Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 44 (1969)

Artikel: Einige Kongruenzsätze für geschlossene k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen.

Autor: Brühlmann, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33763

Einige Kongruenzsätze für geschlossene k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen

von HEINZ BRÜHLMANN

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, ähnliche Sätze für k-dimensionale Flächen in n-dimensionalen Riemannschen Räumen zu beweisen, wie sie von H. HOPF und K. VOSS [1] für Abbildungen von Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum, bei denen die Verbindungsgeraden Punkt – Bildpunkt untereinander parallel sind, K VOSS [2] für gleiche Abbildungen von Hyperflächen in Euklidischen Räumen und A. AEPPLI [3] für Abbildungen von Hyperflächen in Euklidischen Räumen, bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und Bildpunkte $\bar{p}$ durch einen festen Punkt O gehen, gegeben wurden.

Der Hauptsatz in der Arbeit von H. HOPF und K. VOSS lautet folgendermassen:

F und $\bar{F}$ seien orientierte geschlossene Flächen, die unter Erhaltung der Orientierung so aufeinander abgebildet sind, dass erstens die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte p und $\bar{p}$ untereinander parallel sind, und dass zweitens F und $\bar{F}$ in je zwei entsprechenden Punkten p und $\bar{p}$ die gleiche mittlere Krümmung haben; ferner setzen wir voraus, dass die Flächen keine Zylinderstücke enthalten, deren Erzeugende parallel zu den Geraden $p\bar{p}$ sind. Dann geht $\bar{F}$ aus F durch eine Translation hervor. (d.h. die Entfernungen $p\bar{p}$ sind konstant.)

In der Arbeit von A. AEPPLI lautet die Bedingung für die mittlere Krümmung $rH=\bar{r}\bar{H}$, wobei r bzw. $\bar{r}$ den Abstand des Punktes p bzw. $\bar{p}$ von O bedeutet, während die Schlussfolgerung $\bar{r}/r=$ konst. ist.

Es liegt nun nahe, zu versuchen, einen Satz zu beweisen, der diese beiden Sätze als Spezialfall enthält. Dies ist in einer Arbeit von Y. KATSURADA [4] ausgeführt worden. Zur Formulierung ihres Resultates betrachten wir eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ $(p\in R^n$, $t=$Parameter) eines Riemannschen Raumes R^n und zwei Hyperflächen F und $\bar{F}$, die unter Erhaltung der Orientierung durch $\bar{p}=\Phi(f(p),p)$ aufeinander abgebildet seien, wobei $f(p)$ eine differenzierbare Funktion auf F sei. Es sei nun $\bar{p}_0=\Phi(f(p_0),p_0)$. Der Punkt $\bar{p}_0$ liegt dann nicht nur auf der Fläche $\bar{F}$, sondern auch auf der Fläche $\tilde{F}_{p_0}$, die wir erhalten, in dem wir auf jeden Punkt $p\in F$ die Transformation $\Phi(f(p_0),p)$ anwenden. Damit liegt $\bar{p}=\Phi(f(p),p)$ auch auf der Fläche $\tilde{F}_p$. Die Bedingung $\bar{H}=H$ bei H. HOPF und K. VOSS und $r\,H=\bar{r}\bar{H}$ bei A. AEPPLI lautet dann in dieser Formulierung: $\bar{H}=\tilde{H}$.

Mit diesen Definitionen lautet nun der Kongruenzsatz von Y. KATSURADA [4]:

Seien F und $\bar{F}$ zwei durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ wie oben aufeinander abgebildete, orientierte geschlossene Hyperflächen im R^n. $\bar{S} \subset \bar{F}$ sei die Menge derjenigen Punkte $\bar{p}$, in denen der Tangentialvektor an die Kurve $\Phi(t,\bar{p})$ $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, im Tangentialraum von $\bar{F}$ liegt. Falls nun erstens $\bar{H} = \tilde{H}$ ist, zweitens $\bar{S}$ nirgends dicht in $\bar{F}$ liegt und drittens $\Phi(t,p)$ eine homothetische Transformationsgruppe (Verallgemeinerung der bei A. Aeppli [3] betrachteten Abbildung, die als Spezialfall die Isometrien enthält, genaue Definition im Abschnitt 3) ist, so ist $f(p) = \text{konstant}$.

Zur Herleitung dieses Satzes wird von der Autorin von Anfang an ein spezielles Koordinatensystem verwendet, was z.B. bei Fixpunkten der Transformationsgruppe nicht möglich ist. Auch scheint mir die Darstellung, die sich an den Ricci-Kalkül von Schouten anlehnt, ziemlich umständlich.

Zur Herleitung des oben formulierten Kongruenzsatzes benötigen wir in dieser Arbeit eine Integralformel, die wir mit Hilfe einer Methode herleiten, die in jedem Punkt der Fläche ein spezielles orthonormiertes n-Bein benützt, und zwar so, dass e_n, der n-te Vektor des n-Beins, senkrecht zur Fläche steht, also mit der Flächennormale zusammenfällt. Sodann benützen wir eine von H. Flanders [5] gegebene Verallgemeinerung des äusseren Differentialoperators auf Tensoren, die sowohl in den kovarianten als auch in den kontravarianten Indizes schiefsymmetrisch sind. Die Indizes der Tensoren werden immer bezüglich des speziell gewählten n-Beins von Vektoren und des dazu dualen n-Beins von 1-Formen geschrieben; dabei brauchen wir zur Herleitung der Integralformel diese Indizes, in der Schlussformel erscheinen aber keine Indizes mehr.

In einer Arbeit von R. E. Stong [6] wurde der Kongruenzsatz für geschlossene k-dimensionale Flächen im n-dimensionalen Euklidischen Raum und Abbildungen wie bei H. Hopf und K. Voss [1] und A. Aeppli [3] bewiesen. Mit Hilfe des oben erwähnten Formalismus konnte ich nun den Satz von Y. Katsuradu auf k-dimensionale geschlossene Flächen im n-dimensionalen Riemannschen Raum verallgemeinern, wobei die Bedingung für die mittlere Krümmung nun als Bedingung für die mittleren Krümmungsvektoren auftritt.

Im Abschnitt 1) werden die algebraischen, im Abschnitt 2) die analytischen Grundlagen dargelegt. Wir stützen uns dabei im wesentlichen auf die Arbeit von Flanders [5], doch wird der Beweis für die Existenz des erweiterten äusseren Differentialoperators nach einer anderen Methode gegeben, die lokale Koordinaten benutzt. Im Abschnitt 3) werden die Definitionen der konformen, homothetischen und isometrischen Transformationen sowie der Lie-Ableitungen zusammengestellt. Abschnitt 4) enthält den Beweis des Kongruenzsatzes für homothetische und gewisse konforme Abbildungen von Hyperflächen in Riemannschen Räumen und abschliessend wird in Abschnitt 5) der Kongruenzsatz für dieselben Abbildungen von k-dimensionalen Flächen im n-dimensionalen Riemannschen Raum formuliert und bewiesen.

1. Der Raum der (p, q)-Vektoren

Wir beginnen mit dem Tensorprodukt von reellen Vektorräumen. Falls U und V zwei Vektorräume sind, so nennen wir einen Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\theta: U\times V\to T$ ein Tensorprodukt von U und V, falls gilt:

a) Das Bild $\theta(U\times V)$ spannt T auf.

b) Falls $\varphi: U\times V\to W$ eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum W ist, so existiert eine lineare Abbildung $\lambda: T\to W$, so dass $\varphi=\lambda\cdot\theta$.

Durch diese beiden Bedingungen ist das Tensorprodukt zweier Vektorräume bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Auch zeigt man leicht, dass die Abbildung λ, die der bilinearen Abbildung φ nach b) zugeordnet ist, eindeutig ist.

Zum Beweis der Existenz des Tensorproduktes betrachtet man den freien Vektorraum, welcher erzeugt wird von den Elementen von $U\times V$; d.h. den Vektorraum $\bar{U}$ aller endlichen Summen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u_i, v_i) \quad u_i\in U, \quad v_i\in V, \quad \lambda_i = \text{reelle Zahl}.$$

$\bar{R}$ sei der Teilraum von $\bar{U}$, der erzeugt wird von folgenden Elementen:

$$\begin{gathered} \lambda(u, v) - (\lambda u, v) \\ \lambda(u, v) - (u, \lambda v) \\ (u + u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v') \end{gathered}$$

Der Faktorraum $T=\bar{U}/\bar{R}$ ist dann ein Tensorprodukt von U und V: $T=U\otimes V$. Falls $u\in U$, $v\in V$, so bezeichnen wir die Klasse von (u, v) in $U\otimes V$ mit $u\otimes v$ und setzen

$$\theta(u, v) = u\otimes v.$$

Dann folgt sofort, dass die Abbildung θ bilinear ist und dass $\theta(U\times V)$ den Raum $U\otimes V$ aufspannt.

