Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 44 (1969)

Artikel: Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises.

Autor: Blum, Eugen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33777

Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises

Von EUGEN BLUM (Zürich)

I. Einleitung

In seiner Arbeit [4] über quasikonforme Abbildungen hat Strebel Riemannsche Flächen R vom hyperbolischen Typ mit unendlichem Flächeninhalt betrachtet und geometrische Bedingungen dafür angegeben, dass jede zu $\varphi = \Phi'^2$ und k, $0 < k < 1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung f_k extremal oder eindeutig extremal ist, wobei Φ eine beliebige konforme Abbildung von $|Z| < 1$ auf R ist. Die vorliegende These ist im wesentlichen eine Fortsetzung dieser Arbeit. Die verwendeten Methoden sind zum Teil schon in den Arbeiten von Strebel [4, 5] und Sethares [3] enthalten.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen R mit unendlichem Flächeninhalt, die der z-Ebene überlagert und zum Einheitskreis $|Z| < 1$ konform äquivalent sind. Φ sei eine konforme Abbildung von $|Z| < 1$ auf R. Wir bilden die z-Ebene durch die affine Abbildung F_K: $w = Kx + iy$, $K > 1$, auf die w-Ebene ab. F_K erzeugt durch „Mitdeformieren" von R eine Fläche S und eine K-quasikonforme Abbildung von R auf S, die bis auf Decktransformationen eindeutig bestimmt ist. Den Punkten der Fläche R mit der Spur z entsprechen dabei die Punkte auf S mit der Spur $w = Kx + iy$. Wir zeichnen, falls es mehrere gibt, eine dieser Abbildungen aus und bezeichnen sie wieder mit F_K. Die Fläche S ist ebenfalls zum Einheitskreis $|W| < 1$ konform äquivalent. Ist Ψ eine konforme Abbildung von $|W| < 1$ auf S, so ist $\Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ eine K-quasikonforme Abbildung von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$. Wir sagen, die quasikonforme Abbildung $F: R \to S$ stimme auf dem Rande von R mit F_K überein, wenn $f_k = \Psi^{-1} \circ F_K \circ \Phi$ und $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ die gleiche Randabbildung induzieren. f_k hat die komplexe Dilatation

$$\kappa = (K-1)\,\bar{\Phi}'^2/(K+1)\,|\Phi'|^2 = k\,\bar{\Phi}'^2/|\Phi'|^2$$

ist also eine zum quadratischen Differential $\varphi = \Phi'^2$ gehörende Teichmüllersche Abbildung. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die Familie der quasikonformen Abbildungen von R auf S, die auf dem Rande mit F_K übereinstimmen, mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller quasikonformen Abbildungen von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$, die auf $|Z| = 1$ mit f_k übereinstimmen. Die Abbildung $F \in \mathfrak{F}$ und die induzierte Abbildung $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi \in \mathfrak{G}$ sind gleichzeitig extremal oder eindeutig extremal.[1])

---

[1]) D.h. Die Abbildung hat die kleinste maximale Dilatation, bezw. ist die einzige mit dieser Eigenschaft.

$\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ sei ein beliebiges System von Querschnitten von R, die über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegen. Wier nennen Γ_y^λ einen Horizontalquerschnitt von R. Mit $l(y)$ bezeichnen wir die totale Länge von Γ_y, mit $L(y)$ die Länge des Systems $F(\Gamma_y) = \{F(\Gamma_y^\lambda)\}$. A sei eine beliebige Vereinigungsmenge von Systemen Γ_y mit endlichem Inhalt $|A|$. (Im folgenden bezeichnen wir den Flächeninhalt einer messbaren Menge G immer mit $|G|$.) Wir nennen A einen Horizontalstreifen. Für eine beliebige Abbildung $F \in \mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $T(A)$ die Punktmenge $F(A) - F_K(A)$.

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

SATZ 1. a) *Gibt es in R eine Folge (A_n) von Horizontalstreifen mit den Eigenschaften:* $\lim_{n\to\infty} |A_n| = \infty$, $\lim_{n\to\infty} |T(A_n)|/|A_n| = 0$, *so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

b) *Hat $F \in \mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K und erfüllt (A_n) die strengeren Bedingungen:* $\lim_{n\to\infty} A_n = R$, $\lim_{n\to\infty} |T(A_n)| = 0$, *so ist $F = F_K \cdot F_K$ ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. (A_n) sei eine Folge von Horizontalstreifen, die die Voraussetzungen a) erfüllt. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Strebel [4] hat gezeigt, dass die Enden von $F_K(\Gamma_y^\lambda)$ von den entsprechenden Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben und dass für fast alle y gilt:

$$Kl(y) \leqslant L(y) = \int_{\Gamma_y} |p+q|\,dx \tag{1}$$

Dabei ist $p = F_z$, $q = F_{\bar{z}}$. Durch Integration und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} &K^2 |A_n|^2 \leqslant \left(\int L(y)\,dy\right)^2 \leqslant \\ &\iint_{A_n} (|p|^2 - |q|^2)\,dx\,dy \iint_{A_n} \frac{|p+q|^2}{|p|^2-|q|^2}\,dx\,dy \leqslant |F(A_n)|\,\tilde{K}|A_n| \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für $|F(A_n)|$ gilt die Abschätzung:

$$|F(A_n)| \leqslant K|A_n| + |T(A_n)| \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$K^2 \leqslant K\tilde{K} + \tilde{K}|T(A_n)|/|A_n| \tag{4}$$

Da $\underline{\lim}_{n\to\infty} |T(A_n)|/|A_n| = 0$ ist, folgt aus 4): $K \leqslant \tilde{K}$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, F habe die maximale Dilatation K. Die Ungleichung (2) lässt sich verbessern, wenn man den Integranden $|p+q|^2/(|p|^2-|q|^2)$ genauer abschätzt. Es gilt:

$$|p+q|^2/(|p|^2-|q|^2) \leqslant K - 2(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})/(1-k^2) \tag{5}$$

wobei $\tilde{\kappa}=q/p$ die komplexe Dilatation von F ist. (Vergleiche Strebel [5]) Aus (2), (3) und (5) folgt:

$$K^2 |A_n|^2 \leqslant (K|A_n| + |T(A_n)|)\left(K|A_n| - \frac{2}{1-k^2}\iint_{A_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy\right) \tag{6}$$

Da $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k < 1$ ist, gilt:

$$\frac{2}{1-k^2}\iint_{A_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \geqslant 0 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt schliesslich die Ungleichung:

$$0 \leqslant \frac{2}{1-k^2}\iint_{A_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \leqslant |T(A_n)| \tag{8}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} A_n = R$ und $\lim_{n\to\infty} |T(A_n)| = 0$, so folgt aus (8):

$$\iint_R (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = 0 \tag{9}$$

Es gilt also fast überall in R: $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} = k$. Aus der Ungleichung $k = \operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k$ folgt schliesslich: $\tilde{\kappa} = k$ fast überall in R, wobei $k=(K-1)/(K+1)$ die komplexe Dilatation von F_K ist. Die komplexen Dilatationen von F und F_K stimmen also fast überall in R überein. Dann haben auch f und f_k fast überall in $|Z|<1$ die gleiche komplexe Dilatation. Daher gilt: $f = g \circ f_k$, wobei g eine lineare Transformation von $|W|<1$ ist. Da f auf $|Z|=1$ mit f_k übereinstimmt, muss g die identische Abbildung sein und es ist $f = f_k$ und daher $F = F_K$.

II. Ein Beispiel

Wir betrachten das folgende schlichte Gebiet G der z-Ebene:

$$G = \{z = x + iy \mid y > |x|^\alpha, \alpha > 3\}$$

Die affine Abbildung $w = F_K(x+iy) = Kx + iy$, $K>1$, bildet G auf ein Gebiet G' der w-Ebene ab. Es ist bekannt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist. (Vergleiche: Sethares [3].)

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 2. *F_K ist in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y ist der Horizontalquerschnitt von G, der auf der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegt. Es gilt:

$l(y)=2y^{1/\alpha}=2y^{\beta}$, $\beta=1/\alpha<\frac{1}{3}$. Wir betrachten eine Folge (y_n), $y_n\geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n=\infty$, und definieren: $G_n=G\cap\{\operatorname{Im} z<y_n\}$. Da (G_n) eine Folge von Horizontalstreifen ist, die G ausschöpft, genügt es, die Existenz einer monotonen, divergierenden Folge (y_n) nachzuweisen, für welche $\lim_{n\to\infty} |T(G_n)|=0$ ist, falls $\tilde{K}=K$ ist. Wir definieren: $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y} |\operatorname{Im} F(z)-y|$. Strebel [5] hat den folgenden Verzerrungssatz bewiesen:

VERZERRUNGSSATZ. G sei ein schlichtes Gebiet der z-Ebene. $F\in\mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y sei das System aller Querschnitte von G auf der Geraden $\operatorname{Im} z=y$ und $l(y)$ erfülle die Bedingung:

$$l(y)\leqslant M<\infty \quad \text{für} \quad 0\leqslant |y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}.$$

Dann gilt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$.

