Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 44 (1969)

Artikel: Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises.

Autor: Blum, Eugen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33777

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Die Extremalität gewisser Teichmüllerscher Abbildungen des Einheitskreises

Von EUGEN BLUM (Zürich)

I. Einleitung

In seiner Arbeit [4] über quasikonforme Abbildungen hat Strebel Riemannsche Flächen R vom hyperbolischen Typ mit unendlichem Flächeninhalt betrachtet und geometrische Bedingungen dafür angegeben, dass jede zu $\varphi=\Phi'^2$ und k, $0<k<1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung f_k extremal oder eindeutig extremal ist, wobei Φ eine beliebige konforme Abbildung von $|Z|<1$ auf R ist. Die vorliegende These ist im wesentlichen eine Fortsetzung dieser Arbeit. Die verwendeten Methoden sind zum Teil schon in den Arbeiten von Strebel [4, 5] und Sethares [3] enthalten.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen R mit unendlichem Flächeninhalt, die der z-Ebene überlagert und zum Einheitskreis $|Z|<1$ konform äquivalent sind. Φ sei eine konforme Abbildung von $|Z|<1$ auf R. Wir bilden die z-Ebene durch die affine Abbildung F_K: $w=Kx+iy$, $K>1$, auf die w-Ebene ab. F_K erzeugt durch „Mitdeformieren" von R eine Fläche S und eine K-quasikonforme Abbildung von R auf S, die bis auf Decktransformationen eindeutig bestimmt ist. Den Punkten der Fläche R mit der Spur z entsprechen dabei die Punkte auf S mit der Spur $w=Kx+iy$. Wir zeichnen, falls es mehrere gibt, eine dieser Abbildungen aus und bezeichnen sie wieder mit F_K. Die Fläche S ist ebenfalls zum Einheitskreis $|W|<1$ konform äquivalent. Ist Ψ eine konforme Abbildung von $|W|<1$ auf S, so ist $\Psi^{-1}\circ F_K\circ\Phi$ eine K-quasikonforme Abbildung von $|Z|<1$ auf $|W|<1$. Wir sagen, die quasikonforme Abbildung $F: R\to S$ stimme auf dem Rande von R mit F_K überein, wenn $f_k=\Psi^{-1}\circ F_K\circ\Phi$ und $f=\Psi^{-1}\circ F\circ\Phi$ die gleiche Randabbildung induzieren. f_k hat die komplexe Dilatation

$$\kappa=(K-1)\,\bar{\Phi}'^2/(K+1)\,|\Phi'|^2=k\,\bar{\Phi}'^2/|\Phi'|^2$$

ist also eine zum quadratischen Differential $\varphi=\Phi'^2$ gehörende Teichmüllersche Abbildung. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die Familie der quasikonformen Abbildungen von R auf S, die auf dem Rande mit F_K übereinstimmen, mit $\mathfrak{G}$ die Menge aller quasikonformen Abbildungen von $|Z|<1$ auf $|W|<1$, die auf $|Z|=1$ mit f_k übereinstimmen. Die Abbildung $F\in\mathfrak{F}$ und die induzierte Abbildung $f=\Psi^{-1}\circ F\circ\Phi\in\mathfrak{G}$ sind gleichzeitig extremal oder eindeutig extremal.[1])

[1]) D.h. Die Abbildung hat die kleinste maximale Dilatation, bezw. ist die einzige mit dieser Eigenschaft.

$\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ sei ein beliebiges System von Querschnitten von R, die über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegen. Wier nennen Γ_y^λ einen Horizontalquerschnitt von R. Mit $l(y)$ bezeichnen wir die totale Länge von Γ_y, mit $L(y)$ die Länge des Systems $F(\Gamma_y) = \{F(\Gamma_y^\lambda)\}$. A sei eine beliebige Vereinigungsmenge von Systemen Γ_y mit endlichem Inhalt $|A|$. (Im folgenden bezeichnen wir den Flächeninhalt einer messbaren Menge G immer mit $|G|$.) Wir nennen A einen Horizontalstreifen. Für eine beliebige Abbildung $F \in \mathfrak{F}$ bezeichnen wir mit $T(A)$ die Punktmenge $F(A) - F_K(A)$.

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

SATZ 1. a) *Gibt es in R eine Folge (A_n) von Horizontalstreifen mit den Eigenschaften:* $\lim_{n\to\infty} |A_n| = \infty$, $\lim_{n\to\infty} |T(A_n)|/|A_n| = 0$, *so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

b) *Hat $F \in \mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K und erfüllt (A_n) die strengeren Bedingungen:* $\lim_{n\to\infty} A_n = R$, $\lim_{n\to\infty} |T(A_n)| = 0$, *so ist $F = F_K \cdot F_K$ ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. (A_n) sei eine Folge von Horizontalstreifen, die die Voraussetzungen a) erfüllt. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Strebel [4] hat gezeigt, dass die Enden von $F_K(\Gamma_y^\lambda)$ von den entsprechenden Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben und dass für fast alle y gilt:

$$Kl(y) \leqslant L(y) = \int_{\Gamma_y} |p + q|\, dx \tag{1}$$

Dabei ist $p = F_z$, $q = F_{\bar{z}}$. Durch Integration und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} &K^2 |A_n|^2 \leqslant \left(\int L(y)\, dy\right)^2 \leqslant \\ &\iint_{A_n} (|p|^2 - |q|^2)\, dx\, dy \iint_{A_n} \frac{|p+q|^2}{|p|^2 - |q|^2}\, dx\, dy \leqslant |F(A_n)|\, \tilde{K} |A_n| \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für $|F(A_n)|$ gilt die Abschätzung:

$$|F(A_n)| \leqslant K|A_n| + |T(A_n)| \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$K^2 \leqslant K\tilde{K} + \tilde{K}|T(A_n)|/|A_n| \tag{4}$$

Da $\underline{\lim}_{n\to\infty} |T(A_n)|/|A_n| = 0$ ist, folgt aus 4): $K \leqslant \tilde{K}$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, F habe die maximale Dilatation K. Die Ungleichung (2) lässt sich verbessern, wenn man den Integranden $|p+q|^2/(|p|^2 - |q|^2)$ genauer abschätzt. Es gilt:

$$|p + q|^2/(|p|^2 - |q|^2) \leqslant K - 2(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})/(1 - k^2) \tag{5}$$

wobei $\tilde{\kappa}=q/p$ die komplexe Dilatation von F ist. (Vergleiche Strebel [5]) Aus (2), (3) und (5) folgt:

$$K^2|A_n|^2 \leqslant (K|A_n| + |T(A_n)|)\left(K|A_n| - \frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy\right) \tag{6}$$

Da $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k < 1$ ist, gilt:

$$\frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \geqslant 0 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt schliesslich die Ungleichung:

$$0 \leqslant \frac{2}{1-k^2}\iint\limits_{A_n}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy \leqslant |T(A_n)| \tag{8}$$

Ist $\lim_{n\to\infty} A_n = R$ und $\lim_{n\to\infty}|T(A_n)| = 0$, so folgt aus (8):

$$\iint\limits_{R}(k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = 0 \tag{9}$$

Es gilt also fast überall in R: $\operatorname{Re}\tilde{\kappa} = k$. Aus der Ungleichung $k = \operatorname{Re}\tilde{\kappa} \leqslant |\tilde{\kappa}| \leqslant k$ folgt schliesslich: $\tilde{\kappa} = k$ fast überall in R, wobei $k = (K-1)/(K+1)$ die komplexe Dilatation von F_K ist. Die komplexen Dilatationen von F und F_K stimmen also fast überall in R überein. Dann haben auch f und f_k fast überall in $|Z| < 1$ die gleiche komplexe Dilatation. Daher gilt: $f = g \circ f_k$, wobei g eine lineare Transformation von $|W| < 1$ ist. Da f auf $|Z| = 1$ mit f_k übereinstimmt, muss g die identische Abbildung sein und es ist $f = f_k$ und daher $F = F_K$.

II. Ein Beispiel

Wir betrachten das folgende schlichte Gebiet G der z-Ebene:

$$G = \{z = x + iy \mid y > |x|^\alpha,\ \alpha > 3\}$$

Die affine Abbildung $w = F_K(x+iy) = Kx + iy$, $K > 1$, bildet G auf ein Gebiet G' der w-Ebene ab. Es ist bekannt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist. (Vergleiche: Sethares [3].)

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 2. *F_K ist in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y ist der Horizontalquerschnitt von G, der auf der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegt. Es gilt:

$l(y)=2y^{1/\alpha}=2y^{\beta}$, $\beta=1/\alpha<\frac{1}{3}$. Wir betrachten eine Folge (y_n), $y_n\geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n=\infty$, und definieren: $G_n=G\cap\{\operatorname{Im} z<y_n\}$. Da (G_n) eine Folge von Horizontalstreifen ist, die G ausschöpft, genügt es, die Existenz einer monotonen, divergierenden Folge (y_n) nachzuweisen, für welche $\lim_{n\to\infty}|T(G_n)|=0$ ist, falls $\tilde{K}=K$ ist. Wir definieren: $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}|\operatorname{Im} F(z)-y|$. Strebel [5] hat den folgenden Verzerrungssatz bewiesen:

VERZERRUNGSSATZ. *G sei ein schlichtes Gebiet der z-Ebene. $F\in\mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Γ_y sei das System aller Querschnitte von G auf der Geraden $\operatorname{Im} z=y$ und $l(y)$ erfülle die Bedingung:*

$$l(y)\leqslant M<\infty \quad \text{für} \quad 0\leqslant|y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}.$$

Dann gilt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$.