Sei nun φ eine bilineare Abbildung $U\times V\to W$. Dann definieren wir eine Abbildung $\bar{\lambda}: \bar{U}\to W$, indem wir setzen

$$\bar{\lambda}(u, v) = \varphi(u, v)$$

und diese Abbildung durch Linearität auf ganz $\bar{U}$ ausdehnen. Da φ bilinear ist, folgt $\bar{\lambda}(\bar{R})=0$, also induziert $\bar{\lambda}$ eine lineare Abbildung λ:

$$\lambda: U\otimes V\to W, \quad \text{mit} \quad \varphi=\lambda\cdot\theta.$$

Ausser dem Tensorprodukt zweier Vektorräume benötigen wir im folgenden noch das r-fache äussere Produkt eines Vektorraumes V für $0\leqslant r\leqslant n=\dim V$. Zur Definition des äusseren Produktes gehen wir wie beim Tensorprodukt aus von dem freien

Vektorraum $\bar{U}$, dessen Erzeugende die Elemente von $\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{r}$ sind. $\bar{R}$ ist nun der Teilraum von $\bar{U}$, erzeugt durch folgende Elemente:

$$\lambda(v_1, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_r)$$
$$(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) - (v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r, \quad v_i \in V, \quad \lambda = \text{reelle Zahl})$$
$$(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}) - \text{sign.}\,\pi(v_1, v_2, \ldots, v_r)$$

wobei sign. π das Vorzeichen derjenigen Permutation π von r Elementen ist, die $(1, 2, \ldots, r)$ in $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ überführt. Dann bilden wir wiederum den Faktorraum

$$\bar{U}/\bar{R} = \Lambda^r V.$$

$\Lambda^r V$ wird das r-fache äussere Produkt von V genannt. Falls $(v_1, \ldots, v_v) \in V \times \cdots \times V$, so bezeichnen wir die Klasse von $(v_1, \ldots, v_r)$ in V mit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ und setzen:

$$\theta(v_1, \ldots, v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r.$$

Jedem Element π der Permutationsgruppe von r Elementen ordnen wir nun eine Abbildung $\bar{\pi}: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \to \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r}$ zu, indem wir setzen:

$$\bar{\pi}(v_1, \ldots, v_r) = (v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(r)}).$$

Eine Abbildung $\varphi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \to W$ nennt man symmetrisch, falls $\varphi \cdot \bar{\pi} = \varphi$, und alternierend, falls $\varphi \cdot \bar{\pi} = \text{sign.}\,\pi \cdot \varphi$.

Analog zum Tensorprodukt haben wir nun für das äussere Produkt folgende charakterisierende Eigenschaften:

1) $\theta(\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r})$ spannt Λ^r auf.

2) Falls $\varphi: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r} \to W$ eine alternierende, multilineare Abbildung ist, so existiert eine und nur eine lineare Abbildung

$$\lambda: \Lambda^r V \to W \quad \text{mit} \quad \varphi = \lambda \cdot \theta.$$

Aus der Definition des äusseren Produktes $\Lambda^r V$ eines Vektorraumes V folgt nun, dass, falls $(e_1, e_2, \ldots, e_n) =$ Basis von V, die Elemente

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$$

eine Basis von $\Lambda^r V$ bilden. $\Lambda^r V$ hat also die Dimension $\binom{n}{r}$ und jedes Element aus $\Lambda^r V$ lässt sich immer in der Form

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

darstellen.

Eine Element $\lambda \in \Lambda^r V$ lässt sich nun aber auch mit einem Element $\mu \in \Lambda^s V$ multiplizieren, das so entstehende Element $\lambda \wedge \mu$ liegt in $\Lambda^{r+s} V$ und es gilt:

$$\lambda \wedge \mu = (-1)^{rs} \mu \wedge \lambda$$

Zum Beweis dieser Tatsache betrachten wir folgende Räume und Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{r} & \times \underbrace{(V \times \cdots \times V)}_{s} & \xrightarrow{\theta} \Lambda^{r+s} V \\ \downarrow \theta_1 & \downarrow \theta_2 & \\ \Lambda^r V & \Lambda^s V & \end{array}$$

Da $\theta(\lambda, \mu)=0$ für $\lambda \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r}$, $\mu \in \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s}$ mit $\theta_1(\lambda)=0$ oder $\theta_2(\mu)=0$, induziert θ eine bilineare Abbildung

$$\theta' : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \rightarrow \Lambda^{r+s} V$$

Das Bild $\theta'(\lambda', \mu')$, $\lambda' \in \Lambda^r V$, $\mu' \in \Lambda^s V$ nenenn wir das äussere Produkt von λ' und μ':

$$\theta'(\lambda', \mu') = \lambda' \wedge \mu'.$$

Nun betrachten wir ausser dem ursprünglichen Vektorraum V noch den dualen Raum V^* und bilden die Räume

$$T_q^p = \Lambda^q V^* \otimes \Lambda^p V$$

Falls $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ die dazu duale Basis von V^* ist, so bilden die Elemente

$$\sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_q} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$$
$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leqslant n \qquad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n$$

eine Basis von T_q^p; also haben die Räume T_q^p die Dimension $\binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$ und jedes Element aus T_q^p hat die Form:

$$\sum \lambda_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_p} \sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_q} \otimes e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}.$$

Zur Erweiterung des oben definierten Produktes von p und q-Vektoren auf Elemente aus den Räumen T_q^p bzw. $T_{q'}^{p'}$ betrachten wir folgende Abbildung

$$f : \Lambda^q V^* \times \Lambda_p V \times \Lambda^{q'} V^* \times \Lambda^{p'} V \rightarrow \Lambda^{q+q'} V^* \otimes \Lambda^{p+p'} V$$

gegeben durch

$$f(\zeta, \eta, \zeta', \eta') = \zeta \wedge \zeta' \otimes \eta \wedge \eta'.$$
$$\zeta \in \Lambda^q V^*, \quad \eta \in \Lambda^p V, \quad \zeta' \in \Lambda^{q'} V^*, \quad \eta' \in \Lambda^{p'} V.$$

Diese Abbildung ist bilinear in (ζ, η), also existiert eine und nur eine in $\zeta \otimes \eta$ lineare Abbildung

$$\varphi_1 : (\Lambda^q V^* \otimes \Lambda^p V) \times \Lambda^{q'} V^* \times \Lambda^{p'} V \rightarrow \Lambda^{q+q'} V^* \otimes \Lambda^{p+p'} V$$

mit

$$\varphi_1(\zeta\otimes\eta,\zeta',\eta')=f(\zeta,\eta,\zeta',\eta').$$

f ist aber auch bilinear in (ζ',η'), also auch φ_1, d.h. es existiert genau eine in $\zeta\otimes\eta$, $\zeta'\otimes\eta'$ lineare Abbildung

$$\varphi_2:(\Lambda^q V^*\otimes\Lambda^p V)\times(\Lambda^{q'} V^*\otimes\Lambda^{p'} V)\to\Lambda^{q+q'} V^*\otimes\Lambda^{p+p'} V$$

mit

$$\varphi_2(\zeta\otimes\eta,\zeta'\otimes\eta')=\varphi_1(\zeta\otimes\eta,\zeta',\eta')=f(\zeta,\eta,\zeta',\eta')$$

φ_2 ist also nach Konstruktion eine bilineare Abbildung

$$\varphi_2: T_q^p\times T_{q'}^{p'}\to T_{q+q'}^{p+p'}$$

wobei

$$\varphi_2(\zeta\otimes\eta,\zeta'\otimes\eta')=\zeta\wedge\zeta'\otimes\eta\wedge\eta'.$$

Wir benützen für das so definierte Produkt wieder das Zeichen $\wedge$, d.h. wir schreiben:

$$\varphi_2(\zeta\otimes\eta,\zeta'\otimes\eta')=(\zeta\otimes\eta)\wedge(\zeta'\otimes\eta')=\zeta\wedge\zeta'\otimes\eta\wedge\eta'.$$

Wie man leicht sieht, gilt für dieses Produkt:

$$(\zeta\otimes\eta)\wedge(\zeta'\otimes\eta')=(-1)^{pp'+qq'}(\zeta'\otimes\eta')\wedge(\zeta\otimes\eta)$$
$$\zeta\in\Lambda^q V^*,\quad \eta\in\Lambda^p V,\quad \zeta'\in\Lambda^{q'} V^*,\quad \eta'\in\Lambda^p V,$$

Mit dieser Definition können wir auch schreiben:

$$\zeta\otimes\eta=(\zeta\otimes 1)\wedge(1\otimes\eta)=\zeta\wedge\eta \quad \text{für} \quad \zeta\in\Lambda^q V^*,\quad \eta\in\Lambda^p V.$$

2. Der erweiterte Differentialkalkül auf Mannigfaltigkeiten

M^n sei eine C^∞ Mannigfaltigkeit der Dimension n. (Unter Differenzierbarkeit verstehen wir in Zukunft immer Differenzierbarkeit der Klasse C^∞). Der Tangentialraum $T(p)$ eines Punktes $p\in M^n$ ist definiert als Menge der Aequivalenzklassen von differenzierbaren Abbildungen φ eines offenen Intervalls $(-\varepsilon,+\varepsilon)\subset R$ in die Mannigfaltigkeit M^n mit $\varphi(0)=p$. Zwei solche Abbildungen $\varphi(t)$ bzw. $\varphi'(t)$ werden dabei als äquivalent betrachtet, falls in einer Koordinatenumgebung $U(p)$ $\varphi(t)$ bzw. $\varphi'(t)$ gegeben sind durch Koordinaten $x^i(t)$ bzw. $x^{i'}(t)$ und

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dx^{i'}}{dt}\right|_{t=0}.$$

Die Menge der so definierten Aequivalenzklassen kann dann zu einem n-dimensionalen Vektorraum $T(p)$ gemacht werden, den Tangentialraum von M^n im Punkte p. Die Klasse, in der die Abbildung $x^i(t)=\delta^i_j\cdot t$ liegt, bezeichnen wir mit $(\partial/\partial x^j)_p$, die Tangentialvektoren $(\partial/\partial x^1)_p \ldots (\partial/\partial x^n)_p$ bilden dann eine Basis von $T(p)$ und

$$T(p)=\left\{\sum_i \lambda^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\} \qquad \lambda^i=\text{reelle Zahlen}.$$

Diese spezielle Basis von $T(p)$ nennen wir eine Koordinatenbasis, die dazu duale Basis bezeichnen wir mit $(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p$.

