Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie.
Autor: Mislin, Guido
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33781

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie

GUIDO MISLIN

Einleitung

Die Künneth-Formel gibt eine Beziehung zwischen der Cohomologie eines Produktes von topologischen Räumen und der Cohomologie der Faktoren an. Sind X und Y (endliche) CW-Komplexe, so kann man die Künneth-Formel in Form einer kurzen exakten Sequenz von zellulären Cohomologiegruppen schreiben

$$0 \to (H^*X \otimes H^*Y)^q \xrightarrow{m} H^q(X \times Y) \to \operatorname{Tor}(H^*X, H^*Y)^{q+1} \to 0$$

Diese exakte Sequenz nimmt für punktierte CW-Komplexe X und Y, unter Verwendung von reduzierter Cohomologie, die folgende Form an

$$0 \to (\tilde{H}^*X \otimes \tilde{H}^*Y)^q \xrightarrow{m} \tilde{H}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}(\tilde{H}^*X, \tilde{H}^*Y)^{q+1} \to 0$$

(Es bezeichnet $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ das „smash"-Produkt, und m bzw. $\tilde{m}$ sind die äusseren Produkte der Cohomologietheorien H bzw. $\tilde{H}$).

Im folgenden wird gezeigt, dass für eine ausserordentliche Cohomologietheorie h eine stark konvergente „Künneth-Spektralsequenz" mit $E_2^{p,q} \cong \operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$ und $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$ existiert, falls man eine endliche flache Auflösung des Λ-Moduls $\tilde{h}^*X$ geeignet „geometrisch realisieren" kann; $\Lambda = \tilde{h}^*S^0$ bezeichnet den Koeffizientenring. Diese Spektralsequenz bricht zusammen, wenn $\operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y) = 0$ ist für $p > 1$. Dann erhält man wie im Falle der gewöhnlichen Cohomologie, eine Künneth-Formel in Form einer exakten Sequenz

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_\Lambda \tilde{h}^*Y)^q \to \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Dies trifft z.B. für die komplexe K-Theorie zu, wie Atiyah in [2] gezeigt hat, und modulo 2-Torsion auch für die reelle K-Theorie (vgl. Korollare 1 und 4). Für andere Cohomologietheorien erhält man analoge Resultate, wenn man geeignete Voraussetzungen über die homologische Dimension von $\tilde{h}^*X$ bzw. $\tilde{h}^*Y$ macht (vgl. Korollar 5).

Die Methode, welche zu der oben beschriebenen Spektralsequenz führt, ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Atiyah (loc. cit.) der Künneth-Formel für die komplexe K-Theorie.

Die meisten Resultate der vorliegenden Arbeit sind in einer Comptes-Rendus-Note angekündigt worden (G. Mislin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 504–506, 1968).

I. Ungraduierte Cohomologiefunktoren mit Multiplikation

Es bezeichne $\mathscr{C}$ die Kategorie der punktierten Räume vom Homotopietypus eines endlichen CW-Komplexes. Alle im folgenden auftretenden Räume seien Objekte aus $\mathscr{C}$.

1. DEFINITION 1. Ein auf der Kategorie $\mathscr{C}$ definierter kontravarianter Funktor t mit Werten in der Kategorie der Abelschen Gruppen heisst ungraduierter Cohomologiefunktor mit Multiplikation, falls gilt:

1) Exaktheit. Ist $X \to Y \to Z$ eine Cofaserung in $\mathscr{C}$, so ist die Bildsequenz $tZ \to tY \to tX$ exakt.

2) Homotopie-Invarianz. Ist $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $tf: tY \to tX$ ein Isomorphismus.

3) Suspensions-Isomorphismus. Es gibt eine homomorphe natürliche Transformation $\nu: t \xrightarrow{\cong} t \circ \sum = t(S^1 \Lambda)$.

4) Multiplikation. Es gibt eine natürliche Transformation $\mu: t \times t \to t \circ \wedge$ mit

α) μ ist homomorph in beiden Variablen, und definiert somit für alle X und Y einen Homomorphismus $tX \otimes tY \to t(X \wedge Y)$, den wir auch mit μ bezeichnen.

