

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 44 (1969)

**Artikel:** Beiträge zur Theorie der limitierten Vektorräume.  
**Autor:** Courant, Simon  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33770>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Beiträge zur Theorie der limitierten Vektorräume

SIMON COURANT (Bern)

*Prof. Dr. H. Hadwiger zum 60. Geburtstag gewidmet*

## 0. Einleitung

Die Struktur der limitierten Vektorräume wurde zumeist nur untersucht, um Aussagen zu sichern, die man zum Aufbau einer Differentialrechnung in nicht normierten Vektorräumen, zur Untersuchung von Abbildungsräumen etc. verwenden wollte. Im folgenden sollen einige Fragen, die dabei offen geblieben sind, beantwortet werden.

Limites von Systemen limitierter Vektorräume werden in kategorialer Weise definiert. Die Konstruktionen der Limites zu gegebenen Systemen, die meist als Definitionen verwendet werden, dienen nun als Beweise von Existenzaussagen: Jedes direkte System limitierter Vektorräume hat einen induktiven Limes (2.1.), jedes inverse System besitzt einen projektiven Limes (2.2.), die Summe einer Familie limitierter Vektorräume existiert immer (2.3.). Ein limitierter Vektorraum ist genau dann Summe einer Familie von Unterräumen, wenn er algebraisch Summe dieser Unterräume ist und die Projektionen auf diese Unterräume stetig sind (Satz 2.3.3.).

Im vierten Kapitel wird die Kommutativität der wichtigsten Operatoren untersucht, die limitierten Vektorräumen oder Systemen von solchen wieder limitierte Vektorräume zuordnen.

Jeder vollständige Unterraum eines separierten limitierten Vektorraumes ist abgeschlossen (5.1.), eine nichtverschwindende Linearform auf einem limitierten Vektorraum ist genau stetig, wenn die durch sie bestimmte Hyperebene abgeschlossen ist (5.2.).

In dritten und sechsten Kapitel werden endlichdimensionale limitierte Vektorräume betrachtet. Die natürliche Topologie ist die einzige zulässige separierte Limitierung eines solchen Raumes (Sätze 3.2. und 6.1.). In 3.1. finden sich Beispiele eindimensionaler nicht topologischer limitierter Vektorräume. Alle ausgeglichenen endlichdimensionalen limitierten Vektorräume sind topologisch, was zeigt, dass die Forderung der Ausgeglichenheit stark ist.

In 1.4. wird ein Verfahren angegeben, zu einer gegebenen zulässigen Topologie auf einem Vektorraum mittels eines Mengensystems Limitierungen zu konstruieren. Nach 6.5. lässt sich jede zulässige Limitierung eines endlichdimensionalen Vektorraumes so durch eine Topologie und ein System von Teilmengen des Raumes erhalten.

## 1. Grundlagen

### 1.1. Limitierte Vektorräume

Unter *Vektorraum* (VR) wird im folgenden immer VR über dem Körper  $\mathbf{R}$  der

reellen Zahlen verstanden. Wir verwenden zumeist die Definitionen und Bezeichnungen von [9], insbesondere für die Begriffe limitierter Vektorraum (LVR), Unterraum, Produktraum, Stetigkeit, Hüllenoperator ([9] p. 278) und die auftretenden Ordnungsrelationen.  $\mathfrak{I}$  bezeichne die Kategorie der LVR und der stetigen linearen Abbildungen. Ist  $E$  ein LVR, so bezeichnet  $\underline{E}$  den zugrundegelegten Vektorraum und  $\bar{E}$  die Menge seiner Punkte. Konvergiert ein Filter  $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$  bezüglich der Limitierung von  $E$  gegen  $x \in \underline{E}$ , so schreiben wir wie in [11]:  $\mathfrak{F} \downarrow_x E$ . Für  $\mathfrak{F} \downarrow_0 E$  setzen wir  $\mathfrak{F} \downarrow E$  und sagen,  $\mathfrak{F}$  konvergiere in  $E$ , oder sei  $E$ -konvergent.

**SATZ 1.1.** ([9] p. 296): *Ist  $\underline{E}$  ein VR und  $\tau 0 \in \mathfrak{P}(\mathbf{F}(E))$ , dann gibt es genau einen LVR  $E$  über  $\underline{E}$  mit  $\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow \mathfrak{F} \in \tau 0$ , falls  $\tau 0$  die folgenden Eigenschaften hat:*

$$\mathfrak{F} \in \tau 0, \quad \mathfrak{G} \in \tau 0 \Rightarrow \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \in \tau 0 \quad (1)$$

$$\mathfrak{F} \in \tau 0, \quad \mathfrak{F} \leq \mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{G} \in \tau 0 \quad (2)$$

$$\mathfrak{F} \in \tau 0, \quad \mathfrak{G} \in \tau 0 \Rightarrow \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \in \tau 0 \quad (3)$$

$$\mathfrak{F} \in \tau 0 \Rightarrow \mathbf{V} \mathfrak{F} \in \tau 0 \quad (4)$$

$$x \in E \Rightarrow \mathbf{V} \dot{x} \in \tau 0 \quad (5)$$

$$\lambda \in \mathbf{R}, \quad \mathfrak{F} \in \tau 0 \Rightarrow \lambda \mathfrak{F} \in \tau 0. \quad (6)$$

*Diese Limitierung ist dann gegeben durch:*

$$\mathfrak{F} \downarrow_x E \Leftrightarrow (\mathfrak{F} - x) \in \tau 0. \quad (7)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{V}$  den Nullumgebungsfilter des Raumes  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen mit der natürlichen Topologie. Im folgenden werden wir Limitierungen auf einem VR  $\underline{E}$  meist durch Angabe einer Teilmenge von  $\mathbf{F}(E)$  mit den Eigenschaften (1) bis (6) definieren, ohne die Festsetzung (7) zu wiederholen.

## 1.2. Zugeordnete Limitierungen

**1.2.1. Der Funktor  $^\circ$ .** Ist  $E$  ein LVR, so bezeichnet  $E^\circ$  den assoziierten lokalkonvexen topologischen Vektorraum, der durch die Menge  $\Gamma(E)$  der  $E$ -stetigen Seminormen definiert ist. Weil mit  $f: E \rightarrow F$  auch  $f: E^\circ \rightarrow F^\circ$  linear und stetig ist, ist  $^\circ$  ein Funktor von  $\mathfrak{I}$  in die Kategorie der lokalkonvexen topologischen Vektorräume.  $E$  und  $E^\circ$  haben insbesondere dieselben stetigen Linearformen.

**1.2.2. Der Funktor  $\#$ .** Nach [11] heisst ein Filter  $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$  ausgeglichen (equable), falls gilt  $\mathbf{V} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ . Ein LVR  $E$  heisst ausgeglichen, falls der Filter der gegen  $0 \in E$  konvergenten Filter eine Basis aus ausgeglichenen Filtern besitzt.  $\#$  bezeichne den Funktor, der dem LVR  $E$  den ausgeglichenen LVR  $E^\#$ , mit  $\mathfrak{F} \downarrow E^\# : \Leftrightarrow$  (es existiert  $\mathfrak{G} \in \mathbf{F}(E)$ ,  $\mathfrak{G}$  ausgeglichen,  $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G} \downarrow E$ ), der stetigen linearen Abbildung  $f: E \rightarrow F$  die ebenfalls stetige Abbildung  $f: E^\# \rightarrow F^\#$  zuordnet.

**1.2.3. Schnittlimitierung.** Sei  $\underline{E}$  ein VR,  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR über  $\underline{E}$ .  $\mathfrak{F} \downarrow E : \Leftrightarrow$  (alle  $s \in S$ :  $\mathfrak{F} \downarrow E_s$ ) definiert eine zulässige Limitierung auf  $\underline{E}$ , die Schnitt-

limitierung der Familie. Wir bezeichnen  $E = : \bigwedge_S E_s$  und für  $S := \{1, 2\} : E = : E_1 \wedge E_2$ .

**1.2.4. Finale und initiale Limitierung.** Sei  $\underline{E}$  ein VR,  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR,  $\{f_s: \underline{E}_s \rightarrow \underline{E}\}_{s \in S}$  eine Familie linearer Abbildungen. Dann ist die Familie  $\{E_t\}_{t \in T}$  der LVR auf  $\underline{E}$  bezüglich der alle  $f_s$  stetig sind nicht leer und enthält ihr Supremum  $\bigwedge_T E_t = : E$ . Die Limitierung von  $E$  heisst finale Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie  $\{f_s\}_{s \in S}$ .

**SATZ 1.2.:** *Ist  $E$  ein LVR,  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR und  $\{f_s: \underline{E}_s \rightarrow \underline{E}\}_{s \in S}$  eine Familie linearer Abbildungen, so hat  $E$  genau dann die finale Limitierung bezüglich dieser Abbildungsfamilie, falls gilt:*

$\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$  (es existiert eine endliche Teilmenge  $S^* \neq \emptyset$  von  $S$  und zu jedem  $s \in S^*$  ein Filter  $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$ , so dass  $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{s \in S^*} f_s \mathfrak{F}_s$ ). Sei  $\underline{E}$  ein VR,  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR und  $\{f_s: \underline{E} \rightarrow \underline{E}_s\}_{s \in S}$  eine Familie linearer Abbildungen, so ist durch:

$$\mathfrak{F} \downarrow E : \Leftrightarrow \text{alle } s \in S : f_s \mathfrak{F} \downarrow E_s$$

die grösste zulässige Limitierung auf  $\underline{E}$ , so dass alle  $f_s$  stetig sind, die initiale Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie, gegeben.

### 1.3. Separiertheit

**SATZ 1.3.1.:** *Zwei Punkte  $x, y$  eines LVR  $E$  haben dieselben oder keine gemeinsamen gegen sie konvergenten Filter. Die Menge  $U(E) := \{x \mid \mathfrak{F} \downarrow_x E \Leftrightarrow \mathfrak{F} \downarrow E\}$  ist ein linearer Unterraum von  $\underline{E}$  und es gilt  $U(E) = \overline{\{0\}}$ .*

Ist  $U(E) = \{0\}$ , gilt also  $\mathfrak{F} \downarrow_x E, \mathfrak{F} \downarrow_y E \Rightarrow x = y$  so heisst der LVR  $E$  nach [8] separiert.

**SATZ 1.3.2.:** *Mit einem LVR  $E$  ist jeder seiner Unterräume separiert.*

**SATZ 1.3.3.:** *Ist  $H$  Unterraum des LVR  $E$ , so ist der Quotientenraum  $E/H$  ([10] p. 363f.) genau dann separiert, wenn  $H$  in  $E$  abgeschlossen ist.*

### 1.4. Konstruktion von Limitierungen zu gegebenen Topologien

**SATZ 1.4.:** *Ist  $E$  ein topologischer VR mit Nullumgebungsfilter  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{P}(E)$  ein Mengensystem mit den Eigenschaften:*

- (a)  $\mathfrak{a} \neq \emptyset, \emptyset \notin \mathfrak{a}$ ,
- (b)  $A \in \mathfrak{a}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in \mathfrak{a}$ ,
- (c)  $A, B \in \mathfrak{a} \Rightarrow$  in  $\mathfrak{a}$  existiert  $C$  mit  $A \cup B \subset C$ ,
- (d)  $A, B \in \mathfrak{a} \Rightarrow$  in  $\mathfrak{a}$  existiert  $C$  mit  $A + B \subset C$ ,
- (e)  $A \in \mathfrak{a} \Rightarrow V \cdot [A] \geq \mathfrak{U}$ ,

so ist durch:

$\mathfrak{F} \downarrow E^a: \Leftrightarrow$  in  $\mathfrak{a}$  existiert  $A$ , so dass  $\mathfrak{F} \geq [A] + \mathfrak{U}$  ein LVR über  $\underline{E}$  definiert. Es gilt  $E^a \leq E$ .