Wir beweisen den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 1. *Hat F die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt für* $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ *die Abschätzung:*

$$d(y_0)\leqslant \frac{2\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta}}{1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}}=M\sqrt{K\tilde{K}} \tag{1}$$

Beweis. Wir wählen y_0 so, dass $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ ist. Für $y\leqslant y_0$ gilt: $l(y)\leqslant \leqslant 2y_0^{\beta}$. Für $0<y-y_0\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ erhalten wir für $l(y)$ die Abschätzung:

$$l(y)=2y^{\beta}\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}(y-y_0)\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}M\sqrt{K\tilde{K}}=M$$

Für $|y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ gilt also: $l(y)\leqslant M$. Aus dem Verzerrungssatz von Strebel folgt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$, q.e.d.

Ist $G(y_0,y)=G\cap\{z\mid y_0<\operatorname{Im} z<y\}$, so erhalten wir für $|T(G(y_0,y))|$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}|T(G(y_0,y))|&\leqslant K\int_{y}^{y+d(y)} l(\eta)\,d\eta+K\int_{y_0-d(y_0)}^{y_0} l(\eta)\,d\eta\\&\leqslant Kl(y+d(y))\,d(y)+K\,l(y_0)\,d(y_0)\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen y gilt wegen (1): $d(y)<4\sqrt{K\tilde{K}}\,y^{\beta}<y$ und daher:

$$|T(G(y_0,y))|\leqslant 8\cdot 2^{\beta}K\sqrt{K\tilde{K}}y^{2\beta}+K\,l(y_0)\,d(y_0)=C\,y^{2\beta}+C_0 \tag{2}$$

Da $|G(y_0, y)| = 2(y^{\beta+1} - y_0^{\beta+1})/(\beta+1)$ ist, gilt:

$$\lim_{y\to\infty} |T(G(y_0, y))|/|G(y_0, y)| = 0.$$

Daraus folgt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist.

Es sei nun $\tilde{K} = K$. Wir setzen $M(y) = K\int_y^{y+d(y)} l(y)\,dy$ und zeigen, dass eine monoton wachsende, divergierende Folge (y_n) existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} M(y_n) = 0$ ist. Da $|T(G_n)| \leqslant M(y_n)$ ist, gilt für eine solche Folge (y_n): $\lim_{n\to\infty} |T(G_n)| = 0$. Für alle genügend grossen y gilt nach (2):

$$M(y) \leqslant \text{const.}\, y^{2\beta} \tag{3}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) existiert so, dass für eine geeignete Konstante C_1 gilt: $M(y_{1k}) \leqslant C_1 (y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}$. Dazu nehmen wir an, es gebe ein y_0 so, dass für alle $y \geqslant y_0$ und gewissen Konstanten $\gamma > -1$, $c > 0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K\,l(y) + c\,y^\gamma \tag{4}$$

Aus (I2), (I3), (2) und (4) folgt dann für alle $y \geqslant y_0$:

$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + \frac{2Kc}{\gamma+1} |G(y_0, y)|\,(y^{\gamma+1} - y_0^{\gamma+1}) \leqslant \left(\int_{y_0}^{y} L(\eta)\,d\eta\right)^2 \leqslant$$
$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + K|G(y_0, y)|\,(C y^{2\beta} + C_0)$$

Schliesslich erhalten wir für alle $y \geqslant y_0$ die Ungleichung:

$$\frac{2c}{\gamma+1} (y)^{\gamma+1} \leqslant C y^{2\beta}\left(1 + \frac{C_0}{C y^{2\beta}} + \frac{2c}{C(\gamma+1)}\frac{(y_0)^{\gamma+1}}{y^{2\beta}}\right) = C y^{2\beta} H(y) \tag{5}$$

Da $\lim_{y\to\infty} H(y) = 1$ ist, folgt aus (5): $\gamma + 1 \leqslant 2\beta$. Wir wählen $\gamma = 2\beta - 1$. Dann muss $c \leqslant C(\gamma+1)/2 = C\beta$ sein. Für $c > C\beta$ ist also die Annahme (4) falsch. Wählen wir $c > C\beta$, so existieren daher beliebig grosse y, für welche $L(y) < Kl(y) + c(y)^{2\beta-1}$ ist, und damit eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) so, dass gilt:

$$L(y_{1k}) < K\,l(y_{1k}) + c\,(y_{1k})^{2\beta-1} \tag{6}$$

Für $d(y)$ erhalten wir mit Hilfe einer einfachen geometrischen Überlegung die Abschätzung:

$$(d(y))^2 \leqslant (L(y))^2/4 - K^2(l(y))^2/4 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$(d(y_{1k}))^2 < (K\,l(y_{1k}) + c\,(y_{1k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2(l(y_{1k}))^2/4 =$$
$$K c\,(y_{1k})^{3\beta-1} + (c^2/4)(y_{1k})^{\beta-2} = K c\,(y_{1k})^{3\beta-1}(1 + (c/4K)\,(y_{1k})^{\beta-1})$$

Da $\beta-1<-\frac{4}{5}$ und $(\frac{3}{2})\beta-\frac{1}{2}<0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d(y_{1k})<(2Kc)^{1/2}(y_{1k})^{(3\beta-1)/2}=c_1(y_{1k})^{\beta+(\beta-1)/2};\quad \lim_{k\to\infty} d(y_{1k})=0. \tag{8}$$

Wir erhalten daher für $M(y_{1k})$ die Abschätzung:

$$M(y_{1k})<K\,l(y_{1k}+d(y_{1k}))\,d(y_{1k})\leqslant K\,2^{\beta+1}c_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\quad \text{q.e.d.} \tag{9}$$

Ist $\beta<\frac{1}{5}$, so ist $2\beta+(\beta-1)/2<0$ und es gilt daher:

$$\lim_{k\to\infty} M(y_{1k})=\lim_{k\to\infty}|T(G_{1k})|=0.$$

Es bleibt somit der Fall $\beta\geqslant\frac{1}{5}$ übrig. Wir nehmen an, es gebe ein k_0 so, dass für alle $y\geqslant y_{k_0}$ wiederum (4) gilt und betrachten das Gebiet $G(y_{1k_0}, y_{1k})$, wobei $k>k_0$ ist. Für $|T(G(y_{1k_0}, y_{1k}))|$ gilt wegen 9) die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}&|T(G(y_{1k_0}, y_{1k}))|\leqslant C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\quad+K\,l(y_{1k_0})\,d(y_{1k_0})=C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}+C_{01}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus (I2), (I3), (4) und (10) folgt für alle $k>k_0$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2c}{\gamma+1}(y_{1k})^{\gamma+1}\leqslant C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\left(1+\frac{C_{01}}{C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}+\frac{2c}{C_1(\gamma+1)}\frac{(y_{1k_0})^{\gamma+1}}{(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}\right)\\&=C_1(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}H_1(y_{1k})\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Falls nun $\beta=\frac{1}{5}$ ist, so ist $H_1(y_{1k})\,(y_{1k})^{2\beta+(\beta-1)/2}$ konstant und es müsste daher entgegen unserer Annahme $\gamma\leqslant-1$ sein. Zu gegebenen Konstanten $-\frac{4}{5}>\gamma>-1$ und $c>0$ gibt es daher eine monotone, divergierende Folge $(\tilde{y}_{2k})$, für welche gilt:

$$L(\tilde{y}_{2k})<K\,l(\tilde{y}_{2k})+c(\tilde{y}_{2k})^{\gamma} \tag{12}$$

Aus (7) und (12) erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d(\tilde{y}_{2k}))^2&<(Kc/2)\,l(\tilde{y}_{2k})(\tilde{y}_{2k})^{\gamma}+(c^2/4)(\tilde{y}_{2k})^{2\gamma}\\&=Kc(\tilde{y}_{2k})^{\gamma+1/5}(1+(c/4K)(\tilde{y}_{2k})^{\gamma-1/5})\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen k und eine Konstante C_2 gilt daher:

$$d(\tilde{y}_{2k})<(2Kc)^{1/2}(\tilde{y}_{2k})^{1/10+\gamma/2};\qquad M(\tilde{y}_{2k})<C_2(\tilde{y}_{2k})^{3/10+\gamma/2}$$

Da $\frac{3}{10}+\gamma/2<0$ ist, so gilt: $\lim_{k\to\infty}M(\tilde{y}_{2k})=\lim_{k\to\infty}|T(g_{2k})|=0$.