β) μ soll auf folgende Art mit ν kompatible sein: $\mu \circ (\nu \otimes 1) = \nu \circ \mu$

$$\begin{array}{ccc} tX \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge Y) \\ {\scriptstyle \nu\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ t(S^1 \wedge X) \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(S^1 \wedge X \wedge Y) \end{array}$$

γ) Die folgende abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität soll erfüllt sein:

S^0-Assoziativität.

$$\mu \circ (1 \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes 1): tX \otimes tS^0 \otimes tX \to t(X \wedge Y)$$

S^0-Kommutativität.

$$\begin{array}{ccccc} T_2 \circ \mu = \mu \circ T_1: tS^0 \otimes tX & \xrightarrow{\mu} & t(S^0 \wedge X) & \cong & tX \\ {\scriptstyle T_1}\downarrow & & {\scriptstyle T_2}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow \\ tX \otimes tS^0 & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge S^0) & \cong & tX \end{array}$$

Hierbei bezeichnen T_1 und T_2 die evidenten Abbildungen, und X ist auf kanonische Weise mit $S^0 \wedge X$ und $X \wedge S^0$ identifiziert.

δ) Es gibt eine $1 \in tS^0$ mit $\mu(1 \otimes x) = \mu(x \otimes 1) = x$ für alle $x \in tX$ and alle X.

Aus γ und δ folgt, dass tS^0 ein assoziativer und kommutativer Ring Λ mit 1 ist, und dass tX ein unitärer Λ-Modul ist. Wegen γ sind die beiden Λ-Modul-Strukturen $tS^0 \otimes tX \to tX$ und $tX \otimes tS^0 \to tX$ natürlich isomorph. Aus der S^0-Assoziativität folgt,

dass μ wie folgt faktorisiert: $\mu = \tilde{\mu} \circ \kappa$ (κ die kanonische Abbildung)

$$\begin{tikzcd} tX \otimes tY \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & t(X \wedge Y) \\ & tX \otimes_\Lambda tY \arrow[ur, "\tilde{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

Ist $\{\tilde{h}^i, v^i\}$ eine ausserordentliche, multiplikative, reduzierte Cohomologietheorie, so ist $t = \tilde{h}^*$ ein Funktor von der oben beschriebenen Art, falls die Multiplikation dem Axiom 4 von Definition 1 genügt. (Man verlangt natürlich in diesem Fall, dass $\tilde{h}^*$ im graduierten Sinne S^0-kommutativ ist). Führt man in $\tilde{h}^*$ Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ ein, so kann man unter gewissen Umständen in $\tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ eine multiplikative Struktur definieren [vgl. 1]. Diese multiplikative Struktur ist im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ. Doch ist die oben geforderte abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität für $t = \tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ häufig erfüllt, so z.B. für die reelle K-Theorie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, falls p eine ungerade Primzahl ist.

II. Der triviale Fall: $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(tY,\ ) = 0$

Ist der Funktor $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(tY,\ ) = 0$, so ist auch $\mathrm{Tor}_p^\Lambda(tY,\ ) = 0$ für alle $p > 1$ und man nennt tY flach. Gleichbedeutend damit ist zu sagen, dass $\otimes_\Lambda tY$ ein exakter Funktor ist. Für diesen Fall nimmt die Künneth-Formel die folgende einfache Form an.

2. LEMMA 1. *Ist tY ein flacher Λ-Modul, so gilt für alle X*

$$\tilde{\mu}: tX \otimes_\Lambda tY \cong t(X \wedge Y)$$

Beweis. Für $X = S^0$ ist dies offensichtlich richtig. Nun kann man mittels Induktion das Lemma für $X = S^n$ beweisen, wie man aus dem folgenden (wegen Definition 1, β) kommutativen Diagramm abliest

$$\begin{tikzcd} tS^{n-1} \otimes_\Lambda tY \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "v \otimes 1"', "\cong"] & t(S^{n-1} \wedge Y) \arrow[d, "\cong"', "v"] \\ tS^n \otimes_\Lambda tY \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & t(S^n \wedge Y) \end{tikzcd}$$

Da tY flach ist, ist $t(\ ) \otimes_\Lambda tY$ ein halbexakter Homotopiefunktor. Also ist $\tilde{\mu}: t(\ ) \otimes \otimes_\Lambda tY \to t(\ \wedge Y)$ eine natürliche Transformation zwischen halbexakten Homotopiefunktoren, die auf den Sphären ein Isomorphismus ist. Folglich ist $\tilde{\mu}$ für alle endlichen CW-Komplexe ein Isomorphismus [6, Satz 7.1].