Im allgemeinen ist  $E^a \neq E$ : Ist etwa  $E$  separiert und  $\mathfrak{a}$  nicht reduziert auf  $\{\{0\}\}$ , so ist  $E^a$  nicht separiert.

*Beispiel:* Die Menge  $\mathfrak{a}$  der nichtleeren endlichen Teilmengen eines topologischen VR  $E$  erfüllt (a)–(e). Falls  $E$  nicht indiskret ist, ist  $E^a$  echt gröber als  $E$ .  $E^a$  hat die feinste Limitierung, die gröber als die Topologie von  $E$  ist und  $\{\overline{0}\} = \underline{E}$  erfüllt.

Über nicht endlichdimensionalen VR gibt es nach [12] p. 145 eine zulässige Limitierung, die echt feiner als jede zulässige Topologie ist. Also sind nicht alle LVR nach 1.4. durch Mengensysteme definierbar.

## 2. Limites

### 2.1. Induktiver Limes

$\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  heisst ein *direktes System* der Kategorie  $\mathfrak{A}$ , falls:

- (1)  $S$  eine gerichtete Indexmenge ist.
- (2) Zu allen  $s \in S$  ein LVR  $E_s$  gegeben ist.
- (3) Zu  $s \leq s'$  ein  $f_{ss'}: E_s \rightarrow E_{s'}$  linear und stetig gegeben ist.
- (4)  $f_{ss} = \text{id}_{E_s}$  für alle  $s \in S$  gilt.
- (5) Aus  $s \leq s' \leq s''$   $f_{ss''} = f_{s's''} f_{ss'}$  folgt.

Ein LVR  $E$  heisst *induktiver (oder direkter) Limes* des direkten Systems  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$ ,  $E =: \underset{\rightarrow S}{\text{ind}} E_s$ , falls erfüllt sind:

(IL<sub>1</sub>) Zu  $s \in S$  ist eine stetige lineare Abbildung  $f_s: E_s \rightarrow E$  gegeben, so dass

(IL<sub>2</sub>) für  $s \leq s'$  gilt  $f_s f_{ss'} = f_{s'}$ .

(IL<sub>3</sub>) Für jeden LVR  $Z$  und jede Familie  $\{g_s: E_s \rightarrow Z\}_{s \in S}$  von linearen stetigen Abbildungen, so dass für alle  $s \leq s'$  gilt  $g_{s'} f_{ss'} = g_s$ , existiert genau eine stetige lineare Abbildung  $g: E \rightarrow Z$  mit  $g_s = g f_s$  für alle  $s \in S$ .

Jedes direkte System hat bis auf Isomorphismen höchstens einen induktiven Limes. Die  $f_s$  heissen kanonische Abbildungen des Limes.

**SATZ 2.1.:** *In der Kategorie der LVR und stetigen linearen Abbildungen hat jedes direkte System einen induktiven Limes.*

*Beweis:* Sei  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  ein direktes System der Kategorie  $\mathfrak{A}$ ,  $W := \bigcup_s (E_s \times \{s\})$  disjunkte Summe der Mengen  $E_s$ . Wir definieren auf  $W$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  durch:

$(x, s) \sim (x', s'): \Leftrightarrow$  In  $S$  existiert  $s'' \geq s, s'$  mit  $f_{ss''} x = f_{s's''} x'$ .  $\underline{E} := W / \sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen. Für  $s \in S$  sei  $f_s: \underline{E}_s \rightarrow \underline{E}$  gegeben durch  $f_s x := \text{cls}(x, s)$ . Dann gilt  $\underline{E} = \bigcup_s f_s \underline{E}_s$ , so dass zu  $x \in \underline{E}$  ein  $s \in S$  und ein  $x_s \in \underline{E}_s$  existierten mit  $x = f_s x_s$ .

Das erlaubt,  $\underline{E}$  durch die Festsetzungen:

$+$  :  $\underline{E} \times \underline{E} \rightarrow \underline{E} : (x, y) \rightarrow x + y := f_{s''}(f_{s''}x_s + f_{s's'}y_{s'})$ , wo  $x = f_s x_s, y = f_{s'} y_{s'}$  gilt mit geeigneten  $s, s' \in S, x_s \in E_s, y_{s'} \in E_{s'}$  und  $s'' \in S$  so dass  $s'' \geq s, s'$ , sowie

$\cdot$  :  $\underline{R} \times \underline{E} \rightarrow \underline{E} : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x := f_s \lambda x_s$  für geeignete  $s \in S$  und  $x_s \in E_s$  mit  $f_s x_s = x$

zu einem VR  $\underline{E}$  zu machen. Alle  $f_s$  sind linear, so dass  $\underline{E}$  mit der finalen Limitierung bezüglich der Familie  $\{f_s\}_{s \in S}$  ein LVR  $E$  ist.

Mit Satz 1.2. und weil in  $S$  jede endliche Teilmenge eine obere Schranke hat, ergibt sich:

$\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$  es gibt  $s \in S, \mathfrak{F}_s \in \mathbf{F}(E_s), \mathfrak{F}_s \downarrow E_s$  mit  $f_s \mathfrak{F}_s \leq \mathfrak{F}$ . (IL<sub>1</sub>) und (IL<sub>2</sub>) sind erfüllt; ist  $Z$  ein LVR und  $\{g_s : E_s \rightarrow Z\}_{s \in S}$  eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so dass für  $s \leq s'$  gilt  $g_{s'} f_{s s'} = g_s$ , so ist mit  $g : E \rightarrow Z : g x := g_s x_s$  für  $s \in S, x_s \in E_s$ , so dass  $x = f_s x_s$ , auch (IL<sub>3</sub>) erfüllt.

## 2.2. Projektiver Limes

$\{E^t, f^{t t'}\}_{t \in T}$  heisst ein *inverses System* der Kategorie  $\mathfrak{A}$ , falls folgendes gilt:

- (1)  $T$  ist eine gerichtete Indexmenge.
- (2) Für  $t \in T$  ist ein LVR  $E^t$  gegeben.
- (3) Zu  $t' \leq t$  ist  $f^{t t'} : E^t \rightarrow E^{t'}$  linear und stetig gegeben.
- (4) Für  $t \in T$  gilt  $f^{t t} = \text{id}_{(E^t)}$ .
- (5) Aus  $t'' \leq t' \leq t$  folgt  $f^{t t''} = f^{t' t''} f^{t t'}$ .

Ein LVR  $E$  heisst *projektiver (oder inverser) Limes* des inversen Systems  $\{E^t, f^{t t'}\}_{t \in T}$ ,  $E = \text{proj}_{\leftarrow T} E^t$ , falls erfüllt sind:

(PL<sub>1</sub>) Zu  $t \in T$  ist eine stetige lineare Abbildung  $f^t : E \rightarrow E^t$  gegeben, so dass gilt:

(PL<sub>2</sub>) Für  $t' \leq t$  ist  $f^{t t'} f^t = f^{t'}$ .

(PL<sub>3</sub>) Für jeden LVR  $Z$  und jede Familie  $\{g^t : Z \rightarrow E^t\}_{t \in T}$  von linearen stetigen Abbildungen, so dass für alle  $t' \leq t$  gilt  $f^{t t'} g^t = g^{t'}$ , existiert genau eine lineare stetige Abbildung  $g : Z \rightarrow E$ , so dass für alle  $t \in T$  gilt  $g^t = f^t g$ .

Die  $f^t$  heissen *kanonische Abbildungen* des projektiven Limes. Jedes inverse System hat bis auf Isomorphismen höchstens einen projektiven Limes.

**SATZ 2.2.:** *In der Kategorie  $\mathfrak{A}$  der LVR und linearen stetigen Abbildungen hat jedes inverse System einen projektiven Limes.*

*Beweis:* (Man vergleiche [10] p. 373f.) Ist  $\{E^t, f^{t t'}\}_{t \in T}$  ein inverses System, so erfüllt der Unterraum

$$E := \{x \mid x \in \prod_T E^t, t' \leq t \Rightarrow \text{pr}^{t'} x = f^{t t'} \text{pr}^t x\}$$

des Produktraumes  $\prod_T E^t$  zusammen mit der Abbildungsfamilie  $\{f^t := \text{pr}^t|_E\}_{t \in T}$  alle Forderungen. (PL<sub>3</sub>) wird erfüllt mit  $g := \prod_T g^t$ .  $E$  trägt dann die initiale Limitierung bezüglich der Familie  $\{f^t\}_{t \in T}$  und es gilt:  $\mathfrak{F} \downarrow E \Leftrightarrow$  (alle  $t \in T$ :  $\text{pr}^t \mathfrak{F} \downarrow E^t$ ).

*Anmerkung:* Die Definition eines inversen Systems lässt sich abschwächen durch Ersetzung von (1) durch

(1') Auf  $T$  ist eine transitive und reflexive Relation  $\geq$  (préordre) erklärt.

Satz 2.2. und die Aussagen in 4.4–4.9. bleiben gültig, hingegen geht folgende Eigenschaft verloren:

Ist  $E$  ein LVR und  $\{E^t, f^{t''}\}_{t \in T}$  ein inverses System mit  $E^t = E$  für alle  $t \in T$  und  $f^{t''} = \text{id}_E$  für alle  $t' \leq t$ , dann ist  $E$  projektiver Limes des inversen Systems.

### 2.3. Summen limitierter Vektorräume

Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR, so heisst ein LVR  $E$  Summe dieser Familie,  $E = \bigoplus_s E_s$ , falls eine Familie  $\{f_s: E_s \rightarrow E\}_{s \in S}$  von linearen stetigen Abbildungen so existiert, dass es für jeden LVR  $Z$  und jede Familie  $\{g_s: E_s \rightarrow Z\}_{s \in S}$  von stetigen linearen Abbildungen genau eine stetige lineare Abbildung  $j: E \rightarrow Z$  gibt, so dass für alle  $s \in S$  gilt:  $g_s = jf_s$ .

Zu jeder Familie gibt es bis auf Isomorphismen höchstens eine Summe.

