

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	43 (1968)
<b>Artikel:</b>	Une Caractérisation de l'algèbre des mesures de Radon sur un groupe compact
<b>Autor:</b>	Derighetti, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-32933">https://doi.org/10.5169/seals-32933</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Une Caractérisation de l'algèbre des mesures de Radon sur un groupe compact

par A. DERIGHETTI

Nous nous proposons dans ce travail d'obtenir une caractérisation de l'algèbre  $M(G)$  des mesures de Radon d'un groupe compact  $G$ . La multiplication, dont est munie cette algèbre, sera la convolution des mesures.

L'espace vectoriel  $M(G)$  est le dual de l'espace de toutes les fonctions continues sur  $G$ , doté de la topologie de la convergence uniforme sur  $G$ . Considérons sur  $M(G)$  d'une part la topologie forte et d'autre part la topologie faible: munie de la première,  $M(G)$  est une algèbre de Banach dont la structure est très complexe, munie de la seconde  $M(G)$  est une algèbre localement convexe. C'est en tenant compte de ces deux aspects présentés par  $M(G)$  que nous pourrons obtenir sa caractérisation.

On se donnera donc une algèbre réelle  $Z$  munie de deux structures topologiques qui en font respectivement une algèbre de Banach et une algèbre localement convexe, et on indiquera des conditions portant sur  $Z$  et les deux structures en question pour qu'il existe un groupe compact  $G$  tel que  $Z$  soit isomorphe, dans un sens qui sera précisé, à  $M(G)$  (Théorème 7).

Dans le cas d'un groupe abélien localement compact certains résultats ont été obtenus par M. A. RIEFFEL ([11]). Le point de vue adopté ici est tout à fait différent. Nous nous sommes efforcé, en particulier d'utiliser des méthodes applicables au cas d'une algèbre non nécessairement commutative.

Cette étude était déjà commencée lorsque M. A. RIEFFEL m'a aimablement fait parvenir les résultats qu'il avait obtenus dans le cas d'une algèbre d'un groupe fini (publiés depuis [12]). On peut ainsi, dans une certaine mesure, considérer notre travail comme une généralisation du cas du groupe fini.

Ce travail est divisé en trois parties. La première est de caractère introductif, dans la seconde nous obtenons (théorème 4) une caractérisation de l'espace des mesures de Radon sur un compact (le problème analogue pour un espace localement compact est également traité). Ce résultat est le pendant d'un théorème bien connu utilisé par M. A. RIEFFEL pour le cas du groupe fini, à savoir que tout espace vectoriel réticulé archimédien de dimension  $n$  (la structure réticulée étant supposée compatible avec la structure d'espace vectoriel) est isomorphe à  $\mathbf{R}^n$ . Dans la troisième partie nous essayons de donner un élément de réponse au problème posé (Théorème [7]).

Je tiens ici à remercier vivement M. le professeur Dr. C. BLATTER pour tous les conseils qu'il m'a prodigués et M. le professeur Dr. A. PFLUGER auquel je dois tant.

## I. Définitions et notations

Dans tout ce qui suit,  $Z$  est un espace vectoriel réel muni d'une topologie  $\tau$  d'espace localement convexe séparée. Une partie des concepts qui vont être introduits possède un sens dans des situations plus générales telles que: espaces localement convexes complexes, espaces vectoriels topologiques ou même espaces vectoriels tout court. Nous nous contenterons de les exposer dans le cadre de l'hypothèse ci-dessus.

On convient, une fois pour toutes, que l'indice  $i$  va de 1 à 2.

### I.1. Quelques définitions et propriétés se rapportant à des convexes de $Z$

Si  $K$  est une partie non vide de  $Z$ ,  $\text{co}(K)$  désigne l'enveloppe convexe de  $K$ ,  $\text{co}^-(K)$  l'enveloppe convexe fermée de  $K$ . Si  $K$  est un convexe,  $E(K)$  est l'ensemble des points extrémaux de  $K$ .

**DÉFINITION 1.** Soit  $C$  un cône de  $Z$ , on dit que  $B$  est une base du cône  $C$  si  $B \subset C$ ,  $B \neq \emptyset$ ,  $B$  est convexe,  $0 \notin B$  et pour tout  $x \in C - \{0\}$  il existe  $\lambda > 0$  et  $b \in B$  avec  $x = \lambda b$ ,  $\lambda$  et  $b$  étant uniques.

Si  $f$  est une fonctionnelle linéaire sur  $Z$  telle que  $x \in C - \{0\}$  entraîne  $f(x) > 0$ , dans ce cas  $f^{-1}(1) \cap C$  est une base du cône  $C$  et inversement, toute base  $B$  est susceptible de cette représentation. Si  $Z = C - C$  cette représentation est unique.

**DÉFINITION 2.** La fonctionnelle  $f$  ainsi définie sera appelée la fonctionnelle associée à la base  $B$ .

Si  $C - C \neq Z$  il n'y a pas univocité cependant les restrictions de ces fonctionnelles au cône  $C$  sont identiques. Par abus de langage nous parlerons, même dans ce cas, de la fonctionnelle associée à la base  $B$ .

A l'aide de cette notion on montre facilement que si  $\{b_j\}_{j=1}^n \subset B$  et  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subset \mathbf{R}$  sont tels que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = 0$ , alors  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 0$ . (1)

**PROPOSITION 1.** Si  $B$  et  $B'$  sont deux bases compactes d'un cône  $C$  de  $Z$ , alors,  $E(B)$  et  $E(B')$ , munis respectivement des topologies induites sont homéomorphes.

Pour démontrer cette proposition, on prouve en premier lieu que  $B$  et  $B'$  sont homéomorphes.

Il existe une bijection  $\varphi$  de  $B$  sur  $B'$ .

Tout  $b \in B$  admet la représentation univoque  $b = \lambda' b'$  où  $\lambda' > 0$  et  $b' \in B'$ . On définit ainsi  $\varphi: B \rightarrow B'$  par  $\varphi(b) = b'$ . En vertu de I.1. Def. 1  $\varphi$  est une bijection. Il est immédiat que c'est aussi une bijection de  $E(B)$  sur  $E(B')$ . Il suffit donc de montrer que  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $B$  sur  $B'$ . Il existe une base compacte  $B''$  telle que sa fonctionnelle associée  $f''$  est  $\tau$ -continue. Pour le prouver considérons la fonctionnelle  $f''$   $\tau$ -continue séparant strictement 0 du convexe compact  $B$ . On a donc un  $\alpha > 0$  tel que

pour tout  $b \in B$ ,  $f''(b) \geq \alpha$ .  $f''^{-1}(\alpha) \cap C$  est donc une base fermée  $B''$  de  $C$  (tout cône possédant une base compacte est fermé c.f. [5] Theorem 3). De  $f''^{-1}(\alpha) \cap C \subset [0, 1] B$  on tire que  $B''$  est compacte.  $f''$  est ainsi la fonctionnelle associée à la base compacte  $B''$ . Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement les applications de  $B$  dans  $B''$  et de  $B'$  dans  $B''$  définies comme ci-dessus, on a ainsi  $\varphi = \varphi_2^{-1} \varphi_1$ . De  $f'' > 0$  sur  $B$  résulte que  $\varphi_1(b) = (\alpha/f''(b))b$  est une bijection continue de  $B$  sur  $B''$ , c'est donc un homéomorphisme. Il en est de même de  $\varphi_2$ . On en conclut que  $\varphi = \varphi_2^{-1} \varphi_1$  est aussi un homéomorphisme.