3. KOROLLAR 1. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte reelle K-Theorie $\widetilde{KO}^\#(\ ;\mathbf{Z}_p)$ mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, p eine ungerade Primzahl, gilt die Künneth-Formel*

$$\tilde{\mu}: \widetilde{KO}^\#(X;\mathbf{Z}_p) \otimes_\Lambda \widetilde{KO}^\#(Y;\mathbf{Z}_p) \cong \widetilde{KO}^\#(X \wedge Y;\mathbf{Z}_p)$$

Beweis. Der Funktor $t=\widetilde{KO}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)=\oplus_{i\in\mathbf{Z}_8}\widetilde{KO}^i(\ ;\mathbf{Z}_p)$ trägt eine kanonische multiplikative Struktur [vgl. 1], welche t zu einem Cohomologiefunktor mit Multiplikation (cf. Def. 1) macht. Nach Bott [3, p. 72] ist der Ring $\widetilde{KO}^{\#}S^0\cong\mathbf{Z}[x,y]/$ $/(x^2-4, 2y, xy, y^3)$ mit $\deg(x)=4$ und $\deg(y)=7$ (in $\mathbf{Z}_8$). Die Reduktion mod. p, $R:\widetilde{KO}^{\#}S^0\to\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$, ist ein Ringhomomorphismus und, wegen $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\widetilde{KO}^{\#}S^0,$ $\mathbf{Z}_p)=0$, ist R surjektiv. Weil das Bild $\mathrm{Im}(R)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p$ ist als Ring, folgt: $\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p\cong\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)$. Aber $(z-2)$ und $(z+2)$ sind fremde Elemente im Hauptidealring $\mathbf{Z}_p[z]$ wegen $p\neq 2$; demnach gilt $\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)\cong$ $\cong(\mathbf{Z}_p[v]/(v+2))\times(\mathbf{Z}_p[w]/(w-2))\cong\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p$, [vgl. 4, §1 Prop. 4]. Der Koeffizientenring $\Lambda=tS^0=\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$ ist also halbeinfach und mithin sind alle Λ-Moduln projektiv [5, Chap. I, Theorem 4.2]. Somit ist $\widetilde{KO}^{\#}(X;\mathbf{Z}_p)$ flach für alle X und das Korollar folgt aus dem Lemma 1.

(Ein analoges Korollar erhält man natürlich z.B. für die Cohomologietheorien $\tilde{H}^*(\ ;\mathbf{Z}_p)$ oder $\widetilde{KU}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ für beliebige Primzahlen p.)

Das folgende Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass tX ein flacher Λ-Modul ist.

4. LEMMA 2. *Ist die Abelsche Gruppe $H^*X\otimes tS^0$ torsionsfrei, so ist tX ein freier tS^0-Modul.*

5. HILFSSATZ 1. *Es sei R ein Ring mit* 1. *Ist $H^*X\otimes R$ torsionsfrei, so ist die natürliche Ring-Abbildung $\varphi:H^*X\otimes R\to H^*(X;R)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Gemäss dem Koeffiziententheorem genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Tor}(H^*X, R)$ $=0$ ist. Da H^*X eine endlicherzeugte Abelsche Gruppe ist ($X\in\mathscr{C}$) brauchen wir jedoch nur zu zeigen, dass für jeden endlichen direkten Summanden $\mathbf{Z}_m\subset H^*X$ gilt $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$. Hierzu betrachten wir die exakte Sequenz $0\to\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)\to R\xrightarrow{M}R\to$ $\to\mathbf{Z}_m\otimes R\to 0$, wobei M die Multiplikation mit m bedeutet. Weil $\mathbf{Z}_m\otimes R$ ein direkter Summand der torsionsfreien Gruppe $H^*X\otimes R$ ist folgt $\mathbf{Z}_m\otimes R=0$, d.h. M ist surjektiv. Es sei nun $b\in\mathrm{Ker}(M)$ und a ein Element mit $M(a)=ma=1$. Wegen $M(ab)$ $=(ma)\,b=b=a(mb)=0$ folgt $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$.

Beweis von Lemma 2. Wir betrachten die ausserordentliche Cohomologietheorie $\tilde{h}^*$ definiert durch $\tilde{h}^i=t$ und $(\nu^i:\tilde{h}^i\to\tilde{h}^{i+1}\circ\Sigma)=(\nu:t\to t\circ\Sigma)$ für alle i. Da diese Cohomologietheorie die Periode 1 hat, kann man die Atiyah–Hirzebruch Spektralsequenz wie folgt schreiben:

$$E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\Rightarrow E_\infty^p(t)\cong \mathrm{gr}_p\, tX$$