Wir beweisen den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 1. *Hat F die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt für $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ die Abschätzung:*

$$d(y_0)\leqslant\frac{2\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta}}{1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}}=M\sqrt{K\tilde{K}} \tag{1}$$

Beweis. Wir wählen y_0 so, dass $1-2\beta\sqrt{K\tilde{K}}(y_0)^{\beta-1}>0$ ist. Für $y\leqslant y_0$ gilt: $l(y)\leqslant\leqslant 2y_0^{\beta}$. Für $0<y-y_0\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ erhalten wir für $l(y)$ die Abschätzung:

$$l(y)=2y^{\beta}\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}(y-y_0)\leqslant 2y_0^{\beta}+2\beta(y_0)^{\beta-1}M\sqrt{K\tilde{K}}=M$$

Für $|y-y_0|\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$ gilt also: $l(y)\leqslant M$. Aus dem Verzerrungssatz von Strebel folgt: $d(y_0)\leqslant M\sqrt{K\tilde{K}}$, q.e.d.

Ist $G(y_0,y)=G\cap\{z\mid y_0<\operatorname{Im} z<y\}$, so erhalten wir für $|T(G(y_0,y))|$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}|T(G(y_0,y))|&\leqslant K\int_{y}^{y+d(y)} l(\eta)\,d\eta+K\int_{y_0-d(y_0)}^{y_0} l(\eta)\,d\eta\\&\leqslant Kl(y+d(y))\,d(y)+K\,l(y_0)\,d(y_0)\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen y gilt wegen (1): $d(y)<4\sqrt{K\tilde{K}}\,y^{\beta}<y$ und daher:

$$|T(G(y_0,y))|\leqslant 8\cdot 2^{\beta}K\sqrt{K\tilde{K}}\,y^{2\beta}+K\,l(y_0)\,d(y_0)=C\,y^{2\beta}+C_0 \tag{2}$$

Da $|G(y_0, y)| = 2(y^{\beta+1} - y_0^{\beta+1})/(\beta+1)$ ist, gilt:

$$\lim_{y\to\infty} |T(G(y_0, y))|/|G(y_0, y)| = 0.$$

Daraus folgt, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist.

Es sei nun $\tilde{K} = K$. Wir setzen $M(y) = K\int_y^{y+d(y)} l(y)\,dy$ und zeigen, dass eine monoton wachsende, divergierende Folge (y_n) existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} M(y_n) = 0$ ist. Da $|T(G_n)| \leqslant M(y_n)$ ist, gilt für eine solche Folge (y_n): $\lim_{n\to\infty} |T(G_n)| = 0$. Für alle genügend grossen y gilt nach (2):

$$M(y) \leqslant \text{const.}\, y^{2\beta} \tag{3}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) existiert so, dass für eine geeignete Konstante C_1 gilt: $M(y_{1k}) \leqslant C_1 (y_{1k})^{2\beta + (\beta-1)/2}$. Dazu nehmen wir an, es gebe ein y_0 so, dass für alle $y \geqslant y_0$ und gewissen Konstanten $\gamma > -1$, $c > 0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K\,l(y) + c\,y^{\gamma} \tag{4}$$

Aus (I2), (I3), (2) und (4) folgt dann für alle $y \geqslant y_0$:

$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + \frac{2Kc}{\gamma+1} |G(y_0, y)| (y^{\gamma+1} - y_0^{\gamma+1}) \leqslant \left(\int_{y_0}^{y} L(\eta)\,d\eta\right)^2 \leqslant$$
$$K^2 |G(y_0, y)|^2 + K |G(y_0, y)| (C y^{2\beta} + C_0)$$

Schliesslich erhalten wir für alle $y \geqslant y_0$ die Ungleichung:

$$\frac{2c}{\gamma+1} (y)^{\gamma+1} \leqslant C y^{2\beta}\left(1 + \frac{C_0}{C y^{2\beta}} + \frac{2c}{C(\gamma+1)} \frac{(y_0)^{\gamma+1}}{y^{2\beta}}\right) = C y^{2\beta} H(y) \tag{5}$$

Da $\lim_{y\to\infty} H(y) = 1$ ist, folgt aus (5): $\gamma + 1 \leqslant 2\beta$. Wir wählen $\gamma = 2\beta - 1$. Dann muss $c \leqslant C(\gamma+1)/2 = C\beta$ sein. Für $c > C\beta$ ist also die Annahme (4) falsch. Wählen wir $c > C\beta$, so existieren daher beliebig grosse y, für welche $L(y) < Kl(y) + c(y)^{2\beta-1}$ ist, und damit eine monotone, divergierende Folge (y_{1k}) so, dass gilt:

$$L(y_{1k}) < K\,l(y_{1k}) + c(y_{1k})^{2\beta-1} \tag{6}$$

Für $d(y)$ erhalten wir mit Hilfe einer einfachen geometrischen Überlegung die Abschätzung:

$$(d(y))^2 \leqslant (L(y))^2/4 - K^2 (l(y))^2/4 \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$(d(y_{1k}))^2 < (K\,l(y_{1k}) + c(y_{1k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2 (l(y_{1k}))^2/4 =$$
$$K c (y_{1k})^{3\beta-1} + (c^2/4)(y_{1k})^{\beta-2} = K c (y_{1k})^{3\beta-1} (1 + (c/4K)(y_{1k})^{\beta-1})$$

Da $\beta-1<-\frac{2}{3}$ und $(\frac{3}{2})\,\beta-\frac{1}{2}<0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d(y_{1\,k})<(2Kc)^{1/2}(y_{1\,k})^{(3\beta-1)/2}=c_1(y_{1\,k})^{\beta+(\beta-1)/2};\quad \lim_{k\to\infty} d(y_{1\,k})=0. \tag{8}$$

Wir erhalten daher für $M(y_{1\,k})$ die Abschätzung:

$$M(y_{1\,k})<Kl(y_{1\,k}+d(y_{1\,k}))\,d(y_{1\,k})\leqslant K2^{\beta+1}c_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\quad \text{q.e.d.} \tag{9}$$

Ist $\beta<\frac{1}{5}$, so ist $2\beta+(\beta-1)/2<0$ und es gilt daher:

$$\lim_{k\to\infty} M(y_{1\,k})=\lim_{k\to\infty}|T(G_{1\,k})|=0.$$

Es bleibt somit der Fall $\beta\geqslant\frac{1}{5}$ übrig. Wir nehmen an, es gebe ein k_0 so, dass für alle $y\geqslant y_{k_0}$ wiederum (4) gilt und betrachten das Gebiet $G(y_{1\,k_0}, y_{1\,k})$, wobei $k>k_0$ ist. Für $|T(G(y_{1k_0}, y_{1k}))|$ gilt wegen 9) die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}&|T(G(y_{1\,k_0}, y_{1\,k}))|\leqslant C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\quad+Kl(y_{1\,k_0})\,d(y_{1\,k_0})=C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}+C_{01}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Aus (I2), (I3), (4) und (10) folgt für alle $k>k_0$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2c}{\gamma+1}(y_{1\,k})^{\gamma+1}\leqslant C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\\&\left(1+\frac{C_{01}}{C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}+\frac{2c}{C_1(\gamma+1)}\frac{(y_{1\,k_0})^{\gamma+1}}{(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}}\right)\\&=C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}H_1(y_{1\,k})\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Falls nun $\beta=\frac{1}{5}$ ist, so ist $H_1(y_{1\,k})\,(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}$ konstant und es müsste daher entgegen unserer Annahme $\gamma\leqslant-1$ sein. Zu gegebenen Konstanten $-\frac{3}{5}>\gamma>-1$ und $c>0$ gibt es daher eine monotone, divergierende Folge $(\tilde{y}_{2\,k})$, für welche gilt:

$$L(\tilde{y}_{2\,k})<Kl(\tilde{y}_{2\,k})+c(\tilde{y}_{2\,k})^{\gamma} \tag{12}$$

Aus (7) und (12) erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d(\tilde{y}_{2\,k}))^2&<(Kc/2)\,l(\tilde{y}_{2\,k})(\tilde{y}_{2\,k})^{\gamma}+(c^2/4)(\tilde{y}_{2\,k})^{2\gamma}\\&=Kc(\tilde{y}_{2\,k})^{\gamma+1/5}(1+(c/4K)(\tilde{y}_{2\,k})^{\gamma-1/5})\end{aligned}$$

Für alle genügend grossen k und eine Konstante C_2 gilt daher:

$$d(\tilde{y}_{2\,k})<(2Kc)^{1/2}(\tilde{y}_{2\,k})^{1/10+\gamma/2};\qquad M(\tilde{y}_{2\,k})<C_2(\tilde{y}_{2\,k})^{3/10+\gamma/2}$$

Da $\frac{3}{10}+\gamma/2<0$ ist, so gilt: $\lim_{k\to\infty} M(\tilde{y}_{2\,k})=\lim_{k\to\infty}|T(g_{2\,k})|=0$.

