Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen.
Autor: Strebel, Kurt
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33790

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen

KURT STREBEL (Zürich)

Der Limes f einer Folge (f_n) von K-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes G der z-Ebene, welche lokal gleichmässig konvergiert, ist entweder eine Konstante oder selber eine K-quasikonforme Abbildung. Wir betrachten den letzteren Fall. Man kann nun bekanntlich nicht schliessen, dass die komplexen Dilatationen κ_n der Abbildungen f_n gegen die komplexe Dilatation κ des Limes f konvergieren. Selbst unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Folge der Beträge $|\kappa_n|$ fast überall konvergiert, geht dieser Schluss nicht: Es kann $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n|>|\kappa|$ sein (für ein Beispiel, in dem das f.ü. der Fall ist, siehe [1] pg. 195).

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass es andererseits keine Menge E von positivem Mass geben kann, auf der die Ungleichung $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|<|\kappa(z)|$ erfüllt ist, und dass die Gleichheit $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|=|\kappa(z)|$ die Existenz einer Teilfolge (n_ν) nach sich zieht, für die $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z)=\kappa(z)$ f.ü. auf E gilt. Wir wollen aber die Existenz des $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$ nicht voraussetzen. Die Aussage gilt dann für den $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$. Dass nämlich andererseits $\underline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|<|\kappa(z)|$ f. ü. sein kann, zeigt das folgende Beispiel:

Wir unterteilen das Quadrat R: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ durch die vertikalen Strecken $x_{mn}=m/2^n$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $m=1,\dots,2^n$, $n=1,2,\dots$. Die Abbildung $w=f_{mn}(z)$ ist ein K-quasikonformer und eckpunkttreuer Homöomorphismus von R auf das Rechteck R'_n: $0\leqslant u\leqslant K(1-2^{-n})+2^{-n}$, $0\leqslant v\leqslant 1$, $K>1$, der folgendermassen festgelegt wird: Das Rechteck R_{mn}: $(m-1)\,2^{-n}\leqslant x\leqslant m2^{-n}$, $0\leqslant y\leqslant 1$ wird horizontal auf ein kongruentes Teilrechteck R'_{mn} von R'_n verschoben. Die übrigen Teilrechtecke von R werden horizontal mit dem Faktor K gestreckt und natürlich entsprechend verschoben, sodass f_{mn} auf den Geraden $x_{mn}=m2^{-n}$ stetig wird. Offenbar konvergiert die Folge (f_{mn}), $m=1,\dots,2^n$, $n=1,2,\dots$ gleichmässig gegen die Horizontalstreckung $w=f(z)=Kx+iy$, wohingegen der Limes inferior der Folge der Beträge der komplexen Dilatationen f. ü. gleich null ist.

SATZ: *Sei f ein K-quasikonformer Homöomorphismus eines Gebietes G der z-Ebene in die Ebene und lokal gleichmässiger Limes einer Folge (f_n) ebensolcher Abbildungen. Dann ist $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|\geqslant|\kappa(z)|$ f. ü. Gilt auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit, so gibt es eine Teilfolge (n_ν), sodass $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z)=\kappa(z)$ f. ü. auf E.*

Beweis: 1) Wir betrachten zunächst einen regulären Punkt z_0 von f, in dem also f ein totales Differential $dw=p(z_0)\,dz+q(z_0)\,d\bar{z}$ besitzt und ausserdem die Funktionaldeterminante $J(z_0)=|p(z_0)|^2-|q(z_0)|^2>0$ ist. Wir nehmen ferner an, dass $\kappa(z_0)=$

$q(z_0)/p(z_0) \neq 0$ sei. Es gibt dann im Punkte z_0 für die differentielle Abbildung $dw = p(z_0)\,dz + q(z_0)\,d\bar{z}$ eine bis auf π eindeutig bestimmte Richtung grösster Streckung: Es ist die Richtung $\vartheta = (\beta - \alpha)/2 = \gamma/2$, mit den Bezeichnungen $p(z_0) = |p(z_0)|\,e^{i\alpha}$, $q(z_0) = |q(z_0)|\,e^{i\beta}$, $\kappa(z_0) = |\kappa(z_0)|\,e^{i\gamma}$. Sie wird übergeführt in die Richtung $\vartheta^* = (\alpha + \beta)/2$.