$\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ ist eine Spektralsequenz von tS^0-Moduln. Aus der Voraussetzung folgt, unter Verwendung des Hilfssatzes, dass $E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\cong H^p(X)\otimes tS^0$ ist. Betrachtet man die evidente natürliche Transformation $\varrho:t\to t\otimes\mathbf{Q}=t'$, so erhält man

einen Morphismus zwischen Spektralsequenzen $\varrho^*:\{E_r^*(t), d_r(t)\}\to\{E_r^*(t'), d_r(t')\}$. Die Spektralsequenz $\{E_r^*(t'), d_r(t')\}$ bricht aber zusammen, denn $t'S^0$ ist ein $\mathbf{Q}$-Vektorraum. Daraus folgt, dass auch $\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ zusammenbricht. Betrachtet man nämlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_2^p(t) & \xrightarrow{\varrho_{2^p}} & E_2^p(t') \\ {\scriptstyle d_{2^p}(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{2^p}(t')} \\ E_2^{p+2}(t) & \xrightarrow{\varrho_{2^{p+2}}} & E_2^{p+2}(t') \end{array}$$

so ist $\varrho_2^{p+2}\circ d_2^p(t)=d_2^p(t')\circ\varrho_2^p=0$, denn es ist $d_r(t')=0$ für $r\geqslant 2$. Andrerseits ist $\varrho_2^*:E_2^*(t)\cong H^*X\otimes tS^0\to E_2^*(t')\cong E_2^*(t)\otimes\mathbf{Q}$ injektiv, denn nach Voraussetzung ist $H^*X\otimes tS^0$ torsionsfrei. Also folgt aus $\varrho_2^{p+2}\circ d_2^p(t)=0$, dass $d_2^p(t)=0$ ist. Analog schliesst man: $d_r(t)=0$ für $r>2$. Schreibt man H^pX als direkte Summe einer freien Abelschen Gruppe F und einer Torsionsgruppe T, $H^pX\cong F\oplus T$, so induziert die Projektion auf den ersten Faktor einen tS^0-Isomorphismus $H^pX\otimes tS^0\cong F\otimes tS^0\cong$ $\cong(tS^0)^m$, wobei m den Rang von F bezeichnet. Es folgt $E_2^p(t)\cong(tS^0)^m\cong E_\infty^p(t)\cong$ $\cong\mathrm{gr}_p tX$. Der tS^0-Modul tX ist somit frei, denn er besitzt eine endliche Filtrierung mit freier assoziierter graduierter Gruppe $\oplus\mathrm{gr}_p tX$.

6. KOROLLAR 2. *Die Multiplikation* $\tilde{\mu}:tX\otimes_A tY\to t(X\wedge Y)$ *ist ein C-Isomorphismus zwischen Abelschen Gruppen.* (C=Klasse der Torsionsgruppen).

Beweis. Wir betrachten wieder die natürliche Transformation $\varrho:t\to t'=t(\ )\otimes\mathbf{Q}$. Der Funktor t' trägt auf natürliche Weise die Struktur eines ungraduierten Cohomologiefunktors mit Multiplikation μ', induziert durch dieselbe Struktur von t, und ϱ ist kompatibel mit den Multiplikationen. Folglich gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} t'X\otimes_{A'}t'Y & \xrightarrow{\tilde{\mu}'} & t'(X\wedge Y) \\ {\scriptstyle\otimes\mathbf{Q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\otimes\mathbf{Q}} \\ tX\otimes_A tY & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & t(X\wedge Y) \end{array}$$

Aus Lemma 2 folgt, dass $t'Y$ flach ist ($t'S^0=tS^0\otimes\mathbf{Q}$ ist torsionsfrei und divisibel). Somit ist $\tilde{\mu}'$ gemäss Lemma 1 ein Isomorphismus. Ferner sind die vertikalen Pfeile im Diagramm C-Isomorphismen, denn für eine Abelsche Gruppe A sind Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A\to A\otimes\mathbf{Q}$ die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ bzw. $A\otimes(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Folglich ist auch $\tilde{\mu}$ ein C-Isomorphismus.

III. N-Auflösungen und die Künneth-Spektralsequenz

Wir wollen uns hier im Hinblick auf die Anwendungen auf $\mathbf{Z}$- bzw. $\mathbf{Z}_q$-graduierte Cohomologiefunktoren $t=\tilde{h}^*$ beschränken, mit $\tilde{\mu}$ vom Grade 0 und ν vom Grade 1.

