Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 44 (1969)

Artikel: Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume.
Autor: Ogg, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33760

Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume

von E. OGG

Einleitung

Seien k ein kommutativer Körper, E ein k-Vektorraum und $\Phi: E \times E \to k$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Viele unter den allereinfachsten Fragen zur „linearen Algebra" eines Paares (E, Φ) sind noch unbeantwortet im Falle unendlicher (algebraischer) Dimension von E. Wir beweisen in diesem Beitrag den folgenden

SATZ: *E sei eingebettet in einen Vektorraum $\bar{E}$ mit orthogonaler Basis bezüglich $\bar{\Phi}: \bar{E} \times \bar{E} \to k$. $\bar{\Phi}$ sowie $\bar{\Phi}|_{E \times E} = \Phi$ seien nicht ausgeartet. Ist F ein festes lineares Komplement von G bezüglich $E (F \oplus G = E)$, dann existiert ein Komplement F_0 von G in E derart, dass $F_0 \subset F^{\perp\perp}$ (der Biorthogonalraum von F in E) und $F_0^{\perp_E \perp_E} \cap E = F_0$.*

Als Anwendung zu totalisotropen Unterräumen $F (F \subset F^{\perp})$ eines Raumes E mit orthogonaler Basis erhalten wir das

KOROLLAR 1: *Sei E ein Raum mit orthogonaler Basis bezüglich der nicht ausgearteten Bilinearform $\bar{\Phi}$. Besitzt der Unterraum G von E ein totalisotropes Komplement F in E, dann besitzt G auch ein orthogonal abgeschlossenes, totalisotropes Komplement in E.*

Schliesslich ergibt sich aus dem Beweis auch noch das KOROLLAR 2: *(E, Φ) sei wie im Korollar 1. Für jeden Unterraum F von E gilt:* $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$.

Die letzte Behauptung ist falsch, wenn man die Voraussetzung über die Existenz einer für Φ orthogonalen Basis von E fallen lässt. Wir verweisen noch auf die Arbeiten [2] und speziell für die Anwendungen zum Korollar 1 auf [1]. Dem Beweise des Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Gegeben sei ein Vektorraum E mit $(e_\iota)_{\iota \in J}$ als Basis. Zu jedem $x = \sum_\iota \xi_\iota e_\iota \in E$ betrachten wir die endliche Indexmenge $M_x = \{\iota \in J \mid \xi_\iota \neq 0\}$.

LEMMA: *Ist H ein linearer Unterraum von E, dann existiert eine Basis $(h_\kappa)_{\kappa \in I}$ von H mit $M_{h_\kappa} \not\subset \bigcup_{\substack{\nu \in I \\ \nu \neq \kappa}} M_{h_\nu}$ für alle $\kappa \in I$.*

Beweis: Der Indexmenge J fügen wir einen neuen Index $\mathcal{O}$ hinzu. $J_0 = J \cup \{\mathcal{O}\}$ sei wohlgeordnet, und $\mathcal{O}$ sei das kleinste Element. Wir definieren eine Abbildung $\mu: E \to J_0$ wie folgt: Jedem $x \in H$ und $x \neq 0$ ordnen wir den grössten Index in M_x zu. $\mu(0) = \mathcal{O}$. Ist $x \notin H$ und $M_x \cap \mu(H) \neq \emptyset$, dann sei $\mu(x)$ der grösste Index in $M_x \cap \mu(H)$. Im Falle $M_x \cap \mu(H) = \emptyset$ setzen wir $\mu(x) = \mathcal{O}$.