Sei $Q_a(z_0)$ das Quadrat mit dem Mittelpunkt z_0 und der Seitenlänge a, dessen eine Seite die Richtung ϑ hat. Es wird durch die lineare Approximation von f abgebildet auf das Rechteck R mit dem Mittelpunkt $w_0 = f(z_0)$ und den Seitenlängen $a(|p(z_0)| + |q(z_0)|)$ in der Richtung ϑ^*, $a(|p(z_0)| - |q(z_0)|)$ in der Richtung $\vartheta^* + \pi/2$. Zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sodass für alle $a < \delta$ und $z = z_0 + dz \in Q_a(z_0)$ gilt: $|f(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$.
Für jedes feste $a < \delta$ gibt es dann ausserdem ein n_a, sodass für alle $n > n_a$, $z \in Q_a(z_0)$ auch $|f_n(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$ ist.

Wir führen in $Q_a(z_0)$ $\zeta = \xi + i\eta = e^{-i\vartheta}(z - z_0)$ als seitenparallele Koordinaten ein, wobei also die ξ-Achse aus der x-Achse durch Drehung um den Winkel ϑ hervorgeht. Die Richtung $\eta = \text{konst.}$ ist somit die Richtung grösster Streckung der linearen Approximation. Wir betrachten die f_n-Bilder der Strecken $\eta = \text{konst.}$ in $Q_a(z_0)$ für $n > n_a$. Bezeichnen wir das totale Differential von f_n in einem beliebigen Punkte z mit $dw_n = p_n(z)\,dz + q_n(z)\,d\bar{z}$, so gilt für $dz = e^{i\vartheta}\,d\xi$

$$dw_n = p_n(z)\,e^{i\vartheta}\,d\xi + q_n(z)\,e^{-i\vartheta}\,d\xi\,.$$

Für die Längen dieser f_n-Bilder erhalten wir somit

$$a(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,d\xi$$

und durch Integration über η

$$a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,d\xi\,d\eta$$
$$= \iint_{Q_a(z_0)} |p_n(z) + q_n(z)\,e^{-i\gamma(z_0)}|\,dx\,dy\,.$$

Eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$a^4(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2$$
$$\leqslant \iint_{Q_a(z_0)} (|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2)\,dx\,dy \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|p_n(z) + q_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2}\,dx\,dy$$

$$\leqslant a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)$$
$$\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy.$$

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2} = \frac{1 + |\kappa_n(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$
$$= D_n(z) - 2\,\frac{|\kappa_n(z)| - \mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$

wo $D_n(z) = (1 + |\kappa_n(z)|)/(1 - |\kappa_n(z)|) \geqslant 1$ die Dilatation von f_n im Punkte z ist, erhalten wir schliesslich für jedes $a < \delta$ und $n > n_a$ die Ungleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2}{(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)} \equiv D(z_0) + (\varepsilon) \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - 2a^{-2} \\ &\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \mathrm{Re}\,\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei (ε) eine mit ε gegen null gehende Grösse bezeichnet.

2) Das Lemma von Fatou ([3], pg. 29), angewendet auf die Folge der Funktionen $K - D_n \geqslant 0$ in $Q_a(z_0)$, ergibt

$$\varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (K - D_n(z))\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varliminf_{n\to\infty} (K - D_n(z))\, dx\, dy$$

und daher

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy.$$

Wir erhalten somit aus (1) die Ungleichung

$$D(z_0) + (\varepsilon) \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy \tag{2}$$

in jedem regulären Punkt z_0 von f, in dem $\kappa(z_0) \neq 0$ ist, für alle $a < \delta(\varepsilon, z_0)$.