7. DEFINITION 2. Es sei N eine natürliche Zahl. Eine N-Auflösung von X besteht aus einer Familie von Cofaserungen

$$\{Y_k \xrightarrow{\sigma_k} F_k \xrightarrow{\tau_{k+1}} Y_{k+1}; 0 \leqslant k \leqslant N; Y_0 = X; Y_{N+1} = 0\},$$

wobei man verlangt, dass $\tilde{h}^* F_k$ flach ist und dass die Homomorphismen $\sigma_k^* : \tilde{h}^* F_k \to \to \tilde{h}^* Y_k$ surjektiv sind für alle k.

Zu einer N-Auflösung von X gehört eine flache Auflösung von $\tilde{h}^* X$ der Länge N

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{h}^* F_N \arrow[r, "\partial_N^*"] & \cdots \arrow[r, "\partial_2^*"] & \tilde{h}^* F_1 \arrow[rr, "\partial_1^*"] \arrow[dr, "\sigma_1^*"'] & & \tilde{h}^* F_0 \arrow[r, "\sigma_0^*"] & \tilde{h}^* X \\
& & & & \tilde{h}^* Y_1 \arrow[ur, "\tau_1^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

mit $\partial_k = \sigma_k \circ \tau_k$.

Ferner gehört zu einer N-Auflösung von X eine Faktorisierung von $f: 0 \to \Sigma^N X$, nämlich

$$0 \xrightarrow{j^N} Y_N \xrightarrow{j^{N-1}} \Sigma Y_{N-1} \to \cdots \to \Sigma^{N-1} Y_1 \xrightarrow{j^0} \Sigma^N Y_0 = \Sigma^N X$$

wobei $j^p = \Sigma^{N-p-1} \varphi_p$ ist, und φ_p die Abbildung in der Puppesequenz

$$Y_p \to F_p \to Y_{p+1} \xrightarrow{\varphi_p} \Sigma Y_p \to \Sigma F_p$$

bezeichnet.

Offensichtlich ist die Cofaser $\mathrm{Cof}(j^p) = \mathrm{Cof}(\Sigma^{N-p-1} \varphi_p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$.

8. SATZ. *Besitzt X eine N-Auflösung, so gibt es eine Spektralsequenz*

$$\{E_r^{p,q}, d_r\} \quad \text{mit} \quad E_2^{p,q} \cong \mathrm{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^* X, \tilde{h}^* Y)^{p+q} \text{ und } E_{N+1}^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \mathrm{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y).$$

Beweis. Es sei $f = \Pi j^p$ die zur N-Auflösung von X gehörige Faktorisierung von $0 \to \Sigma^N X$. Betrachtet man den Kompositionsfunktor $\{T^q, w^q\} = \{\tilde{h}^{N+q}(\ \wedge Y), v^{N+q}\}$, so erhält man [vgl. 7] aus der Faktorisierung $f = \Pi j^p$ ein Rees-System mit zugehöriger Spektralsequenz $\{E_r^{p,q}, d_r\}$. Es folgt in der Schreibweise von [7]

$$E_1^{p,q} = T^q(j^p) \cong \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^{N-p} F_p \wedge Y) \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\mathrm{Cof}(j^p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$ ist. Das Differential $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to \to E_1^{p-1,q+1}$ wird induziert durch

$$(F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\tau_p \wedge 1} Y_p \wedge Y \xrightarrow{\sigma_p \wedge 1} F_p \wedge Y) = (F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\partial_p \wedge 1} F_p \wedge Y),$$

sodass man ein kommutatives Diagramm erhält

$$\begin{tikzcd}
E_1^{p,q} \arrow[d, phantom, "\cong"] \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y) \arrow[r, "(\partial_p \wedge 1)^*"] & \tilde{h}^{p+q}(F_{p-1} \wedge Y) \arrow[d, phantom, "\cong"] \cong E_1^{p-1,q+1} \\
(\tilde{h}^* F_p \otimes_\Lambda \tilde{h}^* Y)^{p+q} \arrow[u, "\tilde{\mu}"] \arrow[r, "\partial_p^* \otimes 1"] & (\tilde{h}^* F_{p-1} \otimes_\Lambda \tilde{h}^* Y)^{p+q} \arrow[u, "\tilde{\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Gemäss Lemma 1 sind die vertikalen Pfeile natürliche Isomorphismen, denn $\tilde{h}^*F_k$ ist flach für alle k. Also sind die Komplexe $\{E_1^{p,q}, d_1^{p,q}\}$ und $\{(\tilde{h}^*F_p \otimes \tilde{h}^*Y)^{p+q}, (\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}\}$ isomorph. Weil $\{\tilde{h}^*F_p, \partial_p^*\}$ eine flache Auflösung von $\tilde{h}^*X$ ist, folgt