Wenn $\beta>\frac{1}{5}$ und $c>C_1(5\beta-1)/4$ ist, so können wir wie oben auf die Existenz einer Folge (y_{2k}) schliessen, für welche die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $L(y_{2k}) < Kl(y_{2k}) + c(y_{2k})^{\beta+(3/2)(\beta-1)}$

b) $d(y_{2k}) < c_2(y_{2k})^{\beta+(3/4)(\beta-1)}$; c) $M(y_{2k}) < C_2(y_{2k})^{2\beta+(3/4)(\beta-1)}$

Dabei sind c_2 und C_2 positive Konstanten.
Ist $\beta < \frac{3}{11}$, so ist $2\beta + (\frac{3}{4})(\beta-1) = (\frac{11}{4})\beta - \frac{3}{4} < 0$. Ist $\beta \geqslant \frac{3}{11}$, so setzen wir das Verfahren fort. Nach r Schritten können wir schliesslich die Existenz einer divergierenden Folge (y_{rk}) nachweisen, welche für genügend grosse k und eine geeignet gewählte Kontsante C_r die folgende Bedingung erfüllt:

$$M(y_{rk}) < C_r(y_{rk})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

$(2^r-1)/2^r$ strebt monoton gegen 1. Der Exponent $2\beta + (2^r-1)(\beta-1)/2^r$ wird negativ, sobald $(2^r-1)/2^r > 2\beta/(1-\beta)$ ist. Ist r_0 die ganze Zahl, für welche gilt: $(2^{r_0}-1)/2^{r_0} > 2\beta/(1-\beta) \geqslant (2^{r_0-1}-1)/2^{r_0-1}$ so erhalten wir nach r_0 Schritten eine Folge $(y_{r_0 k})$, für welche gilt:

a) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{r_0 k} = \infty$; b) $\lim\limits_{k\to\infty} |T(G_{r_0 k})| = 0$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Falls $\alpha \leqslant 3$ ist, so versagt das im Beweis angewendete Iterationsverfahren.

III. Extremale quasikonforme Abbildung einer Klasse von Überlagerungsflächen mit unendlichem Flächeninhalt

R sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die der z-Ebene überlagert ist. Jedes System $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ zerlegt R in endlich oder unendlich viele Teilgebiete. Für jedes dieser Teilgebiete ist bestimmt, ob es sich an mindestens einen der Querschnitte Γ_y^λ nach oben anschliesse. Mit $G_y = \{G_y^\mu\}$ bezeichnen wir die Gesamtheit dieser Teilgebiete. Wir wählen nun ein festes System Γ_{y_0} so, dass jedes dieser Teilgebiete $G_{y_0}^\mu$ ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ liegt. Die Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn wir für Γ_{y_0} das System aller Querschnitte von R über $\operatorname{Im} z = y_0$ wählen. Für $y > y_0$ bezeichnen wir mit $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ das System aller Querschnitte von R, die über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ und in G_{y_0} liegen. $G_y = \{G_y^\mu\}$ liegt ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y$. Den zwischen den Geraden $\operatorname{Im} z = y_1 \geqslant y_0$ und $\operatorname{Im} z = y > y_1$ liegenden Teil von G_{y_0} bezeichnen wir mit $G(y_1, y)$.

DEFINITION. *Wir nennen G_{y_0} einen oberen Arm oder einen Arm in der Richtung*

$\pi/2$, falls gilt:

a) $|G_{y_0}|=\infty$

b) *Es existiert ein $a<1$ so, dass* $\overline{\lim}_{y\to\infty}(y)^{-(a+1)}\int_{y_0}^{y} l(\eta)\,d\eta = C_0,\ 0\leqslant C_0<\infty$ *ist.*

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 3. *Falls R mindestens einen oberen Arm hat, so ist F_k in $\mathfrak{F}$ extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Da $G(y_1, y)$ für alle $y>y_1>y_0$ ein Horizontalstreifen ist, genügt es nach dem Satze 1 zu zeigen, dass für ein $y_1>y_0$ $\underline{\lim}_{y\to\infty}|T(G(y_1, y))|/|G(y_1, y)|=0$ ist. Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 2. *Ist $d^+(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im}F(z)-y)$, so gilt die Abschätzung:*

$$(d^+(y))^2\leqslant K\tilde{K}\int\limits_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\,d\eta\left(\int\limits_{y}^{y+(d^+(y)/2)}\frac{1}{l(\eta)}\,d\eta\right)^{-1} \tag{2a}$$

Ist $d^-(y)=\inf_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im}F(z)-y)$, so gilt, falls $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_k(G_{y_0})$ liegt, die Abschätzung:

$$(d^-(y))^2\leqslant K\tilde{K}\int\limits_{y+d^-(y)}^{y+(d^-(y)/2)} l(\eta)\,d\eta\left(\int\limits_{y+(d^-(y)/2)}^{y}\frac{1}{l(\eta)}\,d\eta\right)^{-1} \tag{2b}$$

Beweis. $d^-(y)$ und $d^+(y)$ sind nach unten halbstetige Funktionen. Sind sie für eine in einem Intervall überall dichte Punktmenge beschränkt, so bleiben sie daher im ganzen Intervall beschränkt. Da die Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ und $F_k(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben, können wir uns bei der Abschätzung von $d^+(y)$ und $d^-(y)$ auf Querschnittssysteme Γ_y beschränken, die diese Eigenschaft haben. Wir nehmen an, es gebe ein $y_1>y$ und einen Punkt $P\in\Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y}>y_1$ auf $F_k(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt. $F(\Gamma_y)$ hat dann Punkte mit $F_k(\Gamma_{y_1})$ gemeinsam und es gibt in $F_K(G_{y_1})$ Punkte, die nicht in $F(G_y)$ liegen. $F_K(G_{y_1})$ ist also keine Teilmenge von $F(G_y)$. Jedes System $F(\Gamma_{y+\Delta y})$, $0<\Delta y<y_1-y$, trifft dann $F_K(\Gamma_{y_1})$ ebenfalls. Wäre dies nicht der Fall, so würde nämlich gelten: $F_K(G_{y_1})\subset F(G_{y+\Delta y})\subset F(G_y)$, was einen Widerspruch darstellt.

Gibt es ein y_2, $y_0\leqslant y_2<y$ und einen Punkt $P\in\Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y}<y_2$ auf $F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt, so trifft $F(\Gamma_y)$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$ und es gilt: $F(G_y)\not\subset F_K(G_{y_2})$. Für $0<\Delta y<y-y_2$ trifft auch $F(\Gamma_{y-\Delta y})$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$. Sonst wäre ja $F(G_y)\subset$ $\subset F(G_{y-\Delta y})\subset F_K(G_{y_2})$, was im Widerspruch zur Aussage $F(G_y)\not\subset F_K(G_{y_2})$ steht. Wir betrachten nun die Kurvenscharen:

$$\mathfrak{H}=\left\{\Gamma_\eta \mid y\leqslant\eta\leqslant y+\frac{y_1-y}{2}\right\};\qquad \mathfrak{H}'=\{F(\Gamma_\eta)\mid\Gamma_\eta\in\mathfrak{H}\}$$

Um eine obere Schranke für $d^+(y)$ zu erhalten, schätzen wir die extremalen Längen $\lambda = \lambda(\mathfrak{H})$ und $\lambda' = \lambda(\mathfrak{H}')$ ab. Die extremale Länge λ einer Schar $\mathfrak{C}$ von lokal rektifizierbaren Kurven C können wir nach Lehto und Virtanen [2] so definieren:

$$(\lambda(\mathfrak{C}))^{-1} = \inf_{\varrho \in \mathfrak{P}} m_\varrho(\Omega) \Big(\inf_{\mathfrak{C} \in C} l_\varrho(C) \Big)^{-2}$$

Dabei ist $\mathfrak{P}$ die Familie der nicht-negativen Borel-messbaren Funktionen, Ω die von der Kurvenschar $\mathfrak{C}$ überstrichene Menge,

$$l_\rho = \int_C \rho \, |dz|; \quad m_\rho(\Omega) = \iint_\Omega \rho^2 \, dx \, dy$$

Für eine feste Metrik ϱ_0 gilt also:

$$1/\lambda' \leqslant m_{\varrho_0} (\inf_{\mathfrak{H}'} l_{\varrho_0})^{-2}$$

Wir wählen ϱ_0 wie folgt: $\varrho_0 = 1$ in $F_K(G((y+y_1)/2, y_1))$
$\varrho_0 = 0$ sonst.

Aus den vorangehenden topologischen Überlegungen folgt mit Hilfe der Metrik ϱ_0:

$$\lambda' \geqslant (y_1 - y)^2 \left(K \int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta) \, d\eta \right)^{-1} \tag{3}$$

Da F $\tilde{K}$-quasikonform ist, gilt:

$$\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt die Ungleichung:

$$(y_1 - y)^2 \leqslant K \tilde{K} \int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta) \, d\eta \left(\int_y^{(y+y_1)/2} \frac{1}{l(\eta)} \, d\eta \right)^{-1} \tag{5}$$

Gehen wir in (5) zur oberen Grenze über, so erhalten wir die Abschätzung (2a). Ist $F(\Gamma_y)$ in $F_K(G_{y_0})$ enthalten, so führen analoge Überlegungen zur Ungleichung (2b).