Wenn $\beta>\frac{1}{5}$ und $c>C_1(5\beta-1)/4$ ist, so können wir wie oben auf die Existenz

einer Folge (y_{2k}) schliessen, für welche die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $L(y_{2k}) < Kl(y_{2k}) + c(y_{2k})^{\beta+(3/2)(\beta-1)}$

b) $d(y_{2k}) < c_2(y_{2k})^{\beta+(3/4)(\beta-1)}$; c) $M(y_{2k}) < C_2(y_{2k})^{2\beta+(3/4)(\beta-1)}$

Dabei sind c_2 und C_2 positive Konstanten.
Ist $\beta < \frac{3}{11}$, so ist $2\beta + (\frac{3}{4})(\beta-1) = (\frac{11}{4})\beta - \frac{3}{4} < 0$. Ist $\beta \geqslant \frac{3}{11}$, so setzen wir das Verfahren fort. Nach r Schritten können wir schliesslich die Existenz einer divergierenden Folge (y_{rk}) nachweisen, welche für genügend grosse k und eine geeignet gewählte Kontsante C_r die folgende Bedingung erfüllt:

$$M(y_{rk}) < C_r(y_{rk})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

$(2^r-1)/2^r$ strebt monoton gegen 1. Der Exponent $2\beta + (2^r-1)(\beta-1)/2^r$ wird negativ, sobald $(2^r-1)/2^r > 2\beta/(1-\beta)$ ist. Ist r_0 die ganze Zahl, für welche gilt: $(2^{r_0}-1)/2^{r_0} > 2\beta/(1-\beta) \geqslant (2^{r_0-1}-1)/2^{r_0-1}$ so erhalten wir nach r_0 Schritten eine Folge (y_{r_0k}), für welche gilt:

a) $\lim\limits_{k\to\infty} y_{r_0k} = \infty$; b) $\lim\limits_{k\to\infty} |T(G_{r_0k})| = 0$.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Falls $\alpha \leqslant 3$ ist, so versagt das im Beweis angewendete Iterationsverfahren.

III. Extremale quasikonforme Abbildung einer Klasse von Überlagerungsflächen mit unendlichem Flächeninhalt

R sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die der z-Ebene überlagert ist. Jedes System $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ zerlegt R in endlich oder unendlich viele Teilgebiete. Für jedes dieser Teilgebiete ist bestimmt, ob es sich an mindestens einen der Querschnitte Γ_y^λ nach oben anschliesse. Mit $G_y = \{G_y^\mu\}$ bezeichnen wir die Gesamtheit dieser Teilgebiete. Wir wählen nun ein festes System Γ_{y_0} so, dass jedes dieser Teilgebiete $G_{y_0}^\mu$ ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ liegt. Die Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn wir für Γ_{y_0} das System aller Querschnitte von R über $\operatorname{Im} z = y_0$ wählen. Für $y > y_0$ bezeichnen wir mit $\Gamma_y = \{\Gamma_y^\lambda\}$ das System aller Querschnitte von R, die über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ und in G_{y_0} liegen. $G_y = \{G_y^\mu\}$ liegt ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y$. Den zwischen den Geraden $\operatorname{Im} z = y_1 \geqslant y_0$ und $\operatorname{Im} z = y > y_1$ liegenden Teil von G_{y_0} bezeichnen wir mit $G(y_1, y)$.

DEFINITION. *Wir nennen G_{y_0} einen oberen Arm oder einen Arm in der Richtung*

$\pi/2$, falls gilt:

a) $|G_{y_0}| = \infty$

b) *Es existiert ein $a<1$ so, dass* $\overline{\lim}_{y\to\infty} (y)^{-(a+1)} \int_{y_0}^{y} l(\eta)\, d\eta = C_0,\ 0 \leqslant C_0 < \infty$ *ist.*

Wir beweisen den folgenden Satz:

SATZ 3. *Falls R mindestens einen oberen Arm hat, so ist F_k in $\mathfrak{F}$ extremal.*

Beweis. F sei eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$. Da $G(y_1, y)$ für alle $y > y_1 > y_0$ ein Horizontalstreifen ist, genügt es nach dem Satze 1 zu zeigen, dass für ein $y_1 > y_0$ $\underline{\lim}_{y\to\infty} |T(G(y_1, y))|/|G(y_1, y)| = 0$ ist. Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 2. *Ist $d^+(y) = \sup_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im} F(z) - y)$, so gilt die Abschätzung:*

$$(d^+(y))^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{y}^{y+(d^+(y)/2)} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1} \tag{2a}$$

Ist $d^-(y) = \inf_{z\in\Gamma_y}(\operatorname{Im} F(z) - y)$, so gilt, falls $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_k(G_{y_0})$ liegt, die Abschätzung:

$$(d^-(y))^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y+d^-(y)}^{y+(d^-(y)/2)} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{y+(d^-(y)/2)}^{y} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1} \tag{2b}$$

Beweis. $d^-(y)$ und $d^+(y)$ sind nach unten halbstetige Funktionen. Sind sie für eine in einem Intervall überall dichte Punktmenge beschränkt, so bleiben sie daher im ganzen Intervall beschränkt. Da die Enden von $F(\Gamma_y^\lambda)$ und $F_k(\Gamma_y^\lambda)$ für fast alle y den Abstand Null haben, können wir uns bei der Abschätzung von $d^+(y)$ und $d^-(y)$ auf Querschnittssysteme Γ_y beschränken, die diese Eigenschaft haben. Wir nehmen an, es gebe ein $y_1 > y$ und einen Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y} > y_1$ auf $F_k(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt. $F(\Gamma_y)$ hat dann Punkte mit $F_k(\Gamma_{y_1})$ gemeinsam und es gibt in $F_K(G_{y_1})$ Punkte, die nicht in $F(G_y)$ liegen. $F_K(G_{y_1})$ ist also keine Teilmenge von $F(G_y)$. Jedes System $F(\Gamma_{y+\Delta y})$, $0 < \Delta y < y_1 - y$, trifft dann $F_K(\Gamma_{y_1})$ ebenfalls. Wäre dies nicht der Fall, so würde nämlich gelten: $F_K(G_{y_1}) \subset F(G_{y+\Delta y}) \subset F(G_y)$, was einen Widerspruch darstellt.

Gibt es ein y_2, $y_0 \leqslant y_2 < y$ und einen Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P)$ für ein $\tilde{y} < y_2$ auf $F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ liegt, so trifft $F(\Gamma_y)$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$ und es gilt: $F(G_y) \not\subset F_K(G_{y_2})$. Für $0 < \Delta y < y - y_2$ trifft auch $F(\Gamma_{y-\Delta y})$ das System $F_K(\Gamma_{y_2})$. Sonst wäre ja $F(G_y) \subset$ $\subset F(G_{y-\Delta y}) \subset F_K(G_{y_2})$, was im Widerspruch zur Aussage $F(G_y) \not\subset F_K(G_{y_2})$ steht.
Wir betrachten nun die Kurvenscharen:

$$\mathfrak{H} = \left\{ \Gamma_\eta \mid y \leqslant \eta \leqslant y + \frac{y_1 - y}{2} \right\}; \qquad \mathfrak{H}' = \{ F(\Gamma_\eta) \mid \Gamma_\eta \in \mathfrak{H} \}$$

Um eine obere Schranke für $d^+(y)$ zu erhalten, schätzen wir die extremalen Längen $\lambda=\lambda(\mathfrak{H})$ und $\lambda'=\lambda(\mathfrak{H}')$ ab. Die extremale Länge λ einer Schar $\mathfrak{C}$ von lokal rektifizierbaren Kurven C können wir nach Lehto und Virtanen [2] so definieren:

$$(\lambda(\mathfrak{C}))^{-1} = \inf_{\varrho\in\mathfrak{P}} m_\varrho(\Omega)\Big(\inf_{\mathfrak{C}\in C} l_\varrho(C)\Big)^{-2}$$

Dabei ist $\mathfrak{P}$ die Familie der nicht-negativen Borel-messbaren Funktionen, Ω die von der Kurvenschar $\mathfrak{C}$ überstrichene Menge,

$$l_\rho = \int_C \rho\,|dz|; \quad m_\rho(\Omega) = \iint_\Omega \rho^2\,dx\,dy$$

Für eine feste Metrik ϱ_0 gilt also:

$$1/\lambda' \leqslant m_{\varrho_0}(\inf_{\mathfrak{H}'} l_{\varrho_0})^{-2}$$

Wir wählen ϱ_0 wie folgt: $\varrho_0=1$ in $F_K(G((y+y_1)/2, y_1))$
$\varrho_0=0$ sonst.

Aus den vorangehenden topologischen Überlegungen folgt mit Hilfe der Metrik ϱ_0:

$$\lambda' \geqslant (y_1-y)^2\left(K\int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta)\,d\eta\right)^{-1} \tag{3}$$

Da F $\tilde{K}$-quasikonform ist, gilt:

$$\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt die Ungleichung:

$$(y_1-y)^2 \leqslant K\tilde{K}\int_{(y+y_1)/2}^{y_1} l(\eta)\,d\eta\left(\int_y^{(y+y_1)/2}\frac{1}{l(\eta)}\,d\eta\right)^{-1} \tag{5}$$

Gehen wir in (5) zur oberen Grenze über, so erhalten wir die Abschätzung (2a). Ist $F(\Gamma_y)$ in $F_K(G_{y_0})$ enthalten, so führen analoge Überlegungen zur Ungleichung (2b).