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ker} d_1^{p,q}/\operatorname{Im} d_1^{p+1,q-1} \cong \operatorname{Ker}(\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}/\operatorname{Im}(\partial_{p+1}^* \otimes 1)^{p+q} \cong$$
$$\cong \operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$$

Für $p \notin [0, N]$ ist offensichtlich $E_2^{p,q}=0$, denn $\tilde{h}^*X$ besitzt eine flache Auflösung der Länge N (d.h. $\text{w.dim}_\Lambda \tilde{h}^*X \leqslant N$). Hieraus folgt $E_{N+1} \cong E_\infty$, weil der Grad von d_r gleich $(-r, 1)$ ist. Schliesslich folgt aus der Endlichkeit der Faktorisierung von f, dass $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p T^q(f) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^N X \wedge Y) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$.

9. KOROLLAR 3. *Besitzt X eine N-Auflösung für ein gewisses N und ist* $\operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)=0$ *für $p>1$, so gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_\Lambda \tilde{h}^*Y)^q \xrightarrow{\tilde{\mu}} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. In der Spektralsequenz des Satzes von § 8 ist $E_2^{p,q} = \operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)=0$ für $p \notin [0, 1]$. Somit sind alle Differentiale d_r gleich 0 für $r \geqslant 2$ und mithin $E_2^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong$ $\cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$. Man erhält also eine exakte Sequenz $0 \to E_2^{0,q} \xrightarrow{i} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to E_2^{1,q} \to 0$ und verifiziert leicht, dass der Homomorphismus i mit dem Produkt $\tilde{\mu}$ übereinstimmt.

IV. Einige Beispiele

Besitzt X eine 1-Auflösung, so ist $\text{w.dim}_\Lambda \tilde{h}^*X \leqslant 1$, und die Voraussetzungen von Korollar 3 sind somit erfüllt. Umgekehrt folgt aus $\text{w.dim}_\Lambda \tilde{h}^*X \leqslant 1$, falls es eine Abbildung $i: X \to F_0$ gibt mit $i^*: \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X$ surjektiv und $\tilde{h}^*F_0$ flach, dass X eine 1-Auflösung besitzt, nämlich: $0 \to \tilde{h}^*F_1 \to \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X \to 0$, wobei F_1 die Cofaser von i bezeichnet.

10. LEMMA 3. *Besitzt X eine 1-Auflösung bezüglich der gewöhnlichen Cohomologie: $0 \to \tilde{H}^*F_1 \to \tilde{H}^*F_0 \to \tilde{H}^*X \to 0$, so induziert die zugehörige Cofaserung $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine 1-Auflösung bezüglich jeder ausserordentlichen Cohomologietheorie $\tilde{h}$ deren Koeffizientenring $\tilde{h}^*S^0$ torsionsfrei ist.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $0 \to \tilde{h}^*F_1 \xrightarrow{\beta^*} \tilde{h}^*F_0 \xrightarrow{\alpha^*} \tilde{h}^*X \to 0$ eine flache Auflösung des $\tilde{h}^*S^0$-Moduls $\tilde{h}^*X$ ist. Nach Lemma 2 sind $\tilde{h}^*F_0$ und $\tilde{h}^*F_1$ frei, denn die Gruppen H^*F_0 und H^*F_1 sind frei (endlicherzeugte flache $\mathbf{Z}$-Moduln), und $\tilde{h}^*S^0$ ist nach Voraussetzung torsionsfrei. Die Abbildung α^* ist genau dann surjektiv, wenn β^* injektiv ist, weil $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine Cofaserung ist. Aber $\beta^* \otimes \mathbf{Q}: \tilde{h}^*F_1 \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{h}^*F_0 \otimes \mathbf{Q}$ ist injektiv, denn $\tilde{h}^* \otimes \mathbf{Q}$ ist gewöhnliche Cohomologie [6, Satz 10.8]. Folglich ist auch β^* injektiv, denn $\tilde{h}^*F_1$ ist torsionsfrei.

Beispiel. Man verifiziert leicht, dass die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt sind, wenn man für $\tilde{h}$ die komplexe Cobordismentheorie $\widetilde{\Omega U}$ wählt und für X z.B. einen Moore-Raum oder einen Linsenraum (speziell: einen reellen projektiven Raum).