## I.2. *A-L-espaces*

Soit  $W$ , un espace de Banach pour la norme  $x \mapsto \|x\|$ , muni d'une structure d'espace de Riesz et tel que  $(x, y) \mapsto x \vee y$  et  $(x, y) \mapsto x \wedge y$  soient des applications continues de  $W \times W$  dans  $W$  ( $W$  étant muni de la topologie de la norme). On suppose d'autre part que  $W$  satisfasse aux conditions suivantes:

(A)  $x \wedge y = 0$  entraîne  $\|x + y\| = \|x - y\|$

(L)  $x, y \geq 0$  entraînent  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Un tel espace est appelé *A-L-espace*.

D'après un résultat classique de S. KAKUTANI ([7]), à tout *A-L-espace*  $W$  on peut associer un espace localement compact  $X$  et une mesure  $\mu$  sur  $X$  tels que  $W$  et  $L^1(X, \mu)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d'*A-L-espace*.

## I.3. *Mesures de Radon*

Soit  $K$  un compact. On désigne par  $C(K)$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions réelles continues sur  $K$ .  $M(K)$  et  $M^+(K)$  sont respectivement l'espace des mesures de Radon sur  $K$  et le cône des mesures positives.

$q(k)$ , où  $k \in K$ , est la mesure de masse 1 concentrée au point  $k$ . On rappelle que  $q$  est un homéomorphisme de  $K$  dans  $M(K)$  muni de la topologie faible.

Une fonctionnelle linéaire  $\xi$  sur  $C(K)$  est un homomorphisme, pour les structures respectives d'espace de Riesz de  $C(K)$  et de  $\mathbf{R}$ , si et seulement s'il existe une constante  $\alpha \geq 0$  et  $k \in K$  avec  $\xi = \alpha q(k)$  ([8] Theorem 8). Or  $\xi$ , fonctionnelle linéaire positive, est du type ci-dessus si et seulement si pour toute fonctionnelle linéaire  $\mu$  telle que  $0 \leq \mu \leq \xi$ , il existe un réel  $\alpha \geq 0$  avec  $\mu = \alpha \xi$  ([9] 24. 2. démontre ce résultat pour une situation plus générale). D'un point de vue plus géométrique ces fonctionnelles ne sont autres que les points appartenant aux génératrices extrémales du cône  $M^+(K)$ .

Si  $X$  est un espace localement compact  $C_{00}(X)$  désigne l'espace vectoriel de toutes les fonctions réelles continues à support compact et  $C_u(X)$  celui de toutes les fonctions réelles continues et bornées sur  $X$ . Munis de la norme:

$f \mapsto \|f\| = \sup \{|f(x)| \mid x \in X\}$ ,  $C_{00}(X)$  devient un espace normé et  $C_u(X)$  un espace de Banach. Le dual  $M^1(X)$  de  $C_{00}(X)$  est l'espace des mesures de Radon bornées sur  $X$ .

### I. 4. Groupe compact

Soit  $G$  un groupe compact dont  $e$  est l'élément unité.  $M(G)$  est muni d'une structure d'algèbre le produit de deux mesures  $\lambda, \mu \in M(G)$  étant défini par  $\lambda * \mu(\varphi) = \iint_{G \times G} \varphi(x y) d\lambda(x) d\mu(y)$  où  $\varphi \in C(G)$  et  $(x, y) \mapsto x y$  désigne le produit dans  $G$ .

Précisons encore quelques notations. Si  $f$  est une fonction sur  $G$ ,  $a \in G$ , alors  ${}_a f$  (resp.  $f_a$ ) désigne la fonction définie par  ${}_a f(x) = f(ax)$  (resp.  $f_a(x) = f(xa)$ ) pour tout  $x \in G$ , de même  $\tilde{f}$  est définie par  $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$  pour tout  $x \in G$ .  $\nu$  sera la mesure de Haar normalisée sur  $G$ .

## II. Une caractérisation de l'espace des mesures de Radon sur un compact et sur un espace localement compact

Le cas de l'espace localement compact sera ramené à celui de l'espace compact. C'est donc ce dernier qui sera traité tout d'abord.

### II.1. Caractérisation de l'espace des mesures de Radon sur un compact

L'espace que nous désirons caractériser est, en tant qu'espace de Banach, le dual fort d'un  $C(K)$ . Le théorème suivant, dû à J. LINDENSTRAUSS ([10] Theorem 6.6.), donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un Banach soit un  $C(K)$ .

**THÉORÈME 1.** *Pour qu'un espace de Banach  $V$  soit isométrique isomorphe à un espace  $C(K)$  il faut et il suffit qu'il satisfasse aux trois conditions suivantes:*

- (a) *le dual fort de  $V$  est isométrique isomorphe à un espace  $L^1(X, \mu)$  (où  $\mu$  est une mesure sur un certain espace localement compact  $X$ ),*
- (b) *la boule unité de  $V$  admet au moins un point extrémal  $h$ ,*
- (c) *l'ensemble des points extrémaux de la boule unité du dual fort de  $V$  est faiblement fermé.*

#### REMARQUE.

1. L'isométrie-isomorphie dont il est question envoie le point extrémal  $h$  de la boule unité de  $V$  sur la fonction  $1_K$ .
  2.  $V$  est muni d'une structure d'espace vectoriel ordonné, définie par le cône:  $x \geq 0$  si et seulement s'il existe  $\lambda \geq 0$  et  $u$  dans la boule unité de  $V$  tel que  $x = \lambda(h + u)$ .
  3.  $K$  n'est autre que l'ensemble des points extrémaux positifs de la boule unité du dual fort de  $V$ , ce dual étant muni de l'ordre dual de celui dont il est question dans 2..
  4. La démonstration du théorème 1 utilise seulement le fait que l'ensemble des points extrémaux positifs de la boule unité du dual fort de  $V$  est faiblement fermé.
- Si  $V$  est un espace de Banach, son dual faible est un espace localement convexe.

Le théorème suivant, dû à D. A. EDWARDS ([5] Theorem 4), constitue, dans une certaine mesure, une réciproque de cette affirmation.