Ein differenzierbares Vektorfeld auf M^n besteht aus einem Tangentialvektor in jedem Punkte p, der differenzierbar vom Punkte p abhängen soll, d.h. in lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$,

$$v(p) = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

sollen die v^i differenzierbare Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sein. Analog besteht ein (r, s)-Vektorfeld in der Vorgabe eines (r, s)-Vektors $\xi \in T_s^r(p)$ in jedem Punkte p, also in lokalen Koordinaten

$$\xi(p) = \lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r} (dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_s})_p \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_p}}\right)_p$$

wobei die $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ differenzierbare Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sind.

Die Funktionen $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ sind in dieser Darstellung nur für $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant n$ und $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ definiert. Wir können aber durch Schiefsymmetrie $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ für alle i_k, j_l mit $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_l \leqslant n$ definieren. Dann sind die $\lambda_{i_1 \ldots i_s}^{j_1 \ldots j_r}$ Komponenten eines r-fach kontravarianten, s-fach kovarianten Tensors, der sowohl in den kovarianten als auch in den kontravarianten Indizes total antisymmetrisch ist. Wir bezeichnen im folgenden die Menge der (r, s) Vektorfelder mit τ_s^r.

Die $(0, s)$-Vektorfelder entsprechen den s-Formen auf M^n. Für die s-Formen existiert nun bekanntlich ein Operator d, der jeder s-Form eine $(s+1)$-Form zuordnet und durch folgende 4 Eigenschaften eindeutig festgelegt ist:

1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$. $\quad \omega_1, \omega_2 \in \tau_s^0$

2) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^s \omega_1 \wedge d\omega_2 \quad \omega_1 \in \tau_s^0, \omega_2 \in \tau_{s_1}^0$

3) falls f = Funktion auf M, so ist df das Differential von f, in lokalen Koordinaten also

$$df(p) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}_p \cdot (dx^i)_p.$$

4) $d(df) = 0$

Wir nehmen nun zusätzlich noch an, dass auf M^n ein linearer Zusammenhang gegeben sei. Das lässt sich auch so ausdrücken, dass auf M^n ein Operator D gegeben ist, der jedem Vektorfeld auf M^n ein $(1, 1)$-Vektorfeld zuordnet, wobei gilt:

1) $D(v + w) = Dv + Dw$. $\quad v, w \in \tau_0^1$

2) $D(fv) = df \wedge v + f \cdot Dv$. $\quad$ wobei df = Differential von f.

Der Operator D entspricht der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern, in lokalen Koordinaten haben wir:

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$Dv = dv^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i D \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Dabei ist $dv^i = (\partial v^i / \partial x^j)\, dx^j$, ausserdem setzen wir

$$D \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^k_{j\,i}\, dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}$$

und erhalten:

$$Dv = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{j\,i} v^i \right) dx^j \wedge \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Nach FLANDERS [5] können nun die Operatoren d und D zu einem einzigen Operator zusammengefasst werden; er bewies folgenden

SATZ: *Auf einer* n-dim. *Mannigfaltigkeit mit linearem Zusammenhang D existiert ein und nur ein Operator, den wir wieder mit d bezeichnen, mit folgenden Eigenschaften:*

1) $d(\zeta + \eta) = d\zeta + d\eta \qquad \zeta, \eta \in \tau^r_s$

2) $d(\zeta \wedge \eta) = d\zeta \wedge \eta + (-1)^s \zeta \wedge d\eta \qquad \zeta \in \tau^r_s,\ \eta \in \tau^{r'}_{s'}.$

3) *d stimmt mit dem gegebenen linearen Zusammenhang D auf* τ^1_0 *und mit dem äusseren Differentialoperator d auf* τ^1_0 *überein.*

Beweis: Es sei U eine Koordinatenumgebung von M, Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$. Dann gilt für $\zeta \in \tau^r_s$

$$\zeta = \lambda^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

oder

$$\zeta = \omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}, \qquad \omega^{j_1 \ldots j_r} \in \tau^0_s$$

Falls nun ein Operator d mit den obigen Eigenschaften existiert, muss gelten

$$d\zeta = d\omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} + (-1)^s \sum_{k=1}^{r} \omega^{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

Daraus sieht man sofort, dass der Operator d in U eindeutig ist und dass $d\zeta \in \tau^r_{s+1}$ in U. Damit haben wir aber auch die globale Existenz bewiesen, da aus der Eindeutigkeit in U folgt:

$$(d\zeta \mid U)_{U \cap V} = (d\zeta \mid V)_{U \cap V} = d\zeta \mid U \cap V,$$

wobei $d\zeta / U$ die Restriktion von $d\zeta$ auf U bedeutet. Wir haben nun nur noch die Eigenschaft 2) zu verifizieren. Sei also

$\zeta \in \tau^r_s, \quad \eta \in \tau^{r'}_{s'}$ d.h.

$$\zeta = \omega^{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}}$$

$$\eta = \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}}$$

$$\zeta \wedge \eta = \omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}}$$

$$\begin{aligned}
d(\zeta \wedge \eta) = {} & d(\omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}}) \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\
& + (-1)^{s+s'} \omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \\
& \wedge \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\
& + (-1)^{s+s'} \omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \\
& \wedge \sum_{l=1}^{r'} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{k_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}}
\end{aligned}$$

Nun ist

$$d(\omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}}) = d\omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} + (-1)^s \omega^{j_1 \ldots j_r} \wedge d\tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}}.$$

ausserdem gilt

$$\begin{aligned}
& \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \\
& \qquad = (-1)^{s'} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}},
\end{aligned}$$

da

$$\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \in \tau_1^r.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
d(\zeta \wedge \eta) = {} & d\omega^{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \wedge \left(\tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \right) \\
& + (-1)^s \omega^{j_1 \ldots j_r} \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \\
& \wedge \left(\tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \right) \\
& + (-1)^s \left(\omega^{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \right) \wedge d\tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\
& + (-1)^s \left(\omega^{j_1 \ldots j_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}} \right) \\
& \wedge (-1)^{s'} \tilde{\omega}^{k_1 \ldots k_{r'}} \sum_{l=1}^{r'} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \wedge \cdots \wedge D \frac{\partial}{\partial x^{k_l}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{k_{r'}}} \\
= {} & d\zeta \wedge \eta + (-1)^s \zeta \wedge d\eta.
\end{aligned}$$

Im folgenden werden wir ein spezielles (1, 1) Vektorfeld immer wieder brauchen, es ist dies der sogenannte Verschiebungsvektor dP. Er ist folgendermassen definiert

$$dP = \delta_i^j \, dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Basis im Tangentialraum, d.h. es gilt auch

$$dP = \delta_i^j \sigma^i \wedge e_j$$

wobei die e_i ($i = 1, \ldots, n$) irgend eine Basis des Tangentialraumes und die σ^i ($i = 1, \ldots, n$) die dazu duale Basis bilden. Falls nun die Mannigfaltigkeit M^n affin zusammenhängend ist, also die Γ_{ji}^k in der Darstellung von D in Koordinaten symmetrisch in j und i sind, so gilt

$$d(dP) = 0 .$$

Beweis

$$d(dP) = d\left(\delta_i^j \, dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = - \delta_i^j \, dx^i \wedge D \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \text{also}$$

$$d(dP) = - \delta_i^j \, dx^i \wedge \Gamma_{lj}^k \, dx^l \wedge \frac{\partial}{\partial x^k} = - \Gamma_{li}^k \, dx^i \wedge dx^l \wedge \frac{\partial}{\partial x^k},$$

woraus man sofort sieht:

$$d(dP) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{lj}^k \text{ symmetrisch in } j \text{ und } l .$$

Die Wichtigkeit des äusseren Differentialoperators d kommt im wesentlichen im Satz von Stokes zum Ausdruck. Um den Satz von Stokes im folgenden anwenden zu können, müssen wirh ihn etwas anders als üblich formulieren. Diese Formulierung hat nur in Mannigfaltigkeiten mit Riemannscher Metrik einen Sinn. Wir werden also im folgenden ausschliesslich Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrachten. Unter D verstehen wir von nun an immer den eindeutig bestimmten, mit der Riemannschen Metrik verträglichen affinen Zusammenhang.