Nach Atiyah [2] gibt es zu jedem X eine Cofaserung $X \xrightarrow{i} F_0 \to F_1$ mit $i^*: \widetilde{KU}^{\#} F_0 \to \widetilde{KU}^{\#} X$ surjektiv und $H^* F_0$ frei. Daraus folgt, dass $0 \to \widetilde{KU}^{\#} F_1 \to \widetilde{KU}^{\#} F_0 \to \widetilde{KU}^{\#} X \to 0$ eine 1-Auflösung ist, denn $\widetilde{KU}^{\#} S^0 = \widetilde{KU}^0 S^0 \oplus \widetilde{KU}^1 S^0 \cong \mathbf{Z}$. Somit gilt für die KU-Theorie die Künneth-Formel. Hieraus kann man eine Künneth-Formel für die KO-Theorie erhalten, wenigstens modulo 2-Torsion.

Es bezeichne $\mathbf{Z}[x]/(2x-1) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbf{Q}$ den Teilring der rationalen Zahlen, erzeugt durch $\frac{1}{2}$. Dann sind für eine Abelsche Gruppe A Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A \to A \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ offensichtlich 2-Gruppen.

11. KOROLLAR 4. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte Cohomologietheorie $\widetilde{KO}^{\#}(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \widetilde{KO}_2^{\#}$ gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\widetilde{KO}_2^{\#} X \otimes_\Lambda \widetilde{KO}_2^{\#} Y)^q \to \widetilde{KO}_2^q (X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda (\widetilde{KO}_2^{\#} X, \widetilde{KO}_2^{\#} Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Wir betrachten die oben beschriebene 1-Auflösung bez. der KU-Theorie, $0 \to \widetilde{KU}^{\#} F_1 \to \widetilde{KU}^{\#} F_0 \to \widetilde{KU}^{\#} X \to 0$, mit $H^* F_0$ frei. Ferner sei $\widetilde{KU}^{\#}(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \widetilde{KU}_2^{\#}$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widetilde{KO}_2^0(F_1) & \to & \widetilde{KO}_2^0(F_0) & \to & \widetilde{KO}_2^0(X) & \to & 0 \\ & & c \Updownarrow \varrho & & c \Updownarrow \varrho & & c \Updownarrow \varrho & & \\ 0 & \to & \widetilde{KU}_2^0(F_1) & \to & \widetilde{KU}_2^0(F_0) & \to & \widetilde{KU}_2^0(X) & \to & 0 \end{array} \qquad \text{(D)}$$

Die untere Zeile ist exakt, denn $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ ist ein flacher $\mathbf{Z}$-Modul. Bezeichnen c und ϱ die durch Komplexifizierung und Reellisierung induzierten Homomorphismen, so ist $\varrho c = 2\,\mathrm{Id}$ ein Isomorphismus, denn $\frac{1}{2} \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Die obere Zeile im Diagramm (D) ist folglich auch exakt. Wegen $\widetilde{KO}^0(\Sigma^i X) \cong \widetilde{KO}^{-i}(X)$ folgt, dass $0 \to \widetilde{KO}_2^{\#}(F_1) \to \widetilde{KO}_2^{\#}(F_0) \to \widetilde{KO}_2^{\#}(X) \to 0$ exakt ist. Es bleibt zu zeigen, dass dies eine flache Auflösung ist. Da man natürlich die multiplikative Struktur in $\widetilde{KO}_2^{\#}$ definiert mittels jener von $\widetilde{KO}^{\#}$, erhält man für den Koeffizientenring $\Lambda = \widetilde{KO}_2^{\#}(S^0) \cong \widetilde{KO}^{\#}(S^0) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong \cong (\mathbf{Z}[x, y]/(x^2-4, 2y, xy, y^3)) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong (\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])\,[z]/(z^2-4) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Nun ist $H^* F_0$ frei und $\Lambda \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ torsionsfrei, sodass aus Lemma 2 folgt, dass $\widetilde{KO}_2^{\#}(F_0)$ frei ist. Somit ist $\widetilde{KO}_2^{\#}(F_1)$ projektiv, denn $\mathrm{gl.dim}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) = \mathrm{gl.dim}\, \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = 1$.

Bemerkung. R. Wood hat gezeigt, dass der Homomorphismus $\tilde{\mu}: \widetilde{KO}^{\#} X \otimes_\Lambda \widetilde{KO}^{\#} Y \to \widetilde{KO}^{\#}(X \wedge Y)$ nicht immer injektiv ist (man wähle $X = Y = \mathbf{C}P^2$). Aus Korollar 4 folgt, dass der Kern von $\tilde{\mu}$ eine 2-Gruppe ist.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man N-Auflösungen konstruieren kann.