Wir brauchen nun eine vorläufige Abschätzung von $d(y) = \max(d^+(y), |d^-(y)|)$, welche für alle genügend grossen y gilt und beweisen daher den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 3. *Zu jeder Konstanten $\varepsilon > 0$ existiert ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass für $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $d(y) < \varepsilon y$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe zu einer Konstanten $c > 0$ beliebig grosse y so, dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Ist $1 > a' > a$, so existiert wegen 1b) ein y^* so, dass für $y \geqslant y^*$ gilt:

$$\int_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\, d\eta < c(y + d^+(y))^{a'+1}/4 \tag{6}$$

Mit I bezeichnen wir das Intervall $y \leqslant \eta \leqslant (1 + c/2)\, y$ und betrachten für $a' < b < 1$ die folgende Menge E_b:

$$E_b = \{\eta \mid \eta \in I, l(\eta) \geqslant y^b\}$$

Für das Mass $\mu(E_b)$ von E_b gilt wegen 1b) für $y \geqslant y^*$:

$$\mu(E_b) < \text{const.}\,(y)^{1+a'-b}.$$

Daraus folgt:

$$\mu(I - E_b) > (c/2)\,(1 - \text{const.}\,(y)^{a'-b})\, y$$

Da $a' - b < 0$ ist, können wir annehmen, für $y \geqslant y^*$ sei $\mu(I - E_b) > cy/4$. Wir wählen $y \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Es gilt dann:

$$\int_{y}^{y+(d^+(y)/2)} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_I \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_{I-E_b} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > \mu(I - E_b)\, y^{-b} > c(y)^{1-b}/4 \tag{7}$$

Aus (2a), (6) und (7) folgt: $(d^+(y))^2 < K\tilde{K}(y + d^+(y))^{a'+1}(y)^{b-1}$. Da $b - 1 < 0$ und $a' + 1 < 2$ ist, existiert ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) < cy$ ist für $y \geqslant \tilde{y}$, was einen Widerspruch darstellt. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass $d^+(y) < \varepsilon y$ ist für $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$.

$Q(y)$ sei die Menge aller y', für welche gilt: *a)* $y_0 < y' < y$; b) Es existiert ein Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P) \in F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ für ein $\tilde{y} < y'$. Für jedes $y' \in Q(y)$ gilt:

$$(y - y')^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y'}^{(y+y')/2} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{(y+y')/2}^{y} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1}$$

Auf gleiche Weise, wie oben lässt sich zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ existiert so, dass für alle $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $\inf Q(y) \geqslant (1 - \varepsilon)\, y$. Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$, so ist für $y > \max(2y_0, \tilde{y}(\varepsilon))$ $\inf Q(y) > y_0$. Dann liegt $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ und es gilt daher: $y - \inf Q(y) = |d^-(y)| < \varepsilon y$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass für genügend grosse y $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ liegt.

Wir wählen y_1 so gross, dass $F(\Gamma_{y_1})$ in $F_K(G_{y_0})$ liegt und suchen eine divergierende Folge (y_n), für die wir eine möglichst kleine Schranke für $|T(G(y_1, y_n))|$ angeben können. Wir definieren die Menge B:

$$B=\left\{b \mid b<1,\ \varlimsup_{y\to\infty}(y)^{-b-1}\int_{y_0}^{y} l(\eta)\,d\eta=0\right\}$$

Ist $b_0=\inf B$, so folgt aus 1): a) $-1\leqslant b_0\leqslant a$; b) Falls $b_0=-1$ ist, so liegt b_0 nicht in B.

Wir wählen b_1 wie folgt: $b_1=b_0$, falls $b_0\in B$ ist, $b_1=b_0+\varepsilon$, falls $b_0\notin B$ ist, wobei $0<\varepsilon<(1-b_0)/2$ ist. Da b_1 in B liegt, existiert für ein beliebig gegebenes $c>0$ eine monotone, divergierende Folge (y_n) so, dass für genügend grosse n gilt:

$$y_n/2>y_1;\qquad \int_{y_n/2}^{y_n} l(\eta)\,d\eta<c\,(y_n)^{b_1+1} \tag{8}$$

I_n sei das Intervall $y_n/2\leqslant y\leqslant y_n$. Nach dem Hilfssatz 3 gilt für eine Nullfolge (ε_n) und $y\in I_n: d(y)<\varepsilon_n y_n$. Ist $\inf_{y\in I_n} d^+(y)=0$, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher an, es sei $\inf_{y\in I_n} d^+(y)>0$. Wir unterteilen das Intervall I_n durch die folgenden Teilpunkte $a_{n\,i}$:

$$a_{n\,0}=y_n/2;\quad a_{n\,1}=a_{n\,0}+d^+(a_{n\,0});\quad a_{n\,i}=a_{n,\,i-1}+d^+(a_{n,\,i-1})$$

Es gelte: $a_{n\,k}\leqslant y_n$; $a_{n,\,k+1}>y_n$.

Wir betrachten die Intervalle $I_{n\,i}=[a_{n,\,i-1}, a_{n\,i}]$, $i=1,2,\dots,k$. Da für $y\in I_n$ $d(y)<\varepsilon_n y_n$ ist, können wir annehmen, es gelte:

$$\sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,\,i-1})>y_n/4$$

Es gibt mindestens ein Intervall $I_{n\,l}$ so, dass gilt:

$$\int_{I_{n\,l}} l(\eta)\,d\eta<4\,c\,d^+(a_{n,\,l-1})\,(y_n)^{b_1} \tag{9}$$

Wäre nämlich für alle i $\int_{I_{ni}} l(\eta)\,d\eta\geqslant 4c\,(y_n)^{b_1}\,d^+(a_{n,\,i-1})$, so würde gelten:

$$\int_{I_n} l(\eta)\,d\eta\geqslant\sum_{i=1}^{k}\int_{I_{n\,i}} l(\eta)\,d\eta\geqslant 4\,c\,(y_n)^{b_1}\sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,\,i-1})>c\,(y_n)^{b_1+1},$$

was im Widerspruch zu (8) steht.

Wir betrachten nun für ein $\delta>0$ die Menge $E^{\delta}_{n\,l}$:

$$E^{\delta}_{n\,l}=\{\eta\mid \eta\in I_{n\,l},\ l(\eta)\geqslant(y_n)^{b_1+\delta}\}$$

und schätzen ihr Mass $\mu(E^\delta_{nl})$ ab. Es gilt:

$$4c(y_n)^{b_1}\, d^+(a_{n,l-1}) > \int\limits_{I_{nl}} l(\eta)\, d\eta \geqslant \int\limits_{E_{nl}{}^\delta} l(\eta)\, d\eta \geqslant \mu(E^\delta_{nl})\,(y_n)^{b_1+\delta}$$

Daraus folgt: $\mu(E^\delta_{nl}) < 4cd^+(a_{n,l-1})\,(y_n)^{-\delta}$.
Für genügend grosse n gilt:

$$\mu(E^\delta_{nl}) < d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{10}$$

Wir definieren: $I^1_{nl} = [a_{n,l-1}, (a_{n,l-1}+a_{nl})/2]$.
Mit Hilfe von (10) erhalten wir die Abschätzung:

$$\int\limits_{I_{nl}{}^1} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > \int\limits_{I_{nl}{}^1 - I_{nl}{}^1 \cap E_{nl}{}^\delta} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > (y_n)^{-b_1-\delta}\, d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{11}$$

Aus (2a), (9) und (11) folgt: $d^+(a_{n,l-1}) < \text{const.}\,(y_n)^{b_1+\delta/2}$.
Wir setzen: $a_{n,\,l-1} = y_n'$. Da $y_n/2 \leqslant y_n' \leqslant y_n$ ist, gilt:.

$$\lim_{n\to\infty} y_n' = \infty; \qquad d^+(y_n') < \text{const.}\,(y_n')^{b_1+\delta/2} \tag{12}$$

Aus (9) und (12) folgt:

$$|T(G(y_1, y_n'))| \leqslant \int\limits_{y_1+d^-(y_1)}^{y_1} l(\eta)\, d\eta + \int\limits_{y_n'}^{y_n'+d^+(y_n')} l(\eta)\, d\eta < C_1 + \text{const.}\,(y_n')^{2b_1+\delta/2}$$

Da $b_1-\varepsilon$ nicht in B liegt, gilt: $\underline{\lim}_{n\to\infty}(y_n')^{-(1+b_1-\varepsilon)} \int_{y_1}^{y_n'} l(\eta)\, d\eta \geqslant C_0$, wobei $0 < C_0 \leqslant \infty$ ist. Für genügend grosse n gilt also:

$$|T(G(y_1, y_n'))|/|G(y_1, y_n')| < C_1/|G(y_1, y_n')| + \text{const.}\,(y_n')^{b_1+\delta/2+\varepsilon-1}$$

Wählen wir $\varepsilon = \delta/2 = (1-b_1)/4$, so ist $b_1+\delta/2+\varepsilon-1 = (b_1-1)/2 < 0$. Daher gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(G(y_1, y_n'))|/|G(y_1, y_n')| = 0$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Durch eine Drehung um den Winkel α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ geht die Fläche R in eine Fläche $\tilde{R}$ über. Hat R einen oberen Arm, so sagen wir, $\tilde{R}$ habe einen Arm in der Richtung $\pi/2+\alpha$. Wir sprechen von einem rechten (bezw. linken oder unteren) Arm, wenn $\alpha = -\pi/2$ (bezw. $\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = \pi$) ist.