**THÉORÈME 2.** *Si l'espace  $Z$  possède un cône  $C$  localement compact tel que  $C - C = Z$ , dans ces conditions,  $B$  étant une base compacte du cône  $C$ , on a:*

(i) *la jauge  $x \mapsto \|x\|$  de  $S = \text{co}(B \cup (-B))$  est une norme sur  $Z$ . Muni de cette norme,  $Z$  est un espace de Banach, cette norme est d'une part additive sur le cône  $C$  et d'autre part  $B = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}$  et  $S = \{x \in Z \mid \|x\| \leq 1\}$ .* (ii) *La topologie déduite de la norme est plus fine que  $\tau$ . Si  $B'$  est une autre base compacte,  $x \mapsto \|x\|'$  la jauge de  $\text{co}(B' \cup (-B'))$ , alors  $x \mapsto \|x\|'$  est une norme équivalente à la précédente, il en est ainsi de toute norme sur  $Z$  qui fait de  $Z$  un Banach dont la boule unité est  $\tau$ -fermée.* (iii) *Si  $V$  est l'espace des fonctionnelles linéaires sur  $Z$   $\tau$ -continues sur les ensembles norme-bornés, alors  $V$  est un sous-espace fermé du dual fort de  $Z$  et  $Z$  est isométrique isomorphe au dual fort de  $V$ .* (iv) *La topologie  $\sigma(Z, V)$  coïncide avec  $\tau$  sur le cône  $C$  et sur les ensembles norme-bornés.* (v) *Si  $f \in V$ , alors  $\|f\|_V = \text{Sup} \{ |f(b)| \mid b \in B \}$ .* (vi) *La boule unité  $Q$  de  $V$  possède un point extrémal  $h$  (qui n'est autre que la fonctionnelle  $h$  associée à la base  $B$ ).*

Nous utiliserons aussi le corollaire suivant ([5] Corollary 3): si  $Z$ , en plus des hypothèses du théorème 2 est tel que le cône  $C$  munisse  $Z$  d'une structure d'espace de Riesz, alors  $Z$ , doté de la norme définie dans le théorème précédent (i) est un  $A-L$ -espace.

**THÉORÈME 3.** *Soit  $C$  un cône définissant sur l'espace  $Z$  une structure d'espace de Riesz et possédant une base compacte dont l'ensemble des points extrémaux est fermé. On peut alors construire, de façon canonique, un compact  $K$  tel que  $Z$  et  $M(K)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d'espace de Riesz et tel que, par cet isomorphisme, le cône  $C$ , muni de la topologie induite, soit homéomorphe à  $M^+(K)$  doté de la topologie faible.*

Soit  $B$  cette base compacte: d'après le théorème 2  $Z$ , en tant qu'espace de Banach, est isomorphe au dual fort de  $V$  décrit dans ce théorème.  $Z$  est un  $A-L$ -espace, d'après le corollaire précédent, il est par suite (c.f. I.2.) isométrique isomorphe à un espace  $L^1(x, \mu)$ . Les hypothèses (a) et (b) du théorème 1 sont satisfaites. Définissons sur  $V$  un ordre partiel en nous donnant le cône

$$D = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in C\}.$$

1. L'ordre partiel dont est muni  $Z$  est dual de celui défini par  $D$ .

Il suffit de montrer que  $C = \{x \in Z \mid f(x) \geq 0 \text{ pour tout } f \in D\}$ . Si  $x \in C$ ,  $f \in D$  alors  $f(x) \geq 0$ ; inversement soit  $x \in Z$  tel que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $f \in D$ . Si  $x \notin C$ ,  $C$  étant convexe et  $\tau$ -fermé, il existe alors une fonctionnelle linéaire sur  $Z$ ,  $\tau$ -continue avec  $f(x) < \inf \{f(y) \mid y \in C\}$ .  $C$  étant un cône  $f(x) < 0$  et  $f$  est non négative sur  $C$ . Il en résulte que  $f \notin D$ . Il y a contradiction, donc  $x \in C$ .

2. Soit  $h$  le point extrémal de la boule unité  $Q$  de  $V$ , dont l'existence est garantie par le théorème 2 (vi); pour tout  $f \in V$ ,  $f \in D$  si et seulement s'il existe  $\lambda \geq 0$  et  $g \in Q$  avec  $f = \lambda(h + g)$ .

Remarquons tout d'abord que pour  $f \in V$ ,  $f \in Q$  si et seulement si  $-h \leq f \leq h$ . Ceci est une conséquence directe de  $B = h^{-1}(1) \cap C$  et de  $\|f\|_V = \text{Sup} \{ |f(b)| \mid b \in B \}$ .

Soit donc  $f \in D$ ;  $f$  peut s'écrire  $f = \|f\|_V \left( \frac{f}{\|f\|_V} - h + h \right)$ .  $\frac{f}{\|f\|_V} \in Q$  entraîne  $\frac{|f(b)|}{\|f\|_V} \leq h(b)$  sur  $B$ . On a donc:  $\left| \frac{f(b)}{\|f\|_V} - h(b) \right| = h(b) - \frac{f(b)}{\|f\|_V} \leq h(b)$  par conséquent  $\frac{f}{\|f\|_V} - h \in Q$ . Si nous posons  $\lambda = \|f\|_V$  et  $g = \frac{f}{\|f\|_V} - h$  nous obtenons la première moitié de 2..

Inversement supposons que l'on ait  $f = \lambda(h + g)$  avec  $\lambda \geq 0$  et  $g \in Q$ .  $g \in Q$  entraîne  $g(b) \geq -h(b)$  pour tout  $b \in B$ , donc  $g + h \in D$ , d'où,  $\lambda$  étant  $\geq 0$  et  $D$  un cône,  $f \in D$ .

3. L'ensemble des points extrémaux positifs de la boule unité de  $Z$  est fermé.

Il suffit de montrer que  $E(S) \cap C = E(B)$ . Il est évident que  $E(S) \cap B \subset E(B)$ . Inversement, soit  $b \in E(B)$  avec  $b = \alpha s_1 + (1 - \alpha) s_2$  où  $0 < \alpha < 1$  et  $s_i \in S$ . Les  $s_i$  admettent la représentation univoque  $s_i = \lambda_i^+ b_i^+ - \lambda_i^- b_i^-$  avec  $b_i^+, b_i^- \in B$  et  $\lambda_i^+ b_i^+ \wedge \lambda_i^- b_i^- = 0$ . De  $1 = \|b\| \leq \alpha \|s_1\| + (1 - \alpha) \|s_2\|$  il est immédiat que  $\|s_i\| = 1$ .  $\|s_i\| = \|\lambda_i^+ b_i^+ - \lambda_i^- b_i^-\| = \|\lambda_i^+ b_i^+ + \lambda_i^- b_i^-\| = \lambda_i^+ + \lambda_i^-$ , on a donc  $\lambda_i^+ + \lambda_i^- = 1$ . Or  $b = \alpha(\lambda_1^+ b_1^+ - \lambda_1^- b_1^-) + (1 - \alpha)(\lambda_2^+ b_2^+ - \lambda_2^- b_2^-)$  d'où (c.f. I.1. (1))  $1 = \alpha(\lambda_1^+ - \lambda_1^-) + (1 - \alpha)(\lambda_2^+ - \lambda_2^-)$ .  $\lambda_i^+, \lambda_i^- \geq \geq 0$  et  $\lambda_i^+ + \lambda_i^- = 1$  entraînent  $\lambda_i^+ - \lambda_i^- \leq 1$  d'où  $\lambda_i^+ - \lambda_i^- = 1$  et par conséquent  $\lambda_i^+ = 1$ ,  $\lambda_i^- = 0$ . Il en résulte  $b = \alpha b_1^+ + (1 - \alpha) b_2^+$ .  $b \in E(B)$  implique  $b_1^+ = b_2^+$  d'où  $s_1 = s_2$ , c'est-à-dire  $b \in E(S)$ , on a donc bien  $E(B) = E(S) \cap C$ .