Wir brauchen nun eine vorläufige Abschätzung von $d(y)=\max(d^+(y), |d^-(y)|)$, welche für alle genügend grossen y gilt und beweisen daher den folgenden Hilfssatz:

HILFSSATZ 3. *Zu jeder Konstanten $\varepsilon>0$ existiert ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass für $y\geqslant\tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $d(y)<\varepsilon y$.*

Beweis. Wir nehmen an, es gebe zu einer Konstanten $c>0$ beliebig grosse y so,

dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Ist $1 > a' > a$, so existiert wegen 1b) ein y^* so, dass für $y \geqslant y^*$ gilt:

$$\int_{y+(d^+(y)/2)}^{y+d^+(y)} l(\eta)\, d\eta < c(y + d^+(y))^{a'+1}/4 \tag{6}$$

Mit I bezeichnen wir das Intervall $y \leqslant \eta \leqslant (1+c/2)\, y$ und betrachten für $a' < b < 1$ die folgende Menge E_b:

$$E_b = \{\eta \mid \eta \in I,\ l(\eta) \geqslant y^b\}$$

Für das Mass $\mu(E_b)$ von E_b gilt wegen 1b) für $y \geqslant y^*$:

$$\mu(E_b) < \text{const.}\,(y)^{1+a'-b}.$$

Daraus folgt:

$$\mu(I - E_b) > (c/2)\,(1 - \text{const.}\,(y)^{a'-b})\, y$$

Da $a' - b < 0$ ist, können wir annehmen, für $y \geqslant y^*$ sei $\mu(I - E_b) > cy/4$. Wir wählen $y \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) \geqslant cy$ ist. Es gilt dann:

$$\int_{y}^{y+(d^+(y)/2)} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_{I} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \geqslant \int_{I-E_b} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta > \mu(I - E_b)\, y^{-b} > c(y)^{1-b}/4 \tag{7}$$

Aus (2a), (6) und (7) folgt: $(d^+(y))^2 < K\tilde{K}(y + d^+(y))^{a'+1}(y)^{b-1}$. Da $b - 1 < 0$ und $a' + 1 < 2$ ist, existiert ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass $d^+(y) < cy$ ist für $y \geqslant \tilde{y}$, was einen Widerspruch darstellt. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ so, dass $d^+(y) < \varepsilon y$ ist für $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$.

$Q(y)$ sei die Menge aller y', für welche gilt: *a*) $y_0 < y' < y$; b) Es existiert ein Punkt $P \in \Gamma_y$ so, dass $F(P) \in F_K(\Gamma_{\tilde{y}})$ für ein $\tilde{y} < y'$. Für jedes $y' \in Q(y)$ gilt:

$$(y - y')^2 \leqslant K\tilde{K} \int_{y'}^{(y+y')/2} l(\eta)\, d\eta \left(\int_{(y+y')/2}^{y} \frac{1}{l(\eta)}\, d\eta \right)^{-1}$$

Auf gleiche Weise, wie oben lässt sich zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{y}(\varepsilon)$ existiert so, dass für alle $y \geqslant \tilde{y}(\varepsilon)$ gilt: $\inf Q(y) \geqslant (1 - \varepsilon)\, y$. Ist $\varepsilon < \frac{1}{2}$, so ist für $y > \max(2y_0, \tilde{y}(\varepsilon))$ $\inf Q(y) > y_0$. Dann liegt $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ und es gilt daher: $y - \inf Q(y) = |d^-(y)| < \varepsilon y$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass für genügend grosse y $F(\Gamma_y)$ ganz in $F_K(G_{y_0})$ liegt.

Wir wählen y_1 so gross, dass $F(\Gamma_{y_1})$ in $F_K(G_{y_0})$ liegt und suchen eine divergierende Folge (y_n), für die wir eine möglichst kleine Schranke für $|T(G(y_1, y_n))|$ angeben

können. Wir definieren die Menge B:

$$B = \left\{ b \mid b < 1, \varliminf_{y \to \infty} (y)^{-b-1} \int_{y_0}^{y} l(\eta)\, d\eta = 0 \right\}$$

Ist $b_0 = \inf B$, so folgt aus 1): a) $-1 \leqslant b_0 \leqslant a$; b) Falls $b_0 = -1$ ist, so liegt b_0 nicht in B.

Wir wählen b_1 wie folgt: $b_1 = b_0$, falls $b_0 \in B$ ist, $b_1 = b_0 + \varepsilon$, falls $b_0 \notin B$ ist, wobei $0 < \varepsilon < (1 - b_0)/2$ ist. Da b_1 in B liegt, existiert für ein beliebig gegebenes $c > 0$ eine monotone, divergierende Folge (y_n) so, dass für genügend grosse n gilt:

$$y_n/2 > y_1; \quad \int_{y_n/2}^{y_n} l(\eta)\, d\eta < c(y_n)^{b_1+1} \tag{8}$$

I_n sei das Intervall $y_n/2 \leqslant y \leqslant y_n$. Nach dem Hilfssatz 3 gilt für eine Nullfolge (ε_n) und $y \in I_n : d(y) < \varepsilon_n y_n$. Ist $\inf_{y \in I_n} d^+(y) = 0$, so ist nichts zu beweisen. Wir nehmen daher an, es sei $\inf_{y \in I_n} d^+(y) > 0$. Wir unterteilen das Intervall I_n durch die folgenden Teilpunkte a_{ni}:

$$a_{n0} = y_n/2; \quad a_{n1} = a_{n0} + d^+(a_{n0}); \quad a_{ni} = a_{n,i-1} + d^+(a_{n,i-1})$$

Es gelte: $a_{nk} \leqslant y_n$; $a_{n,k+1} > y_n$.

Wir betrachten die Intervalle $I_{ni} = [a_{n_1 i-1}, a_{ni}]$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Da für $y \in I_n$ $d(y) < \varepsilon_n y_n$ ist, können wir annehmen, es gelte:

$$\sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,i-1}) > y_n/4$$

Es gibt mindestens ein Intervall I_{nl} so, dass gilt:

$$\int_{I_{nl}} l(\eta)\, d\eta < 4c\, d^+(a_{n,l-1})\,(y_n)^{b_1} \tag{9}$$

Wäre nämlich für alle $i \int_{I_{ni}} l(\eta)\, d\eta \geqslant 4c(y_n)^{b_1} d^+(a_{n,i-1})$, so würde gelten:

$$\int_{In} l(\eta)\, d\eta \geqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{I_{ni}} l(\eta)\, d\eta \geqslant 4c(y_n)^{b_1} \sum_{i=1}^{k} d^+(a_{n,i-1}) > c(y_n)^{b_1+1},$$

was im Widerspruch zu (8) steht.

Wir betrachten nun für ein $\delta > 0$ die Menge E^{δ}_{nl}:

$$E^{\delta}_{nl} = \{\eta \mid \eta \in I_{nl},\ l(\eta) \geqslant (y_n)^{b_1+\delta}\}$$

und schätzen ihr Mass $\mu(E^{\delta}_{nl})$ ab. Es gilt:

$$4c(y_n)^{b_1} d^+(a_{n,l-1}) > \int_{I_{nl}} l(\eta)\,d\eta \geqslant \int_{E_{nl}^{\delta}} l(\eta)\,d\eta \geqslant \mu(E^{\delta}_{nl})(y_n)^{b_1+\delta}$$

Daraus folgt: $\mu(E^{\delta}_{nl}) < 4cd^+(a_{n,l-1})(y_n)^{-\delta}$.
Für genügend grosse n gilt:

$$\mu(E^{\delta}_{nl}) < d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{10}$$

Wir definieren: $I^1_{nl} = [a_{n,l-1}, (a_{n,l-1}+a_{nl})/2]$.
Mit Hilfe von (10) erhalten wir die Abschätzung:

$$\int_{I_{nl}^1} \frac{1}{l(\eta)}\,d\eta > \int_{I_{nl}^1 - I_{nl}^1 \cap E_{nl}^{\delta}} \frac{1}{l(\eta)}\,d\eta > (y_n)^{-b_1-\delta} d^+(a_{n,l-1})/4 \tag{11}$$

Aus (2a), (9) und (11) folgt: $d^+(a_{n,l-1}) < \text{const.}(y_n)^{b_1+\delta/2}$.
Wir setzen: $a_{n,\,l-1} = y'_n$. Da $y_n/2 \leqslant y'_n \leqslant y_n$ ist, gilt:.

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = \infty; \qquad d^+(y'_n) < \text{const.}(y'_n)^{b_1+\delta/2} \tag{12}$$

Aus (9) und (12) folgt:

$$|T(G(y_1, y'_n))| \leqslant \int_{y_1+d^-(y_1)}^{y_1} l(\eta)\,d\eta + \int_{y_n'}^{y_n'+d^+(y_n')} l(\eta)\,d\eta < C_1 + \text{const.}(y'_n)^{2b_1+\delta/2}$$

Da $b_1-\varepsilon$ nicht in B liegt, gilt: $\underline{\lim}_{n\to\infty}(y'_n)^{-(1+b_1-\varepsilon)}\int_{y_1}^{y_n'} l(\eta)\,d\eta \geqslant C_0$, wobei $0 < C_0 \leqslant \infty$ ist. Für genügend grosse n gilt also:

$$|T(G(y_1, y'_n))|/|G(y_1, y'_n)| < C_1/|G(y_1, y'_n)| + \text{const.}(y'_n)^{b_1+\delta/2+\varepsilon-1}$$

Wählen wir $\varepsilon = \delta/2 = (1-b_1)/4$, so ist $b_1+\delta/2+\varepsilon-1 = (b_1-1)/2 < 0$. Daher gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(G(y_1, y'_n))|/|G(y_1, y'_n)| = 0$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Durch eine Drehung um den Winkel α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ geht die Fläche R in eine Fläche $\tilde{R}$ über. Hat R einen oberen Arm, so sagen wir, $\tilde{R}$ habe einen Arm in der Richtung $\pi/2+\alpha$. Wir sprechen von einem rechten (bezw. linken oder unteren) Arm, wenn $\alpha = -\pi/2$ (bezw. $\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = \pi$) ist.

Es lässt sich zeigen, dass F_K in $\mathfrak{F}$ extremal ist, wenn die Fläche R einen Arm in einer beliebigen Richtung besitzt.

Im Beweis des Satzes 3 wird die Struktur der Fläche R ausserhalb des Armes G_{y_0} nicht benützt. F_K ist daher extremal, wenn R eine beliebige, der z-Ebene überlagerte

Riemannsche Fläche ist, welche ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet mit einem Arm enthält.