**SATZ 2.3.1.:** *In der Kategorie der LVR und stetigen linearen Abbildungen hat jede Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Summe.*

*Beweis:* Ist  $\underline{E} = \bigoplus_s E_s$  algebraische Summe der Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$  und  $E$  der LVR über  $\underline{E}$  mit der finalen Limitierung bezüglich der Abbildungsfamilie  $\{f_s: E_s \rightarrow E\}_{s \in S}$ , wo für  $x_s \in E_s$   $f_s x_s = \bigoplus_s x_s$ , mit  $x_t = 0$  für  $t \neq s$ , gesetzt ist, so ist  $E$  Summe der Familie: Für  $t \in S$  sei  $\pi_t: E \rightarrow E_t$  definiert durch  $\pi_t(\bigoplus_s x_s) = x_t$ . Dann ist für  $s, s' \in S$ ,  $s \neq s'$ :  $\pi_s f_{s'} = \text{id}_{E_{s'}}$ ,  $\pi_s f_s = 0$ . Nach 1.2. existiert zu  $\mathfrak{F} \downarrow E$  eine endliche Teilmenge  $S^* \subset S$  und zu  $s \in S^*$  ein Filter  $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$ , so dass  $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{s \in S^*} f_s \mathfrak{F}_s$ . Also gilt  $\pi_t \mathfrak{F} \geq \pi_t \bigwedge_{s \in S^*} f_s \mathfrak{F}_s \geq \bigwedge_{s \in S^*} \pi_t f_s \mathfrak{F}_s = \mathfrak{F}_t \wedge \dot{0}$  (oder gleich  $\dot{0}$ , falls  $t \notin S^*$ , oder gleich  $\mathfrak{F}_t$ , falls  $S^* = \{t\}$ ). Also sind die  $\pi_t$  stetig. Ist nun  $Z$  ein LVR und  $\{g_s: E_s \rightarrow Z\}_{s \in S}$  eine Familie linearer stetiger Abbildungen, so ist  $j: E \rightarrow Z$  durch  $j := \sum_{s \in S} g_s \pi_s$  linear definiert. Für  $s \in S$  ist  $jf_s = g_s$  erfüllt.  $j$  ist stetig: Zu  $\mathfrak{F} \downarrow E$  existiert  $S^* \subset S$ ,  $S^*$  endlich und zu  $s \in S^*$  existiert  $\mathfrak{F}_s \downarrow E_s$  mit  $\mathfrak{F} \geq \bigwedge_{s \in S^*} f_s \mathfrak{F}_s$ ; somit folgt:  $j \mathfrak{F} \geq j(\bigwedge_{t \in S^*} f_t \mathfrak{F}_t) = \sum_{s \in S} g_s \pi_s \bigwedge_{t \in S^*} f_t \mathfrak{F}_t = \sum_{s \in S} g_s \bigwedge_{t \in S^*} \pi_s f_t \mathfrak{F}_t = \sum_{t \in S^*} g_t (\mathfrak{F}_t \wedge \dot{0})$  (oder gleich  $g_t \mathfrak{F}_t$ , falls  $S^* = \{t\}$ ). Es folgt die Konvergenz von  $j \mathfrak{F}$  gegen  $0 \in Z$ .

**SATZ 2.3.2.:** *Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine endliche Familie von LVR, so ist ihr Produkt Summe der Familie.*

*Beweis:* Für  $s \in S$  ist  $f_s: E_s \rightarrow \prod_S E_s$  definiert durch  $\text{pr}_s f_s := \text{id}_{E_s}$  und  $\text{pr}_{s'} f_s := 0$  für  $s \neq s'$ , stetig und linear, denn für  $\mathfrak{F}_s \in \mathcal{F}(E_s)$  gilt  $f_s \mathfrak{F}_s = \prod_{t \in S} \mathfrak{F}_t$  mit  $\mathfrak{F}_t = \dot{0}$  für  $t \neq s$ . Ist  $Z$  ein LVR und  $\{g_s: E_s \rightarrow Z\}_{s \in S}$  eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so

sind mit  $j: \prod_S E_s \rightarrow Z, j := \sum_S g_s$  pr<sub>s</sub> alle Forderungen der Summendefinition erfüllt.

Aus dem Beweis zu 2.3.1. ergibt sich:

Ist  $E$  ein LVR,  $\underline{E}$  algebraisch Summe einer Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$  von Unterräumen,  $\underline{E} = \bigoplus_S E_s$ , so darf  $\bigoplus_S E_s = \underline{E}$  angenommen werden.  $\bigoplus_S E_s$  ist dann feiner als  $E$ . Für alle  $x \in E$  existiert eine eindeutige Darstellung  $x = \sum_S x_s, x_s \in E_s$ . Für  $t \in S$  sei  $\pi_t: E \rightarrow E_s$  durch  $\pi_t(\sum_S x_s) := x_t$  gegeben.

**SATZ 2.3.3.:** *Ist  $E$  ein LVR,  $E$  algebraisch Summe der Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$  von Unterräumen, so ist  $E$  genau dann Summe der Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$ , wenn alle Abbildungen  $\pi_s$  stetig sind.*

*Beweis:* Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich aus dem Existenzbeweis für Summen. Ist sie erfüllt, so ist  $j: E \rightarrow \bigoplus_S E_s, j := \sum_S i_s \pi_s$ , mit den Inklusionen  $i_s: E_s \rightarrow E$  stetig. Wegen  $jx = x$  für  $x \in \underline{E} = \bigoplus_S E_s$  ist dann  $\bigoplus_S E_s$  auch gröber als  $E$ .

Eine lineare Abbildung  $u$  eines VR  $E$  in sich heisst ein Projektor, falls  $uu = u$  erfüllt ist.  $H := uE$  ist linearer Unterraum von  $E$ .  $u$  heisst dann Projektor auf  $H$ .

**SATZ 2.3.4.:** *Sei  $E$  ein LVR,  $\{u_s\}_{s \in S}$  eine endliche Familie stetiger Projektoren für die  $\sum_S u_s = \text{id}_E$  und  $u_s u_{s'} = 0$  für  $s, s' \in S, s \neq s'$  gilt, so ist  $E$  Summe der Familie  $\{u_s E\}_{s \in S}$  von Unterräumen von  $E$  und für  $s \in S$  gilt:  $u_s = \pi_s$ .*

Der Beweis von prop. 11, [4] I.1. gilt sinngemäss.

**SATZ 2.3.5.:** *Ist  $H$  Unterraum des LVR  $E$ , so gibt es genau einen Unterraum  $H'$  von  $E$ , so dass  $E$  isomorph zu  $H \oplus H'$  ist, wenn in  $E$  ein stetiger Projektor  $u$  auf  $H$  existiert. Es gilt dann  $H' = u^{-1}(0)$ .*

*Beweis:* Der Satz folgt aus 2.3.4., weil mit  $u$  auch  $u' := \text{id}_E - u$  ein stetiger Projektor ist, für den  $uu' = 0$  und  $u + u' = \text{id}_E$  gilt.

### 3. Limitierungen von $\underline{\mathbf{R}}$

#### 3.1. Beispiele

Zur Ordnung  $\mathfrak{I}(\underline{\mathbf{R}})$  der mit der VR-Struktur von  $\underline{\mathbf{R}}$  verträglichen Limitierungen gehören die indiskrete Topologie  $\iota$  und die natürliche Topologie  $\omega$ . Wir bezeichnen  $\mathbf{R} := (\underline{\mathbf{R}}, \omega)$  und  $\mathbf{R}_\iota := (\underline{\mathbf{R}}, \iota)$ . Im folgenden sollen drei weitere zulässige Limitierungen aufgewiesen werden.

**3.1.1. (W. BUCHER)** Für  $\delta \in \underline{\mathbf{R}}, \delta > 0$  bezeichne  $I_\delta := (-\delta, \delta)$  das durch  $\delta$  bestimmte offene Intervall. Die Menge  $\mu := \{I_\delta \mid \delta \in \underline{\mathbf{R}}, \delta > 0\}$  erfüllt die Bedingungen von Satz 1.4. Somit existiert ein eindimensionaler LVR  $\mathbf{R}^\mu$ . Es gilt:

$\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^\mu \Leftrightarrow$  Es existiert  $\delta \in \underline{\mathbf{R}}, \delta > 0: I_\delta \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \mathfrak{F}$  enthält eine  $\omega$ -beschränkte Menge.

**3.1.2.** Ist  $\nu$  die Menge der nichtleeren endlichen Teilmengen von  $\underline{\mathbf{R}}$  und  $\mathbf{R}^\nu$  der nach 1.4. existierende LVR mit  $\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^\nu \Leftrightarrow$  in  $\nu$  existiert  $A$ , so dass  $\mathfrak{F} \geq [A] + \mathbf{V}$ , so konvergiert ein Filter in  $\mathbf{R}^\nu$  genau gegen Null, wenn er feiner ist als der Schnitt der Umgebungfilter bezüglich der natürlichen Topologie von endlich vielen Punkten von  $\underline{\mathbf{R}}$ .

**3.1.3.** Sei  $\sigma \subset \mathfrak{B}(\mathbf{R})$  das System der Teilmengen von  $\mathbf{R}$ , die nicht leer, abzählbar und  $\omega$ -kompakt sind.  $\sigma$  erfüllt die Bedingungen von Satz 1.4., so dass durch

$\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^\sigma: \Leftrightarrow$  (Es existiert eine nicht leere, abzählbare,  $\omega$ -kompakte Teilmenge  $A$  von  $\underline{\mathbf{R}}$ , so dass  $\mathfrak{F} \geq [A] + \mathbf{V}$ ) ein LVR  $\mathbf{R}^\sigma$  auf  $\underline{\mathbf{R}}$  definiert ist.

Der Hauptfilter  $[I_1]$  konvergiert bezüglich  $\mathbf{R}^\mu$ , nicht jedoch bezüglich  $\mathbf{R}^\sigma$  oder  $\mathbf{R}^\nu$ , der Hauptfilter  $[\{0\} \cup \{1/n | n \in \mathbf{N}\}]$  konvergiert in  $\mathbf{R}^\sigma$  nicht jedoch in  $\mathbf{R}^\nu$ , so dass die Limitierungen  $\mu, \sigma$  und  $\nu$  verschieden sind.

### 3.2. Separiertheit eindimensionaler LVR

**SATZ 3.2.:** Die natürliche Topologie  $\omega$  ist die einzige separierte zulässige Limitierung auf  $\underline{\mathbf{R}}$ .

*Beweis* (a contrario): Sei  $\mathbf{R}^\tau$  ein separierter LVR auf  $\underline{\mathbf{R}}$ . Aus 1.2.(6) folgt mit  $\mathbf{V} \downarrow \mathbf{R}^\tau: \mathbf{R}^\tau \leq \mathbf{R}$ . Falls nun  $\mathbf{R}^\tau \neq \mathbf{R}$ , so existiert ein Filter  $\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^\tau$  und  $\delta \in \underline{\mathbf{R}}$ ,  $\delta > 0$  mit  $I_\delta \notin \mathfrak{F}$ . Dann existiert auch ein Ultrafilter  $\mathfrak{G}$  der  $\underline{\mathbf{R}} \div I_\delta$  enthält, feiner ist als  $\mathfrak{F}$  und also in  $\mathbf{R}^\tau$  konvergiert.  $\mathfrak{G}$  enthält keine  $\omega$ -kompakte Menge: Ist nämlich  $K \in \mathfrak{G}$   $\omega$ -kompakt, so hat auch  $K \cap (\underline{\mathbf{R}} \div I_\delta)$  diese Eigenschaften, so dass  $0 \notin K$  angenommen werden darf. Da  $\mathbf{R}^\tau$  separiert ist, kann  $\mathfrak{G}$  nicht feiner sein als der  $\omega$ -Umgebungfilter eines Punktes von  $K$ , so dass zu  $x \in K$  eine offene  $\omega$ -Umgebung  $U_x$  mit  $U_x \notin \mathfrak{G}$  existiert.  $\{U_x | x \in K\}$  ist eine  $\omega$ -offene Überdeckung von  $K$ . Es gibt eine endliche Teilüberdeckung  $\{U_j | j=1, \dots, n\}$ . Da  $\mathfrak{G}$  Ultrafilter ist, gilt für  $j \leq n: \underline{\mathbf{R}} \div U_j \in \mathfrak{G}$ , somit  $V := \bigcap_{j=1}^n (\underline{\mathbf{R}} \div U_j) \in \mathfrak{G}$ . Aber  $V$  ist disjunkt zu  $K \in \mathfrak{G}$ , was unmöglich ist.  $\mathfrak{G}$  enthält auch keine  $\omega$ -beschränkte Menge, denn sonst müsste ihr  $\omega$ -kompakter  $\omega$ -Abschluss zu  $\mathfrak{G}$  gehören. Wegen 1.1.(4) konvergiert mit  $\mathfrak{G}$  auch  $\mathbf{V} \mathfrak{G} = \{\underline{\mathbf{R}}\}$  in  $\mathbf{R}^\tau$ . Also gilt  $\mathbf{R}^\tau = \mathbf{R}$ , was der Separiertheit von  $\mathbf{R}^\tau$  widerspricht.