Nehmen wir nun an, es gelte auf einer Menge von positivem Mass $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) < D(z)$. Dann gibt es eine Menge E, $|E| > 0$ und eine positive Zahl d, sodass auf E $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) \leqslant D(z) - d$ ist. In E ist $D(z) \geqslant 1 + d$, und es gibt einen regulären Punkt

z_0 von f in E, der Dichtepunkt der Menge E ist, und in dem $\lim_{a\to 0} a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} D(z) \times \times dx\,dy = D(z_0)$ gilt; die letzte Beziehung gilt nämlich für beliebige Quadrate $Q_a(z_0)$ f. ü. in G. Wir haben somit für alle $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)+(\varepsilon) &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K \iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K \iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für $a\to 0$ erhalten wir zunächst $D(z_0)+(\varepsilon)\leqslant D(z_0)-d$ und daraus für $\varepsilon\to 0$ $D(z_0)\leqslant \leqslant D(z_0)-d$, was einen Widerspruch bedeutet. Das beweist den ersten Teil des Satzes.

3) Es gelte nun auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit: $\overline{\lim}_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$, $z\in E$. Wir zeigen zunächst, dass es dann eine Teilfolge (n_ν) gibt, für welche $\lim_{\nu\to\infty} D_{n_\nu}(z) = D(z)$ f. ü. auf E ist.

In denjenigen Punkten von E, in denen $D(z)=1$ (d.h. $\kappa(z)=0$) ist, gilt $D_n(z)\to D(z)$ und damit auch $\kappa_n(z)\to\kappa(z)$ schon für die ursprüngliche Folge und umsomehr für jede Teilfolge. Wir dürfen daher annehmen, dass auf E $D(z)>1$ sei. Wir betrachten $E_r = E\cap\{z \mid |z|<r\}$. In fast allen Punkten $z_0\in E_r$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy \\ = \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} D(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D(z)\,dx\,dy = D(z_0) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es gibt nun wegen (1) und (4) zu gegebenem $\varepsilon>0$ für jedes $z_0\in E_r$ mit Ausnahme einer Nullmenge ein $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)>0$ sodass für $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)-\varepsilon &\leqslant a^{-2} \underline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy \leqslant D(z_0)+\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Die abgeschlossenen Quadrate $Q_a(z)$, $z\in E_r$, $a<\delta(\varepsilon, z)$, überdecken die Menge E_r im Sinne von Vitali ([3], pg 109), und es gibt daher eine höchstens abzählbare Menge von nicht-überlappenden Quadraten $Q_{a_\nu}(z_\nu)$, $\nu=1, 2, \ldots$ sodass $|E_r - A|=0$ ist, wo $A=\sum_\nu Q_{a_\nu}(z_\nu)$ bedeutet. Die Quadrate $Q_{a_\nu}(z_\nu)$ sind nicht-überlappend, und sie können zudem von Anfang an so gewählt werden, dass sie in einer gegebenen offenen Menge 0 liegen, die E_r enthält. Man kann daher annehmen, dass $|A-E_r|\leqslant|0-E_r|<\varepsilon$ ist. Schreiben wir nun die Ungleichungen (5) für jedes z_ν an, multiplizieren sie mit a_ν^2 und

summieren über alle ν, so erhalten wir (mit $Q_\nu \equiv Q_{a_\nu}(z_\nu)$)

$$\left.\begin{aligned}\sum_\nu D(z_\nu)\, a_\nu^2 - \varepsilon |A| &\leqslant \sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \sum_\nu \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\, dx\, dy \\ &\leqslant \sum_\nu \iint_{Q_\nu} \varlimsup D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \sum_\nu D(z_\nu)\, a_\nu^2 + \varepsilon |A|\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für eine beliebige natürliche Zahl N ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n$$

und

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n &= \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n\right) \\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{N} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n\,.\end{aligned}$$

Da der letzte Summand wegen der gleichgradigen Konvergenz (bezüglich n) der Summe $\sum_\nu \iint_{Q_\nu} D_n$ für $N\to\infty$ beliebig klein wird, haben wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned}\sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \\ \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus (7) folgt mit Hilfe von (6)

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant 2|A|\,\varepsilon < 2(|E_r| + \varepsilon)\,\varepsilon\,. \tag{8}$$