Vorerst führen wir im Tangentialraum eines jeden Punktes durch das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren eine orthonormale Basis ein, wir bilden also, indem wir v_i für $\partial/\partial x^i$ setzen,

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \|v_1\| = + \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right)} = + \sqrt{g_{11}} .$$

$$b_2 = v_2 - (v_2, e_1)\, e_1 \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$$

und so weiter, b_k ergibt sich, falls wir $e_1, \ldots, e_{k-1}$ konstruiert haben, als

$$b_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k, e_i)\, e_i \quad \text{und} \quad e_k = \frac{b_k}{\|b_k\|} .$$

Da bei diesem Verfahren nur algebraische Operationen ausgeführt werden, können wir die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^r}$ in einer Koordinatenumgebung U in allen Punkten gleichzeitig orthogonalisieren und erhalten so n in U orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit gilt nun, falls $e_1, \ldots, e_n$ n orthonormierte Vektorfelder in einer Umgebung U, $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ die dazu dualen 1-Formen sind, d der durch die äussere Ableitung und den affinen Zusammenhang D bestimmte erweiterte Differentialoperator ist,

$$d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 0$$

und

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n = dV \qquad dV = \text{Volumelement}$$

Beweis

a) Es gilt

$$de_i = \omega_i^k e_k \qquad \omega_i^k = \text{1-Formen}$$

und

$$d(e_i, e_j) = (de_i, e_j) + (e_i, de_j) = 0,$$

da $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Daraus erhält man

$$0 = (\omega_i^k e_k, e_j) + (e_i, \omega_j^k e_k) = \omega_i^j + \omega_j^i,$$

also ω_j^i = schiefsymmetrisch. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge de_i \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge \omega_i^k e_k \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Da aber ein äusseres Produkt 0 ist, falls zwei gleiche Faktoren auftreten, tritt nur der Fall $k = i$ auf, und wir erhalten

$$d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (\sum_i \omega_i^i)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0,$$

da ω_i^j schiefsymmetrisch.

b) $\sigma^i = a_j^i\, dx^j \qquad (dx^i, dx^j) = g^{ij} \qquad (\sigma^i, \sigma^j) = \delta^{ij}$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n &= a_{j_1}^1\, dx^{j_1} \wedge a_{j_2}^2\, dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge a_{j_n}^n\, dx^{j_n} \\ &= \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \ldots a_{j_n}^n\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \det(a_j^i)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt

$$\det(\delta^{ij}) = 1 = (\det(a_j^i))^2 \det(g^{ij}) = (\det(a_j^i))^2 \cdot \frac{1}{\det(g_{ij})}$$

also

$$g = \det(g_{ij}) = (\det(a^i_j))^2$$

woraus man

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n = +\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = dV$$

erhält.

Nun sei M^n eine orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik; wir können also auf M^n in der Umgebung eines jeden Punktes n orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$ so auswählen, dass, falls U eine Umgebung mit Vektorfeldern $e_1, \ldots, e_n$, V eine Umgebung mit Vektorfeldern $e'_1, \ldots, e'_n$ ist und $U \cap V \neq 0$, in $U \cap V$ gilt

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n .$$

Ein Element $\zeta \in \tau^n_k$ lässt sich dann folgendermassen schreiben

$$\zeta = \omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n ,$$

wobei ω eine eindeutig bestimmte k-Form ist. Durch diese Schreibweise wird jedem (n, k)-Vektorfeld ζ eine k-Form $\omega = \mathrm{on}(\zeta)$ zugeordnet. Ausserdem gilt

$$d\zeta = d\omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + (-1)^k\, \omega \wedge d(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = d\omega \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n ,$$

woraus folgt

$$\mathrm{on}(d\zeta) = d(\mathrm{on}(\zeta)),$$

wobei d links der erweiterte Differentialoperator, angewendet auf (n, k)-Vektorfelder, und rechts der äussere Differentialoperator, angewendet auf k-Formen, ist.

Falls nun F^{k+1} eine orientierte $(k+1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit in M^n ist, so gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_{\partial F^{k+1}} \omega = \int_{F^{k+1}} d\omega$$

oder

$$\int_{\partial F^{k+1}} \mathrm{on}(\zeta) = \int_{F^{k+1}} \mathrm{on}(d\zeta) .$$

3. Einparametrige Transformationsgruppen

Wir erinnern zuerst an die Definition einer einparametrigen Transformationsgruppe:

Eine Familie φ_t von Diffeomorphismen $M^n \to M^n$ wird eine einparametrige Gruppe von differenzierbaren Transformationen von M^n genannt, falls die Abbildung $\Phi: R \times M^n \to M^n$, definiert durch

$$\Phi(t, p) = \varphi_t(p) \quad p \in M, \quad t \in R, \quad R = \text{reelle Zahlen}.$$

folgende drei Eigenschaften erfüllt:

1) Φ ist differenzierbar.

2) $\Phi(s, \Phi(t,p)) = \Phi(s+t, p)$ dh. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ für alle t und s.

3) $\Phi(0,p) = p$, d.h. $\varphi_0 = \text{Identität}$.

$\varphi_t(p)$ $-c < t < +c$, p fest, $c > 0$, definiert eine Kurve auf M^n. v sei der Tangentialvektor an diese Kurve im Punkte p. In lokalen Koordinaten gilt dann, falls in $U(p)$ die Kurve $\varphi_t(p)$ gegeben ist durch die Koordinaten $x^i(t)$:

$$v_p = \lim_{t \to 0} \frac{x^i(t) - x^i(0)}{t} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

Eine differenzierbare Abbildung $\Phi: M \to \bar{M}$ induziert eine Abbildung $\Phi_*: T_p \to T_{\Phi(p)}$ der entsprechenden Tangentialräume, und zwar wird, falls $\varphi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ den Tangentialvektor $v(p)$ repräsentiert, $\Phi_*(v)$ durch die Abbildung $\Phi \circ \varphi: (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \bar{M}$ repräsentiert.

Im folgenden werden wir noch die Lie-Ableitung von Vektorfeldern brauchen. $\Phi(t,p)$ sei eine einparametrige Transformationsgruppe, w ein in einer Umgebung des Punktes p definiertes Vektorfeld, v der Tangentialvektor an die Kurve $\varphi_t(p)$. Dann definieren wir

$$(\mathscr{L}_v(w))_p = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_t^*(w))_p - w_p}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* \, w_{\varphi_t(p)} - w_p}{t}$$

und nennen diese Grösse die Lie-Ableitung von w bezüglich v. Man zeigt leicht, dass $\mathscr{L}_v(w)$ wieder ein Vektorfeld ist. Durch Ausrechnen (siehe [7], Seite 93) erhält man für

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\mathscr{L}_v(w) = \left(\frac{\partial w^j}{\partial x^i} v^i - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} w^i\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir noch die Definitionen der konformen, homothetischen und isometrischen Abbildungen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten an.

Eine differenzierbare Abbildung $\Phi: M \to \bar{M}$ wird konform genannt, falls eine differenzierbare Funktion $\varphi(p) > 0$ auf M existiert, derart, dass für alle Vektorfelder v, w auf M gilt:

$$(\Phi_* v, \Phi_* w)_{\Phi(p)} = \varphi(p)\,(v, w)_p .$$

Falls φ in der obigen Definition konstant ist, so wird Φ eine Homothetie genannt, falls $\varphi(p) \equiv 1$, so ist Φ eine Isometrie.

Eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ nennen wir konform bzw. homothetisch bzw. isometrisch, falls jede Abbildung $\varphi_t(p) = \Phi(t,p)$, t fest, konform bzw. homothetisch bzw. isometrisch ist.

4. Der Kongruenzsatz für Hyperflächen

Für Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum gelten folgende Formeln (siehe [1])

$$d\vec{x} \mathbin{\hat{\times}} d\vec{x} = 2\vec{n}\, dA \qquad d\vec{x} \mathbin{\hat{\times}} d\vec{n} = -2H\vec{n}\, dA\,.$$

Diese Formeln wollen wir nun verallgemeinern. F^{n-1} bedeute im folgenden eine Hyperfläche im Riemannschen Raum R^n, lokal gegeben durch die Darstellung $x^i = x^i(u^\alpha)$, wobei die x^i $(i=1,\ldots,n)$ Koordinaten im R^n, die u^α $(\alpha=1,\ldots,n-1)$ Koordinaten auf der Hyperfläche sind. Dabei setzen wir voraus, dass die Matrix $(\partial x^i/\partial u^\alpha)$ in jedem Punkt den Rang $n-1$ habe, d.h. dass die Fläche wirklich die Dimension $n-1$ habe. In einer Umgebung eines jeden Punktes von F^{n-1} wählen wir nun ein orthonormiertes n-Bein $e_1,\ldots,e_n$ so, dass e_n die Normale $\vec{n}$ der Fläche ist. Für das dazu duale n-Bein $\sigma^1,\ldots,\sigma^n$ gilt dann $\sigma^n=0$ auf F^{n-1}. Als Verallgemeinerung von $d\vec{x} = \vec{x}_i\, du^i$ nehmen wir $dP = \delta^i_j\, dx^j \wedge (\partial/\partial x^i)$, auf F^{n-1} ist dann $dP = \sigma^\alpha \wedge e_\alpha$.

Auf F^{n-1} ist dann

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{n-1} = \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} \wedge e_{\alpha_{n-1}} = \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-1}},$$

wobei $1 \leqslant \alpha_k \leqslant n-1$. Da alle α_k voneinander verschieden sein müssen, muss

$$\sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-1}} = \operatorname{sign}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\, \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1}$$

und

$$e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-1}} = \operatorname{sign}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$$

sein. Damit wird

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{n-1} = (n-1)!\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}\,.$$

Das ist die Verallgemeinerung der ersten der beiden am Anfang dieses Abschnittes angeführten Formeln, statt $\vec{n}$ steht darin der im Sinne der äusseren Algebra zur Normalen e_n duale $(n-1)$-Vektor $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$.

