZ 17: *Für jedes totalendliche $a \neq 0$ existiert genau eine additive Zerlegung in Monozahlen $\neq 0$.*

Beweis: Sei $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$, wo die a_i, b_k Monozahlen $\neq 0$ sind. a_n und b_m sind stufengleich, also gleich, wegen Lemma 10 und Satz 9, usw. induktiv. QED.

SATZ 18: *Zu jeder geordneten Faktorzerlegung der Stufe einer Finslerzahl existiert höchstens eine Faktorzerlegung der letzteren, sodass sich die Faktorstufen wie in der Stufenzerlegung folgen.*

Beweis: Die Eindeutigkeit im obigen Sinne ergibt sich durch Satz 11 und Induktion sofort. QED.

Nun möchten wir schliessen: $ab \neq 0$ ist unzerlegbar in Monozahlen $\neq 0$, falls a und b nicht additiv zerlegbar sind.

Dazu den

SATZ 19: $a(b+c) = x + c$ *für* $a, b \neq 0$.

Beweis: Induktion nach $|a|$. (i) $|a| = 1$. Dann kommen wir mit $x = b$ durch. (ii) $a(b+c) = \{\beta + c + \alpha(b+c)\}_{\alpha, \beta}$ Gesucht wird x. Für $\alpha = 0$ nehmen wir alle $\beta \in b$ in x auf; wenn $\alpha \neq 0$ ist, dann gilt nach Voraussetzung $\alpha(b+c) = \xi'(\alpha) + c$; also nehmen wir noch alle $\beta + c + \xi'(\alpha)$ in x auf. Dieses x genügt unseren Wünschen. QED.

Zusammen mit dem Links-Distributivgesetz hat man also: Wenn $ab \neq 0$ unzerlegbar ist, dann sind a und b unzerlegbar.

Und die Umkehrung:

SATZ 20: *Wenn $ab \neq 0$ additiv zerlegbar ist, dann ist a oder b zerlegbar.*

Beweis: Induktion nach $|ab|$.

Sei $ab = k + l_0 = \{\kappa + l_0\}_{\kappa \in k}$ und l_0 nicht zerlegbar. Ferner ist $ab = \{\beta + \alpha b\}_{\beta, \alpha}$. Es gibt für alle $\alpha \in a$ und $\beta \in b$ genau ein $\kappa(\alpha, \beta)$ mit $\beta + \alpha b = \kappa(\alpha, \beta) + l_0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Es gibt ein β_0 mit $|\beta_0| = |\kappa(\alpha_0, \beta_0)|$. Also ist $\alpha_0 b = l_0$, also sind α_0, b unzerlegbar.

(i0) Es gebe kein α mit $|\alpha|>|\alpha_0|$. Jedes α gleicher Stufe wie α_0 ist diesem gleich, was man durch Einsetzen sieht. Ferner existieren keine α mit $|\alpha|<|\alpha_0|$, wenn l_0 nicht zerlegbar ist. Also ist $a=1+\alpha_0=\{\alpha_0\}$.

(i1) Es existiere ein α_1 mit $|\alpha_1|>|\alpha_0|$. Sei $\beta+\alpha_1 b=\kappa(\beta, \alpha_1)+l_0$. Also ist $\alpha_1 b=v+l_0$, mit $v\neq 0$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $\alpha_1=\bar{\alpha}_1+\bar{\bar{\alpha}}_1$, wo $\bar{\bar{\alpha}}_1$ nicht zerlegbar ist. Daher wird $\alpha_1 b=\bar{\alpha}_1 b+\bar{\bar{\alpha}}_1 b=v+\alpha_0 b$, dh. $\bar{\bar{\alpha}}_1=\alpha_0$. Somit ist $a=x+\alpha_0$, mithin zerlegbar.

(ii) Es gibt kein β_0 mit $|\beta_0|=|\kappa(\alpha_0, \beta_0)|$. Also ist für alle $\beta\in b$ (und $\alpha\in a$) $|\beta|<$ $<|\kappa(\beta, \alpha)|$. $|\beta|>|\kappa(\beta, \alpha)|$ ist ausgeschlossen, denn l_0 wäre dann zerlegbar. Somit gilt für alle $\alpha\in a$ eine Zerlegung $\alpha b=v+l_0$, $v\neq 0$. Dh. alle $\alpha\in a$ sind zerlegbar oder b ist es. Sei b nicht zerlegbar. Also sind alle $\alpha\in a$ zerlegbar: $\alpha=\lambda(\alpha)+\mu(\alpha)$, wo $\mu(\alpha)$ nicht zerlegbar und nicht 0 ist. Hiermit haben wir $\alpha b=\lambda(\alpha)\, b+\mu(\alpha)\, b=v(\alpha)+l_0$. Da aber l_0 und $\mu(\alpha)\, b$ nicht zerlegbar sind, ist $l_0=\mu(\alpha)\, b$, also $\mu(\alpha)=\text{const.}$ für alle $\alpha\in a$. Also ist $a=\{\lambda(\alpha)\}_\alpha+\mu$. QED.