Es lässt sich zeigen, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist, wenn die Fläche R einen Arm in einer beliebigen Richtung besitzt.

Im Beweis des Satzes 3 wird die Struktur der Fläche R ausserhalb des Armes G_{y_0} nicht benützt. F_K ist daher extremal, wenn R eine beliebige, der z-Ebene überlagerte

Riemannsche Fläche ist, welche ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet mit einem Arm enthält.

In einem rechten oder linken Arm G_{x_0} definieren wir Γ_x, $l(x)$, G_x und $G(x_1, x_2)$ auf analoge Weise wie Γ_y, $l(y)$, G_y und $G(y_1, y_2)$. Ist $\tilde{\Gamma}_{K_x} = F_K(\Gamma_x)$, so definieren wir:

$$D(x) = \sup_{P \in \tilde{\Gamma}_{Kx}} | \; R_l \; F^{-1}(P) - x|$$

Wir betrachten nun eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche R, die einen vertikalen oder horizontalen Arm besitzt, der anstelle von (1b) die strengere bedingung (1b′) erfüllt:

$$l(y) \leqslant \text{const.}\, |y|^{\beta} \quad (\text{bezw. } l(x) \leqslant \text{const.}\, |x|^{\beta}), \quad 0 < \beta < \tfrac{1}{3} \tag{1b'}$$

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz

HILFSSATZ 4. *$F \in \mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation K.*

a) *Hat R einen oberen (bezw. unteren) Arm, der die Bedingung* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (y_n) (bezw. $(\bar{y}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} & d(y_n) < \text{const.}\,(y_n)^{-\eta-\beta}; \\ & M(y_n) = \int_{y_n - d(y_n)}^{y_n + d(y_n)} l(y)\, dy \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}, \quad \eta > 0. \\ & (\text{bezw. } d(\bar{y}_n) < \text{const.}\, |\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\, |\bar{y}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

b) *Hat R einen rechten (bezw. linken) Arm, der* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (x_n) (bezw. $(\bar{x}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} & D(x_n) < \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(x_n) = \int_{x_n - D(x_n)}^{x_n + D(x_n)} l(x)\, dx \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \\ & (\text{bezw. } D(\bar{x}_n) < \text{const.}\, |\bar{x}_n|^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\, |\bar{x}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Beweis. Wir nehmen an, R habe einen oberen Arm G_{y_0}. Es gibt ein $y^* > y_0$ so, dass für $y \geqslant y^*$ $F(\Gamma_y) \subset F_K(G_{y_0})$ ist. Aus der Bedingung (1b′) und aus dem Hilfssatz 2 folgt, dass für alle genügend grossen y gilt:

$$d(y) \leqslant \text{const.}\,(y)^{\beta} < y \tag{15}$$

Daraus erhalten wir für $M(y)$ die Abschätzung:

$$M(y) \leqslant \sup_{y - d(y) \leqslant \eta \leqslant y + d(y)} (l(\eta))\, 2\, d(y) \leqslant 2\, d(y) \text{const.}\,(y + d(y))^{\beta} \leqslant \text{const.}\,(y)^{2\beta} \tag{16}$$

Wir nehmen an, es gebe ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass für $y \geqslant \tilde{y}$ und gewisse Konstanten $\gamma > -1$

und $c>0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K\,l(y) + c(y)^{\gamma} \tag{17}$$

In gleicher Weise wie im Kapitel II folgt aus (16) und (17):

$$2\,c(y)^{\gamma+1}/(\gamma+1) < C(y)^{2\beta}\,(1 + (\tilde{C}/(y)^{2\beta}))$$

wobei C und $\tilde{C}$ positive Konstanten sind. Daraus können wir schliessen, dass eine monotone, divergierende Folge $(y_{1\,k})$ existiert so, dass für $c > C\beta$ gilt:

$$L(y_{1\,k}) < K\,l(y_{1\,k}) + c(y_{1\,k})^{2\beta-1}$$

Um eine Abschätzung für $d(y_{1\,k})$ zu erhalten, betrachten wir das Querschnittssystem $\Gamma_{y_{1\,k}} = \{\Gamma^{\nu}_{y_{1k}}\}$. Die Länge von $\Gamma^{\nu}_{y_{1\,k}}$ bezeichnen wir mit l_{ν}.
Für $d_i = \sup\limits_{z \in \Gamma^i{}_{y_{i\,k}}} |F(z) - y_{1\,k}|$ gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d_i)^2 &\leqslant (L(y) - K \sum_{i \neq k} l_i)^2/4 - K^2 l_i^2/4 < (K\,l_i + c(y_{1\,k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2 l_i^2/4 \\ &= K\,c\,l_i(y_{1\,k})^{2\beta-1}/2 + c^2(y_{1\,k})^{4\beta-2}/4 \leqslant C_1\,(y_{1\,k})^{3\beta-1} + c^2(y_{1\,k})^{4\beta-2}/4 \\ &= C_1\,(y_{1\,k})^{3\beta-1}(1 + C_2\,(y_{1\,k})^{\beta-1})\end{aligned}$$

Da $\beta - 1 < 0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d_i(y_{1\,k}) \leqslant c_1\,(y_{1\,k})^{\beta+(\beta-1)/2}; \qquad d(y_{1\,k}) = \sup_i d_i(y_{1\,k}) \leqslant c_1\,(y_{1\,k})^{\beta+(\beta-1)/2}$$

Daraus erhalten wir für $M(y_{1\,k})$ die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}M(y_{1\,k}) &\leqslant 2\,d(y_{1\,k})\,(\sup_{y_{1\,k}-d \leqslant y \leqslant y_{1\,k}+d} l(y)) \\ &\leqslant d(y_{1\,k})\,\text{const.}\,(y_{1\,k} + d(y_{1\,k}))^{\beta} \leqslant C_1\,(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das im Kapitel II eingeführte Iterationsverfahren lässt sich daher auch auf Arme G_{y_0} anwenden, welche die Bedingung 1b′) erfüllen. Nach r Schritten können wir die Existenz einer Folge $(y_{r\,k})$ nachweisen, für welche gilt:

$$d(y_{r\,k}) < c_r(y_{r\,k})^{\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}; \qquad M(y_{r\,k}) < C_r(y_{r\,k})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

Da $\beta < \frac{1}{3}$ ist, finden wir nach endlich vielen Schritten eine monotone, divergierende Folge (y_n), für welche (13) gilt. Hat R einen unteren Arm, so verläuft der Beweis genau gleich.

Hat R einen horizontalen, z.B. einen rechten Arm, so betrachten wir die Abbildungen:

$$\begin{aligned}&\varphi_1 : z \to w^* = i\,z; \quad (F_K^*)^{-1} : w^* = u^* + i\,v^* \to z^* = (u^*/K) + i\,v^* \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_2 : z^* \to w = -\,i\,K\,z^*\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \qquad F_K^* = \varphi_1 \circ F_K^{-1} \circ \varphi_2$$

Ist F eine Vergleichsabbildung von F_K mit der maximalen Dilatation K, so ist $F^* = \varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2$ eine Vergleichsabbildung von F_K^*. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat F^* ebenfalls die maximale Dilatation K. $(F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1$ bildet R auf eine Fläche R^* mit einem oberen Arm, der die Bedingung (1b′) erfüllt, ab. Nach dem soeben bewiesenen Teil des Hilfssatzes existiert eine divergierende Folge (y_n^*), für welche gilt:

$$d(y_n^*) = \sup_{P^* \in \Gamma_{yn^*}} |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\eta+\beta)};$$
$$M(y_n^*) < \text{const.}\,(y_n^*)^{-\eta}, \quad \eta > 0.$$

φ_2 bildet $\Gamma_{y_n^*}$ auf ein System $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ von Vertikalquerschnitten von $F_K(R)$ ab, wobei $u_n = K y_n^*$ ist. Wir wählen auf $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ einen beliebigen Punkt P. Es gilt:

$$\operatorname{Re} F^{-1}(P) = \operatorname{Re}(\varphi_1^{-1} \circ F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im}(F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F^*(P^*)$$
$$\operatorname{Re} F_K^{-1}(P) = \operatorname{Im}(F_K^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F_K^*(P^*)$$

Da $P^* = \varphi_2^{-1}(P)$ auf $\Gamma_{y_n^*}$ liegt, folgen daraus die Abschätzungen:

$$|\operatorname{Re} F^{-1}(P) - \operatorname{Re} F_K^{-1}(P)| = |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\beta+\eta)}$$
$$\left.\begin{aligned} &D(x_n) \leq \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \text{wobei } x_n = u_n/K = y_n^* \text{ ist.} \\ &\tilde{M}(x_n) \leq \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wir beweisen schliesslich den folgenden Eindeutigkeitssatz:

SATZ 4. *Die Fläche R besitze mindestens einen Arm. Es sei möglich, höchstens vier Arme, zwei vertikale und zwei horizontale, die wir mit* G_{y_0}, $G_{\bar{y}_0}$, G_{x_0}, $G_{\bar{x}_0}$ *bezeichnen, so abzutrennen, dass* $|R - G_{y_0} - G_{\bar{y}_0} - G_{x_0} - G_{\bar{x}_0}| < \infty$ *ist. Falls für genügend grosse* $|x|$ *und* $|y|$; $l(x) \leq c|x|^\beta$ und $l(y) \leq c$; $|y|^\beta$, $0 < \beta < {}^1/_3$, *ist, so ist* F_K *in* $\mathfrak{F}$ *eindeutig extremal.*

Beweis. Da R einen Arm besitzt, ist F_K extremal. F sei eine Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K. Aus dem Hilfssatz 4 folgt die Existenz von vier monotonen, divergierenden Folgen (y_n), $(\bar{y}_n)$, (x_n) und $(\bar{x}_n)$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &d(y_n) \leq \text{const.}\,(y_n)^{-(\eta+\beta)}; \quad M(y_n) \leq \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}; \\ &d(\bar{y}_n) \leq \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leq \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta} \\ &D(x_n) \leq \text{const.}\,(x_n)^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(x_n) \leq \text{const.}\,(x_n)^{-\eta}; \\ &D(\bar{x}_n) \leq \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leq \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta}; \quad \eta > 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Sind $\tilde{G}_{K x_n}$ und $\tilde{G}_{K \bar{x}_n}$ die durch $F_K(\Gamma_{x_n})$ und $F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ von $F_K(R)$ abgetrennten Gebietssysteme, so definieren wir: $G^*_{x_n} = F^{-1}(\tilde{G}_{K x_n})$, $G^*_{\bar{x}_n} = F^{-1}(\tilde{G}_{K \bar{x}_n})$. Wir betrachten den folgenden Teil R_n der Fläche R: $R_n = R - G_{y_n} - G_{\bar{y}_n} - G^*_{x_n} - G^*_{\bar{x}_n}$. R_n hat endlichen Inhalt. $\mathfrak{C}$ sei die Familie aller Horizontalquerschnitte von R_n. Wir unterscheiden die folgenden Teilmengen $\mathfrak{C}_i$ von $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}_1$ sei die Menge der Querschnitte, deren beide Endpunkte auf dem Rand von R liegen, $\mathfrak{C}_2$ die Familie der Querschnitte, die den Rand von R mit $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{x_n})$ verbinden und nicht in $G_{x_n - D(x_n)}$ enthalten sind. $\mathfrak{C}_3$ bestehe aus den Querschnitten, die auf dem Rand von R und auf $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ enden und nicht ganz in $G_{\bar{x}_n + D(\bar{x}_n)}$ liegen, $\mathfrak{C}_4$ aus allen Querschnitten, die $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{x_n})$ mit $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ verbinden, $\mathfrak{C}_5$ aus allen übrigen Querschnitten.

Mit E_{ni} bezeichnen wir die Punktmenge, mit A_{ni} die Ordinatenmenge, welche von $\mathfrak{C}_i$ überstrichen wird. Es gilt:

$$|E_{n5}| \leqslant M(x_n) + M(\bar{x}_n) \tag{21}$$

Ist $\mu(A_{ni})$ das Mass von A_{ni}, so gilt:

$$\mu(A_{n2}) \leqslant \text{const.}(x_n)^\beta; \quad \mu(A_{n3}) \leqslant \text{const.}|\bar{x}_n|^\beta; \quad \mu(A_{n4}) \leqslant l(x_0) \tag{22}$$

Ist $l_i(y)$ die Länge eines Querschnittes aus $\mathfrak{C}_i$, der über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegt und $L_i(y)$ die Länge seines F-Bildes, so gelten für fast alle y die folgenden Abschätzungen:

$$K l_1(y) \leqslant L_1(y); \quad K l_2(y) - K D(x_n) \leqslant L_2(y)$$
$$K l_3(y) - K D(\bar{x}_n) \leqslant L_3(y); \quad K l_4(y) - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n)) \leqslant L_4(y)$$

Durch Integration erhalten wir die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&K|E_{n1}| \leqslant \iint\limits_{E_{n1}} |p+q|\, dx\, dy;\\
&K|E_{n2}| - K D(x_n)\,\mu(A_{n2}) \leqslant \iint\limits_{E_{n2}} |p+q|\, dx\, dy\\
&K|E_{n3}| - K D(\bar{x}_n)\,\mu(A_{n3}) \leqslant \iint\limits_{E_{n3}} |p+q|\, dx\, dy\\
&K|E_{n4}| - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n))\,\mu(A_{n4}) \leqslant \iint\limits_{E_{n4}} |p+q|\, dx\, dy
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Addieren wir die Ungleichungen (23), so erhalten wir die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}
&K|R_n| - K|E_{n5}| - K\{D(x_n)(\mu(A_{n2}) + \mu(A_{n4})) + D(\bar{x}_n)(\mu(A_{n3})\\
&\quad + \mu(A_{n4}))\} = K|R_n| - B_n \leqslant \iint\limits_{R_n} |p+q|\, dx\, dy
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung:

$$K^2 |R_n|^2 - 2K|R_n|\, B_n \leqslant |F(R_n)| \left\{ K|R_n| - \frac{2}{1-k^2} \iint (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\, dx\, dy \right\} \tag{25}$$

wobei $\tilde{\kappa}$ die komplexe Dilatation von F ist.

Ist $\tilde{R}_n = R - G_{x_n} - G_{\bar{x}_n} - G_{y_n} - G_{\bar{y}_n}$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} &|\tilde{R}_n| - \tilde{M}(x_n) - \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant |R_n| \leqslant |\tilde{R}_n| + \tilde{M}(x_n) + \tilde{M}(\bar{x}_n) \\ &K(|\tilde{R}_n| - M(y_n) - M(\bar{y}_n)) \leqslant |F(R_n)| \leqslant K(|\tilde{R}_n| + M(y_n) + M(\bar{y}_n)) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Aus (20), (21), (22), (25) und (26) folgt schliesslich:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\, dx\, dy = \iint_{R} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\, dx\, dy = 0.$$

Daher ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Aus dem Satz 4 folgt insbesondere, dass F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal ist, wenn R ein schlichtes Gebiet ist, welches in $G = \{x+iy \mid y > c|x|^\alpha,\ \alpha > 3\}$ enthalten ist.

IV. Extremale quasikonforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes

SATZ 5. *Ist $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes G, dessen innere Randkomponente γ_1 nicht punktförmig ist, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Projektion von γ_1 auf die y-Achse sei ein Intervall $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$, $d > 0$. Bezeichnen wir mit g_y die Gerade $\operatorname{Im} z = y$, so ist für $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$ $g_y \cap \gamma_1 \neq \emptyset$. Wir definieren: $z_0(y) = x_0(y) + iy$, $x_0(y) = \max\{\operatorname{Re} z \mid z \in g_y \cap \gamma_1\}$. Mit Γ_y^0 bezeichnen wir den Horizontalquerschnitt von G dessen linker Endpunkt $z_0(y)$ ist. Der zweite Endpunkt von Γ_y^0 liegt auf der äusseren Randkomponente γ_2 von G. Wir betrachten die folgenden Familien von Horizontalquerschnitten:

$$B = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d/2\}; \quad C = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 + d/2 \leqslant y \leqslant y_0 + d\}; \quad D = B \cup C$$

$\tilde{\Gamma}_i$, $-\infty < i < +\infty$, seien die Überlagerungswege von $\Gamma_{y_0+d/2}$. Sie seien so numeriert, dass das durch $\tilde{\Gamma}_{i-1}$ und $\tilde{\Gamma}_i$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnittene Gebiet $\tilde{S}_i$ schlicht über der z-Ebene liegt. Mit $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$ und $\tilde{D}_i$ bezeichnen wir die Kurvenfamilien im Blatte $\tilde{S}_i$ mit den Spuren B, C und D. Es gilt: $\tilde{B}_i \cap \tilde{C}_{i+1} = \tilde{\Gamma}_i$. $\tilde{G}_n = (\bigcup_{-n}^{+n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{i=-n}^{n-1} \tilde{\Gamma}_i)$ ist ein einfach zusammenhängender Horizontalstreifen. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ extremal, wenn für jedes $F \in \mathfrak{F}$ $\varliminf_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$ ist. Ist insbesondere $|T(\tilde{G}_n)|$ gleichmässig beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$.

Um eine Schranke für $|T(\tilde{G}_n)|$ anzugeben, schätzen wir ab, wieviele Blätter $F_K(\tilde{S}_k)$ ein Jordanbogen $F(\tilde{\Gamma}_i)$ höchstens treffen kann. Wir sagen, $F(\tilde{\Gamma}_i)$ winde sich r-mal im positiven (bezw. negativen) Sinn um die Randkomponente $F_K(\gamma_1)$ von $F_K(G)$ herum, falls $F(\tilde{\Gamma}_i)$ mit jedem Horizontalquerschnitt der Streifen $F_K(\tilde{D}_{i+k})$, wobei $1 \leqslant k \leqslant r$ (bezw. $1-r \leqslant k \leqslant 0$) ist, Punkte gemeinsam hat, aber nicht mit allen Horizontalquerschnitten von $F_K(\tilde{D}_{i+r+1})$ (bezw. $F_K(\tilde{D}_{i-r})$).