In einem rechten oder linken Arm G_{x_0} definieren wir Γ_x, $l(x)$, G_x und $G(x_1, x_2)$ auf analoge Weise wie Γ_y, $l(y)$, G_y und $G(y_1, y_2)$. Ist $\tilde{\Gamma}_{K_x} = F_K(\Gamma_x)$, so definieren wir:

$$D(x) = \sup_{P \in \tilde{\Gamma}_{Kx}} | R_l \; F^{-1}(P) - x|$$

Wir betrachten nun eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche R, die einen vertikalen oder horizontalen Arm besitzt, der anstelle von (1b) die strengere bedingung (1b′) erfüllt:

$$l(y) \leqslant \text{const.}\,|y|^{\beta} \quad (\text{bezw.}\, l(x) \leqslant \text{const.}\,|x|^{\beta}), \quad 0 < \beta < \tfrac{1}{3} \tag{1b'}$$

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz

HILFSSATZ 4. *$F \in \mathfrak{F}$ habe die maximale Dilatation K.*

a) *Hat R einen oberen (bezw. unteren) Arm, der die Bedingung* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (y_n) (bezw. $(\bar{y}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} & d(y_n) < \text{const.}\,(y_n)^{-\eta-\beta}; \\ & M(y_n) = \int_{y_n - d(y_n)}^{y_n + d(y_n)} l(y)\, dy \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}, \quad \eta > 0. \\ & (\text{bezw.}\, d(\bar{y}_n) < \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

b) *Hat R einen rechten (bezw. linken) Arm, der* (1b′) *erfüllt, so existiert eine monotone, divergierende Folge (x_n) (bezw. $(\bar{x}_n)$), für welche gilt:*

$$\left.\begin{aligned} & D(x_n) < \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(x_n) = \int_{x_n - D(x_n)}^{x_n + D(x_n)} l(x)\, dx \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \\ & (\text{bezw.}\, D(\bar{x}_n) < \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\beta-\eta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Beweis. Wir nehmen an, R habe einen oberen Arm G_{y_0}. Es gibt ein $y^* > y_0$ so, dass für $y \geqslant y^*$ $F(\Gamma_y) \subset F_K(G_{y_0})$ ist. Aus der Bedingung (1b′) und aus dem Hilfssatz 2 folgt, dass für alle genügend grossen y gilt:

$$d(y) \leqslant \text{const.}\,(y)^{\beta} < y \tag{15}$$

Daraus erhalten wir für $M(y)$ die Abschätzung:

$$M(y) \leqslant \sup_{y - d(y) \leqslant \eta \leqslant y + d(y)} (l(\eta))\, 2\, d(y) \leqslant 2\, d(y) \text{const.}\,(y + d(y))^{\beta} \leqslant \text{const.}\,(y)^{2\beta} \tag{16}$$

Wir nehmen an, es gebe ein $\tilde{y} \geqslant y^*$ so, dass für $y \geqslant \tilde{y}$ und gewisse Konstanten $\gamma > -1$

und $c>0$ gilt:

$$L(y) \geqslant K\,l(y) + c(y)^{\gamma} \tag{17}$$

In gleicher Weise wie im Kapitel II folgt aus (16) und (17):

$$2\,c(y)^{\gamma+1}/(\gamma+1) < C(y)^{2\beta}\,(1 + (\tilde{C}/(y)^{2\beta}))$$

wobei C und $\tilde{C}$ positive Konstanten sind. Daraus können wir schliessen, dass eine monotone, divergierende Folge $(y_{1\,k})$ existiert so, dass für $c>C\beta$ gilt:

$$L(y_{1\,k}) < K\,l(y_{1\,k}) + c(y_{1\,k})^{2\beta-1}$$

Um eine Abschätzung für $d(y_{1\,k})$ zu erhalten, betrachten wir das Querschnittssystem $\Gamma_{y_{1\,k}} = \{\Gamma^{\nu}_{y_{1k}}\}$. Die Länge von $\Gamma^{\nu}_{y_{1\,k}}$ bezeichnen wir mit l_{ν}.
Für $d_i = \sup\limits_{z \in \Gamma^{i}_{y_{i\,k}}} |F(z) - y_{1\,k}|$ gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned}(d_i)^2 &\leqslant (L(y) - K \sum_{i \neq k} l_i)^2/4 - K^2\,l_i^2/4 < (K\,l_i + c(y_{1\,k})^{2\beta-1})^2/4 - K^2\,l_i^2/4 \\ &= K\,c\,l_i(y_{1\,k})^{2\beta-1}/2 + c^2(y_{1\,k})^{4\beta-2}/4 \leqslant C_1(y_{1\,k})^{3\beta-1} + c^2(y_{1\,k})^{4\beta-2}/4 \\ &= C_1(y_{1\,k})^{3\beta-1}(1 + C_2(y_{1\,k})^{\beta-1})\end{aligned}$$

Da $\beta - 1 < 0$ ist, gilt für genügend grosse k:

$$d_i(y_{1\,k}) \leqslant c_1(y_{1\,k})^{\beta+(\beta-1)/2}; \qquad d(y_{1\,k}) = \sup_i d_i(y_{1\,k}) \leqslant c_1(y_{1\,k})^{\beta+(\beta-1)/2}$$

Daraus erhalten wir für $M(y_{1\,k})$ die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}M(y_{1\,k}) &\leqslant 2\,d(y_{1\,k})\,(\sup_{y_{1\,k}-d \leqslant y \leqslant y_{1\,k}+d} l(y)) \\ &\leqslant d(y_{1\,k})\,\text{const.}\,(y_{1\,k} + d(y_{1\,k}))^{\beta} \leqslant C_1(y_{1\,k})^{2\beta+(\beta-1)/2}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das im Kapitel II eingeführte Iterationsverfahren lässt sich daher auch auf Arme G_{y_0} anwenden, welche die Bedingung 1b') erfüllen. Nach r Schritten können wir die Existenz einer Folge $(y_{r\,k})$ nachweisen, für welche gilt:

$$d(y_{r\,k}) < c_r(y_{r\,k})^{\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}; \qquad M(y_{r\,k}) < C_r(y_{r\,k})^{2\beta+(\beta-1)(2^r-1)/2^r}$$

Da $\beta < \frac{1}{3}$ ist, finden wir nach endlich vielen Schritten eine monotone, divergierende Folge (y_n), für welche (13) gilt. Hat R einen unteren Arm, so verläuft der Beweis genau gleich.

Hat R einen horizontalen, z.B. einen rechten Arm, so betrachten wir die Abbildungen:

$$\varphi_1 : z \to w^* = i\,z; \qquad (F_K^*)^{-1} : w^* = u^* + i\,v^* \to z^* = (u^*/K) + i\,v^*$$
$$\varphi_2 : z^* \to w = -\,i\,K\,z^*$$

Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \qquad F_K^* = \varphi_1 \circ F_K^{-1} \circ \varphi_2$$

Ist F eine Vergleichsabbildung von F_K mit der maximalen Dilatation K, so ist $F^* = \varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2$ eine Vergleichsabbildung von F_K^*. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat F^* ebenfalls die maximale Dilatation K. $(F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1$ bildet R auf eine Fläche R^* mit einem oberen Arm, der die Bedingung (1b′) erfüllt, ab. Nach dem soeben bewiesenen Teil des Hilfssatzes existiert eine divergierende Folge (y_n^*), für welche gilt:

$$d(y_n^*) = \sup_{P^* \in \Gamma_{yn^*}} |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\eta+\beta)};$$
$$M(y_n^*) < \text{const.}\,(y_n^*)^{-\eta}, \quad \eta > 0.$$

φ_2 bildet $\Gamma_{y_n^*}$ auf ein System $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ von Vertikalquerschnitten von $F_K(R)$ ab, wobei $u_n = Ky_n^*$ ist. Wir wählen auf $\tilde{\Gamma}_{u_n}$ einen beliebigen Punkt P. Es gilt:

$$\operatorname{Re} F^{-1}(P) = \operatorname{Re}(\varphi_1^{-1} \circ F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im}(F^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F^*(P^*)$$
$$\operatorname{Re} F_K^{-1}(P) = \operatorname{Im}(F_K^* \circ \varphi_2^{-1}(P)) = \operatorname{Im} F_K^*(P^*)$$

Da $P^* = \varphi_2^{-1}(P)$ auf $\Gamma_{y_n^*}$ liegt, folgen daraus die Abschätzungen:

$$\left.\begin{aligned} &|\operatorname{Re} F^{-1}(P) - \operatorname{Re} F_K^{-1}(P)| = |\operatorname{Im} F^*(P^*) - y_n^*| < \text{const.}\,(y_n^*)^{-(\beta+\eta)} \\ &D(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\beta-\eta}; \quad \text{wobei } x_n = u_n/K = y_n^* \text{ ist.} \\ &\tilde{M}(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wir beweisen schliesslich den folgenden Eindeutigkeitssatz:

SATZ 4. *Die Fläche R besitze mindestens einen Arm. Es sei möglich, höchstens vier Arme, zwei vertikale und zwei horizontale, die wir mit G_{y_0}, $G_{\bar{y}_0}$, G_{x_0}, $G_{\bar{x}_0}$ bezeichnen, so abzutrennen, dass $|R - G_{y_0} - G_{\bar{y}_0} - G_{x_0} - G_{\bar{x}_0}| < \infty$ ist. Falls für genügend grosse $|x|$ und $|y|$; $l(x) \leqslant c|x|^\beta$ und $l(y) \leq c; |y|^\beta$, $0 < \beta < {}^1/_3$, ist, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. Da R einen Arm besitzt, ist F_K extremal. F sei eine Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K. Aus dem Hilfssatz 4 folgt die Existenz von vier monotonen, divergierenden Folgen (y_n), $(\bar{y}_n)$, (x_n) und $(\bar{x}_n)$ mit den Eigenschaften:

$$\left.\begin{aligned} &d(y_n) \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-(\eta+\beta)}; \quad M(y_n) \leqslant \text{const.}\,(y_n)^{-\eta}; \\ &d(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta-\beta}; \quad M(\bar{y}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{y}_n|^{-\eta} \\ &D(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(x_n) \leqslant \text{const.}\,(x_n)^{-\eta}; \\ &D(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta-\beta}; \quad \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant \text{const.}\,|\bar{x}_n|^{-\eta}; \quad \eta > 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Sind $\tilde{G}_{Kx_n}$ und $\tilde{G}_{K\bar{x}_n}$ die durch $F_K(\Gamma_{x_n})$ und $F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ von $F_K(R)$ abgetrennten Gebiets-

systeme, so definieren wir: $G^*_{x_n} = F^{-1}(\tilde{G}_{K x_n})$, $G^*_{\bar{x}_n} = F^{-1}(\tilde{G}_{K \bar{x}_n})$. Wir betrachten den folgenden Teil R_n der Fläche R: $R_n = R - G_{y_n} - G_{\bar{y}_n} - G^*_{x_n} - G^*_{\bar{x}_n}$. R_n hat endlichen Inhalt. $\mathfrak{C}$ sei die Familie aller Horizontalquerschnitte von R_n. Wir unterscheiden die folgenden Teilmengen $\mathfrak{C}_i$ von $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}_1$ sei die Menge der Querschnitte, deren beide Endpunkte auf dem Rand von R liegen, $\mathfrak{C}_2$ die Familie der Querschnitte, die den Rand von R mit $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{x_n})$ verbinden und nicht in $G_{x_n - D(x_n)}$ enthalten sind. $\mathfrak{C}_3$ bestehe aus den Querschnitten, die auf dem Rand von R und auf $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ enden und nicht ganz in $G_{\bar{x}_n + D(\bar{x}_n)}$ liegen, $\mathfrak{C}_4$ aus allen Querschnitten, die $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{x_n})$ mit $F^{-1} \circ F_K(\Gamma_{\bar{x}_n})$ verbinden, $\mathfrak{C}_5$ aus allen übrigen Querschnitten.

Mit E_{ni} bezeichnen wir die Punktmenge, mit A_{ni} die Ordinatenmenge, welche von $\mathfrak{C}_i$ überstrichen wird. Es gilt:

$$|E_{n5}| \leqslant M(x_n) + M(\bar{x}_n) \tag{21}$$

Ist $\mu(A_{ni})$ das Mass von A_{ni}, so gilt:

$$\mu(A_{n2}) \leqslant \text{const.}(x_n)^\beta; \quad \mu(A_{n3}) \leqslant \text{const.}|\bar{x}_n|^\beta; \quad \mu(A_{n4}) \leqslant l(x_0) \tag{22}$$

Ist $l_i(y)$ die Länge eines Querschnittes aus $\mathfrak{C}_i$, der über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegt und $L_i(y)$ die Länge seines F-Bildes, so gelten für fast alle y die folgenden Abschätzungen:

$$K l_1(y) \leqslant L_1(y); \qquad K l_2(y) - K D(x_n) \leqslant L_2(y)$$
$$K l_3(y) - K D(\bar{x}_n) \leqslant L_3(y); \qquad K l_4(y) - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n)) \leqslant L_4(y)$$

Durch Integration erhalten wir die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&K|E_{n1}| \leqslant \iint\limits_{E_{n1}} |p+q|\,dx\,dy;\\
&K|E_{n2}| - K D(x_n)\,\mu(A_{n2}) \leqslant \iint\limits_{E_{n2}} |p+q|\,dx\,dy\\
&K|E_{n3}| - K D(\bar{x}_n)\,\mu(A_{n3}) \leqslant \iint\limits_{E_{n3}} |p+q|\,dx\,dy\\
&K|E_{n4}| - K(D(x_n) + D(\bar{x}_n))\,\mu(A_{n4}) \leqslant \iint\limits_{E_{n4}} |p+q|\,dx\,dy
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Addieren wir die Ungleichungen (23), so erhalten wir die Abschätzung:

$$\left.\begin{aligned}
&K|R_n| - K|E_{n5}| - K\{D(x_n)(\mu(A_{n2}) + \mu(A_{n4})) + D(\bar{x}_n)(\mu(A_{n3})\\
&\quad + \mu(A_{n4})\} = K|R_n| - B_n \leqslant \iint\limits_{R_n} |p+q|\,dx\,dy
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung:

$$K^2|R_n|^2 - 2K|R_n|\,B_n \leqslant |F(R_n)|\left\{K|R_n| - \frac{2}{1-k^2}\iint (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy\right\} \tag{25}$$

wobei $\tilde{\kappa}$ die komplexe Dilatation von F ist.
Ist $\tilde{R}_n = R - G_{x_n} - G_{\bar{x}_n} - G_{y_n} - G_{\bar{y}_n}$, so gilt:

$$\left.\begin{aligned} &|\tilde{R}_n| - \tilde{M}(x_n) - \tilde{M}(\bar{x}_n) \leqslant |R_n| \leqslant |\tilde{R}_n| + \tilde{M}(x_n) + \tilde{M}(\bar{x}_n) \\ &K(|\tilde{R}_n| - M(y_n) - M(\bar{y}_n)) \leqslant |F(R_n)| \leqslant K(|\tilde{R}_n| + M(y_n) + M(\bar{y}_n)) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Aus (20), (21), (22), (25) und (26) folgt schliesslich:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = \iint_{R} (k - \operatorname{Re}\tilde{\kappa})\,dx\,dy = 0.$$

Daher ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Aus dem Satz 4 folgt insbesondere, dass F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal ist, wenn R ein schlichtes Gebiet ist, welches in $G = \{x+iy \mid y > c|x|^\alpha,\ \alpha > 3\}$ enthalten ist.

IV. Extremale quasikonforme Abbildung der universellen Überlagerungsfläche eines zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes

SATZ 5. *Ist $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche des zweifach zusammenhängenden, beschränkten Gebietes G, dessen innere Randkomponente γ_1 nicht punktförmig ist, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, die Projektion von γ_1 auf die y-Achse sei ein Intervall $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$, $d > 0$. Bezeichnen wir mit g_y die Gerade $\operatorname{Im} z = y$, so ist für $y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d$ $g_y \cap \gamma_1 \neq \emptyset$. Wir definieren: $z_0(y) = x_0(y) + iy$, $x_0(y) = \max\{\operatorname{Re} z \mid z \in g_y \cap \gamma_1\}$. Mit Γ_y^0 bezeichnen wir den Horizontalquerschnitt von G dessen linker Endpunkt $z_0(y)$ ist. Der zweite Endpunkt von Γ_y^0 liegt auf der äusseren Randkomponente γ_2 von G. Wir betrachten die folgenden Familien von Horizontalquerschnitten:

$$B = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + d/2\};\quad C = \{\Gamma_y^0 \mid y_0 + d/2 \leqslant y \leqslant y_0 + d\};\quad D = B \cup C$$

$\tilde{\Gamma}_i$, $-\infty < i < +\infty$, seien die Überlagerungswege von $\Gamma_{y_0+d/2}$. Sie seien so numeriert, dass das durch $\tilde{\Gamma}_{i-1}$ und $\tilde{\Gamma}_i$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnittene Gebiet $\tilde{S}_i$ schlicht über der z-Ebene liegt. Mit $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}_i$ und $\tilde{D}_i$ bezeichnen wir die Kurvenfamilien im Blatte $\tilde{S}_i$ mit den Spuren B, C und D. Es gilt: $\tilde{B}_i \cap \tilde{C}_{i+1} = \tilde{\Gamma}_i$. $\tilde{G}_n = (\bigcup_{-n}^{+n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{i=-n}^{n-1} \tilde{\Gamma}_i)$ ist ein einfach zusammenhängender Horizontalstreifen. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ extremal, wenn für jedes $F \in \mathfrak{F}$ $\varliminf_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$ ist. Ist insbesondere $|T(\tilde{G}_n)|$ gleichmässig beschränkt, so ist $\lim_{n\to\infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0$.

Um eine Schranke für $|T(\tilde{G}_n)|$ anzugeben, schätzen wir ab, wieviele Blätter $F_K(\tilde{S}_k)$ ein Jordanbogen $F(\tilde{\Gamma}_i)$ höchstens treffen kann. Wir sagen, $F(\tilde{\Gamma}_i)$ winde sich r-mal im positiven (bezw. negativen) Sinn um die Randkomponente $F_K(\gamma_1)$ von $F_K(G)$ herum, falls $F(\tilde{\Gamma}_i)$ mit jedem Horizontalquerschnitt der Streifen $F_K(\tilde{D}_{i+k})$, wobei $1 \leqslant k \leqslant r$ (bezw. $-r \leqslant k \leqslant 0$) ist, Punkte gemeinsam hat, aber nicht mit allen Horizontalquerschnitten von $F_K(\tilde{D}_{i+r+1})$ (bezw. $F_K(\tilde{D}_{i-r})$).