Wegen $A \supset E_r$ (bis auf eine Nullmenge) und $|A - E_r| < \varepsilon$ gilt weiter

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_{A-E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n \leqslant K\cdot\varepsilon \tag{9}$$

und

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{A-E_r} D_n \leqslant K\varepsilon\,. \tag{10}$$

Berücksichtigen wir noch die Voraussetzung $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$ auf E_r, so erhalten

wir aus (8), (9) und (10) die Gleichung

$$\iint_{E_r} D - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) = 0 \tag{11}$$

und daraus $\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| = 0.$ (12)

Die letzte Beziehung folgt so: Es gilt $|D-D_n| = (D-D_n) - 2(D-D_n)^- = D - D_n + 2|(D-D_n)^-|$ und daher

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) + 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^-| \\ &= 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^-| \leqslant 2 \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} |(D - D_n)^-| = 0,\end{aligned}$$

da der Integrand f. ü. verschwindet. Die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D-D_n| = 0$ bedeutet nun, dass die L^1-Norm $\|D-D_n\|_{E_r} \to 0$ geht für $n\to\infty$, und daraus ergibt sich bekanntlich die Existenz einer Teilfolge (n_ν), sodass $D(z) - D_{n_\nu}(z) \to 0$ für f. a. z aus E_r. Lassen wir r die natürlichen Zahlen durchlaufen und wählen wir die Teilfolge für E_{r+1} aus derjenigen für E_r, so erhalten wir in der Diagonalfolge die gesuchte Teilfolge, die f. ü. auf E gegen D konvergiert.

4) Für das Folgende dürfen wir zum vorneherein annehmen, dass auf der Menge E von positivem Mass $\lim_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$ f. ü. gelte, und dass ausserdem $D(z) > 1$ sei. Damit äquivalent ist: $\lim_{n\to\infty} |\kappa_n(z)| = |\kappa(z)| > 0$ f. ü. auf E. Aus der Ungleichung (1) folgt für fast jedes $z_0 \in E$

$$\left.\begin{aligned} &2a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - D(z_0) + (\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Lässt man nun zunächst $n\to\infty$ und dann $a\to 0$ gehen, so folgt

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy = 0 \tag{14}$$

und daher umsomehr

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} \left(|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}\right) dx\, dy = 0. \tag{15}$$

Nun gilt bekanntlich (für den Beweis des eindimensionalen Analogons siehe z.B. [2] pg 228) für f. a. $z_0 \in E$

$$\overline{\lim_{a\to 0}} \frac{1}{a^2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy = 0. \tag{16}$$

Aus

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy \\ &\quad \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)})\, dx\, dy \\ &\quad + \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

folgt daher: Für f. a. $z_0 \in E$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ sodass für $a < \delta$ gilt

$$a^{-2}\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy < \varepsilon. \tag{18}$$

Nun betrachten wir wieder zunächst E_r und erhalten mittels einer Überdeckung von E_r im Sinne von Vitali wie oben

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_r} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy = 0. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich zuerst die Existenz einer Teilfolge (n_ν) für die $|\kappa_{n_\nu}(z)| - \operatorname{Re}\kappa_{n_\nu}(z) \times \times e^{-i\gamma(z)} \to 0$ geht f. ü. auf E_r. Durch das Cantorsche Diagonalverfahren erhalten wir schliesslich eine Teilfolge, für die die obige Beziehung f. ü. auf E gilt.

Sei nun $z \in E$ ein solcher Punkt. Dann gilt also $|\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)}| \to |\kappa(z)|$ und $\operatorname{Re}\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$. Daraus folgt offenbar $\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$ und somit

$$\kappa_{n_\nu}(z) \to |\kappa(z)|\, e^{i\gamma(z)} = \kappa(z), \qquad \text{q.e.d.}$$

LITERATUR

[1] O. Lehto und K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen* (Berlin 1965).
[2] E. J. McShane: *Integration* (Princeton 1947).
[3] S. Saks: *Theory of the Integral* (New York 1937).

Eingegangen den 7. Januar 1969