### 3.3. Ordnung der Limitierungen von $\underline{\mathbf{R}}$

**SATZ 3.3.:** Es gilt  $\mathbf{R}_1 < \mathbf{R}^\mu < \mathbf{R}^\sigma < \mathbf{R}^\nu < \mathbf{R}$  und für jede weitere zulässige Limitierung  $\tau$  auf  $\underline{\mathbf{R}}$ :  $\mathbf{R}^\mu < \mathbf{R}^\tau < \mathbf{R}^\nu$ .

### 3.4. Ein Konstruktionsverfahren für Limitierungen auf $\underline{\mathbf{R}}$

Sei  $f \neq \emptyset$  eine Menge von Folgen von reellen Zahlen, die gegen Null konvergieren und deren erstes Glied 0 ist. Wir definieren  $Ff := \{\{\lambda f_j\}_{j \in \mathbf{N}} | \lambda \in \mathbf{R}, \{f_j\}_{j \in \mathbf{N}} \in f\}$ . Für  $n \in \mathbf{N}$  setzen wir  $N := \{1, \dots, n\}$ . Ist  $\nu$  wieder die Menge der nichtleeren endlichen

Teilmengen von  $\underline{\mathbf{R}}$ , so setzen wir für  $E \in \mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ :  $\Phi(E, n) := (Ff)^{(E \times N)}$  ( $\Phi(E, n)$  ist die Menge der Abbildungen von  $E \times N$  in  $Ff$ ). Für  $a \in \Phi(E, n)$ ,  $x \in E$ ,  $i \in N$  ist dann  $a(x, i)$  eine Folge aus  $Ff$ , die wir mit  $\{a_j^i(x)\}_{j \in \mathbf{N}}$  bezeichnen. Ferner sei  $\mathbf{N}^N$  die Menge der Abbildungen von  $N$  in  $\mathbf{N}$ . Ist  $E \in \mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbf{N}$  und  $a \in \Phi(E, n)$ , so definieren wir Teilmengen  $A(E, n, a)$  von  $\underline{\mathbf{R}}$  durch:

$$A(E, n, a) := \left\{ x + \sum_{p=1}^n a_{k(p)}^p(x) \mid x \in E, k \in \mathbf{N}^N \right\}.$$

Durch

$$\alpha f := \{A(E, n, a) \mid E \in \mathcal{V}, n \in \mathbf{N}, a \in \Phi(E, n)\}$$

ist dann der Menge  $f$  ein System von Teilmengen von  $\underline{\mathbf{R}}$  zugeordnet.

**SATZ 3.4.:** *Ist  $f$  eine Menge von Nullfolgen aus  $\mathbf{R}$ , deren Anfangsglied verschwindet, so erfüllt  $\alpha f \subset \mathfrak{P}(\underline{\mathbf{R}})$  die Bedingungen von Satz 1.4. mit  $\mathcal{U} := \mathcal{V}$ , also ist durch  $\mathfrak{F} \downarrow \mathbf{R}^{\alpha f}$ :  $\Leftrightarrow$  (es existiert  $A \in \alpha f$ :  $\mathfrak{F} \geq [A] + \mathcal{V}$ ) eine zulässige Limitierung auf  $\underline{\mathbf{R}}$  definiert. Statt  $\mathbf{R}^{\alpha f}$  setzen wir  $\mathbf{R}^f$ .*

*Beweis:* (a) Wegen  $f \neq \emptyset$  folgt  $\{0\} \in \alpha f$ , somit  $\alpha f \neq \emptyset$ .

Aus  $\emptyset \notin \mathcal{V}$ ,  $\emptyset \notin f$  ergibt sich  $\emptyset \notin \alpha f$ .

(c) Zu  $A(E, n, a)$  und  $A(E', m, b)$  definieren wir  $c \in \Phi(E \cup E', n+m)$  durch

$$c(x, p) := \begin{cases} a(x, p) & \text{falls } p \leq n, x \in E \\ b(x, p-n) & p > n, x \in E' \\ \{0\}_{j \in \mathbf{N}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt  $A(E, n, a) \cup A(E', m, b) \subset A(E \cup E', n+m, c)$ : Ist  $z \in A(E', m, b)$ , so gibt es  $x \in E'$ ,  $k \in \mathbf{N}^M$ , so dass gilt:  $z = x + \sum_{p=1}^m b_{k(p)}^p(x)$ . Mit  $k^* \in \mathbf{N}^{N+M}$ ,  $k^*(p) := 1$  für  $p \leq n$ ,  $k^*(p) := k(p-n)$  für  $p > n$  ist  $z = x + \sum_{p=1}^{n+m} c_{k^*(p)}^p(x)$ , also  $z \in A(E \cup E', n+m, c)$ .

(d) Zu  $A(E, n, a)$  und  $A(E', m, b)$  aus  $\alpha f$  definieren wir  $d \in \Phi(E+E', n+m)$  durch

$$d(x+y, p) := \begin{cases} a(x, p) & \text{für } p \leq n \\ b(y, p-n) & p > n. \end{cases}$$

Dann gilt  $A(E, n, a) + A(E', m, b) \subset A(E+E', n+m, d)$ . Ist nämlich  $z \in A(E, n, a) + A(E', m, b)$ , so existieren  $x \in E$ ,  $y \in E'$ ,  $k \in \mathbf{N}^N$ ,  $k' \in \mathbf{N}^M$ , so dass gilt:

$$z = x + \sum_{p=1}^n a_{k(p)}^p(x) + y + \sum_{q=1}^m b_{k'(q)}^q(y).$$

Mit  $k^* \in \mathbf{N}^{N+M}$ ,  $k^*(p) := k(p)$  für  $p \leq n$ ,  $k^*(p) := k'(p-n)$  für  $p > n$  gilt  $z = x + y + \sum_{p=1}^{n+m} d_{k^*(p)}^p(x+y)$ , also  $z \in A(E+E', n+m, d)$ .

(e) Jede Folge aus  $Ff$  ist  $\omega$ -beschränkt, also auch alle  $A(E, n, a)$ . Damit gilt  $\mathcal{V}[A] \geq \mathcal{V}$  für  $A \in \alpha f$ .

(b) ergibt sich aus der Konstruktion von  $Ff$ .

Als Beispiel soll eine weitere Limitierung von  $\mathbf{R}$  aufgezeigt werden:

Sei  $r$  die Folge der reziproken natürlichen Zahlen abgeändert durch  $r_1 := 0$ .  $f := \{r\}$  definiert einen LVR  $\mathbf{R}^f$  auf  $\mathbf{R}$ . Für  $E \in \mathcal{V}$ ,  $n \in \mathbf{N}$   $a \in \Phi(E, n)$ ,  $x \in E$ ,  $i \in \mathbf{N}$  ist  $a(x, i) = \{0, \lambda/2, \lambda/3, \dots\}$  durch ein  $\lambda \in \mathbf{R}$  festgelegt, so dass  $A(E, n, a)$  durch eine Abbildung von  $E \times \mathbf{N}$  in  $\mathbf{R}$ ,  $(x, i) \rightarrow \lambda^i(x)$  bestimmt ist:

$$A(E, n, a) = \left\{ x + \sum_{p=1}^n (\lambda^p(x)/n_p) \mid x \in E, n_p \in \mathbf{N} \right\}.$$

Jede Menge dieser Form ist nicht leer,  $\omega$ -beschränkt und hat abzählbaren Abschluss. Deshalb ist jeder  $\mathbf{R}^f$ -konvergente Filter  $\mathbf{R}^\sigma$ -konvergent. Jedoch ist  $\mathbf{R}^f \neq \mathbf{R}^\sigma$ . Ist nämlich  $A(E, n, \lambda^p(x))$  in  $a f$ , so liegen alle seine Punkte im Erweiterungskörper  $Q[E \cup \{\lambda^p(x)\} \mid x \in E, p \in \mathbf{N}]$  des Körpers  $Q$  der rationalen Zahlen, also in einem Erweiterungskörper von  $Q$ , der algebraisch oder von endlichem Transzendenzgrad ist.  $\mathbf{R}$  besitzt Teilmengen  $C$ , die abzählbar,  $\omega$ -abgeschlossen und  $\omega$ -beschränkt sind, so dass  $Q[C]$  nichtendlichen Transzendenzgrad hat. (Man vergleiche etwa [18].) Die Filter  $[C] + \mathcal{V}$  konvergieren in  $\mathbf{R}^\sigma$ , nicht jedoch in  $\mathbf{R}^f$ . Andererseits ist  $\mathbf{R}^f$  echt gröber als  $\mathbf{R}^\nu$ , denn der Durchschnitt aller Mengen eines  $\mathbf{R}^\nu$ -konvergenten Filters ist endlich, was nicht für alle  $\mathbf{R}^f$ -konvergenten Filter zutrifft. Wegen 3.3. ist  $\mathbf{R}^f$  von allen bisher aufgewiesenen eindimensionalen LVR verschieden. Die vorhergehenden Überlegungen lassen vermuten, dass  $\mathfrak{I}(\mathbf{R})$  nicht endlich ist und dass die auf  $\mathfrak{I}(\mathbf{R})$  erklärte Ordnung keine Totalordnung ist.

#### 4. Vertauschungseigenschaften

**4.1.1. Unterräume und Funktoren  $^\circ$  und  $^*$ .** Ist  $E$  ein LVR,  $E'$  ein Unterraum und bezeichnen  $E^{\circ'}$  resp.  $E^{*'}$  die durch  $E'$  bestimmten Unterräume von  $E^\circ$  resp.  $E^*$  so gelten:  $E^{\circ'} \leq E'^\circ$ ,  $E^{*'} = E^{*'}$  und  $E^{\circ*} \leq E^{*\circ}$ . Ist  $0 < p < 1$  und  $E$  ein  $L^p$ -Raum ([6] p. 161f.) gilt  $E^{\circ'} \neq E'^\circ$  für einen eindimensionalen Unterraum, ist  $E$  der Raum  $\mathbf{R}^\nu$  von 3.1.2. gilt  $E^{\circ*} \neq E^{*\circ}$ .

**4.2.1. Unterraum und Schnittlimitierung.** Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR über demselben VR  $\underline{E}$ ,  $\underline{E}'$  ein linearer Unterraum,  $(\bigwedge_s E_s)'$  der zugehörige Unterraum von  $\bigwedge_s E_s$ , so gilt:  $\bigwedge_s (E_s') = (\bigwedge_s E_s)'$ .