Les hypothèses du théorème 1, compte tenu de la remarque 4, sont satisfaites. Il existe par conséquent un compact  $K$  tel que  $V$  soit isométrique isomorphe à  $C(K)$ .  $K$  étant, par exemple,  $E(B)$ . Il en résulte que le dual fort de  $V$  est isométrique isomorphe à  $M(E(B))$ .

L'isométrie-isomorphie de  $V$  sur  $C(K)$  envoie  $h$  sur  $1_K$  et la structure d'espace de Riesz dont est naturellement muni  $C(K)$  peut être décrite par le cône suivant:

$$\{f \in C(K) \mid \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ et } g \text{ de norme non supérieure à 1 avec } f = \lambda(g + 1_K)\}$$

On en déduit que l'application ci-dessus est une bijection de  $D$  sur le cône des fonctions non négatives de  $C(K)$ . Le cône  $C$  étant le cône d'ordre dual de celui de  $D$ , il en résulte l'existence d'une bijection du cône  $C$  sur le cône  $M^+(K)$  des mesures positives;  $C$  définissant sur  $Z$  une structure d'espace de Riesz, la bijection en question est un isomorphisme pour les structures respectives d'espace de Riesz de  $Z$  et de  $M(K)$ .  $V$  et  $C(K)$  étant isométriques isomorphes leurs duals faibles respectifs sont homéomorphes. D'après le théorème 2 (iv) la topologie  $\sigma(Z, V)$  coïncide sur  $C$  avec  $\tau$ . Par conséquent

$C$  et  $M^+(K)$ , munis respectivement de la topologie  $\tau$  et de la topologie faible, sont homéomorphes.

Si nous choisissons une autre base compacte  $B'$  et si on munit  $Z$  de la norme déduite de  $B'$  (donc de la jauge de  $\text{co}(B' \cup (-B'))$ ,  $E(B')$  étant, d'après la proposition 1, fermé,  $Z$  et  $M(E(B'))$  seront, en tant qu' $A$ -L-espaces, isomorphes; par la même application, le cône  $C$ , muni de la topologie  $\tau$ , sera homéomorphe à  $M^+(E(B'))$  doté de la topologie faible. D'après cette même proposition 1,  $E(B)$  et  $E(B')$  sont homéomorphes, il en résulte que  $M(E(B))$  et  $M(E(B'))$  sont isomorphes comme  $A$ -L-espaces et homéomorphes comme espaces localement convexes, d'où le caractère univoque de la construction considérée.

**THÉORÈME 4.** *Si  $Z$  satisfait aux hypothèses du théorème 3 et si, pour l'ordre défini par le cône  $C$ ,  $Z$  est un  $A$ -L-espace dont la boule unité est  $\tau$ -fermée et dont la norme est  $\tau$ -continue sur le cône  $C$ , il existe alors un compact  $K$  déterminé à une homéomorphie près tel que  $Z$  et  $M(K)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d' $A$ -L-espace et tel que le cône  $C$ , muni de la topologie  $\tau$ , soit homéomorphe à  $M^+(K)$ , doté de la topologie faible.*

Si la norme dont est muni  $Z$  est la jauge d'un convexe du type  $S = \text{co}(B \cup (-B))$  où  $B$  est une base compacte du cône  $C$ , alors  $Z$  et  $M(E(B))$  satisfont aux conclusions du théorème 3. Dans ce cas on voit sans peine que  $Z$  et  $M(E(B))$  sont aussi isomorphes pour leurs structures respectives d' $A$ -L-espace. Si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux compacts tel que  $M(K_1)$  et  $M(K_2)$  soient isométriques isomorphes et tels que leurs cônes positifs  $M^+(K_1)$  et  $M^+(K_2)$ , respectivement munis des topologies faibles, soient (par la même application) homéomorphes, il est clair que  $K_1$  et  $K_2$  sont homéomorphes. Pour démontrer le théorème il suffit donc de prouver que la norme  $x \mapsto \|x\|$  est la jauge d'un convexe du type  $S = \text{co}(B \cup (-B))$ , où  $B$  est une base compacte du cône  $C$ .

Désignons par  $J$  la boule unité de  $Z$ . Soit  $B = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}$ .

1.  $B$  est une base du cône  $C$ .

$B$  est non vide;  $0 \notin B$ ; soient  $b_1 \in B$  et  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2 \in C$  et  $\|\alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2\| = 1$  donc  $\alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2 \in B$ ,  $B$  est donc convexe; il est d'autre part évident que tout  $x \in C - \{0\}$  admet la représentation univoque  $x = \lambda b$  avec  $\lambda > 0$  et  $b \in B$ .

2.  $B$  est  $\tau$ -compacte.

La boule  $J$  étant  $\tau$ -fermée, la norme dont est muni  $Z$  est équivalente, d'après le théorème 2 (ii), à une norme  $x \mapsto p(x)$  jauge d'un convexe  $S'$  du type  $\text{co}(B' \cup (-B'))$  où  $B'$  est une base compacte du cône  $C$ .  $S'$  étant l'image du compact  $B' \times B' \times [0, 1]$  par l'application continue  $(b_1, b_2, \lambda) \mapsto \lambda b_1 - (1 - \lambda) b_2$  il en résulte que  $S'$  est  $\tau$ -compacte. La boule  $J$  est donc contenue dans un ensemble  $\tau$ -compact; étant  $\tau$ -fermée, elle est  $\tau$ -compacte. Or  $B = \{x \in C \mid \|x\| = 1\} \subset J$  est  $\tau$ -fermée donc  $\tau$ -compacte.

3.  $J=S$ .