Zur Verallgemeinerung der zweiten Formel benützen wir folgende Relation

$$dn = de_n = -\, b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge e_\alpha$$

wobei b^α_β den gemischten Tensor der 2. Fundamentalform bezüglich der Basis $e_1,\ldots,e_n$ darstellt.

Dann wird

$$\begin{aligned} dn \wedge \underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(n-2)} &= -\, b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge e_\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \sigma^{\alpha_2} \wedge e_{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ &= -\, b^\alpha_\beta \sigma^\beta \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}}\,. \end{aligned}$$

Hier sind $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-2}$ $(n-2)$ voneinander verschiedene Zahlen zwischen 1 und $(n-1)$, ebenso gilt $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant (n-1)$ und $\alpha \neq \alpha_k, \beta \neq \alpha_k$ für $1 \leqslant k \leqslant (n-2)$, woraus folgt, dass $\alpha = \beta$ sein muss, also

$$\begin{aligned} dn \wedge \underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(n-2)} &= -\sum_\alpha b_\alpha^\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ &= -\sum_\alpha b_\alpha^\alpha (\operatorname{sign}(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}))^2 \, \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \\ &= -(n-2)! \sum_\alpha b_\alpha^\alpha \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \quad dn \wedge dP \wedge \cdots \wedge dP = -(n-1)! \, H \, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1},$$

wobei wir

$$H = \frac{1}{(n-1)} \sum_\alpha b_\alpha^\alpha = \frac{1}{n-1} \operatorname{Spur}(b_\beta^\alpha)$$

gesetzt haben; damit haben wir auch eine Verallgemeinerung für die zweite der obigen Formeln gefunden.

Nun gehen wir über zum Kongruenzsatz. Der gegebenen Hyperfläche F^{n-1} sei durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ eine zweite Hyperfläche $\bar{F}^{n-1}$ so zugeordnet, dass

$$\bar{F}^{n-1} = \{\Phi(f(p), p) \mid p \in F^{n-1}\},$$

wobei $f(p)$ eine Funktion auf F^{n-1} ist. Von der Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ setzen wir bis auf weiteres nur voraus, dass jede Abbildung φ_t regulär sei, d.h. dass φ_{t*} für jeden Punkt p eine Abbildung des Tangentialraumes $T(p)$ auf den Tangentialraum $T(\varphi_t(p))$ sei; Fixpunkte von $\Phi(t,p)$ sind also nicht ausgeschlossen. Ausser der Fläche $\bar{F}^{n-1}$ betrachten wir noch die in der Einleitung definierten, jedem $p \in F^{n-1}$ zugeordneten Flächen $\tilde{F}_p^{n-1}$,

$$\tilde{F}_p^{n-1} = \{\Phi(f(p), p') \mid p' \in F^{n-1}\}.$$

$\bar{n}$ bezeichne die Normale von $\bar{F}^{n-1}$ im Punkte $\bar{p}$, $\tilde{n}$ die Normale von $\tilde{F}_p^{n-1}$ im Punkte $\bar{p}$, $\bar{p} = \Phi(f(p), p)$. Mit w bezeichnen wir den Vektor $e^{f(p)}\, v$, wobei v der Tangentialvektor an die Kurve $\Phi(t, \bar{p})$, $-\varepsilon < t < +\varepsilon$, ist. Dann betrachten wir, um zu einer Integralformel zu gelangen, den Ausdruck

$$(\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}.$$

Die Anwendung des Operators d auf diesen Ausdruck ergibt

$$\begin{aligned} d((\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} &= d\bar{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} \\ &\quad - d\tilde{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} + (\bar{n} - \tilde{n}) \wedge dw \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}. \end{aligned}$$

Hierin ist, falls wir e_i; statt $\bar{e}_i$; und σ^j statt $\bar{\sigma}^j$ schreiben,

$$d\tilde{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)} = (n-1)!\, \bar{H}\, d\bar{A} \wedge w \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1}$$
$$= (n-1)!\,(-1)^{n-1}\, \bar{H}\,(w, \tilde{n})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Um auch $d\tilde{n} \wedge w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)}$ zu berechnen, setzen wir $d\tilde{n} = -b'^{i}_{\alpha} \sigma^\alpha \wedge e_i$; und erhalten

$$\begin{aligned} d\tilde{n} \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} &= -\, b'^{i}_{\alpha} \sigma^\alpha \wedge e_i \wedge w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} e_{\alpha_{n-2}} \\ &= -\, b'^{\beta}_{\alpha} w^n \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\beta \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ &\quad -\, b'^{n}_{\alpha} w^\beta \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}}, \end{aligned}$$

also

$$d\tilde{n} \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}$$
$$= (-1)^{n-1}(n-2)!\, \{(w, \tilde{n}) (\sum_\alpha b'^{\alpha}_{\alpha}) - (b'^{n}_{\alpha} w^\alpha)\} \cdot d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Nun suchen wir den Zusammenhang zwischen $\sum_\alpha b'^{\alpha}_{\alpha}$ und $\bar{H}$. Für irgend ein Vektorfeld y im R^n gilt

$$dy = y^i_j \sigma^j \wedge e_i ,$$

für die Differentiation längs F^{n-1} also

$$dy = y^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i ,$$

da $\sigma^n = 0$ auf F^{n-1}. Sei nun $\bar{p}$ ein Punkt auf F^{n-1}, der nicht in der Ausnahmemenge S liegt, d.h. in $\bar{p}$ soll der Strömungsvektor v nicht im Tangentialraum der Fläche F^{n-1} liegen. Dann haben wir in einer Umgebung von $\bar{p}$ ein Vektorfeld $\tilde{n}$, gegeben als Normalenfeld an die Flächenschar

$$\varphi_t(F^{n-1}) \qquad f(p) - \varepsilon \leqslant t \leqslant f(p) + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0 .$$

$\tilde{n}$ ist dann einerseits $= \tilde{e}_n$ und andererseits $= \tilde{n}^i e_i$, womit wir auf F^{n-1} erhalten:

$$d\tilde{n} = -\, b'^{i}_{\alpha} \sigma^\alpha \wedge e_i ;$$

und auf $\tilde{F}^{n-1}_{\bar{p}}$

$$d\tilde{n} = -\, \tilde{b}^{\alpha}_{\beta} \tilde{\sigma}^\beta \wedge \tilde{e}_\alpha .$$

Andererseits gilt aber im R^n

$$d\tilde{n} = -\, b'^{i}_{j} \sigma^j \wedge e_i = -\, \tilde{b}^i_j \tilde{\sigma}^j \wedge \tilde{e}_i ,$$

woraus $(\sum_i b'^{i}_{i}) = (\sum_i \tilde{b}^i_i)$ folgt, wegen der Invarianz der Spur. Ausserdem ist $\tilde{b}^n_j = 0$, da $(d\tilde{n}, \tilde{n}) = 0$; daraus erhält man

$$(n-1)\, \tilde{H} = \sum_\alpha \tilde{b}^{\alpha}_{\alpha} = \sum_i \tilde{b}^i_i = \sum_i b'^{i}_{i} = \sum_\alpha b'^{\alpha}_{\alpha} + b'^{n}_{n} .$$

In den Punkten $\bar{p} \in \bar{S}$ ist nun $b_n'^n$ noch nicht bestimmt, doch können wir diese Grösse dort durch Stetigkeit definieren, da $\bar{S}$ nirgends dicht in $\bar{F}^{n-1}$ sein soll. Damit ergibt sich

$$d\tilde{n} \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, \tilde{H}(w, \bar{n})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$
$$- (-1)^{n-1}(n-2)!\, (b_j'^n w^j)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Zur Berechnung von

$$(\bar{n} - \tilde{n}) \wedge dw \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}$$

brauchen wir noch eine Zwischenbetrachtung. In Koordinaten gilt lokal

1) auf $\bar{F}^{n-1}$: $\quad y^i(u^\alpha) = \Phi^i(f(u^\alpha), x^j(u^\alpha))$

2) auf $\tilde{F}_{\bar{p}}^{n-1}$: $\quad y^i(u^\alpha) = \Phi^i(f(\mathring{u}^\alpha), x^j(u^\alpha))$

$u^\alpha =$ Koordinaten auf F^{n-1},

$x^j(u^\alpha) =$ Einbettung von F^{n-1} in R^n.

$\mathring{u}^\alpha =$ Koordinaten von p.

Daraus folgt für die Basisvektoren $\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^{n-1}$ auf $\bar{F}^{n-1}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\bar{F}^{n-1}} = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\bar{p}} \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial t} \cdot \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right\}$$

und für die Vektoren $\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^{n-1}$ auf $\tilde{F}_{\bar{p}}^{n-1}$

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\tilde{F}_{\bar{p}}^{n-1}} \cdot = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{\bar{p}} \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \right\}$$

woraus

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\bar{F}} = \left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\tilde{F}} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}$$

folgt.

Also ist

$$d\bar{P} = \left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\bar{F}} \wedge du^\alpha = \left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{\bar{p}}^{\tilde{F}\bar{p}} \wedge du^\alpha + v \wedge df = d\tilde{P} + v \wedge df$$

woraus folgt

$$\underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{n-1} = \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{n-1} - (n-1)\, v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{n-2}.$$

Damit haben wir

$$v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{n-2} = \frac{1}{(n-1)} \{ \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} - \underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(n-1)} \}$$
$$= (n-2)!\, \{ d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} - d\tilde{A} \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{n-1} \},$$

nach der ersten Formel, die wir im Abschnitt 4) hergeleitet haben.