12. KOROLLAR 5. *Ist der komplexe Cobordismenring $\widetilde{\Omega U}^* X$ ein Λ-Modul von*

endlichem Typ und ist $\mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* X < 2$, *so gilt für alle Y die Künneth-Formel*

$$0 \to (\widetilde{\Omega U}^* X \otimes_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* Y)^q \to \widetilde{\Omega U}^q (X \wedge Y) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda (\widetilde{\Omega U}^* X, \widetilde{\Omega U}^* Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Bezeichnet $MU = \{MU(1), \Sigma MU(1), MU(2), \ldots\} = \{A(2), A(3), \ldots\}$ das Thom-Spektrum (mit den evidenten Abbildungen $\Sigma A(n) \to A(n+1)$), so ist $\widetilde{\Omega U}^k X \cong \varinjlim [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Da $A(k)$ $(k-1)$-zusammenhängend ist, gilt für genügend grosses r: $\widetilde{\Omega U}^k X \cong [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Man kann also ein Erzeugendensystem $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ des Λ-Moduls $\widetilde{\Omega U}^* X$ finden, des repräsentiert wird durch Abbildungen $f_i : \Sigma^r X \to A(n_i + r)$. Diese Abbildungen definieren natürlich auch ein Erzeugendensystem von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$. Es sei nun $V = \Pi A(n_i + r)$ und $v = (f_1, \ldots, f_m) : \Sigma^r X \to V$; dann ist $v^* : \widetilde{\Omega U}^* V \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$ surjektiv nach Konstruktion. Man überlegt sich leicht, dass V derart durch einen endlichen CW-Komplex $\bar{V}$ approximiert werden kann, dass $v = s \circ \bar{v}$: $\Sigma^r X \xrightarrow{\bar{v}} \bar{V} \xrightarrow{s} V$ ist, mit freiem $H^* \bar{V}$. (Man approximiere $MU(n)$ durch den Thom-Raum des $2N$-universellen $U(n)$-Bündels über der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $U(N)/U(n) \times U(N-n)$ etc.). Es folgt, dass $\bar{v}^* : \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \Omega U^* \Sigma^r X$ surjektiv ist. Wegen Lemma 2 ist $\widetilde{\Omega U}^* \bar{V}$ frei, denn $\Lambda = \widetilde{\Omega U}^* S^0$ ist torsionsfrei und $H^* \bar{V}$ ist frei. Bezeichnet W die Cofaser von $\bar{v}$, so ist $0 \to \widetilde{\Omega U}^* W \to \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X \to 0$ eine flache Auflösung von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$, denn nach Voraussetzung ist $\mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X = \mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* X < 2$. Gemäss Korollar 3 gilt somit die Künneth-Formel für $\Sigma^r X$ und mithin auch für X.

V. Anhang

L. Hodgkin hat mit ähnlichen Methoden eine Künneth-Formel für die äquivariante K-Theorie bewiesen [8] und hat eine interessante Verallgemeinerung der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz erhalten [9]. Diese gestattet es, in gewissen Fällen die ausserordentliche Cohomologie eines Faserproduktes mithilfe einer Spektralsequenz vom „Künneth-Typ" zu berechnen.*)

LITERATUR

[1] S. Araki and H. Toda, *Multiplicative Structures in mod. q Cohomology Theories I*, Osaka J. Math. *2* (1965), 71–115.
[2] M. F. Atiyah, *Vectorbundles and the Künneth-Formula*, Topology *1* (1962), 245–248.
[3] R. Bott, *Lectures on K(X)*, Dept. of Math., Harvard University.
[4] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Algèbre, Chapitre VII (Hermann, Paris 1952).
[5] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton University Press, 1956).
[6] A. Dold, *Halbexakte Homotopiefunktoren*, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag 1966).
[7] B. Eckmann and P. J. Hilton, *Composition Functors and Spectral Sequences*, Comment. Math. Helv. *41* (1966–67), 187–221.

*) An der Kategorien-Konferenz in Seattle kündigte J. F. Adams Resultate an, welche in Zusammenhang mit der Künneth-Formel stehen. Die Berichte jener Konferenz werden demnächst in den Lecture Notes (Springer Verlag) erscheinen.

[8] L. HODGKIN, *An equivalent Künneth formula for K-Theorie*, University of Warwick, Preprint.
[9] L. HODGKIN, *Notes towards a geometric Eilenberg-Moore Sequence*, Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich, Preprint.

Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich
und
Cornell University, Ithaca N.Y.

Eingegangen den 15. Oktober 1968