Wir beweisen zunächst: Zu jedem festen $x \in E$ gibt es ein x' mit $x' \equiv x (H)$ und

$\mu(x')=\mathcal{O}$. Ist $\mu(x)=\mathcal{O}$, dann kann $x'=x$ gesetzt werden. Sei also $\mu(x)\neq\mathcal{O}$. Dann existiert ein $y_1\in H$ mit $\mu(x)=\mu(y_1)$. Wir bilden $x_1=x-\lambda_1 y_1$, wobei wir λ_1 so wählen können, dass $\mu(x)\notin M_{x_1}$, d.h. $\mu(x_1)<\mu(x)$. Ist $\mu(x_1)=\mathcal{O}$, dann setzen wir $x'=x_1$. Im Falle $\mu(x_1)\neq\mathcal{O}$ kann das Verfahren fortgesetzt werden. Das Verfahren muss nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn sonst gäbe es in J_0 eine nicht abbrechende, absteigende Folge $\mu(x)>\mu(x_1)>\mu(x_2)>\cdots$, die kein kleinstes Element besitzt. Dies widerspricht aber der Wohlordnung von J_0. Für ein gewisses n muss also $\mu(x_n)=\mathcal{O}$ sein, wobei $x_n=x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i$ und $y_i\in H$. Somit ist $x_n\equiv x(H)$, und wir können $x'=x_n$ setzen.

Wir zeigen nun: Zu jedem $\kappa\in\mu(H)$ und $\kappa\neq\mathcal{O}$ existiert ein $z\in H$ mit $\mu(z)=\kappa$ und $M_z\cap\{\iota\in\mu(H)\mid\iota<\kappa\}=\emptyset$. $H_\kappa=\{y\in H\mid\mu(y)<\kappa\}$ ist ein linearer Unterraum von H. Sei $z'\in H$ mit $\mu(z')=\kappa$. Indem wir die obige Überlegung auf H_κ und z' anwenden, erhalten wir ein z mit $z\equiv z'(H_\kappa)$ und $M_z\cap\mu(H_\kappa)=\emptyset$, und es ist $\mu(z)=\mu(z')=\kappa$. Zu jedem $\kappa\in I=\mu(H)\setminus\{\mathcal{O}\}$ bilden wir $A_\kappa=\{y\in H\mid\mu(y)=\kappa,\ \iota\notin M_y$ für alle $\iota\in\mu(H)$ und $\iota<\kappa\}$. $A_\kappa\neq\emptyset$. Nach dem Auswahl-axiom kann in jedem A_κ ein h_κ gewählt werden. Diese h_κ haben die Eigenschaft, dass $\iota\notin M_{h_\kappa}$ für alle $\iota\in\mu(H)$, $\iota\neq\kappa$ und $\mu(h_\kappa)=\kappa$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $(h_\kappa)_{\kappa\in I}$ eine Basis von H ist. $(h_\kappa)_{\kappa\in I}$ ist jedenfalls linear unabhängig. Sei $x\in H$ beliebig und $H_0=k(h_\kappa)_{\kappa\in I}$. $H_0\subset H$. Nach obiger Überlegung existiert ein x' mit $x'\equiv x(H_0)$ und $M_{x'}\cap\mu(H_0)=\emptyset$. Wäre $x'\neq 0$, dann hätte man $\mu(x')\in M_{x'}$ und somit $M_{x'}\cap\mu(H_0)=M_{x'}\cap\mu(H)\neq\emptyset$. Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist $x'=0$, d.h. $x\in H_0$. Q.E.D.

Beweis des Satzes: Sei $(e_\iota)_{\iota\in J}$ eine Basis von $\bar{E}$, $(f_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Basis von F und $H=F^{\perp\perp}\cap G$. Wir wählen in H eine Basis $(h_\iota)_{\iota\in I}$ wie im Hilfssatz. Es ist dann also $\mu(h_\iota)=\iota$, $\mu(H\setminus\{0\})=I\subset J$, $\nu\notin M_{h_\iota}$ für alle $\nu\in I$ und $\nu\neq\iota$. Wir setzen nun $f'_\kappa=f_\kappa-\sum_\iota\lambda_{\kappa\iota}h_\iota$. Da $\bar{\Phi}(e_\nu,h_\nu)\neq 0$, können die $\lambda_{\kappa\iota}$ so gewählt werden, dass $\bar{\Phi}(e_\nu,f'_\kappa)=\bar{\Phi}(e_\nu,f_\kappa)-\lambda_{\kappa\nu}\bar{\Phi}(e_\nu,h_\nu)=0$ für alle $\nu\in I$. Dabei ist $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$ nur für endlich viele $\nu\in I$. Sei $F_0=k(f'_\kappa)_{\kappa\in K}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der f_κ von den h_ι ist $(f'_\kappa)_{\kappa\in K}$ eine Basis von F_0 und $F_0\cap G=(0)$. Ferner ist $F_0\oplus G=E$ und $F_0\subset F^{\perp\perp}$.