Nun ist $dw = e^f\, dv + e^f\, df \wedge v$, also

$$(\bar{n} - \tilde{n}) \wedge dw \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}$$
$$= e^f (\bar{n} - \tilde{n}) \wedge dv \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} + e^f (\bar{n} - \tilde{n}) \wedge df \wedge v \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ergibt nun nach unserer Zwischenbetrachtung

$$\begin{aligned} e^f(\bar n - \tilde n) \wedge df \wedge v \wedge d\bar P \wedge \cdots \wedge d\bar P \\ &= e^f(\bar n - \tilde n)(n-2)!\,\{d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} - d\tilde A \wedge \tilde e_1 \wedge \cdots \wedge \tilde e_{n-1}\}. \\ &= e^f(n-2)!\,(-1)^{n-1}(1-(\bar n, \tilde n))(d\bar A + d\tilde A) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir mit $dv = v^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i$

$$\bar n \wedge dv \wedge d\bar P \wedge \cdots \wedge d\bar P = (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

$$\begin{aligned} \tilde n \wedge dv \wedge d\bar P \wedge \cdots \wedge d\bar P &= (-1)^{n-1}(n-2)!\,(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)(\bar n, \tilde n)\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-2}(n-2)!\, v^n_\alpha \tilde n^\alpha\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\bar n - \tilde n) \wedge dw \wedge d\bar P \wedge \cdots \wedge d\bar P \\ &= (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar n, \tilde n))(d\bar A + d\tilde A)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar n, \tilde n))(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f v^n_\alpha \tilde n^\alpha\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir damit

$$\begin{aligned} d((\bar n - \tilde n) \wedge w \wedge d\bar P \wedge \cdots \wedge d\bar P \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!\,(\bar H - \tilde H)(w, \bar n)\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f(1-(\bar n, \tilde n))(d\bar A + d\tilde A)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (-1)^{n-1}(n-2)!\, e^f\{(1-(\bar n, \tilde n))\sum_\alpha v^\alpha_\alpha + v^n_\alpha \tilde n^\alpha - b'^n_j v^j\}\, d\bar A \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned}$$

Den Ausdruck $D = (1-(\bar n, \tilde n))\sum_\alpha v^\alpha_\alpha + v^n_\alpha \tilde n^\alpha + b'^n_j v^j$ wollen wir jetzt noch etwas umformen. Zunächst ist

$$(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)(1-(\bar n, \tilde n)) = (\sum_i v^i_i)(1-(\bar n, \tilde n)) - v^n_n + v^n_n \tilde n^n$$

und

$$(\sum_i v^i_i) = \operatorname{div} v.$$

Daraus ergibt sich für D:

$$D = (1-(\bar n, \tilde n))\operatorname{div} v + v^n_j \tilde n^j + b'^n_j v^j - v^n_n.$$

Andererseits ist

$$\mathscr{L}_v \tilde n = -(b'^i_j v^j + v^i_j \tilde n^j)\, e_i$$

wobei $\mathscr{L}_v$ die in Abschnitt 3) erwähnte Lie-Ableitung längs v bedeutet; also ist

$$v^n_j \tilde n^j + b'^n_j v^j = -(\mathscr{L}_v \tilde n, \bar n).$$

Nun definieren wir für ein Vektorfeld $w = w^i e_i$ und irgend einen Vektor $y = y^j e_j$:

$$d_y w = w^i_j y^j e_i,$$

wobei w^i_j der gemischte Tensor in $dw = w^i_j \sigma^j \wedge e_i$ ist. Falls w und y Vektorfelder sind, gilt

$$d_y w - d_w y = \mathscr{L}_y w = -\mathscr{L}_w y .$$

Daraus folgt

$$v^{\bar{n}}_n = (d_{\bar{n}} v, \bar{n}) = (d_v \bar{n}, \bar{n}) - (\mathscr{L}_v \bar{n}, \bar{n}) = -(\mathscr{L}_v \bar{n}, \bar{n}),$$

da $(d_v \bar{n}, \bar{n}) = 0$; wir erhalten damit für den Ausdruck D:

$$D = (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}).$$

Zusammenfassend erhalten wir daraus mit dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial F^{n-1}} & \operatorname{on}((\bar{n} - \tilde{n}) \wedge w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}) \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)! \int\limits_{F^{n-1}} (\bar{H} - \tilde{H})(w, \bar{n})\, d\bar{A} \\ &+ (-1)^{n-1}(n-2)! \Bigg\{ \int\limits_{F^{n-1}} e^f (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))(d\bar{A} + d\tilde{A}) \\ &+ \int\limits_{F^{n-1}} e^f ((1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v(\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}))\, d\bar{A} \Bigg\}.\end{aligned}$$

Falls nun F^{n-1} geschlossen und auf F^{n-1} $\bar{H} = \tilde{H}$ ist, so ist die linke Seite sowie der erste Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung $= 0$, womit wir den folgenden Satz erhalten:

SATZ: *Falls $\bar{F}^{n-1}$ geschlossen ist und auf $\bar{F}^{n-1}$ gilt $\bar{H} = \tilde{H}$ und*

$$D = (1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) \geqslant 0,$$

so ist

$$1 - (\bar{n}, \tilde{n}) = 0, \quad \textit{also} \quad \bar{n} = \tilde{n}.$$

Falls auf $\bar{F}^{n-1}$ aber überall $(1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) \leqslant 0$ ist, so betrachten wir statt der Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ die Transformationsgruppe $\Phi'(t, p) = \Phi(-t, p)$; wir haben dann

$$\tilde{F}^{n-1} = \{\Phi'(-f(p), p)\; p \in \bar{F}^{n-1}\}.$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite der obigen Integralformel, das nicht verschwindet, falls $\bar{H} = \tilde{H}$, steht dann $e^{f'} = e^{-f}$ statt e^f, sonst ändert sich nichts, während im andern Integral zudem noch v durch $v' = -v$ ersetzt werden muss. Nun ist $\operatorname{div} v' = -\operatorname{div} v$ und $(\mathscr{L}_{v'}(\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) = -(\mathscr{L}_v (\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n})$; wir erhalten also das Resultat $\bar{n} = \tilde{n}$ auch für diesen Fall.

Aus $\bar{n}=\tilde{n}$ folgt aber, da $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n$,

$$e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} = \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_{n-1}$$

und

$$\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^{n-1} = \tilde{\sigma}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\sigma}^{n-1}$$

also

$$\underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} = \underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(n-1)}$$

Nun ist

$$\underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(n-1)} = \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} - (n-1)\, v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-2)},$$

woraus

$$v \wedge df \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = 0$$

folgt. Ausgerechnet ergibt das

$$\begin{aligned} v \wedge df \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} = {} & v^\beta f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ & + v^n f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} = 0, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} & v^n f_\alpha \sigma^\alpha \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{n-2}} \wedge e_n \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{n-2}} \\ & \qquad = (-1)^{\alpha-1}(n-2)!\, v^n f_\alpha d\bar{A} \wedge e_n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_\alpha \wedge \cdots \wedge e_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

also

$$v^n f_\alpha = 0$$

für alle α. Falls wir einen Punkt $p \notin \bar{S}$ betrachten, so ist $v^n \neq 0$, also $f_\alpha = 0$, woraus $\partial f / \partial u^\beta = 0$, also $f =$ konstant folgt. Also gilt $f =$ konstant auf $\bar{F}^{n-1} - \bar{S}$, somit $f =$ konstant auf ganz $\bar{F}^{n-1}$ wegen der Stetigkeit von f, da $\bar{S}$ nirgends dicht auf $\bar{F}^{n-1}$ vorausgesetzt wurde.

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch, dass für gewisse konforme Abbildungen, die als Spezialfall die homothetischen sowie die isometrischen Abbildungen umfassen, gilt:

$$D = (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\operatorname{div} v + (\mathscr{L}_v(\bar{n} - \tilde{n}), \bar{n}) \geqslant 0 \quad (\text{bzw.} \leqslant 0)$$

Es ist

$$\operatorname{div} v = \sum_i (d_{e_i} v, e_i) = -\sum_i (\mathscr{L}_v e_i, e_i)$$

und

$$(\mathscr{L}_v e_i)_{\bar{p}} = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* (e_i)_{\bar{p}'} - (e_i)_{\bar{p}}}{t}$$

wobei

$$\bar{p}' = \varphi_t(\bar{p}).$$

Weiterhin gilt für konforme Transformationen nach Abschnitt 3)

$$\varphi_{t*}(e_i)_{\bar{p}} = +\sqrt{\varphi(t, \bar{p})}\,(e_i)_{\bar{p}'} = \psi(t, \bar{p})\,(e_i)_{\bar{p}'}$$

wobei wir $\psi(t,p)=+\sqrt{\varphi(t,\bar{p})}$ gesetzt haben. Also ist

$$(\varphi_{-t})_*(e_i)_{\bar{p}'}=\psi(-t,\bar{p}')(e_i)_{\bar{p}},$$

und aus $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$ folgt

$$\psi(s,\bar{p}')\cdot\psi(t,\bar{p})=\psi(s+t,\bar{p})\qquad \bar{p}'=\varphi_t(\bar{p})$$

also

$$\psi(-t,p)=\frac{1}{\psi(t,\bar{p})},$$

somit

$$(\mathscr{L}_v e_i)_{\bar{p}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\psi(t,\bar{p})}-\frac{1}{\psi(0,\bar{p})}\right)(e_i)_{\bar{p}}=-\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(e_i)_{\bar{p}}.$$