**4.2.2. Schnittlimitierung und Funktor  $^\circ$ .** Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR über demselben VR  $\underline{E}$ , so gilt:

$$(\bigwedge_s E_s)^\circ \geq \bigwedge_s (E_s^\circ).$$

Ein Gegenbeispiel für Gleichheit beim Schnitt zweier Limitierungen wurde von W. BUCHER angegeben.

**4.2.3. Schnittlimitierung und Funktor  $*$ .** Ist wieder  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR über demselben VR  $\underline{E}$ , dann gilt:

$$\left(\bigwedge_S E_s\right)^* = \bigwedge_S (E_s^*).$$

*Beweis:* – Zu  $\mathfrak{F} \downarrow \left(\bigwedge_S E_s\right)^*$  existiert ein gröberer ausgeglichener Filter  $\mathfrak{G}$  der in  $\bigwedge_S E_s$ , damit in allen  $E_s$  und  $E_s^*$  konvergiert. Mit ihm konvergiert auch  $\mathfrak{F}$  in  $\bigwedge_S (E_s^*)$ .

– Konvergiert  $\mathfrak{F}$  bezüglich  $\bigwedge_S (E_s^*)$ , so existiert zu  $s \in S$  ein gröberer Filter  $\mathfrak{F}_s$  der ausgeglichen ist und in  $E_s^*$  und  $E_s$  konvergiert.  $\{\bigcap_S F_s \mid F_s \in \mathfrak{F}_s, F_s \neq \underline{E} \text{ für endlich viele } s \in S\}$  ist Basis eines Filters  $\mathfrak{G}$  der gröber als  $\mathfrak{F}$ , aber feiner als alle  $\mathfrak{F}_s$  ist und also in  $\bigwedge_S E_s$  konvergiert. Nach Verifikation der Ausgeglichenheit von  $\mathfrak{G}$  ergibt sich die Konvergenz von  $\mathfrak{F}$  in  $\left(\bigwedge_S E_s\right)^*$ .

**4.2.4. Schnittlimitierung und Schnittlimitierung.** Für eine doppelt indizierte Familie  $\{E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  ergibt sich:

$$\bigwedge_S \bigwedge_T E_s^t = \bigwedge_T \bigwedge_S E_s^t = \bigwedge_{S \times T} E_s^t.$$

**4.3.1. Unterräume und Produktraum.** Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR,  $\{E_s'\}_{s \in S}$  eine Familie von Unterräumen und  $\{i_s: E_s' \rightarrow E_s\}_{s \in S}$  die Familie der Inklusionsabbildungen, so ist  $\prod_S E_s'$  isomorph zum Unterraum  $\left(\prod_S i_s\right) \left(\prod_S E_s'\right)$  von  $\prod_S E_s$ .

**4.3.2. Produktraum und Funktor  $^\circ$ .** Für eine Familie  $\{E_s\}_{s \in S}$  von LVR ist

$$\left(\prod_S E_s\right)^\circ \supseteq \prod_S (E_s^\circ).$$

Ist die Indexmenge  $S$  endlich folgt Gleichheit. Insbesondere gilt für zwei LVR  $E$  und  $F$  die von H. H. KELLER behauptete Beziehung:

$$(E \times F)^\circ = E^\circ \times F^\circ.$$

*Beweis:* Als lokalkonvexe topologische VR lassen sich beide Räume durch ihre stetigen Seminormen definieren. Zu zeigen ist, dass jede  $(E \times F)^\circ$ -stetige Seminorm  $p: E \times F \rightarrow \mathbf{R}$  auch  $(E^\circ \times F^\circ)$ -stetig ist.  $p$  ist jedenfalls  $(E \times F)$ -stetig. Ist  $p_1: E \rightarrow \mathbf{R}$  definiert durch  $p_1 x := p(x, 0)$ , so ist  $p_1$   $E$ -stetige Seminorm und deshalb  $E^\circ$ -stetig. Ebenso ist  $p_2: F \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $p_2 y := p(0, y)$   $F^\circ$ -stetig. Dann ist  $p_1 + p_2: E^\circ \times F^\circ \rightarrow \mathbf{R}$   $(E^\circ \times F^\circ)$ -stetig. Aus der Dreiecksungleichung für Seminormen folgt  $p_1 + p_2 \supseteq p$  und daraus die  $E^\circ \times F^\circ$ -Stetigkeit von  $p$  in 0 und also allgemein.

**4.3.3. Produktraum und Funktor  $*$ .** Ist  $\{E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von LVR, so gilt:

$$\left(\prod_S E_s\right)^* = \prod_S (E_s^*).$$

**4.3.4. Schnitt- und Produktlimitierung.** Sei  $\{\underline{E}_s\}_{s \in S}$  eine Familie von VR und zu  $s \in S$   $\{E_s^t\}_{t \in T}$  eine Familie von LVR über  $\underline{E}_s$ , dann ergibt sich

$$\bigwedge_T \prod_S E_s^t = \prod_S \bigwedge_T E_s^t.$$

**4.3.5. Produktlimitierung und Produktlimitierung.** Ist  $\{E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  eine doppelt indizierte Familie von LVR, so sind die Abbildungen

$$k: \prod_S \prod_T E_s^t \rightarrow \prod_T \prod_S E_s^t, \quad k := \prod_T \prod_S \text{pr}_s^t \text{pr}_s$$

und

$$l: \prod_S \prod_T E_s^t \rightarrow \prod_{S \times T} E_s^t, \quad l := \prod_{S \times T} \text{pr}_s^t \text{pr}_s$$

Isomorphismen.

**4.4.1. Induktiver Limes und Unterraum.**  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  und  $\{F_s, f'_{ss'}\}_{s \in S}$  seien zwei direkte Systeme aus  $\mathfrak{Z}$  und  $\{i_s: F_s \rightarrow E_s\}_{s \in S}$  eine Familie von stetigen linearen Abbildungen, so dass für  $s < s'$  gilt  $f_{ss'} i_s = i_{s'} f'_{ss'}$ . Sind  $E$  und  $F$  die induktiven Limes,  $\{f_s\}_{s \in S}$  und  $\{f'_s\}_{s \in S}$  die Familien der kanonischen Abbildungen in  $E$  und  $F$ , so ist  $i: F \rightarrow E$ ,  $ix := f_s i_s x_s$  für  $x \in F$ ,  $s \in S$ ,  $x_s \in F_s$ , so dass  $f'_s x_s = x$ , stetig und linear. Sind alle  $i_s$  injektiv, so auch  $i$ . Sind insbesondere die  $i_s$  Inklusionen, so ist die Limitierung des induktiven Limes der Unterräume  $F_s$  feiner als die vom induktiven Limes  $E$  auf seinem zugehörigen Unterraum induzierte Limitierung. Im allgemeinen sind die beiden Limitierungen nicht isomorph, wie sich aus folgendem Gegenbeispiel ergibt:

Sei  $E := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$  topologisches Produkt,  $\{F_s\}_{s \in S}$  das System der endlichdimensionalen Unterräume von  $E$ ,  $S$  gerichtet durch  $s \leq s' : \Leftrightarrow F_s \subset F_{s'}$  und  $f'_{ss'}: F_s \rightarrow F_{s'}$  für  $s \leq s'$  die Inklusion.  $\{F_s, f'_{ss'}\}_{s \in S}$  ist ein direktes System aus  $\mathfrak{Z}$ . Für  $s \in S$  sei  $E_s := E$  gesetzt mit  $f_{ss'} := \text{id}_E$  für  $s \leq s'$ ; dann ist auch  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  ein direktes System, das  $E \cong \text{ind}_S E_s$  erfüllt. Mit  $i_s: F_s \rightarrow E$  für  $s \in S$  sind alle Voraussetzungen gegeben.  $\underline{F}$  ist algebraisch isomorph zu  $\underline{E}$ , jedoch ist nach [12] p. 145 die Limitierung auf  $F$  keine Topologie.

**4.4.2. Projektiver Limes und Unterraum.** Ist  $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$  ein inverses System aus  $\mathfrak{Z}$  und für  $t \in T$  ein Unterraum  $F^t$  von  $E^t$  mit der Inklusion  $i^t: F^t \rightarrow E^t$  so gegeben, dass für  $t' \leq t$  gilt  $f^{tt'} F^t \subset F^{t'}$ , dann ist  $\{F^t, g^{tt'}\}_{t \in T}$  mit  $g^{tt'}: F^t \rightarrow F^{t'}$ ,  $i^t g^{tt'} := f^{tt'}|_{F^t}$  für  $t' \leq t$  ebenfalls ein inverses System aus  $\mathfrak{Z}$  und  $F := \text{proj}_{\leftarrow T} F^t$  ist isomorph zu einem Unterraum von  $E := \text{proj}_{\leftarrow T} E^t$ .

**4.5.1. Induktiver Limes und Funktor  $\circ$ .** Ist  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  ein direktes System der Kategorie  $\mathfrak{Z}$ , so bildet  $\{E_s^\circ, f_{ss'}^\circ\}_{s \in S}$  ein direktes System der Kategorie der lokalkonvexen topologischen VR und stetigen linearen Abbildungen. In dieser Kategorie hat jedes

direkte System einen induktiven Limes  $\lim_{\rightarrow}$ . Nach [10] p. 368 gilt:

$$(\text{ind } E_s)^\circ = \lim_{\rightarrow S} (E_s^\circ).$$

**4.5.2. Projektiver Limes und Funktor  $^\circ$ .** Ist  $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$  ein inverses System der Kategorie  $\mathfrak{I}$ , so ist  $\text{proj}(E^{t^\circ})$  nach [10] p. 374 eine lokalkonvexe Topologie, also zugleich projektiver Limes von  $\{E^{t^\circ}, f^{tt'}\}_{t \in T}$  in der Kategorie  $\mathfrak{I}$  und in der Kategorie der lokalkonvexen topologischen VR, wobei  $\text{proj}(E^{t^\circ}) \leq (\text{proj } E^t)^\circ$  gilt.

**4.6.1. Induktiver Limes und Funktor  $^\#$ .** Für ein direktes System  $\{E_s, f_{ss'}\}_{s \in S}$  der Kategorie  $\mathfrak{I}$  gilt:

$$(\text{ind } E_s)^\# = \text{ind}(E_s^\#).$$

**4.6.2. Projektiver Limes und Funktor  $^\#$ .** Ist  $\{E^t, f^{tt'}\}_{t \in T}$  ein inverses System der Kategorie  $\mathfrak{I}$ , so gilt:

$$(\text{proj } E^t)^\# = \text{proj}(E^{t^\#}).$$

**4.7.1. Induktiver Limes und Schnittbildung.** Sei  $\{\underline{E}_s\}_{s \in S}$  eine Familie von VR und für  $s \in S$  sei  $\{E_s^t\}_{t \in T}$  eine Familie von LVR über  $\underline{E}_s$ , ferner sei  $S$  gerichtet und für  $s \leq s'$  sei  $f_{ss'}: E_s \rightarrow E_{s'}$  eine lineare Abbildung, so dass für alle  $t \in T$   $\{E_s^t, f_{ss'}\}_{s \in S}$  ein direktes System ist. Dann ist  $\{\bigwedge_T E_s^t, f_{ss'}\}_{s \in S}$  ebenfalls ein direktes System und es gilt:

$$\text{ind} \left( \bigwedge_T E_s^t \right) \geq \bigwedge_T (\text{ind } E_s^t).$$

Die beiden Räume sind jedenfalls dann isomorph, wenn  $T$  endlich ist und alle  $f_{ss'}$  Injektionen sind:

$$\text{ind} \left( \bigwedge_T E_s^t \right) = \bigwedge_T (\text{ind } E_s^t).$$

*Nachweis:* Gilt  $\mathfrak{F} \downarrow \bigwedge_{j=1}^n (\text{ind } E_s^j)$ , so konvergiert  $\mathfrak{F}$  in allen  $\text{ind } E_s^j$ , so dass zu  $j \leq n$  ein  $s_j \in S$  und ein Filter  $\mathfrak{F}_j \downarrow E_{s_j}^j$  existierten, mit  $f_{s_j} \mathfrak{F}_j \leq \mathfrak{F}$ . Ist  $s_0 \in S$  grösser als alle  $s_j$ , so konvergieren alle  $f_{s_j s_0} \mathfrak{F}_j$  in  $E_{s_0}^j$ . Wegen der Injektivität der  $f_{s_j s_0}$  ist  $\{\bigcap_{j=1}^n f_{s_j s_0} F_j \mid F_j \in \mathfrak{F}_j\}$  Basis eines Filters  $\mathfrak{G}$  der bezüglich aller  $j$  in  $E_{s_0}^j$  konvergiert. Dann gilt auch  $\mathfrak{G} \downarrow \bigwedge_{j=1}^n E_{s_0}^j$  und wegen  $f_{s_0} \mathfrak{G} \leq \mathfrak{F}$  auch  $\mathfrak{F} \downarrow \text{ind}_{\rightarrow S} \bigwedge_{j=1}^n E_s^j$ .