$S=\{\lambda b-\lambda' b' \mid \lambda, \lambda' \geq 0, b, b' \in B, \lambda+\lambda'=1\}$  et  $0 \in S$  entraînent  $S=\{\lambda b-\lambda' b' \mid \lambda, \lambda' \geq 0, b, b' \in B, \lambda+\lambda' \leq 1\}$ . Si  $d \in J$  il existe alors  $\lambda^+, \lambda^- \geq 0$  et  $b^+, b^- \in B$  avec  $\lambda^+ b^+ + \lambda^- b^- = 0$  et  $\lambda^+ b^+ - \lambda^- b^- = d$ . Dans ce cas  $\|d\| = \|\lambda^+ b^+ - \lambda^- b^-\| = \|\lambda^+ b^+ + \lambda^- b^-\| = \lambda^+ + \lambda^-$  donc  $\lambda^+ + \lambda^- \leq 1$  et ainsi  $d \in S$ . Inversement si  $d \in S$ ,  $d = \lambda b - \lambda' b'$  avec  $\lambda, \lambda' \geq 0, b, b' \in B$  et  $\lambda + \lambda' \leq 1$  donc  $\|d\| \leq \lambda + \lambda' \leq 1$  d'où  $d \in J$ , par conséquent  $J=S$ ; en d'autres termes la norme  $x \mapsto \|x\|$  est la jauge de  $S$ .

**REMARQUE.** La structure d'espace localement convexe  $\tau$  de  $Z$  a été identifiée avec la topologie faible de  $M(K)$  sur le cône  $C$  et non sur tout l'espace  $Z$ . Cela ne doit pas surprendre. On peut en effet définir des topologies, coïncidant avec la topologie faible sur  $M^+(K)$ , mais qui en sont distinctes sur  $M(K)$ . Pour le montrer il suffit de prouver que l'application  $\mu \mapsto |\mu|$  n'est pas en général continue pour la topologie faible. Prenons, par exemple, comme espace  $K$  l'intervalle  $[0,1]$  et considérons dans  $M([0,1])$  la suite de mesures  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  définie par  $\mu_n = q(0) - q(1/n)$ . Il est clair que pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n$  converge faiblement vers 0 tandis que  $|\mu_n|$  converge faiblement vers  $2q(0)$ .

## II.2. Une caractérisation de l'espace des mesures de Radon bornées sur un espace localement compact

Les deux propositions suivantes dont la démonstration est immédiate nous permettent de ramener le cas d'un espace localement compact au cas compact.

**PROPOSITION 2.** *Soient  $X$  un espace localement compact et  $K=X \cup \{\omega\}$  son compactifié d'Alexandroff.  $M(K)$  est alors la somme directe topologique de  $M^1(X)$  et de  $\mathbf{R}$ ,  $M(K)$  et  $M^1(X)$  étant munis respectivement de la topologie faible et de la topologie  $\sigma(M^1(X), C_0(X))$ .*

**PROPOSITION 3.** *Les notations sont celles de la proposition 2. Soit  $\mu'=(\alpha, \mu) \in M(K)$ .  $\mu' \in M^+(K)$  si et seulement si  $\mu \in M^{1+}(X)$  et  $\alpha \geq \|\mu\|$ .*

**THÉORÈME 5.** *Si  $Z$  est un A-L-espace dont la structure d'ordre est définie par un cône  $C$   $\tau$ -fermé tel que,  $J$  désignant la boule unité de  $Z$ ,  $J$  soit  $\tau$ -compacte et  $E(J \cap C)$   $\tau$ -fermé, il existe alors un espace localement compact  $X$ , déterminé à une homéomorphie près, tel que  $Z$  et  $M^1(X)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d'A-L-espace et tel que par cet isomorphisme  $C$  soit homéomorphe à  $M^{1+}(X)$  muni de la topologie  $\delta(M^1(X), C_0(X))$ .*

On montre que la somme directe topologique  $\mathbf{R} \oplus Z$  satisfait aux hypothèses du théorème 4. Il en résulte alors l'existence d'un compact  $K$  tel que  $\mathbf{R} \oplus Z$  et  $M(K)$  satisfont aux conclusions formulées dans ce théorème. On détermine alors un point  $\omega \in K$  qui nous permet d'identifier  $Z$  à  $M^1(X)$  où  $X = K - \{\omega\}$ .

Soit  $\tau'$  la topologie de  $\mathbf{R} \oplus Z$  (il s'agit d'une topologie d'espace localement convexe). Conformément à la proposition 3 considérons:  $C' = \{(\alpha, z) \in \mathbf{R} \oplus C \mid \alpha \geq \|z\|\}$ .

1.  $C'$  est un cône localement compact avec  $C' - C' = R \oplus Z$ .

Il est immédiat que  $C'$  est une cône avec  $C' - C' = R \oplus Z$  et que  $B' = \{(1, z) \mid z \in C \cap J\}$  est une base  $\tau'$ -compacte du cône  $C'$ .

2.  $C'$  définit sur  $\mathbf{R} \oplus Z$  une structure d'espace de Riesz.

Il suffit de montrer (c.f. [5] Theorem 1) que la base  $B'$  est un simplexe de Choquet.

Soient  $\lambda \geq 0$  et  $x' = (\alpha, x) \in \mathbf{R} \oplus Z$ . Nous avons alors l'alternative suivante: ou bien  $B \cap (\lambda B + x) = \emptyset$  ou bien il existe  $\mu \geq 0$  et  $y \in Z$  avec  $B \cap (\lambda B + x) = \mu B + y$ .

Distinguons les deux cas:

a)  $\lambda + \alpha \neq 1$  et b)  $\lambda + \alpha = 1$ .

a)  $\lambda + \alpha \neq 1$

Dans ce cas il est immédiat que  $B' \cap (\lambda B' + x') = \emptyset$ .

b)  $\lambda + \alpha = 1$

Un raisonnement élémentaire montre que  $B' \cap (\lambda B' + x') \neq \emptyset$  si et seulement si  $B \cap (\lambda B + x) \neq \emptyset$  et que alors,  $B' \cap (\lambda B' + x') = \{(1, z) \mid z \in B \cap (\lambda B + x)\} = \{(1, z) \mid z \in \mu B + y\} = \mu B' + (1 - \mu, y)$ .  $B'$  est bien un simplexe de Choquet.

3.  $E(B')$  est  $\tau'$ -fermé.

Il suffit de vérifier que  $E(B') = \{(1, z) \mid z \in E(C \cap J)\}$ .

Munissons  $\mathbf{R} \oplus Z$  de la jauge de  $\text{co}(B' \cup (-B'))$ , d'après 1. (les hypothèses du théorème 2 étant vérifiées) c'est une norme  $(\alpha, z) \mapsto \|(\alpha, z)\|$  sur  $\mathbf{R} \oplus Z$ . Compte tenu du corollaire du théorème 2  $\mathbf{R} \oplus Z$  est un  $A$ -L-espace. Le point 3. montre que  $\mathbf{R} \oplus Z$  satisfait bien aux hypothèses du théorème 4. Il existe alors un compact  $K$ , déterminé à un homéomorphisme près, et une application  $\Phi$  de  $\mathbf{R} \oplus Z$  sur  $M(K)$  qui est un isomorphisme pour les structures respectives d' $A$ -L-espace de  $\mathbf{R} \oplus Z$  et de  $M(K)$  et un homéomorphisme de  $C'$  sur  $M^+(K)$ . De  $(1, 0) \in E(B')$  on tire l'existence d'un  $\omega \in K$  avec  $\Phi(1, 0) = q(\omega)$ . Posons  $X = K - \{\omega\}$ .