Durch genaue gleiche Überlegungen erhält man auch

$$(\mathscr{L}_v\bar{n})_{\bar{p}}=-\cdot\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(\bar{n})_{\bar{p}}$$

Damit ergibt sich für konforme Transformationen

$$\begin{aligned}D&=n\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}(1-(\bar{n},\tilde{n}))-(1-(\bar{n},\tilde{n}))\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}\\&=(n-1)(1-(\bar{n},\tilde{n}))\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}.\end{aligned}$$

Es ist also $D\geqslant 0$ (bzw. $D\leqslant 0$), genau dann, wenn $\psi'(0,\bar{p})\geqslant 0$ (bzw. $\leqslant 0$). Ist nun $\Phi(t,p)$ homothetisch, so ist ψ unabhängig von $\bar{p}$, also ist $\psi'(0,\bar{p})$ auf $\bar{F}^{n-1}$ eine Konstante; ist $\Phi(p,t)$ isometrisch, so ist $\psi(t,p)\equiv 1$, also $D\equiv 0$. Damit haben wir folgenden Kongruenzsatz bewiesen:

F^{n-1} und $\bar{F}^{n-1}$ seien zwei geschlossene, orientierte Hyperflächen in einem Riemannschen Raum R^n; dabei sei F^{n-1} auf $\bar{F}^{n-1}$ mittels einer einparametrigen konformen Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ unter Erhaltung der Orientierung so abgebildet, dass

$$\bar{F}^{n-1}=\{\Phi(f(p),p)\mid p\in F^{n-1}\}$$

wobei $f(p)$ eine gegebene differenzierbare Funktion auf F^{n-1} ist. Falls dann $\bar{H}=\tilde{H}$ ist und die Menge der Punkte $\bar{p}\in\bar{F}^{n-1}$, in denen der Tangentialvektor v an die Stromlinien der Transformationsgruppe im Tangentialraum der Hyperfläche $\bar{F}^{n-1}$ liegt, nirgends dicht auf $\bar{F}^{n-1}$ ist, sowie $\psi'(0,\bar{p})\geqslant 0$ (bzw. $\leqslant 0$) überall auf $\bar{F}^{n-1}$, so ist $f(p)$ eine Konstante. Dabei ist $\psi(t,p)=\sqrt{\varphi(t,p)}$ und $\varphi(t,p)$ der in der Definition der konformen Transformationen auftretende Faktor (siehe Abschnitt 3).

5. Der Kongruenzsatz für k-dimensionale Flächen im R^n

In diesem Abschnitt bezeichne F^k eine orientierbare k-dimensionale Fläche in einem orientierbaren Riemannschen Raum R^n. Dabei sei nun, falls

$$x^i = x^i(u^\alpha) \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant k$$

die lokale Darstellung der Fläche ist, die Matrix

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$$

in jedem Punkt vom Rang k. Weiterhin wählen wir wiederum in der Umgebung jedes Punktes $p \in F^k$ n orthonormierte Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n$ so, dass $e_1, \ldots, e_k$ im Tangentialraum von F^k und $e_{k+1}, \ldots, e_n$ senkrecht zu F^k sind, damit haben wir $\sigma^{k+1} = \cdots = \sigma^n = 0$ auf F^k.

Aus

$$dP = \sum_{\alpha=1}^{k} \sigma^\alpha \wedge e_\alpha$$

folgt

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{k} = k!\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$$

wobei die Berechnung genau gleich wie bei Hyperflächen verläuft. Um auch eine Formel für die mittlere Krümmung zu bekommen, setzen wir zunächst auf F^k

$$de_i = \omega^j_{i\beta}\, \sigma^\beta \wedge e_j$$

womit wir für die e_α bekommen

$$de_\alpha = \omega^j_{\alpha\beta}\, \sigma^\beta \wedge e_j = \omega^\gamma_{\alpha\beta}\, \sigma^\beta \wedge e_\gamma + b^s_{\alpha\beta}\, \sigma^\beta \wedge e_s .$$

Dabei haben wir $\omega^s_{\alpha\beta} = b^s_{\alpha\beta}$ gesetzt, und für die Indizes soll immer $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant k$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ und $k+1 \leqslant s, t \leqslant n$ gelten. $\sum_{s=k+1}^{n} b^s_{\alpha\beta} e_s$ sind in dieser Formel die vektorwertigen Komponenten der zweiten Fundamentalform auf F^k.

Weiterhin gilt mit

$$N = e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = \sum_{s=k+1}^{n} \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge de_s \wedge \cdots \wedge e_n ,$$

also $$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = \sum_{s=k+1}^{n} \omega^\alpha_{s\beta}\, \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\beta \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}}$$
$$\wedge\, e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_{s-1} \wedge e_\alpha \wedge e_{s+1} \wedge \cdots \wedge e_n .$$

Nun folgt aus $(e_i, de_j)+(de_i, e_j)=0$, dass

$$\omega^j_{i\,k} + \omega^i_{j\,k} = 0\,,$$

also

$$\omega^\alpha_{s\,\beta} = -\,\omega^s_{\alpha\,\beta} = -\,b^s_{\alpha\,\beta}\,,$$

womit wir erhalten

$$\underbrace{dP \wedge \cdots \wedge dP}_{(k-1)} \wedge dN = (k-1)! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} \big(\sum_\alpha b^s_{\alpha\alpha}\big)\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n\,,$$
$$= k! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} H^s\, dA \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n\,.$$

In der obigen Formel haben wir den mittleren Krümmungsvektor

$$H = \frac{1}{k} \sum_\alpha (b^s_{\alpha\alpha})\, e_s$$

eingeführt.

Im folgenden seien nun F^k und $\bar{F}^k$ orientierbare k-dimensionale Flächen im Riemannschen Raum R^n, die unter Erhaltung der Orientierung durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t, p)$ so aufeinander abgebildet sind, dass

$$\bar{F}^k = \{\Phi(f(p), p) \mid p \in F^k\} \quad \text{oder} \quad F^k = \{\Phi(-f(\bar{p}), \bar{p}) \mid \bar{p} \in \bar{F}^k\}\,.$$

$\bar{S}$ bezeichne wiederum die Menge derjenigen Punkte auf $\bar{F}^k$, für die der Strömungsvektor v im Tangentialraum von $\bar{F}^k$ liegt. $\bar{S}$ soll wie bisher nirgends dicht in $\bar{F}^k$ liegen. $w(p)$ bezeichnet wieder den Vektor $e^{f(p)} \cdot v$, und die $\tilde{F}^k_p$ seien wie bisher definiert. Dann betrachten wir in Analogie zum $(n-1)$-dimensionalen Fall den Ausdruck

$$w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N})$$

und berechnen die Wirkung des Operators d auf diese Grösse. Dann wird

$$w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\bar{N} = k! \sum_{s=k+1}^{n} (-1)^{s-k} \bar{H}^s\, d\bar{A}\, w^j e_j \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_s \wedge \cdots \wedge e_n$$
$$= k!\,(-1)^{k-1} (\bar{H}, w)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\,.$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung legen wir nun das n-Bein $e_1, \ldots, e_n$ genauer fest. Wie für Hyperflächen berechnet man

$$\underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(k)} = \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k)} - k \cdot v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)}$$

somit

$$v \wedge \underbrace{d\tilde{P} \wedge \cdots \wedge d\tilde{P}}_{(k)} = v \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k)}$$

also

$$d\tilde{A} \wedge v \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_k = d\bar{A} \wedge v \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k,$$

woraus folgt, dass der Vektorraum aufgespannt von v, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k$ derselbe ist wie derjenige, aufgespannt von $v, e_1, \ldots, e_k$. In den Punkten $\bar{p} \notin \bar{S}$ wählen wir nun das n-Bein $e_1, \ldots, e_n$ so, dass $e_1, \ldots, e_{k+1}$ im Vektorraum aufgespannt von $v, e_1, \ldots, e_k$ und die $e_\alpha (1 \leqslant \alpha \leqslant k)$ im Tangentialraum von $\bar{F}^k$ liegen. Dann können wir für $s \geqslant k+2$ die $\tilde{e}_s$ so wählen, dass $\tilde{e}_s = e_s$, womit $\tilde{e}_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \tilde{n}^i e_i$ wird.