**4.7.2. Projektiver Limes und Schnittbildung.** Unter analogen Voraussetzungen für

inverse Systeme gilt die Isomorphie allgemein:

$$\text{proj}_{\leftarrow T} \bigwedge_S E_s^t = \bigwedge_S \text{proj}_{\leftarrow T} E_t^t.$$

**4.8.1. Induktiver Limes und Produktlimitierung.** Sei  $\{E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  eine doppelt indizierte Familie von LVR, wobei  $S$  gerichtet sei und für  $t \in T$   $\{E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s \in S}$  ein direktes System bilde. Sind  $f_s^t: E_s^t \rightarrow \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t$  die kanonischen Abbildungen,  $\text{pr}_s^t: \prod_T E_s^t \rightarrow E_s^t$  die Projektionen und ist  $f_{ss'}^t: \prod_T E_s^t \rightarrow \prod_T E_{s'}^t$  definiert durch  $\text{pr}_{s'}^t f_{ss'}^t := f_{ss'}^t \text{pr}_s^t$ , so ist  $\{\prod_T E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s \in S}$  wieder ein direktes System. Ist nun für  $s \in S$   $g_s: \prod_T E_s^t \rightarrow \prod_{T \rightarrow S} \text{ind} E_s^t$  durch  $\text{pr}_s^t g_s := f_s^t \text{pr}_s^t$  gegeben, so gilt für  $s \leq s': g_s = g_{s'} f_{ss'}$ , so dass aus (IL<sub>3</sub>) von 2.1. die eindeutige Existenz einer linearen stetigen Abbildung  $j: \text{ind}_{\rightarrow S} \prod_T E^t \rightarrow \prod_{T \rightarrow S} \text{ind} E_s^t$  folgt, so dass  $j f_s = g_s$  für  $s \in S$  ist. Offenbar kann nur durch  $j$  ein Morphismus zwischen  $\text{ind}_{\rightarrow S} \prod_T E_s^t$  und  $\prod_{T \rightarrow S} \text{ind} E_s^t$  in natürlicher Weise gefunden werden. Gegenbeispiele zeigen jedoch, dass  $j$  im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.

**4.8.2. Projektiver Limes und Produktlimitierung.** Sei  $\{E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  eine doppelt indizierte Familie von LVR und  $T$  gerichtet,  $f_s^{t'}: E_s^t \rightarrow E_s^{t'}$  für  $t' \leq t$  eine Familie von linearen Abbildungen, so dass für  $s \in S$   $\{E_s^t, f_s^{t'}\}_{t \in T}$  ein inverses System aus  $\mathfrak{I}$  ist. Bezeichnen  $f_s^t: \text{proj}_{\rightarrow T} E_s^t \rightarrow E_s^t$  die kanonischen Abbildungen und ist für  $t' \leq t$   $f^{t'}: \prod_S E_s^t \rightarrow \prod_S E_s^{t'}$  definiert durch  $\text{pr}_s^{t'} f^{t'} := f_s^{t'} \text{pr}_s^t$ , so bildet auch  $\{\prod_S E_s^t, f^{t'}\}_{t \in T}$  ein inverses System.

Dann ist  $j: \prod_S \text{proj}_{\leftarrow T} E_s^t \rightarrow \text{proj}_{\leftarrow T} \prod_S E_s^t$ ,  $j := \prod_T \prod_S f_s^t \text{pr}_s$  ein Isomorphismus.

**4.9.1. Induktiver Limes und induktiver Limes.**  $\{E_s^t, f_{ss'}^t, f_s^{t'}\}_{s \in S}^{t \in T}$  sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle  $s \in S$   $\{E_s^t, f_s^{t'}\}_{t \in T}$  ein direktes System und für  $t \in T$   $\{E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s \in S}$  ebenfalls ein direktes System aus  $\mathfrak{I}$  ist. Ferner gelte für  $s \leq s', t \leq t': f_{ss'}^{t'} f_s^t = f_{ss'}^t f_s^{t'}$ . Ist  $\{f_s^t: E_s^t \rightarrow \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t\}_{s \in S}$  das System der kanonischen Abbildungen, so lassen sich für  $s \leq s'$  Abbildungen  $f_{ss'}^t: \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t \rightarrow \text{ind}_{\rightarrow T} E_{s'}^t$  durch  $f_{ss'}^t x := f_{s'}^t f_{ss'}^t x_s^t$  für  $x \in \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t$  und  $x_s^t \in E_s^t$  mit  $f_s^t x_s^t = x$  so definieren, dass  $\{\text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t, f_{ss'}^t\}_{s \in S}$  wieder ein direktes System wird. Ist nun  $I := S \times T$  gerichtet durch  $(s, t) \leq (s', t') \Leftrightarrow (s \leq s' \text{ und } t \leq t')$  so ist auch  $\{E_s^t, f_{ss'}^t, f_s^{t'}\}_{(s, t) \in I}$  ein direktes System. Die drei Räume  $\text{ind}_{\rightarrow S} \text{ind}_{\rightarrow T} E^t$ ,  $\text{ind}_{\rightarrow T} \text{ind}_{\rightarrow S} E_s^t$  und  $\text{ind}_{\rightarrow I} E_s^t$  sind isomorph.

Bezeichnet nämlich für  $s \in S$   $f_s: \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t \rightarrow \text{ind}_{\rightarrow S} \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t$  die kanonische Abbildung, so gibt es zur Abbildungsfamilie  $\{f_s f_s^t: E_s^t \rightarrow \text{ind}_{\rightarrow S} \text{ind}_{\rightarrow T} E_s^t\}_{s \in S}$  nach 2.1. (IL<sub>3</sub>) eine

stetige lineare Abbildung  $j: \underset{\rightarrow I}{\text{ind } E^t} \rightarrow \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} \underset{\rightarrow T}{\text{ind } E_s^t}$ . Man verifiziert, dass  $j$  ein Isomorphismus ist.

**4.9.2. Projektiver und projektiver Limes.**  $\{E_s^t, f_s^{t'}, f_{s s'}^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle  $s \in S \{E_s^t, f_s^{t'}\}_{t \in T}$  und für alle  $t \in T \{E_s^t, f_{s s'}^t\}_{s \in S}$  ein inverses System ist. Ferner gelte für  $s' \leq s, t' \leq t: f_{s s'}^{t'} f_{s s'}^t = f_{s s'}^{t' t'}$ . Ist  $\{f_s^t: \underset{\leftarrow T}{\text{proj } E_s^t} \rightarrow E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  das System der kanonischen Abbildungen, so lassen sich für  $s' \leq s$  Abbildungen  $f_{s s'}^t: \underset{\leftarrow T}{\text{proj } E_s^t} \rightarrow \underset{\leftarrow T}{\text{proj } E_{s'}^t}$  durch  $\text{pr}_{s'}^t f_{s s'}^t := f_{s s'}^t f_s^t$  so definieren, dass  $\{\underset{\leftarrow T}{\text{proj } E_s^t}, f_{s s'}^t\}_{s \in S}$  wieder ein inverses System wird. Ist  $I := S \times T$  gerichtet durch  $(s', t') \leq (s, t) : \Leftrightarrow (s' \leq s \text{ und } t' \leq t)$ , so ist auch  $\{E_s^t, f_{s s'}^t, f_s^{t'}\}_{(s, t) \in I}$  ein inverses System. Die drei Räume  $\underset{\leftarrow S}{\text{proj }} \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t, \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} \underset{\leftarrow S}{\text{proj }} E_s^t$  und  $\underset{\leftarrow I}{\text{proj }} E_s^t$  sind isomorph.  $\underset{\leftarrow I}{\text{proj }} E_s^t$  ist nämlich Unterraum von  $\prod_I E_s^t, \underset{\leftarrow S}{\text{proj }} \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t$  ist isomorph zu einem Unterraum von  $\prod_S \prod_T E_s^t$  und der Isomorphismus 1 von 4.3.5. vermittelt einen Isomorphismus zwischen den beiden Unterräumen.

**4.9.3. Induktiver Limes und projektiver Limes.**  $\{E_s^t, f_s^{t'}, f_{s s'}^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  sei ein System von LVR und stetigen linearen Abbildungen, so dass für alle  $s \in S \{E_s^t, f_s^{t'}\}_{t \in T}$  ein inverses System und für alle  $t \in T \{E_s^t, f_{s s'}^t\}_{s \in S}$  ein direktes System ist. Ferner gelte für  $s \leq s', t' \leq t: f_{s s'}^{t'} f_s^{t'} = f_{s s'}^{t' t'}$ . Seien  $\{g_s^t: E_s^t \rightarrow \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  und  $\{f_s^t: \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t \rightarrow E_s^t\}_{s \in S}^{t \in T}$  die Systeme der kanonischen Abbildungen. Für  $s \leq s'$  definieren wir  $f_{s s'}^t: \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t \rightarrow \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_{s'}^t, f_{s s'}^t := \prod_T f_{s s'}^t, f_s^t$  und für  $t' \leq t$   $f^{t t'}: \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_s^t \rightarrow \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_{s'}^t, f^{t t'} x := g_{s'}^{t'} f_s^{t t'} x_s$  für  $x \in \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_s^t, s \in S$  und  $x_s \in E_s^t$ , so dass  $g_s^t x_s = x$ . Damit ist  $\{\underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_s^t, f^{t t'}\}_{t \in T}$  ein inverses System aus  $\mathfrak{I}$  und  $\{\underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t, f_{s s'}^t\}_{s \in S}$  ein direktes System aus  $\mathfrak{I}$ .  $k: \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t \rightarrow \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} \underset{\rightarrow S}{\text{ind }} E_s^t, k(x) := \prod_I g_s^t \text{pr}_s^t x_s$  für  $s \in S, x_s \in \underset{\leftarrow T}{\text{proj }} E_s^t$  mit  $f_s x_s = x$  ist natürlich definiert, linear, stetig, aber im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

### 5. Zwei allgemeine Sätze

Zum Beweis von Satz 6.1., wonach die natürliche Topologie die einzige zulässige separierte Limitierung des  $\underline{\mathbf{R}}^n$  ist, benötigen wir die folgenden Verallgemeinerungen von Aussagen der Theorie der topologischen Vektorräume.