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

SATZ 21: *$ab\neq 0$ ist zerlegbar, falls a oder b zerlegbar ist.*

KOROLLAR 22: *Ein Produkt $a_0 a_1 \ldots a_n\neq 0$ ist zerlegbar, falls mindestens ein a_i zerlegbar ist.*

Aus dem Vorangehenden wollen wir zwei wichtige Folgerungen ziehen.

(I) Jede Finslerzahl ausser 0 und 1 ist Summe von Produkten von primen Monozahlen. Um dies einzusehen, beachten wir erstens, dass jede Finslerzahl Summe von Monozahlen ist und zweitens, dass jede Monozahl Produkt von primen Monozahlen ist.

(II) Der grosse FERMATsche Satz ist für Finslerzahlen gültig, falls er in ω^* gilt. Denn wenn er für Finslerzahlen stimmt, dann auch für ihre Stufen, also in ω^*. Nehmen wir ein Tripel a, b, c von totalendlichen Mengen. Es ist $a^n+b^n=c^n$ wegen Satz 21 nur für zerlegbare c. Um ein Gegenbeispiel zu finden, muss also die Zerlegbarkeit von c wesentlich verwendet werden.

Wir interessieren uns wegen der Folgerung (I) für Produkte von primen Monozahlen. Dazu den

SATZ 23: *Sei $ac=bd\neq 0$ mit c und d mono, prim und $\neq 1$. Dann ist $c=d$ (und wegen Satz 11 $a=b$).*

Beweis: Induktion nach (a, b) $(=\mathrm{Max}(|a|, |b|))$

(i) $(a, b)=1$. Also $a=b=1$ und $c=d$.

(ii) $(a, b)>1$. Das heisst $|a|$ oder $|b|>1$. Behauptung: $|a|$ und $|b|>1$. Beweis: Wäre $a=1$ und $|b|>1$, dann wäre $c=bd$, aber dann könnte c nicht prim sein, denn b und d sind grösser als 1. Seien $\alpha_0\in a$, $\beta_0\in b$, $\gamma\in_0 c$, $\delta_0\in d$ alle maximal (also α_0 und $\beta_0\neq 0$) mit $\gamma_0+\alpha_0 c=\delta_0+\beta_0 d$. Sei weiter $\alpha_0=\alpha_0'+\alpha_0''$, wo $\alpha_0''\neq 0$ und mono, $\beta_0=\beta_0'+\beta_0''$, wo

$\beta_0'' \neq 0$ und mono. Dann ist $0 \neq \alpha_0'' c = \beta_0'' d$, da c und d mono sind. Also ist $c = d$. QED.

KOROLLAR 24: *Ein Produkt von primen Monozahlen* $\neq 1$ *ist eindeutig, dh., wenn* $a_0 a_1 \ldots a_n = b_0 b_1 \ldots b_m$ *ist, wo die* a_i *und die* b_k *prim, mono und* $\neq 1$ *sind, dann ist* $n = m$ *und* $a_i = b_i$ *für alle* i.

Beweis: $a_0 a_1 \ldots a_n = (a_0 a_1 \ldots)\, a_n = (b_0 b_1 \ldots)\, b_m$. Also ist $a_n = b_m$. Usf. Somit ergibt sich der wichtige

SATZ 25: (Zerlegungssatz) *Jede totalendliche Menge* $\neq 0$ *lässt sich als eindeutige Summe von eindeutigen Produkten von primen Monozahlen schreiben.*

Beweis: Satz 9 und Korollar 24.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FINSLER, *Totalendliche Mengen*, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich (Zürich) *108*, H. 2 (1963).
[2] FINSLER, *Zur Goldbachschen Vermutung*, Elem. Math. (Basel) *XX*/6 (1965).

Eingegangen den 17. Februar 1969