Pour  $z$  quelconque, considérons  $\Phi(0, z) = \mu'$ ,  $\mu' \in M(K)$  et désignons par  $\mu$  la restriction de  $\mu'$  à  $C_0(X)$ . On obtient ainsi une application  $\Psi$  de  $Z$  dans  $M^1(X)$ :  $\Phi(0, z)(f) = \Psi(z)(f)$  pour tout  $f \in C_0(X)$ .  $\Psi$  est donc l'application qui rend commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{I} & \mathbf{R} \oplus Z \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ M^1(X) & \xleftarrow{Pr} & M(K) \end{array}$$

où  $I(z) = (0, z)$  et  $Pr(\mu') = \mu$ .

4.  $\Phi(0, z)(f) = \Psi(z)(f - f(\omega)1_K)$  pour tout  $f \in C(K)$  et tout  $z \in Z$ .

Montrons tout d'abord que pour tout  $(\alpha, z) \in \mathbf{R} \oplus Z$   $\alpha = \Phi(\alpha, z)(1_K)$ .

On pose  $\Phi(\alpha, z) = \mu' \in M(K)$ . Soit  $(\alpha, z) \in C'$ .  $\alpha = 0$  entraîne  $\|z\| = 0$  d'où  $(\alpha, z) = 0$  c'est-à-dire  $\Phi(\alpha, z)(1_K) = 0$ . On suppose donc  $\alpha > 0$ . De  $(\alpha, z) \in C'$  résulte d'une part  $(1, z/\alpha) \in B'$  d'où (c.f. Théorème 2 (i))  $\|(1, z/\alpha)\| = 1$  soit  $\|(\alpha, z)\| = \alpha$  et d'autre part  $\mu' \in M^+(K)$  c'est-à-dire  $\|\mu'\| = \mu'(1_K)$ . De  $\|\mu'\| = \|(\alpha, z)\|$  on tire  $\alpha = \Phi(\alpha, z)(1_K)$ .

Pour  $(\alpha, z)$  quelconque on se ramène au cas précédent en utilisant la décomposition univoque  $(\alpha, z) = (\alpha_1, z_1) - (\alpha_2, z_2)$  où  $(\alpha_i, z_i) \in C'$  et  $(\alpha_1, z_1) \wedge (\alpha_2, z_2) = 0$ .

On a donc pour tout  $z \in Z$   $\Phi(0, z)(1_K) = 0$  d'où  $\Phi(0, z)(f) = \Phi(0, z)(f - f(\omega)1_K) = \Psi(z)(f - f(\omega)1_K)$  pour tout  $f \in C(K)$ .

5.  $\Psi$  est une bijection de  $Z$  sur  $M^1(X)$ .

Montrons que  $\Psi$  est surjective. Soit  $\mu \in M^1(X)$ ; pour tout  $f \in C(K)$  posons  $\mu'(f) = \mu'(f - f(\omega)1_K)$ , on a  $\mu' \in M(K)$ . Il existe donc  $(\alpha, z)$  avec  $\Phi(\alpha, z) = \mu'$ . De  $\mu'(1_K) = 0$  on tire  $\alpha = 0$  d'où  $\Phi(0, z) = \mu'$ . Pour tout  $f \in C_0(X)$   $\mu'(f) = \mu(f)$  et  $\Phi(0, z)(f) = \Psi(z)(f)$ , par suite  $\Psi(z) = \mu$ .

Quant à l'injectivité de  $\Psi$  elle s'obtient en montrant que  $z = 0$  si  $\Psi(z) = 0$ . Compte tenu de 4.,  $\Psi(z) = 0$  entraîne  $\Phi(0, z) = 0$  d'où  $z = 0$ .

6.  $\Psi$  est un isomorphisme pour les structures respectives d'espace de Riesz de  $Z$  et de  $M^1(X)$ .

Il suffit de montrer que  $\Psi(C) = M^{1+}(X)$ . Soit  $z \in C$ . Choisissons  $\alpha \geq \|z\|$  d'où  $\Phi(\alpha, z) \in M^+(K)$ . Pour tout  $f \in C_0(X)$   $\Phi(\alpha, z)(f) = \Psi(z)(f)$ .  $f \in C_0(X)$  et  $f \geq 0$  entraînent donc  $\Psi(z)(f) \geq 0$ .

Inversement soit  $\mu \in M^{1+}(X)$ . Considérons, de même,  $\alpha$  avec  $\alpha \geq \|\mu\|$  et formons  $\mu' = (\alpha, \mu)$ ; d'après la proposition 3,  $\mu' \in M^+(K)$ ; il existe alors  $(\alpha, z) \in C'$  (en particulier  $z \in C$ ) avec  $\Phi(\alpha, z) = \mu'$  d'où  $\Psi(z) = \mu$ .

7.  $\Psi$  est une isométrie.

Il suffit de le prouver sur le cône  $C$ . Soit donc  $z \in C$ . De  $\Phi(0, z)(f) = \Psi(z)(f - f(\omega)1_K)$  pour tout  $f \in C(K)$  on tire  $\|\Psi(z)\| = \frac{1}{2}\|(0, z)\|$ . Il suffit donc de montrer que  $\|(0, z)\| = 2\|z\|$  pour tout  $z \in C$ .

Soit  $z \in C$ .  $(0, z)$  admet la décomposition univoque  $(0, z) = (\lambda, z_1) - (\lambda, z_2)$  où  $(\lambda, z_1) \wedge (\lambda, z_2) = 0$  et  $(\lambda, z_i) \in C'$ . On a donc  $\Phi(\lambda, z_1) \wedge \Phi(\lambda, z_2) = 0$  c'est-à-dire  $\Psi(z_1) \wedge \Psi(z_2) = 0$  donc d'après 6.  $z_1 \wedge z_2 = 0$ , d'où  $z_2 = 0$ .  $\|(0, z)\| = \|(\lambda, z) - (\lambda, 0)\| = \|(\lambda, z) + (\lambda, 0)\| = 2\lambda \geq 2\|z\|$ . Par définition  $\|(0, z)\| = \inf\{\varrho \mid \varrho > 0, (0, z) \in \varrho \text{ co}(B' \cup (-B'))\}$ . Or  $(0, z) \in \varrho \text{ co}(B' \cup (-B'))$  si et seulement s'il existe  $z_i \in C$  avec  $\|z_i\| \leq 1$  et  $z = \varrho/2(z_1 - z_2)$ . On a donc

$$\|(0, z)\| = \inf\{\varrho \mid \varrho > 0, z = \varrho/2(z_1 - z_2), z_i \in C, \|z_i\| \leq 1\}$$

c'est-à-dire

$$\|(0, z)\| = 2 \inf\{\varrho \mid \varrho > 0, z = \varrho(z_1 - z_2), z_i \in C, \|z_i\| \leq 1\}.$$

Il en résulte

$$\|(0, z)\| \leq 2 \inf\{\varrho \mid \varrho > 0, z = \varrho(\lambda_1 b_1 - \lambda_2 b_2), \lambda_i \geq 0, b_i \in B, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\} = 2\|z\|.$$

Cette dernière inégalité achève de montrer 7.