Mit diesen Festsetzungen wird

$$\tilde{N} = \tilde{e}_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n$$

und

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge d\tilde{e}_{k+1} \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ \sum_{s=k+2}^{n} w^j e_j \wedge \sigma^{\alpha_1} \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge \tilde{e}_{k+1} \wedge \cdots \wedge de_s \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Mit $d\tilde{e}_{k+1} = -b'^i_\alpha \sigma^\alpha \wedge e_i$, $de_s = \omega^i_{s\alpha} \sigma^\alpha \wedge e_i$, $i \neq s$, $s \geqslant k+2$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^k \{ w^j b'^i_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_j \wedge e_i \wedge e_{k+2} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &- w^j \omega^i_{s\alpha} \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_j \wedge \tilde{e}_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_{s-1} \\ &\wedge e_i \wedge e_{s+1} \wedge \cdots \wedge e_n \} \end{aligned}$$

In dieser Formel ist der zweite Summand rechts gleich Null, da $w^j = 0$ und $\tilde{n}^j = 0$ für $j \geqslant k+2$ und zudem $i \neq s$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^{k-1} w^{k+1} b'^\beta_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_\beta \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ (-1)^k w^\alpha b'^{k+1}_\alpha \sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{k-1}} \wedge \sigma^\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_{k-1}} \wedge e_\alpha \wedge e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^{k-1} (k-1)!\, w^{k+1} (\sum_\alpha b'^\alpha_\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ (-1)^k (k-1)!\, b'^{k+1}_\alpha w^\alpha\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt wiederum im R^n

$$d\tilde{e}_{k+1} = -b'^i_j \sigma^j \wedge e_i = -\tilde{b}^i_j \tilde{\sigma}^j \wedge e_i,$$

zudem ist $(e_{k+2}, \ldots, e_n) = (\tilde{e}_{k+2}, \ldots, \tilde{e}_n)$ und $\tilde{b}^{k+1}_{k+1} = 0$, woraus man

$$\sum_\alpha b'^\alpha_\alpha + b'^{k+1}_{k+1} = \sum_\alpha \tilde{b}^\alpha_\alpha = k \tilde{H}^{k+1}$$

erhält, wobei $\tilde{H}^{k+1}$ die $(k+1)$. Komponente von $\tilde{H}$ in der Darstellung

$$\tilde{H} = \tilde{H}^i e_i$$

ist. Zusammenfassend haben wir damit gezeigt

$$\begin{aligned} w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge d\tilde{N} &= (-1)^{k-1} k!\,(w, e_{k+1})\,(\tilde{H}, \tilde{e}_{k+1})\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ (-1)^k (k-1)!\, w^j b_j'^{k+1}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung verläuft nun gleich wie bei Hyperflächen. Aus

$$v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(n-1)} = (k-1)!\,(d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_k - d\tilde{A} \wedge \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_k)$$

folgt

$$v \wedge df \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) = (k-1)!\,(d\bar{A} + d\tilde{A})(1 - (\bar{n}, \tilde{n})) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

wobei wir $\bar{n}$ für e_{k+1} und $\tilde{n}$ für $\tilde{e}_{k+1}$ gesetzt haben. Ausserdem ist mit

$$dv = v_\alpha^i \sigma^\alpha \wedge e_i$$

$$dv \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge \bar{N} = (k-1)!\,(\sum_\alpha v_\alpha^\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

und

$$\begin{aligned} dv \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge \tilde{N} &= (k-1)!\,(\sum_\alpha v_\alpha^\alpha)\, \tilde{n}^{k+1}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &- (k-1)!\, \tilde{n}^\alpha v_\alpha^{k+1}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Mit $dw = e^f\, dv + e^f\, df \wedge v$ folgt daraus

$$\begin{aligned} dw \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) &= e^f (k-1)! \cdot (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\,(\sum_\alpha v_\alpha^\alpha)\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ e^f (k-1)! \cdot \tilde{n}^\alpha v_\alpha^{k+1}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &+ e^f (k-1)! \cdot (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\,(d\bar{A} + d\tilde{A}) \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Fassen wir nun diese Rechnungen zusammen. Wir haben

$$\begin{aligned} &d(w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) \\ &\quad = dw \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge (\bar{N} - \tilde{N}) + (-1)^{k-1}\, w \wedge d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P} \wedge d(\bar{N} - \tilde{N}), \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} &d(w \wedge \underbrace{d\bar{P} \wedge \cdots \wedge d\bar{P}}_{(k-1)} \wedge (\bar{N} - \tilde{N})) \\ &\quad = k!\,(w, \bar{n})\,\{(\bar{H}, \bar{n}) - (\tilde{H}, \tilde{n})\}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (k-1)!\, e^f (1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\,(d\bar{A} + d\tilde{A})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &\quad + (k-1)!\, e^f \{(1 - (\bar{n}, \tilde{n}))\,(\sum_\alpha v_\alpha^\alpha) + \tilde{n}^\alpha v_\alpha^{k+1} + v^j b_j'^{k+1}\}\, d\bar{A} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $D=(1-(\bar{n},\tilde{n}))\,(\sum_\alpha v^\alpha_\alpha)+\tilde{n}^\alpha v^{k+1}_\alpha+v^j b'^{k+1}_j$ lässt sich wieder umformen zu

$$D=(1-(\bar{n},\tilde{n}))\,(\sum_{j=1}^{k+1} v^j_j)+(\mathscr{L}_v(\bar{n}-\tilde{n}),\bar{n})$$

und wird für konforme Abbildungen nach genau gleicher Rechnung wie bei Hyperflächen

$$D=k\cdot(1-(\bar{n},\tilde{n}))\cdot\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}.$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir daraus für konforme Transformationsgruppen $\Phi(t,p)$ die folgende Integralformel:

$$\begin{aligned}\int_{\partial F^k} \mathrm{on}(w\wedge d\bar{P}\wedge\cdots\wedge d\bar{P}\wedge(\bar{N}-\tilde{N}))\\ &= k!\int_{F^k}\{(\bar{H},\bar{n})-(\tilde{H},\tilde{n})\}\,(w,\bar{n})\,d\bar{A}\\ &+(k-1)!\int_{F^k} e^f(1-(\bar{n},\tilde{n}))\left\{d\bar{A}+d\tilde{A}+k\frac{\psi'(0,\bar{p})}{\psi^2(0,\bar{p})}\,d\bar{A}\right\}.\end{aligned}$$

Falls nun F^k geschlossen ist und wir voraussetzen, dass für alle Punkte $\bar{p}\notin S$ $(\bar{H},\bar{n})=(\tilde{H},\tilde{n})$ ist und $\psi'(0,\bar{p})$ von konstantem Vorzeichen auf F^k ist, folgt aus dieser Integralformel wie bei Hyperflächen $\bar{n}=\tilde{n}$ und daraus $f(p)=\text{konst.}$ auf F^k.

Die Voraussetzung $(\bar{H},\bar{n})=(\tilde{H},\tilde{n})$ bedeutet dabei, dass die beiden mittleren Krümmungen, bezogen auf die im Vektorraum aufgespannt vom Tangentialraum an die Fläche $\tilde{F}^k_p$ bzw. F^k_p und dem Strömungsvektor v liegenden Normalen, gleich sind.

Zusammenfassend haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

F^k und $\bar{F}^k$ seien zwei geschlossene, orientierte k-dimensionale Flächen in einem Riemannschen Raum R^n, die durch eine einparametrige Transformationsgruppe $\Phi(t,p)$ unter Erhaltung der Orientierung mit Hilfe einer Funktion $f(p)$ auf F^k so aufeinander abgebildet sind, dass

$$\bar{F}^k=\{\Phi(f(p),p)\mid p\in F^k\};$$

zudem seien zu jedem Punkt $p_0\in F^k$ Flächen $\tilde{F}^k_{p_0}$ folgendermassen definiert:

$$\tilde{F}^k_{p_0}=\{\Phi(f(p_0),p)\mid p\in F^k\}$$

$\bar{H}$ und $\tilde{H}$ seien die entsprechenden mittleren Krümmungsvektoren in $\bar{p}$, S sei die Menge der Punkte $\bar{p}$, in denen der Tangentialvektor v an die Stromlinien $\Phi(t,\bar{p})-\varepsilon<t<+\varepsilon$ im Tangentialraum von $\bar{F}^k$ liegt. In den Punkten $\bar{p}\notin S$ seien $\bar{n}$ bzw. $\tilde{n}$ die Normalen an die Fläche $\bar{F}^k$ bzw. $\tilde{F}^k_p$, die im Vektorraum aufgespannt von den Tangentialvektoren von F^k und dem Vektor v liegen.

Falls dann $\bar{S}$ *nirgends dicht auf* $\bar{F}^k$ *liegt sowie* $(\bar{H}, \bar{n}) = (\tilde{\bar{H}}, \tilde{n})$ *für jeden Punkt* $\bar{p} \notin \bar{S}$ *gilt, und* $\Phi(t, p)$ *eine konforme Transformationsgruppe mit* $\psi'(0, \bar{p}) \geqslant 0$ *(bzw.* $\leqslant 0$*) auf* F^k *ist, wobei* $\psi(t, p) = \sqrt{\varphi(t, p)}$ *und* $\varphi(t, p)$ *der in der Definition der konformen Abbildung auftretende Faktor ist, so ist* $f(p) = konstant$, *d.h.* F^k *und* $\bar{F}^k$ *sind kongruent bezüglich der Transformationsgruppe* $\Phi(t, p)$.

LITERATUR

[1] H. Hopf und K. Voss, *Ein Satz aus der Flächentheorie im Grossen*, Archiv der Mathematik *3* (1952), 187–192.

[2] K. Voss, *Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen*, Math. Annalen *131* (1956), 180–218.

[3] A. Aeppli, *Einige Ähnlichkeits- und Symmetriesätze für differenzierbare Flächen im Raum*. Comment. Math. Helv. *33* (1959), 174–195.

[4] Y. Katsurada, *Some Congruence Theorems for Closed Hypersurfaces in Riemann spaces*, I, Comment. Math. Helv. *43* (1968), 176–194.

[5] H. Flanders, *Development of an Extended Exterior Differential Calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. *75* (1953), 311–326.

[6] R. E. Stong, *Some Differential Geometric Properties of Submanifolds of Euclidean Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. *12* (1961), 343–349.

[7] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry* (Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964).

Eingegangen den 7. Mai 1968