Wir behaupten jetzt: $F_0^{\perp E\perp E}\cap E=F_0$. Man hat $F_0\subset F^{\perp E\perp E}\cap E$, $F_0^{\perp}\subset F_0^{\perp E}$ und daher $F_0^{\perp E\perp E}\subset F_0^{\perp\perp E}$, $F_0^{\perp E\perp E}\cap E\subset F_0^{\perp\perp E}\cap E=F_0^{\perp\perp}\subset F^{\perp\perp}$. Sei $x\in F_0^{\perp E\perp E}\cap E$. Wäre $x\notin F_0$, dann gäbe es eine Zerlegung $x=x_1+x_2$ mit $x_1\in F_0$, $x_2\in G$, $x_2\neq 0$. Da $x_2\in H\setminus\{0\}$, wäre $\mu(x_2)=\iota_0\in I$, also $\bar{\Phi}(e_{\iota_0},x_2)\neq 0$. Andererseits ist $\bar{\Phi}(e_{\iota_0},f'_\kappa)=0$ für alle $\kappa\in K$. Es ist $e_{\iota_0}\in F_0^{\perp E}$, somit $x_2\notin F_0^{\perp E\perp E}$, $x\notin F_0^{\perp E\perp E}\cap E$. Dies ist ein Widerspruch. Q.E.D.

Das *Korollar* 2 folgt aus dem Beweise des Satzes, wobei E und $\bar{E}$, und damit Φ und $\bar{\Phi}$ zusammenfallen. Für jedes $\nu\in I$ ist $\Phi(e_\nu,h_\nu)\neq 0$. Da $h_\nu\in F^{\perp\perp}$, existiert ein $\kappa\in K$ mit $\Phi(e_\nu,f_\kappa)\neq 0$, d.h. zu jedem $\nu\in I$ gibt es ein $\kappa\in K$ mit $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$. Andererseits gibt es zu jedem $\kappa\in K$ höchstens endlich viele ν mit $\lambda_{\kappa\nu}\neq 0$. Ist $\dim F=\operatorname{card}K\geqslant\aleph_0$, dann gilt also: $\operatorname{card}I\leqslant\operatorname{card}K\cdot\aleph_0=\operatorname{card}K$. Wegen $F^{\perp\perp}=F^{\perp\perp}\cap(F\oplus G)=F\oplus(F^{\perp\perp}\cap G)$

$=F\oplus H$ ist $\dim F^{\perp\perp}=\operatorname{card}K+\operatorname{card}I=\operatorname{card}K$ und daher $\dim F^{\perp\perp}=\dim F$. Für endlichdimensionale Unterräume ist diese Beziehung wohlbekannt.

Das *Korollar* 1 ergibt sich aus der Bemerkung, dass für ein totalisotropes F der Unterraum $F^{\perp\perp}$ ebenfalls totalisotrop ist. Denn aus $F\subset F^{\perp}$ folgt $F^{\perp\perp}\subset(F^{\perp})^{\perp\perp}=(F^{\perp\perp})^{\perp}$.

LITERATUR

[1] GROSS, H. und V. H. MILLER, *Continuous Forms in Infinite Dimensional Spaces*, Comment. Math. Helv. *42* (1967), 132–170.

[2] KAPLANSKY, I., *Forms in Infinite-Dimensional Spaces* An. Acad. Brasil. Ci. *22* (1950), 1–17.

Eingegangen den 19. März 1968