En résumé,  $\Psi$  est un isomorphisme pour les structures respectives d' $A$ - $L$ -espace

de  $Z$  et de  $M^1(X)$ ; l'homéomorphie de  $C$  et de  $M^{1+}(X)$ , muni de la topologie  $\sigma(M^1(X), C_0(X))$  est évidente.

8.  $X$  est déterminé à une homéomorphie près.

Soient  $X_i$  deux espaces localement compacts et  $\Omega$  une application de  $M^1(X_1)$  sur  $M^1(X_2)$  satisfaisant aux propriétés suivantes:

- $\Omega$  est un isomorphisme de  $M^1(X_1)$  sur  $M^1(X_2)$ , munis respectivement de leurs structures d' $A$ - $L$ -espace,
- $\Omega$  est un homéomorphisme de  $M^{1+}(X_1)$  sur  $M^{1+}(X_2)$  dotés respectivement des topologies  $\sigma(M^1(X_1), C_0(X_1))$  et  $\sigma(M^1(X_2), C_0(X_2))$ .

Considérons alors les compactifiés d'Alexandroff respectifs  $X_i \cup \{\omega_i\}$  de  $X_i$ . Prolongeons  $\Omega$  en  $\Omega'$  sur  $M(X_1 \cup \{\omega_1\})$  en posant  $\Omega'(\alpha, \mu) = (\alpha, \Omega(\mu))$ . Dans ce cas  $\Omega'$  est un isomorphisme de  $M(X_1 \cup \{\omega_1\})$  sur  $M(X_2 \cup \{\omega_2\})$  pour leurs structures respectives d' $A$ - $L$ -espace,  $\Omega'$  est aussi un homéomorphisme des cônes positifs dotés des topologies faibles correspondantes.  $\alpha = q_2^{-1} \Omega' q_1$  est donc un homéomorphisme de  $X_1 \cup \{\omega_1\}$  sur  $X_2 \cup \{\omega_2\}$  qui envoie  $\omega_1$  sur  $\omega_2$ , c'est donc aussi un homéomorphisme de  $X_1$  sur  $X_2$ .

### III. Une caractérisation de l'algèbre des mesures de Radon sur un groupe compact

Nous avons indiqué que cette partie pouvait être considérée, dans une certaine mesure, comme une généralisation du cas du groupe fini. Précisons cette assertion en résumant les résultats obtenus par M. A. RIEFFEL dans ce cas ([12]).

Si  $A$  est une algèbre réelle, de dimension finie, munie d'une structure d'espace de Riesz, l'ordre étant archimédien et si, de plus,  $A$  satisfait aux conditions suivantes:

1.  $C * C \subset C$  (où  $C = \{f \in A \mid f \geq 0\}$ )
2.  $f \in C$  entraîne

$$f * (g \vee h) = \text{Sup} \{f_1 * g + f_2 * h \mid f_1 + f_2 = f, f_i \in C\}$$

$$(g \vee h) * f = \text{Sup} \{g * f_1 + h * f_2 \mid f_1 + f_2 = f, f_i \in C\}$$

pour tout  $g, h \in A$ ,

il existe alors un groupe fini  $G$ , déterminé à un isomorphisme près, tel que  $A$  et  $L(G)$ , algèbre réelle du groupe  $G$ , soient isomorphes pour leurs structures respectives d'espace de Riesz et l'algèbre réelle.

Une conséquence directe ([12] 2.2. Lemma) des conditions 1. et 2. est:  $f$ , élément de  $C$ , appartient à une génératrice extrémale du cône  $C$  si et seulement si

$$f * (g \vee h) = (f * g) \vee (f * h) \quad \text{pour tout } g, h \in A$$

Vérifions que, dans le cas d'un groupe compact  $G$ , une propriété analogue est satisfaite par  $M(G)$ .

**PROPOSITION 4.** *Si  $G$  est un groupe compact et  $\lambda \in M^+(G)$ , alors  $\lambda$  appartient à une génératrice extrémale du cône  $M^+(G)$  si et seulement si  $\lambda * (\mu \vee \xi) = (\lambda * \mu) \vee (\lambda * \xi)$  pour tout  $\mu, \xi \in M(G)$ .*

Dire que  $\lambda$  appartient à une génératrice extrémale de  $M^+(G)$ , cela signifie qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $g \in G$  tels que  $\lambda = \alpha q(g)$ . Sans restreindre la généralité on peut supposer  $\alpha = 1$ . Pour tout  $f \in C(G)$  on a  $\lambda * \mu(f) = \mu(g f)$ : on définit ainsi une application linéaire de  $M(G)$  dans  $M(G)$ . Pour montrer la première partie de la proposition il suffit de vérifier que  $\mu \geq 0$  si et seulement si  $\lambda * \mu \geq 0$ .  $\mu \geq 0$  entraîne évidemment  $\lambda * \mu \geq 0$ . Inversement supposons que  $\lambda * \mu \in M^+(G)$ . A  $f \geq 0$  on peut associer  $f'$  avec  $f' \in C(G)$   $f' \geq 0$  et  $g f' = f$  et par suite  $0 \leq \lambda * \mu(f') = \mu(g f') = \mu(f)$  donc  $\mu \in M^+(G)$ .

Inversement si  $\lambda * (\mu \vee \xi) = (\lambda * \mu) \vee (\lambda * \xi)$  pour tout  $\mu, \xi \in M(G)$ , on obtient en remplaçant  $\xi$  par  $-\mu$ :  $\lambda * |\mu| = |\lambda * \mu|$  pour tout  $\mu \in M(G)$ . Compte tenu de I. 3. il suffit de montrer que  $\lambda(|h|) = |\lambda(h)|$  pour tout  $h \in C(G)$ . Soient donc  $h \in C(G)$  et la mesure définie par  $d\mu = h \, dv$ : pour tout  $\varphi \in C(G)$  on a  $\lambda * \mu(\varphi) = \int \varphi(z) \lambda * h(z) \, dv(z)$  où  $\lambda * h(z) = \int h(y^{-1}z) \, d\lambda(y)$  ([6] Th. 20.9.). Or d'après ([6] Th. 14.17)  $\lambda * |\mu|(\varphi) = \int \varphi(z) |\lambda * h(z)| \, dv(z)$  pour tout  $\varphi \in C(G)$ , en d'autres termes  $\lambda * |h|(z) = |\lambda * h(z)|$ . Or  $\lambda * |h|, |\lambda * h| \in C(G)$  d'où  $\lambda * |\tilde{h}|(e) = |\lambda * \tilde{h}(e)|$  c'est-à-dire  $|\int h(x) \, d\lambda(x)| = \int |h(x)| \, d\lambda(x)$ .