Wir nehmen an, $F(\tilde{\Gamma}_n)$ winde sich s-mal im positiven Sinn, $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ r-mal im negativen Sinn um $F_K(\gamma_1)$ herum. Es gibt dann in $F_K(\tilde{D}_{n+s+1})$ einen Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}^*$ so, dass $F(\tilde{\Gamma}_n) \cap \tilde{\Gamma}^* = \emptyset$ ist. In $F_K(\tilde{D}_{-n-r-1})$ liegt ein Horizontalquerschnitt $\tilde{\Gamma}'$, der $F(\tilde{\Gamma}_{-n-1})$ nicht trifft. $\tilde{\Gamma}^*$ und $\tilde{\Gamma}'$ trennen von $\tilde{G}$ ein Gebiet $\tilde{E}$ ab, für welches gilt:

$$F(\tilde{G}_n) \subset \tilde{E} \subset \left(\bigcup_{-r-n-1}^{n+s+1} F_K(\tilde{S}_i) \right) \cup \left(\bigcup_{-n-r-1}^{n+s} F_K(\tilde{\Gamma}_i) \right) \tag{1}$$

Aus (1) erhalten wir für $|T(\tilde{G}_n)|$ die Abschätzung:

$$|T(\tilde{G}_n)| \leqslant (r + s + 2)\, K\, |G| \tag{2}$$

Wir schätzen nun s nach oben ab, wobei wir $s > 1$ voraussetzen dürfen. Dazu betrachten wir die Familie $\tilde{C}_{n+1}$ von Horizontalquerschnitten und die Kurvenschar:

$$\tilde{H}_{n+1} = \{F(\tilde{\Gamma}_y^0) \mid \tilde{\Gamma}_y^0 \in \tilde{C}_{n+1}\}$$

λ sei die extremale Länge von $\tilde{C}_{n+1}$, λ' die extremale Länge von $\tilde{H}_{n+1}$. Hat $F \in \mathfrak{F}$ die maximale Dilatation $\tilde{K}$, so gilt: $\tilde{K} \geqslant \lambda'/\lambda$. Ist $l_0(y)$ die Länge von $\Gamma_y^0 \in D$, so definieren wir: $a = \sup_D l_0(y)$. Für λ gilt die Abschätzung:

$$1/\lambda \geqslant d/2a \tag{3}$$

Benützen wir die gleichen Bezeichnungen wie im Kapitel III, so gilt für eine beliebige Borel-messbare Metrik ϱ:

$$\lambda' \geqslant (\inf_{\tilde{H}_{n+1}} l_\varrho)^2 / m_\varrho$$

Wir wählen ϱ wie folgt: $\varrho = 1$ in $\bigcup_{k=2}^{r} \tilde{D}_{n+k}$, $\varrho = 0$ sonst. Es lässt sich leicht zeigen, dass sich jeder Bogen aus $\tilde{H}_{n+1}$ mindestens s-mal um $F_K(\gamma_1)$ herumwindet. Es gelten daher die folgenden Abschätzungen:

$$m_\varrho \leqslant K a d (s-1); \quad l_\varrho \geqslant (s-1)\, 2d; \quad \lambda' \geqslant 4d(s-1)/Ka \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$s \leqslant (K \tilde{K} a^2 / 2d^2) + 1 \tag{5}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir für r die Abschätzung:

$$r \leqslant (K \tilde{K} a^2 / 2d^2) + 1 \tag{6}$$

$((K\tilde{K}a^2/d^2)+4)\,K|G|$ ist wegen (2), (5) und (6) eine gleichmässige Schranke für $|T(G_n)|$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal.

Wir zeigen nun, dass zu jeder Abbildung $F\in\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation K eine Folge $(\tilde{A}_n)$ von Horizontalstreifen existiert, welche $\tilde{G}$ ausschöpft und für welche $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$ ist. Dann ist nämlich nach dem Satze 1 F_K in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir definieren: $R=\{z \mid y_0+d/4\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant y_0+3d/4\}\cap G$. Mit $\tilde{R}_i$ bezeichnen wir den Teil des Blattes $\tilde{S}_i$, der die Spur R hat. Wir nehmen an, es gebe eine Konstante $c>0$ und ein m so, dass für $i\geqslant m$ in $\tilde{R}_i$ gilt: $L(y)\geqslant Kl(y)+c$. $\tilde{G}_{mn}$ sei das Gebiet $(\bigcup_{i=m}^{n}\tilde{S}_i)\cup\cup(\bigcup_{i=m}^{n-1}\tilde{\Gamma}_i)$. Hat $F\in\mathfrak{F}$ die maximale Dilatation K, so folgt aus unserer Annahme und aus (12) für jedes $n>m$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned} K^2|\tilde{G}_{mn}|^2 + Kcd(n-m)\,|\tilde{G}_{mn}| &\leqslant \left(\int L(y)\,dy\right)^2 \\ &\leqslant K^2|\tilde{G}_{mn}|^2 + K|T(\tilde{G}_{mn})|\,|\tilde{G}_{mn}| \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Da $|T(\tilde{G}_{mn})|$ gleichmässig beschränkt ist, folgt aus (7): $c\leqslant C/(n-m)$, wobei C eine positive Konstante ist. Da $\lim_{n\to\infty} C/(n-m)=0$ ist, muss $c\leqslant 0$ sein, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Die Annahme ist also falsch. Es gibt daher eine Nullfolge (ε_k) und eine streng monoton wachsende Folge (j_k) von ganzen Zahlen so, dass in $\tilde{R}_{j_k}$ ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{j_k}}$ existiert, für welches gilt:

$$L(y_{j_k})\leqslant K\,l(y_{j_k})+\varepsilon_k \tag{8}$$

Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass eine monoton fallende Folge (i_l) existiert so, dass es in R_{i_l} ein Querschnittssystem $\tilde{\Gamma}_{y_{i_l}}$ gibt, für welches gilt:

$$L(y_{i_l})\leqslant K\,l(y_{i_l})+\varepsilon_l \tag{9}$$

Ist $d(y)=\sup_{z\in\Gamma_y}|\operatorname{Im} F(z)-y|$, so folgt aus (8) und (9):

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{j_k}) = \lim_{l\to\infty} d(y_{i_l}) = 0\,.$$

Ist $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{j_n}}$, der in $\tilde{B}_{j_n}\cup\tilde{C}_{j_n}$ und Γ_{i_n} der Querschnitt aus $\Gamma_{y_{i_n}}$, der in $\tilde{B}_{i_n}\cup\tilde{C}_{i_n}$ liegt, so bezeichnen wir mit $\tilde{A}_n$ das Gebiet mit endlichem Inhalt, welches durch $\tilde{\Gamma}_{j_n}$ und $\tilde{\Gamma}_{i_n}$ aus $\tilde{G}$ herausgeschnitten wird. Ist $l_0=\sup_G l(y)$, so gilt für genügend grosse n die Abschätzung:

$$|T(A_n)|\leqslant l_0(d(y_{j_n})+d(y_{i_n}))$$

$(\tilde{A}_n)$ ist also eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$, für welche gilt: $\lim_{n\to\infty}|T(\tilde{A}_n)|=0$. F_K ist daher in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Ist die innere Randkomponente γ_1 eine horizontale Strecke, so betrachten wir die Abbildungen: $\varphi_1: z\to z^*=iz$;

$$(F_K^*)^{-1}: z^* = x^* + i\,y^* \to w^* = (x^*/K) + i\,y^*; \qquad \varphi_2: w^*\to w = -\,iKw^*$$

Durch φ_1 wird γ_1 auf eine vertikale Strecke $\gamma_1{}^*$ abgebildet. $(F_K^*)^{-1}$ ist also in der Klasse $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ aller Abbildungen, die auf dem Rande von $\varphi_1(\tilde{G})$ mit $(F_K^*)^{-1}$ übereinstimmen, die einzige extremale Abbildung. Es gilt:

$$\varphi_2 \circ (F_K^*)^{-1} \circ \varphi_1 = F_K; \quad (F_K^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F_K \circ \varphi_1^{-1} \tag{10}$$

Ist F eine beliebige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ mit der maximalen Dilatation $\tilde{K}$, so liegt $(F^*)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$. Da φ_1 und φ_2 konform sind, hat $(F^*)^{-1}$ ebenfalls die maximale Dilatation $\tilde{K}$. Da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ extremal ist, gilt: $\tilde{K} \geqslant K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ extremal. Falls $\tilde{K} = K$ ist, so ist $(F^*)^{-1} = (F_K^*)^{-1}$, da $(F_K^*)^{-1}$ in $(\mathfrak{F}^*)^{-1}$ eindeutig extremal ist. Wegen (10) muss dann gelten: $F = F_K$. F_K ist also in $\mathfrak{F}$ eindeutig extremal.