Wir nehmen an, $F(\tilde{\Gamma}_n)$ winde sich s-mal im positiven Sinn, $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ r-mal im negativen Sinn um $F_K(\gamma_1)$ herum. Es gibt dann in $F_K(\tilde{D}_{n+s+1})$ einen Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}^*$ so, dass $F(\tilde{\Gamma}_n) \cap \tilde{\Gamma}^* = \emptyset$ ist. In $F_K(\tilde{D}_{-n-r-1})$ liegt ein Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}'$, der $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ nicht trifft. $\tilde{\Gamma}^*$ und $\tilde{\Gamma}'$ trennen von $\tilde{G}$ ein Gebiet $\tilde{E}$ ab, für welches gilt:

$$F(\tilde{G}_n) \subset \tilde{E} \subset \left(\bigcup_{-r-n-1}^{n+s+1} F_K(\tilde{S}_i) \right) \cup \left(\bigcup_{-n-r-1}^{n+s} F_K(\tilde{\Gamma}_i) \right) \tag{1}$$

Aus (1) erhalten wir für $|T(\tilde{G}_n)|$ die Abschätzung:

$$|T(\tilde{G}_n)| \leqslant (r+s+2)\, K\, |G| \tag{2}$$

Wir schätzen nun s nach oben ab, wobei wir $s>1$ voraussetzen dürfen. Dazu betrachten wir die Familie $\tilde{C}_{n+1}$ von Horizontalquerschnitten und die Kurvenschar:

$$\tilde{H}_{n+1} = \{F(\tilde{\Gamma}_y^0) \mid \tilde{\Gamma}_y^0 \in \tilde{C}_{n+1}\}$$

λ sei die extremale Länge von $\tilde{C}_{n+1}$, λ' die extremale Länge von $\tilde{H}_{n+1}$. Hat $F \in \mathfrak{F}$ die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt: $\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda$. Ist $l_0(y)$ die Länge von $\Gamma_y^0 \in D$, so definieren wir: $a = \sup_D l_0(y)$. Für λ gilt die Abschätzung:

$$1/\lambda \geqslant d/2a \tag{3}$$

Benützen wir die gleichen Bezeichnungen wie im Kapitel III, so gilt für eine beliebige Borel-messbare Metrik ϱ:

$$\lambda' \geqslant (\inf_{\tilde{H}_{n+1}} l_\varrho)^2 / m_\varrho$$

Wir wählen ϱ wie folgt: $\varrho = 1$ in $\bigcup_{k=2}^{r} \tilde{D}_{n+k}$, $\varrho = 0$ sonst. Es lässt sich leicht zeigen, dass sich jeder Bogen aus $\tilde{H}_{n+1}$ mindestens s-mal um $F_K(\gamma_1)$ herumwindet. Es gelten daher die folgenden Abschätzungen:

$$m_\varrho \leqslant K\, a\, d(s-1); \quad l_\varrho \geqslant (s-1)\, 2d; \quad \lambda' \geqslant 4d(s-1)/K a \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$s \leqslant (K\tilde{K}a^2/2d^2) + 1 \tag{5}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir für r die Abschätzung:

$$r \leqslant (K\tilde{K}a^2/2d^2) + 1 \tag{6}$$

$((K\tilde{K}a^2/d^2)+4)\,K|G|$ ist wegen (2), (5) und (6) eine gleichmässige Schranke für $|T(G_n)|$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Wir zeigen nun, dass zu jeder Abbildung $F\in\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K eine Folge $(\tilde{A}_n)$ von Horizontalstreifen existiert, welche $\tilde{G}$ ausschöpft und für welche $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$ ist. Dann ist nämlich nach dem Satze 1 F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir definieren: $R=\{z \mid y_0+d/4\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant y_0+3d/4\}\cap G$. Mit $\tilde{R}_i$ bezeichnen wir den Teil des Blattes $\tilde{S}_i$, der die Spur R hat. Wir nehmen an, es gebe eine Konstante $c>0$ und ein m so, dass für $i\geqslant m$ in $\tilde{R}_i$ gilt: $L(y)\geqslant Kl(y)+c$. $\tilde{G}_{m\,n}$ sei das Gebiet $(\bigcup_{i=m}^{n}\tilde{S}_i)\cup\cup(\bigcup_{i=m}^{n-1}\tilde{\Gamma}_i)$. Hat $F\in\mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K, so folgt aus unserer Annahme und aus (12) für jedes $n>m$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned} K^2\,|\tilde{G}_{m\,n}|^2 + K\,c\,d(n-m)\,|\tilde{G}_{m\,n}| &\leqslant \left(\int L(y)\,dy\right)^2\\ \leqslant K^2\,|\tilde{G}_{m\,n}|^2 + K\,|T(\tilde{G}_{m\,n})|\,|\tilde{G}_{m\,n}| \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Da $|T(\tilde{G}_{m\,n})|$ gleichmässig beschränkt ist, folgt aus (7): $c\leqslant C/(n-m)$, wobei C eine positive Konstante ist. Da $\lim_{n\to\infty}C/(n-m)=0$ ist, muss $c\leqslant 0$ sein, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Die Annahme ist also falsch. Es gibt daher eine Nullfolge (ε_k) und eine streng monoton wachsende Folge (j_k) von ganzen Zahlen so, dass in $\tilde{R}_{j_k}$ ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{j_k}}$ existiert, für welches gilt:

$$L(y_{j_k})\leqslant K\,l(y_{j_k})+\varepsilon_k \tag{8}$$

Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass eine monoton fallende Folge (i_l) existiert so, dass es in R_{i_l} ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{i_l}}$ gibt, für welches gilt:

$$L(y_{i_l})\leqslant K\,l(y_{i_l})+\varepsilon_l \tag{9}$$

Ist $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}|\operatorname{Im}F(z)-y|$, so folgt aus (8) und (9):

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{j_k}) = \lim_{l\to\infty} d(y_{i_l}) = 0\,.$$

Ist $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{j_n}}$, der in $\tilde{B}_{j_n}\cup\tilde{C}_{j_n}$ und Γ_{i_n} der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{i_n}}$, der in $\tilde{B}_{i_n}\cup\tilde{C}_{i_n}$ liegt, so bezeichnen wir mit $\tilde{A}_n$ das Gebiet mit endlichem Inhalt, welches durch $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ und $\tilde{\Gamma}_{i_n}$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnitten wird. Ist $l_0=\sup_G l(y)$, so gilt für genügend grosse n die Abschätzung:

$$|T(A_n)|\leqslant l_0\big(d(y_{j_n})+d(y_{i_n})\big)$$

$(\tilde{A}_n)$ ist also eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$, für welche gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Ist die innere Randkomponente γ_1 eine horizontale Strecke, so betrachten wir die Abbildungen: $\varphi_1: z\to z^*=iz$;

$$(F_K^*)^{-1}: z^*=x^*+i\,y^*\to w^*=(x^*/K)+i\,y^*;\qquad \varphi_2: w^*\to w=-\,i\,K\,w^*$$

Durch φ_1 wird γ_1 auf eine vertikale Strecke $\gamma_1{}^*$ abgebildet. $(F_K^*)^{-1}$ ist also in der Klasse $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ aller Abbildungen, die auf dem Rande von $\varphi_1(\tilde{G})$ mit $(F_K^*)^{-1}$ übereinstimmen, die einzige extremale Abbildung. Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \quad (F_K^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F_K \circ \varphi_1^{-1} \tag{10}$$

Ist F eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$, so liegt $(F^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat $(F^*)^{-1}$ ebenfalls die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ extremal ist, gilt: $\tilde{K} \geqslant K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal. Falls $\tilde{K} = K$ ist, so ist $(F^*)^{-1} = (F_K^*)^{-1}$, da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ eindeutig extremal ist. Wegen (10) muss dann gelten: $F = F_K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir beweisen schliesslich den folgenden Satz:

SATZ 6. *G_0 sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet. Ist $z_0 \in G_0$ und $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche von $G = G_0 - \{z_0\}$, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