#### 5.1. Vollständigkeit

Ein Filter  $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$  auf einem LVR  $E$  heisst ein *Cauchy-Filter*, falls  $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}$  in  $E$  gegen Null konvergiert.

Konvergiert  $\mathfrak{F}$  gegen  $x \in E$ , so ist  $\mathfrak{F}$  Cauchy-Filter.

Ein LVR  $E$  heisst *vollständig*, falls in ihm jeder Cauchy-Filter gegen mindestens einen Punkt des Raumes konvergiert.

Eine Teilmenge  $A$  des LVR  $E$  heisst nach [9]  $E$ -abgeschlossen, wenn gilt  $\bar{A} = A$ , wenn also aus  $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E)$ ,  $\mathfrak{F} \downarrow_x E$ ,  $A \in \mathfrak{F}$  folgt  $x \in A$ .

**SATZ 5.1.:** *Ist  $E$  ein separierter LVR und  $H$  ein vollständiger Unterraum von  $E$ , so ist  $H$  abgeschlossen in  $E$ .*

Die Aussage verallgemeinert [2] II.3, prop. 8.

*Beweis (a contrario):* Ist  $x \notin H$  und  $\mathfrak{F} \downarrow_x E$  mit  $H \in \mathfrak{F}$ , so induziert  $\mathfrak{F}$  auf  $H$  einen Cauchy-Filter  $\mathfrak{G}$ .  $H$  ist vollständig, so dass  $y \in H$  existiert mit  $\mathfrak{G} \downarrow_y H$ . Dann gilt  $[\mathfrak{G}] \downarrow_y E$ , aber wegen  $[\mathfrak{G}] \geq \mathfrak{F}$  auch  $[\mathfrak{G}] \downarrow_x E$  im Widerspruch zur Separiertheit von  $E$ .

## 5.2. Stetigkeit von Linearformen und Abgeschlossenheit von Hyperebenen

**SATZ 5.2.:**  *$f: E \rightarrow \mathbf{R}$  sei eine nicht verschwindende Linearform auf dem LVR  $E$  und  $H := f^{-1}(0)$  Hyperebene in  $E$ . Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

- a.  $f$  ist  $E$ -stetig.
- b.  $f$  ist  $E^\circ$ -stetig.
- c.  $H$  ist  $E$ -abgeschlossen.
- d.  $H$  ist  $E^\circ$ -abgeschlossen.

*Beweis:* Aus [9] p. 297, Satz 11 und [4] I.2.th.1 ergibt sich die Aequivalenz von a., b. und d. Wegen  $E^\circ \leq E$  folgt c. aus d. Es genügt also zu zeigen, dass aus c. a. folgt.

Ist  $H$   $E$ -abgeschlossen, so ist nach 1.3.3.  $E/H$  separiert.  $E/H$  ist eindimensional und also wegen Satz 3.2. isomorph zu  $\mathbf{R}$ . Ist  $\pi: E \rightarrow E/H$  die kanonische Abbildung auf den Quotientenraum und  $h: E/H \rightarrow \mathbf{R}$  die durch  $h := f \text{ cls}^{-1}$  definierte Linearform, so gilt  $f = h\pi$ . Jede Linearform auf  $E/H$  ist stetig, mit  $h$  und  $\pi$  ist dann auch  $f$  stetig.

## 6. Limitierungen von $\mathbf{R}^n$

### 6.1. Separierte Limitierungen von $\mathbf{R}^n$

**SATZ 6.1.:** *Jeder separierte  $n$ -dimensionale LVR ist isomorph zum  $\mathbf{R}^n$  (mit der natürlichen Topologie).*

*Beweis:* Sei  $E^m$  ein separierter  $n$ -dimensionaler LVR. Wir führen den Beweis induktiv nach  $n$ . Der Satz gilt nach 3.2. für  $n=1$ . Er sei bewiesen für  $m < n$ . Ist  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  eine Basis des  $E^n$ , so bezeichne  $H$  den von  $\{x_1\}$  aufgespannten eindimensionalen Unterraum,  $H'$  sein algebraisches Komplement mit der Unterraumlimitierung.  $H'$  ist  $(n-1)$ -dimensional und als Unterraum eines separierten Raumes nach 1.3.2. separiert. Aus der Induktionsannahme folgt die Isomorphie von  $H'$  und  $\mathbf{R}^{n-1}$ .  $H'$  ist vollständiger Unterraum eines separierten Raumes und nach 5.1. abgeschlossen in  $E^n$ .

Die Linearform  $f: E^n \rightarrow \mathbf{R}$ , definiert durch  $f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) := \lambda_1$  ist wegen Satz 5.2. und

$f^{-1}(0) = H'$  stetig.  $H$  ist separiert und eindimensional, also isomorph zu  $\mathbf{R}$ , deshalb ist  $g: \mathbf{R} \rightarrow H: g \lambda := \lambda x_1$  stetig. Ist  $i_1: H \rightarrow E^n$  die stetige Einbettung, so ist  $u := i_1 g f$  ein stetiger Projektor in  $E^n$  auf  $H$ . Aus Satz 2.3.4. ergibt sich die Isomorphie von  $E^n$  mit  $H \times H'$ , also mit  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1} = \mathbf{R}^n$ .

### 6.2. Ausgeglicheene endlichdimensionale LVR

Nach 1.2.2. heisst ein LVR  $E$  ausgeglichen, falls  $E^* = E$  gilt.

SATZ 6.2.1.: *Ausgeglicheene zulässige Limitierungen auf endlichdimensionalen VR sind Topologien.*

KORROLAR 6.2.2.: *Ist der  $n$ -dimensionale LVR  $E$  ausgeglichen, so existiert  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , so dass  $E^n$  isomorph zu  $\mathbf{R}_i^m \times \mathbf{R}^{n-m}$  ist. ( $\mathbf{R}_i^m$  ist mit der indiskreten Topologie auf  $\mathbf{R}^m$  versehen.)*

*Beweis:* (a)  $n=1$ . Der Filter der gegen Null konvergenten Filter eines ausgeglichenen LVR besitzt eine Basis aus ausgeglichenen Filtern. In  $\mathbf{F}(\mathbf{R})$  sind nur die drei Filter  $\{\mathbf{R}\} \leq \mathbf{V} \leq \dot{0}$  ausgeglichen. Alle möglichen Basen daraus definieren Topologien.

(b)  $E^n$  sei ein  $n$ -dimensionaler ausgeglicherer LVR und der Satz sei bewiesen für  $m < n$ . Ist  $E^n$  separiert, so ist er nach 6.1. topologisch, ist  $E^n$  nicht separiert, so existiert  $x \in E^n$ ,  $x \neq 0$ , sowie  $\mathfrak{F} \in \mathbf{F}(E^n)$ ,  $\mathfrak{F} = \mathbf{V} \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F} \downarrow E^n$ ,  $\mathfrak{F} \downarrow_x E^n$ .  $\mathfrak{F} - x$  konvergiert gegen 0. Ist  $\mathfrak{G}$  ein gröberer ausgeglicherer Filter der gegen 0 konvergiert, so liegt  $-x$  in allen Mengen von  $\mathfrak{G}$ , da  $\mathfrak{G}$  ausgeglichen ist enthält  $\bigcap_{G \in \mathfrak{G}} G$  auch  $\lambda x$  für alle  $\lambda \in \mathbf{R}$ .  $\mathfrak{G}$

induziert auf dem durch  $\{x\}$  bestimmten eindimensionalen Unterraum  $H$  die indiskrete Topologie. Ist  $H'$  algebraisches Komplement von  $H$  und  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  eine Basis von  $E^n$  mit  $x_1 = x$ , so ist  $u: E^n \rightarrow E^n$ ,  $u(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) := \lambda_1 x_1$  ein stetiger Projektor auf  $H$ . Aus Satz 2.3.5. folgt die Isomorphie von  $E^n$  mit  $H \oplus H'$ .  $H'$  ist als Unterraum eines ausgeglichenen LVR ausgeglichen, nach der Induktionsannahme also ein topologischer VR.

### 6.3. Abspaltung eines Unterraumes mit indiskreter Topologie

SATZ 6.3.: *Jeder endlichdimensionale LVR  $E^n$  ist Limesprodukt eines indiskreten Unterraumes und eines Unterraumes, der auf keinem seiner Unterräume die indiskrete Topologie induziert.*

*Beweis:* Die Menge  $H$  der Punkte  $x \in E^n$ , so dass  $E^n$  auf dem durch  $x$  bestimmten eindimensionalen Unterraum die indiskrete Topologie induziert ist ein Unterraum mit indiskreter Topologie. Eine Projektion von  $E^n$  auf diesen Unterraum ist also stetig. Der Satz folgt mit 2.3.5.

### 6.4. Abspaltung eines Unterraumes mit natürlicher Topologie

SATZ 6.4.1.: *Jeder endlichdimensionale LVR  $E$  ist Limesprodukt eines Unterraumes*

$H$  mit natürlicher Topologie und eines Unterraumes  $H'$ , auf dem jede nicht verschwindende Linearform unstetig ist.

*Beweis:*  $n=1$ . Jede Limitierung auf  $\mathbf{R}$  ist separiert oder hat keine nicht verschwindende stetige Linearform, sie ist Produkt von sich mit dem nulldimensionalen topologischen VR.

– Der Satz sei bewiesen für  $m < n$ .  $E^n$  sei ein  $n$ -dimensionaler LVR. Besitzt  $E^n$  keine stetige nicht verschwindende Linearform, so ist  $E^n$  isomorph zu  $\{0\} \times E^n$ . Ist  $f: E^n \rightarrow \mathbf{R}$  stetige Linearform und  $\{x_i\}_{i, \dots, n}$  eine Basis, so dass  $f(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) = \lambda_1$ , so ist wegen der Stetigkeit der skalaren Multiplikation  $g: E^n \rightarrow E^n: g x := f x \cdot x_1$  ein stetiger Projektor auf den durch  $\{x_1\}$  erzeugten eindimensionalen Unterraum  $H$ .  $H$  ist separiert, also isomorph zu  $\mathbf{R}$ . Die Behauptung folgt mit 2.3.5. aus der Induktionsannahme.