Wir beweisen schliesslich den folgenden Satz:

SATZ 6. *G_0 sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet. Ist $z_0 \in G_0$ und $\tilde{G}$ die universelle Überlagerungsfläche von $G = G_0 - \{z_0\}$, so ist F_K in $\mathfrak{F}$ extremal.*

Beweis. Zur Vereinfachung führen wir den Beweis für den Fall, in welchem G_0 einen analytischen Rand hat. Wir können $z_0 = 0$ setzen. g, $g(0) = 0$ sei eine konforme Abbildung von G_0 auf $|z'| < 1$. Ist $C = \{z' \mid 0 < |z'| < 1\}$ und $\tilde{C}$ die universelle Überlagerungsfläche von C, so induziert g eine konforme Abbildung $\tilde{g}$ von $\tilde{G}$ auf $\tilde{C}$, die bis auf Decktransformationen bestimmt ist. ϱ_0 sei der Radius von C, der auf der positiven reellen Achse liegt. $\gamma_0 = g^{-1}(\varrho_0)$ hat eine endliche Länge l_0. Die Überlagerungswege $\tilde{\varrho}_i$ von ϱ_0 seien so numeriert, dass das Gebiet $\tilde{S}_i$ mit endlichem Flächeninhalt, welches durch $\tilde{\varrho}_{i-1}$ und $\tilde{\varrho}_i$ aus $\tilde{C}$ herausgeschnitten wird, schlicht über der z'-Ebene liegt. $\tilde{C}_n = (\bigcup_{-n+1}^{n} \tilde{S}_i) \cup (\bigcup_{-n+1}^{n-1} \tilde{\varrho}_i)$ ist einfach zusammenhängend. $\zeta = \varphi(z') = \log z'$ bildet $\tilde{C}$ auf die linke Halbebene E: $\operatorname{Re}\zeta < 0$ ab. Wir normieren φ so, dass $\tilde{C}_n$ in den Streifen E_n: $-2\pi i n < \operatorname{Im}\zeta < 2\pi i n$ übergeht. $(\tilde{G}_n) = (\tilde{g}^{-1}(\tilde{C}_n))$ ist eine Ausschöpfung von $\tilde{G}$. $\tilde{\gamma}_n = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_n)$ und $\tilde{\gamma}_{-n} = \tilde{g}^{-1}(\tilde{\varrho}_{-n})$ sind die in $\tilde{G}$ liegenden Randbogen von $\tilde{G}_n$. Ist $\gamma_{P,P'} \subset F_K(\tilde{G})$ ein Bogen, der P mit P' verbindet und $|\gamma_{P,P'}|$ seine Länge, so definieren wir:

$$\delta(P, P') = \inf_{\{\gamma_{P,P'}\}} |\gamma_{P,P'}|; \quad B_i = \sup_{P \in \tilde{\gamma}_i} \delta(F(P), F_K(P))$$

Nach einem allgemeinen Satz von Sethares [3] ist F_K extremal, wenn für jede Vergleichsabbildung F gilt:

$$\lim_{n \to \infty} |T(\tilde{G}_n)|/|\tilde{G}_n| = 0; \quad \lim_{n \to \infty} (B_n + B_{-n})/|\tilde{G}_n| = 0 \tag{11}$$

Um (11) zu beweisen, benützen wir den folgenden

VERZERRUNGSSATZ VON TEICHMÜLLER [7]. Ist h eine quasikonforme Abbildung von E auf sich mit der maximalen Dilatation K, die den Rand von E identisch abbildet, so liegt $h(\zeta_0)$ im nicht-euklidischen Kreis mit dem Mittelpunkt

ζ_0 und dem Radius $d(K)$, wobei $d(K)$ eine monoton wachsende und stetige Funktion von K ist.

$\psi_K = F_K \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ bildet E auf $F_K(\tilde{G})$ ab. Liegt F in $\mathfrak{F}$, so stimmt $\psi = F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}$ auf dem Rande von E mit ψ_K überein. $\psi_K^{-1} \circ \psi$ bildet den Rand von E identisch ab. Sind $\tilde{K}$ und K^* die maximalen Dilatationen von F und $\psi_K^{-1} \circ \psi$, so gilt: $K^* \leqslant K\tilde{K}$.

Wir untersuchen zunächst, wie die Strahlen $g_k: \operatorname{Im} \zeta = 2\pi k$ durch $\psi_K^{-1} \circ \psi$ transformiert werden. Ist $\zeta_0 = \xi_0 + 2\pi i k$, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta_0)$ nach dem Verzerrungssatz von Teichmüller im nichteuklidischen Kreis $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$ mit dem Radius $d(K\tilde{K})$ und dem Mittelpunkt ζ_0. Für den euklidischen Radius $r(K\tilde{K})$ und den euklidischen Mittelpunkt ζ_0^* gelten die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0^* &= \xi_0 \cos h(d(K\tilde{K})) + 2\pi i k = \xi_0 b + 2\pi i k \\ r(K\tilde{K}) &= |\xi_0| \sin h(d(K\tilde{K})) = |\xi_0|\, a \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sind g_k' und g_k'' die Tangenten von $C_{\zeta_0, d(K\tilde{K})}$, welche sich in $\zeta = 2\pi i k$ schneiden, so liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ zwischen g_k' und g_k''. Mit Hilfe von (12) erhalten wir für g_k' und g_k'' die Gleichungen:

$$g_k': \eta = 2\pi k - a\xi; \qquad g_k'': \eta = 2\pi k + a\xi \tag{13}$$

Da (13) nicht von ξ_0 abhängt, liegt $\psi_K^{-1} \circ \psi(g_n)$ ganz im Winkelgebiet, welches durch g_n' und g_n'' begrenzt wird. Ist P_n das Gebiet, welches durch die Strahlen g_n' und g_{-n}'' aus E herausgeschnitten wird, so gilt:

$$\psi_k^{-1} \circ \psi(E_n) = \psi_K^{-1} \circ F \circ \tilde{g}^{-1} \circ \varphi^{-1}(E_n) = \psi_K^{-1}(F(\tilde{G}_n)) \subset P_n$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} &F(\tilde{G}_n) - F_K(\tilde{G}_n) \subset \psi_K(P_n) - F_K(\tilde{G}_n) = \psi_K(P_n - E_n); \\ &|T(\tilde{G}_n)| \leqslant |\psi_K(P_n - E_n)| \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$P_n - E_n$ besteht aus zwei getrennten Winkelgebieten Q_{n1} und Q_{n2}, wobei $Rd(Q_{n1}) = g_n \cup g_n'$, $Rd(Q_{n2}) = g_{-n} \cup g_{-n}''$ ist. Es gilt daher: $|\psi_K(P_n - E_n)| = |\psi_K(Q_{n1})| + |\psi_K(Q_{n2})|$ $\varphi^{-1}(g_n')$ ist eine logarithmische Spirale mit der Gleichung:

$$r(\alpha) = e^{-(\alpha - 2\pi k)/a}; \qquad r = |z'|, \quad \alpha = \arg z'$$

Daraus folgt: $|\varphi^{-1}(Q_{n1})| = a/4$.

Ist M eine Schranke von $|d\tilde{g}^{-1}(z')/dz'|$, so erhalten wir schliesslich die Abschätzung:

$$|\psi_K(Q_{n1})| \leqslant K M^2 a/4$$

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass $KM^2 a/4$ eine Schranke von $|\psi_K(Q_{n2})|$ ist. $|T(\tilde{G}_n)|$ ist daher gleichmässig beschränkt.

Um B_n abzuschätzen, wählen wir $P \in \tilde{\gamma}_n$ beliebig. Ist $\zeta = \varphi \circ \tilde{g}(P)$, so liegt $\zeta' = \psi_K^{-1} \circ \psi(\zeta)$ in $C_{\zeta, d(K\bar{K})}$. Der Bogen $\Gamma \subset C_{\zeta, d(K\bar{K})}$ verbinde ζ mit ζ' und bestehe aus höchstens zwei Strecken Γ_1 und Γ_2, wobei Γ_1 horizontal und Γ_2 vertikal ist. Es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$|\varphi^{-1}(\Gamma_1)| \leqslant 1; \quad |\varphi^{-1}(\Gamma_2)| \leqslant \text{const.}\, 2\pi r |\log r|; \quad r = |\varphi^{-1}(\zeta)|$$

Da $\lim_{r \to 0} 2\pi r \log r = 0$ ist, so ist $|\varphi^{-1}(\Gamma)|$ und daher auch $|\psi_K(\Gamma)|$ beschränkt. Da $\psi_K(\Gamma) F_K(P)$ mit $F(P)$ verbindet, ist B_n gleichmässig beschränkt.

Wir betrachten zum Schluss die universelle Überlagerungsfläche $\tilde{C}$. $\Phi(Z) = e^{(Z-1)/(Z+1)}$ bildet den Einheitskreis $|Z| < 1$ konform auf $\tilde{C}$ ab. Nach dem Satze 6 ist jede zu $\varphi(Z) = (\Phi'(Z))^2 = 4e^{(Z-1)/(Z+1)}/(Z+1)^4$ und einem beliebigen k, $0 < k < 1$, gehörende Teichmüllersche Abbildung extremal. Es lässt sich leicht überprüfen, dass $\varphi(Z)$ keine der von Sethares [3] angegebenen hinreichenden Bedingungen für die Extremalität von f_k erfüllt. Nach einer dieser Bedingungen müsste z.B. für jedes $\delta > 0$ $\lim_{Z \to -1} |\varphi(Z)|\, |Z+1|^{2+\delta} = 0$ sein. Ist K ein Kreis, der in $|Z| < 1$ liegt und $|Z| = 1$ in $Z = -1$ berührt, so gilt für $Z \in K$: $\operatorname{Re}(Z-1)/(Z+1) = \text{const.}$ Daraus folgt:

$$\lim_{\substack{z \to -1 \\ z \in K}} |\varphi(z)|\, |z+1|^{2+\delta} = \lim_{\substack{z \to -1 \\ z \in K}} \text{const.}\, |z+1|^{\delta-2} = \infty \quad \text{für} \quad 0 < \delta < 2.$$

LITERATUR

[1] L. V. Ahlfors: On quasiconformal mappings. J. d'analyse math. III (1953/54), 1–58.

[2] O. Lehto und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1965).

[3] G. C. Sethares: The extremal property of certain Teichmüller mappings. Comment. Math. Helv. *43* (1968) 98–119.

[4] K. Strebel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises. Comment. Math. Helv. *36* (1962) 306–323.

[5] K. Strebel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II. Comment. Math. Helv. *39* (1964) 77–89.

[6] O. Teichmüller: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. Abh. Preuss. Acad. Wiss. math. Kl. *22* (1939), 1–197.

[7] O. Teichmüller: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. Deutsche Math. *7* (1944), 336–343.

Eingegangen den 26. Juli 1968