Beweis. Zur Vereinfachung führen wir den Beweis für den Fall, in welchem G_0 einen analytischen Rand hat. Wir können $z_0 = 0$ setzen. g, $g(0) = 0$ sei eine konforme Abbildung von G_0 auf $|z'| < 1$. Ist $C = \{z' \mid 0 < |z'| < 1\}$ und $\tilde{C}$ die universelle Überlagerungsfläche von C, so induziert g eine konforme Abbildung $\tilde{g}$ von $\tilde{G}$ auf $\tilde{C}$, die bis auf Decktransformationen bestimmt ist. ϱ_0 sei der Radius von C, der auf der positiven reellen Achse liegt. $\gamma_0 = g^{-1}(\varrho_0)$ hat eine endliche Länge l_0. Die Überlagerungswege $\tilde{\varrho}_i$ von ϱ_0 seien so numeriert, dass das Gebiet $\tilde{S}_i$ mit endlichem Flächeninhalt, welches durch $\tilde{\varrho}_{i-1}$ und $\tilde{\varrho}_i$ aus $\tilde{C}$ herausgeschnitten wird, schlicht über der z'-Ebene liegt. $\tilde{C}_n = (\bigcup_{-n+1}^{n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{-n+1}^{n-1} \tilde{\varrho}_i)$ ist einfach zusammenhängend. $\zeta = \varphi(z') = \log z'$ bildet $\tilde{C}$ auf die linke Halbebene E: $\operatorname{Re}\zeta < 0$ ab. Wir normieren φ so, dass $\tilde{C}_n$ in den Streifen E_n: $-2\pi i n < \operatorname{Im}\zeta < 2\pi i n$ übergeht. $(\tilde{G}_n) = (\tilde{g}^{-1}(\tilde{C}_n))$ ist eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$. $\tilde{\gamma}_n = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_n)$ und $\tilde{\gamma}_{-n} = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_{-n})$ sind die in $\tilde{G}$ liegenden Randbogen von $\tilde{G}_n$. Ist $\gamma_{P,P'} \subset F_K(\tilde{G})$ ein Bogen, der P mit P' verbindet und $|\gamma_{P,P'}|$ seine Länge, so definieren wir:

$$\delta(P, P') = \inf_{\{\gamma_{P,P'}\}} |\gamma_{P,P'}|; \quad B_i = \sup_{P \in \tilde{\gamma}_i} \delta(F(P), F_K(P))$$

Nach einem allgemeinen Satz von Sethares [3] ist F_K extremal, wenn für jede Vergleichsabbildung F gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0; \quad \lim_{n\to\infty} (B_n + B_{-n})/|\tilde{G}_n| = 0 \tag{11}$$

Um (11) zu beweisen, benützen wir den folgenden

VERZERRUNGSSATZ VON TEICHMÜLLER [7]. Ist h eine quasikonforme Abbildung von E auf sich mit der maximalen Dilatation K, die den Rand von E identisch abbildet, so liegt $h(\zeta_0)$ im nicht-euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt

ζ_0 und dem Radius $d(K)$, wobei $d(K)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion von K ist.

$\psi_K = F_K \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ bildet E auf $F_K(\tilde{G})$ ab. Liegt F in $\mathfrak{F}$, so stimmt $\psi = F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ auf dem Rande von E mit ψ_K überein. $\psi_K^{-1} \circ \psi$ bildet den Rand von E identisch ab. Sind $\tilde{K}$ und K^* die maximalen Dilatationen von F und $\psi_K^{-1} \circ \psi$, so gilt: $K^* \leqslant K\tilde{K}$.

Wir untersuchen zunächst, wie die Strahlen $g_k\colon \operatorname{Im} \zeta = 2\pi k$ durch $\psi_K^{-1} \circ \psi$ transformiert werden. Ist $\zeta_0 = \xi_0 + 2\pi i k$, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta_0)$ nach dem Verzerrungssatz von Teichmüller im nichteuklidischen Kreis $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$ mit dem Radius $d(K\tilde{K})$ und dem Mittelpunkt ζ_0. Für den euklidischen Radius $r(K\tilde{K})$ und den euklidischen Mittelpunkt ζ_0^* gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0^* &= \xi_0 \cos h\big(d(K\tilde{K})\big) + 2\pi i k = \xi_0 b + 2\pi i k \\ r(K\tilde{K}) &= |\xi_0| \sin h\big(d(K\tilde{K})\big) = |\xi_0|\, a \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sind g_k' und g_k'' die Tangenten von $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$, welche sich in $\zeta = 2\pi i k$ schneiden, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ zwischen g_k' und g_k''. Mit Hilfe von (12) erhalten wir für g_k' und g_k'' die Gleichungen:

$$g_k'\colon \eta = 2\pi k - a\xi; \qquad g_k''\colon \eta = 2\pi k + a\xi \tag{13}$$

Da (13) nicht von ξ_0 abhängt, liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(g_n)$ ganz im Winkelgebiet, welches durch g_n' und g_n'' begrenzt wird. Ist P_n das Gebiet, welches durch die Strahlen g_n' und g_{-n}'' aus E herausgeschnitten wird, so gilt:

$$\psi_k^{-1} \circ \psi(E_n) = \psi_K^{-1} \circ F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}(E_n) = \psi_K^{-1}\big(F(\tilde{G}_n)\big) \subset P_n$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} & F(\tilde{G}_n) - F_K(\tilde{G}_n) \subset \psi_K(P_n) - F_K(\tilde{G}_n) = \psi_K(P_n - E_n); \\ & |T(\tilde{G}_n)| \leqslant |\psi_K(P_n - E_n)| \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$P_n - E_n$ besteht aus zwei getrennten Winkelgebieten Q_{n1} und Q_{n2}, wobei $Rd(Q_{n1}) = g_n \cup g_n'$, $Rd(Q_{n2}) = g_{-n} \cup g_{-n}''$ ist. Es gilt daher: $|\psi_K(P_n - E_n)| = |\psi_K(Q_{n1})| + |\psi_K(Q_{n2})|$ $\varphi^{-1}(g_n')$ ist eine logarithmische Spirale mit der Gleichung:

$$r(\alpha) = e^{-(\alpha - 2\pi k)/a}; \qquad r = |z'|, \quad \alpha = \arg z'$$

Daraus folgt: $|\varphi^{-1}(Q_{n1})| = a/4$.
Ist M eine Schranke von $|d\tilde{g}^{-1}(z')/dz'|$, so erhalten wir schliesslich die Abschätzung:

$$|\psi_K(Q_{n1})| \leqslant K M^2 a/4$$

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass $KM^2 a/4$ eine Schranke von $|\psi_K(Q_{n2})|$ ist. $|T(\tilde{G}_n)|$ ist daher gleichmässig beschränkt.

Um B_n abzuschätzen, wählen wir $P \in \tilde{\gamma}_n$ beliebig. Ist $\zeta = \varphi \circ \tilde{g}(P)$, so liegt $\zeta' = \psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ in $C_{\zeta, d(K\tilde{K})}$. Der Bogen $\Gamma \subset C_{\zeta, d(K\tilde{K})}$ verbinde ζ mit ζ' und bestehe aus höchstens zwei Strecken Γ_1 und Γ_2, wobei Γ_1 horizontal und Γ_2 vertikal ist. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$|\varphi^{-1}(\Gamma_1)| \leqslant 1; \quad |\varphi^{-1}(\Gamma_2)| \leqslant \mathrm{const.}\, 2\pi r\, |\log r|; \quad r = |\varphi^{-1}(\zeta)|$$

Da $\lim_{r\to 0} 2\pi r \log r = 0$ ist, so ist $|\varphi^{-1}(\Gamma)|$ und daher auch $|\psi_K(\Gamma)|$ beschränkt. Da $\psi_K(\Gamma) F_K(P)$ mit $F(P)$ verbindet, ist B_n gleichmässig beschränkt.

Wir betrachten zum Schluss die universelle Überlagerungsfläche $\tilde{C}$. $\Phi(Z) = e^{(Z-1)/(Z+1)}$ bildet den Einheitskreis $|Z| < 1$ konform auf $\tilde{C}$ ab. Nach dem Satze 6 ist jede zu $\varphi(Z) = (\Phi'(Z))^2 = 4e^{(Z-1)/(Z+1)}/(Z+1)^4$ und einem beliebigen k, $0 < k < 1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung extremal. Es lässt sich leicht überprüfen, dass $\varphi(Z)$ keine der von Sethares [3] angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Extremalität von f_k erfüllt. Nach einer dieser Bedingungen müsste z.B. für jedes $\delta > 0$ $\lim_{Z\to -1} |\varphi(Z)|\, |Z+1|^{2+\delta} = 0$ sein. Ist K ein Kreis, der in $|Z| < 1$ liegt und $|Z| = 1$ in $Z = -1$ berührt, so gilt für $Z \in K$: $\mathrm{Re}(Z-1)/(Z+1) = \mathrm{const.}$ Daraus folgt:

$$\lim_{\substack{z\to -1 \\ z\in K}} |\varphi(z)|\, |z+1|^{2+\delta} = \lim_{\substack{z\to -1 \\ z\in K}} \mathrm{const.}\, |z+1|^{\delta-2} = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \delta < 2.$$

LITERATUR

[1] L. V. AHLFORS: On quasiconformal mappings. J. d'analyse math. III (1953/54), 1–58.

[2] O. LEHTO und K. I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1965).

[3] G. C. SETHARES: The extremal property of certain Teichmüller mappings. Comment. Math. Helv. *43* (1968) 98–119.

[4] K. STREBEL: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises. Comment. Math. Helv. *36* (1962) 306–323.

[5] K. STREBEL: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II. Comment. Math. Helv. *39* (1964) 77–89.

[6] O. TEICHMÜLLER: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. Preuss. Acad. Wiss. math. Kl. *22* (1939), 1–197.

[7] O. TEICHMÜLLER: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. Deutsche Math. *7* (1944), 336–343.

Eingegangen den 26. Juli 1968