**KORROLAR 6.4.2.:** *Ist  $E^n$  ein  $n$ -dimensionaler LVR, so gibt es zwei ganze Zahlen  $m, r$ ,  $0 \leq m, r \leq n$ ,  $m+r \leq n$ , so dass  $E^n$  isomorph zu  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_1^r \times F$  ist, wo  $F$  ein  $(n-m-r)$ -dimensionaler LVR ist, der auf keinem seiner Unterräume eine Topologie induziert, derart, dass  $E^{n*}$  isomorph zu  $\mathbf{R}^{n-r} \times \mathbf{R}_1^r$  und  $E^{n^0}$  isomorph zu  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_1^{n-m}$  ist.*

### 6.5. Darstellung endlichdimensionaler LVR durch Mengensysteme

**SATZ 6.5.:** *Ist  $E^n$  ein  $n$ -dimensionaler LVR, so gibt es ein Mengensystem  $\alpha \subset \mathfrak{P}(E^n)$  mit den Eigenschaften (a)–(e) von Satz 1.4. so, dass ein Filter  $\mathfrak{F}$  genau dann in  $E^n$  gegen 0 konvergiert, wenn in  $\alpha$  ein  $A$  so existiert, dass  $\mathfrak{F}$  feiner ist als  $[A] + \mathfrak{U}$ , wo  $\mathfrak{U}$  der Nullumgebungsfilter der Topologie von  $E^{n*}$  ist.*

*Beweis:* Ist  $E^n = E^m \times E^{n-m}$  nach 6.3. so zerlegt, dass  $E^{n-m}$  ein maximaler Unterraum mit indiskreter Topologie ist, so ist  $E^{n*}$  isomorph zu  $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_1^{n-m}$ . Gilt der Satz für  $E^m$  und  $E^{n-m}$  mit Mengensystemen  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{P}(E^m)$  und  $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{P}(E^{n-m})$ , so auch für  $E^n$  mit dem System  $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a}'$ , denn jeder  $E^n$ -konvergente Filter ist feiner als ein Filter  $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ , wo  $\mathfrak{F}$  in  $E^m$ ,  $\mathfrak{G}$  in  $E^{n-m}$  konvergiert.  $\{E^{n-m}\} = : \mathfrak{a}'$  bestätigt aber die Aussage für  $E^{n-m}$ .

Der Satz ist also noch zu beweisen für  $E^m$  und den metrischen Nullumgebungsfilter  $\mathfrak{V}^m$  der natürlichen Topologie  $\omega^m$  von  $E^m$ . Für  $A \subset E^m$  bezeichne  $\tilde{A}$  den  $\omega^m$ -Abschluss von  $A$ . Wir definieren  $B: \mathfrak{F}(E^m) \rightarrow \mathfrak{P}(E^m)$  durch  $B(\mathfrak{F}) := \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \tilde{F}$  und  $\mathfrak{b} := \{B(\mathfrak{F}) \mid \mathfrak{F} \downarrow E^m\}$ . Das Mengensystem  $\mathfrak{b}$  erfüllt die Bedingungen (a) bis (e) von Satz 1.4.:

(b) ergibt sich aus  $B(\lambda \mathfrak{F}) = \lambda B(\mathfrak{F})$  für  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\mathfrak{F} \downarrow E^m$ .

(c) und (d) folgen aus Satz 1.1. mit  $B(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \supset B(\mathfrak{F}) \cup B(\mathfrak{G})$  und  $B(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}) \supset B(\mathfrak{F}) + B(\mathfrak{G})$ .

(e) fordert, dass für  $\mathfrak{F} \downarrow E^m$   $B(\mathfrak{F})$   $\omega^m$ -beschränkt ist. Falls  $\mathfrak{F}$  eine  $\omega^m$ -beschränkte Menge enthält, trifft das zu. Die Annahme, dass  $\mathfrak{F} \downarrow E^m$  keine  $\omega^m$ -beschränkte Menge

enthält, führt zu einem Widerspruch: Wegen  $E^m \leq E^{m*}$  gilt  $V^m \downarrow E^m$ , also gilt mit  $\mathfrak{G} := V \mathfrak{F} + V^m: \mathfrak{G} \downarrow E^m$ .  $\mathfrak{G}$  enthält auch keine  $\omega^m$ -beschränkte Menge.  $E^m$  induziert auf keinem Unterraum die indiskrete Topologie, deshalb enthält  $B(\mathfrak{G})$  keinen eindimensionalen Unterraum und zu  $x \in E^m$  existiert  $\lambda \in \underline{\mathbf{R}}, \lambda \neq 0$  und  $G \in \mathfrak{G}$ , so dass  $\lambda x \notin G$ . Weil  $\mathfrak{G}$  ausgeglichen ist, gilt  $x \notin (1/\lambda)G \in \mathfrak{G}$ . Ist  $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$  eine Basis von  $E^m$  und  $K := \{ \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \mid \lambda_j \in \underline{\mathbf{R}}, \sum_{j=1}^m |\lambda_j| = 1 \}$ , so gibt es insbesondere zu jedem  $x \in K$  eine Menge  $H_x \in \mathfrak{G}$ , so dass  $x \notin H_x$  gilt.  $H_x$  darf  $\omega^m$ -abgeschlossen angenommen werden, da  $\mathfrak{G}$  eine Basis aus  $\omega^m$ -abgeschlossenen Mengen besitzt.  $\{E^m \div H_x \mid x \in K\}$  ist eine  $\omega^m$ -offene Überdeckung der  $\omega^m$ -kompakten Menge  $K$ . Für eine endliche Teilüberdeckung  $\{E \div H_j \mid j=1, \dots, q\}$  ist  $H := \bigcap_{j=1}^q H_j$  in  $\mathfrak{G}$  und ist disjunkt zu  $K$ . Da  $\mathfrak{G}$  ausgeglichen ist, existieren  $H', H'' \in \mathfrak{G}$ , sowie  $\varepsilon \in \underline{\mathbf{R}}, \varepsilon > 0$ , so dass  $H' = I_\varepsilon H''$  Teilmenge von  $H$  ist. Aus  $H' \cap K = \emptyset$  folgt die  $\omega^m$ -Beschränktheit von  $H'$ , also ein Widerspruch.

(a) Wegen  $\hat{0} \downarrow E$  folgt  $b \neq \emptyset$ .

Nach Nachweis (e) existiert zu  $\mathfrak{F} \downarrow E^m$  eine  $\omega^m$ -beschränkte Menge  $F_0 \in \mathfrak{F}$ . Wäre  $B(\mathfrak{F}) = \emptyset$ , müsste zu  $x \in \tilde{F}_0$  ein  $F_x \in \mathfrak{F}$  mit  $x \notin F_x$  existieren.  $\{E^m \div F_x \mid x \in \tilde{F}_0\}$  wäre eine  $\omega^m$ -offene Überdeckung der  $\omega^m$ -kompakten Menge  $\tilde{F}_0$ . Für eine endliche Teilüberdeckung  $\{E^m \div F_j \mid j=1, \dots, q\}$  müsste  $F^* := \bigcap_{j=1}^q F_j$  zu  $\mathfrak{F}$  gehören, was wegen  $F^* \cap F_0 = \emptyset$  falsch ist.

Damit gibt es jedenfalls einen LVR  $E^b$  mit  $\underline{E}^b = \underline{E}^m$  und  $\mathfrak{F} \downarrow E^b \Leftrightarrow$  (es existiert  $\mathfrak{G} \downarrow E^m: \mathfrak{F} \geq [B(\mathfrak{G})] + V^m$ ). Zu beweisen bleibt die  $E^b$ -Konvergenz jedes  $E^m$ -konvergenten Filters und die  $E^m$ -Konvergenz jedes  $E^b$ -konvergenten Filters. Das ergibt sich aus der Ungleichung:

$$\mathfrak{F} \geq \tilde{\mathfrak{F}} \geq [B(\tilde{\mathfrak{F}})] + V^m \geq \tilde{\mathfrak{F}} + V^m = \mathfrak{F} + V^m \quad \text{für } \mathfrak{F} \downarrow E^m,$$

wo  $\tilde{\mathfrak{F}}$  den von der Filterbasis  $\{\tilde{F} \mid F \in \mathfrak{F}\}$  bestimmten Filter bezeichnet. Die erste Ungleichung ist trivial.  $V^m$  besitzt die Filterbasis

$$\left\{ K_r := \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j x_j \mid \lambda_j \in \underline{\mathbf{R}}, \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leq r \right\} \mid r \in \underline{\mathbf{R}}, r > 0 \right\}.$$

Sei  $r \in \underline{\mathbf{R}}$  so gewählt, dass  $B(\tilde{\mathfrak{F}}) + K_1 \subset K_r \in \tilde{\mathfrak{F}}$  gilt, was möglich ist, da  $\tilde{\mathfrak{F}}$  eine  $\omega^m$ -beschränkte Menge enthält. Ist nun  $F \in [B(\tilde{\mathfrak{F}})] + V^m$ , so existiert  $\varepsilon \in \underline{\mathbf{R}}, 0 < \varepsilon < 1$ , mit  $F \supset B(\tilde{\mathfrak{F}}) + K_\varepsilon$ .  $H := K_r \div (B(\tilde{\mathfrak{F}}) + K_\varepsilon)$  ist  $\omega^m$ -kompakt und nicht leer. Für  $x \in H$  ist  $x \notin B(\tilde{\mathfrak{F}})$ , also existiert  $G_x \in \tilde{\mathfrak{F}}: x \notin \tilde{G}_x$ .  $\{E^m \div \tilde{G}_x \mid x \in H\}$  ist eine  $\omega^m$ -offene Überdeckung von  $H$ . Für eine endliche Teilüberdeckung  $\{E^m \div \tilde{G}_j \mid j=1, \dots, q\}$  ist  $G_0 := \bigcap_{j=1}^q \tilde{G}_j$  disjunkt zu  $H$ . Da  $G_0 \cap K_r$   $\omega^m$ -abgeschlossene Teilmenge von  $B(\tilde{\mathfrak{F}}) + K_\varepsilon$  ist und zu  $\tilde{\mathfrak{F}}$  gehört, ergibt sich  $F \in \tilde{\mathfrak{F}}$  und damit die zweite Ungleichung. Die dritte ist trivial, die Gleichheit folgt aus  $F \subset \tilde{F} \subset F + K_\varepsilon$  für  $F \in \tilde{\mathfrak{F}}, \varepsilon \in \underline{\mathbf{R}}, \varepsilon > 0$ .

## LITERATUR

- [1] BOURBAKI, N., *Théorie des ensembles* (Hermann, Paris 1956), chap. III.
- [2] BOURBAKI, N., *Topologie générale* (Hermann, Paris 1960/63).
- [3] ČECH E.: *Topological Spaces* (Wiley, London 1966).
- [4] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1953/55).
- [5] SCHAEFER, H. H., *Topological Vector Spaces* (Macmillan, New York 1966).
- [6] KÖTHER, G., *Topologische lineare Räume* (Springer, Berlin 1960).
- [7] KELLEY, J. L. und NAMIOKA, I., *Linear Topological Spaces* (van Nostrand, Princeton N.J. 1963).
- [8] KOWALSKY, H. J., *Limesräume und Komplettierung*, Math. Nachr. 12 (1954), 301–340.
- [9] FISCHER, H. R., *Limesräume*, Math. Ann. 137 (1959), 269–303.
- [10] WLOKA, J., *Limesräume und Distributionen*, Math. Ann. 152 (1963), 351–409.
- [11] FRÖLICHER, A. und BUCHER, W., *Calculus in Vector Spaces Without Norm*, Lecture Notes in Math. (Springer, Berlin 1966).
- [12] BINZ, E., *Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. 41, 2 (1966–67), 137–156.
- [13] BINZ, E. und KELLER, H. H., *Funktionsräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [Ser. A I] 383 (1966).
- [14] MARINESCU, G., *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963).
- [15] COOK, C. H. und FISCHER, H. R., *On Equicontinuity and Continuous Convergence*, Math. Ann. 159 (1965), 94–104.
- [16] KELLER, H. H., *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Ann. 159 (1965), 259–270.
- [17] KELLER, H. H., *Über Probleme, die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten*, Festband R. Nevanlinna (Springer, Berlin 1967).
- [18] v. D. WAERDEN, B. L., *Algebra I*, (Springer, Berlin 1930).

Eingegangen den 23. April 1968