**REMARQUE.** De façon, tout à fait analogue, on montre que, pour  $\lambda \in M^+(G)$ ,  $\lambda$  appartient à une génératrice extrémale du cône  $M^+(G)$  si et seulement si  $(\mu \vee \xi) * \lambda = (\mu * \lambda) \vee (\xi * \lambda)$  pour tout  $\mu, \xi \in M(G)$ .

Dans cette partie on supposera que l'espace  $Z$  est muni d'une structure d'algèbre localement convexe (la topologie étant notée  $\tau$ ).  $T^*: Z \times Z \rightarrow Z$  désigne l'application définie par la multiplication dans  $Z$ .

**PROPOSITION 5.** *Si  $Z$  est une algèbre commutative munie d'un cône  $C$  localement compact satisfaisant aux propriétés suivantes:*

- 1)  $T^*: C \times C \rightarrow C$  est continue,
- 2)  $C - \{0\}$  n'admet pas de diviseurs de 0,
- 3)  $C$  contient un compact  $N$  avec  $0 \notin N$  tel que pour tout,  $x \in C - \{0\}$  il existe  $\lambda > 0$  avec  $\{(\lambda x)^n\} \subset N$ .

*C possède alors une base compacte  $B$ , et une seule, telle que  $B * B \subset B$ .*

**a)** Toute génératrice du cône  $C$  possède un élément  $x$  et un seul avec  $\{x^n\}$  borné et 0 non adhérent à cet ensemble.

Considérons une génératrice quelconque de  $C$ , d'après 3) cette génératrice admet au moins un tel  $x$ . Il existe un voisinage  $V$  de 0, équilibré, avec  $x^n \notin V$  pour tout  $n$ . Si pour un  $t > 1$ ,  $\{(tx)^n\}$  est borné, il existe un  $n$  à partir duquel  $t^n x^n \in nV$ ; si nous prenons  $n$  suffisamment grand  $t^n > n$ , donc  $x^n \in V$ .

Soit à présent  $0 < t < 1$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = 0$  et  $\{x^n\}$  borné entraînent  $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n x^n = 0$ .

Désignons par  $B$  l'ensemble de ces éléments  $x$ . L'hypothèse 3) entraîne, pour tout  $x \in B$ ,  $\{x^n\} \subset N$ .

$\beta)$   $B * B \subset B$ .

Soient  $b_i \in B$ .  $\{b_i^n\}$  est un compact et ainsi, vu la continuité de  $T^*$ ,  $\{\overline{b_1^n}\} * \{\overline{b_2^n}\}$  l'est aussi. Il en résulte que  $\{(b_1 * b_2)^n\}$  est borné. On tire de 2) que  $0 \notin \{\overline{b_1^n}\} * \{\overline{b_2^n}\}$ ; cet ensemble étant fermé,  $0$  n'adhère pas à  $\{(b_1 * b_2)^n\}$  et par conséquent  $b_1 * b_2 \in B$ .

$\gamma)$   $B$  est une base du cône  $C$ .

Pour tout  $x \in C - \{0\}$  il existe, par hypothèse,  $\lambda > 0$  et  $b \in B$  avec  $x = \lambda b$ . D'après  $\alpha)$  cette représentation est unique.  $0 \notin B$ .

Il reste à montrer que  $B$  est convexe. Soient  $0 < \alpha < 1$ ,  $b_i \in B$  et  $z = \alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2$ .  $\overline{\text{co}(\{b_1^n\} * \{b_2^n\})}$  est borné ([3] chap. III, § 2, prop. 2). Or  $\{z^n\} \subset \overline{\text{co}(\{b_1^n\} * \{b_2^n\})}$  donc  $\{z^n\}$  est borné. Montrons que  $0$  n'adhère pas à  $\{z^n\}$ .  $\overline{\text{co}(\{b_1^n\} * \{b_2^n\})}$  est fermé et borné,  $C$  étant localement compact, cet ensemble est compact. Si  $0 \in \overline{\text{co}(\{b_1^n\} * \{b_2^n\})}$ , alors  $0$  est point extrémal de cet ensemble puisque  $0 \in E(C)$ ; d'après un résultat, bien connu, qui précise le théorème de KREIN-MILMAN ([2] chap. II, § 4, prop. 4)  $0$  doit appartenir à  $\{b_1^n\} * \{b_2^n\}$  ce qui est exclu d'après ce qui précède et par suite  $z \in B$ .

$\delta)$   $B$  est compacte.

$B$  étant contenue dans  $N$ , il suffit de montrer que  $B$  est fermée. Soit  $F$  un filtre sur  $B$  convergeant vers  $d$ , le filtre produit  $F \times F$  converge vers  $(d, d)$ .  $\beta)$  entraîne que  $T^*(F \times F)$  est une base de filtre sur  $B$  donc sur  $N$ .  $T^*$  étant continue sur  $C \times C$ ,  $T^*(F \times F)$  converge vers  $d^2$  donc, vu la compacité de  $N$ ,  $d^2 \in N$ . On montre ainsi que  $\{d^n\} \subset N$  d'où  $d \in B$ .

**REMARQUES.** 1. Cette proposition fournit des conditions suffisantes pour l'existence d'une telle base  $B$ . Ces conditions ne sont évidemment nullement nécessaires. Par exemple, la commutativité de  $Z$ , utilisée dans la démonstration proposée, ne nous semble pas jouer un rôle fondamental; on verra que l'on peut éviter cette importante restriction, en faisant cependant sur  $Z$  des hypothèses d'une tout autre nature.

2. Si  $Z$  est une algèbre localement convexe, non nécessairement commutative, munie d'un cône  $C$  avec une base compacte  $B$  telle que  $B * B \subset B$ , le point  $\alpha$ ), dont la démonstration n'utilise pas la commutativité de  $Z$ , montre que cette base est unique.

3. Il nous semble plausible, mais nous ne sommes pas parvenus à le montrer, que 3) puisse être remplacée par 3'): pour tout  $x \in C - \{0\}$  il existe  $\lambda > 0$  avec  $\{(\lambda x)^n\}$  borné et  $0$  non adhérent à  $\{(\lambda x)^n\}$ .

**THÉORÈME 6.** *Si  $Z$  possède un cône  $C$  satisfaisant aux propriétés suivantes:*

- 1)  *$C$  définit sur  $Z$  une structure d'espace de Riesz telle que l'application  $(x, y) \mapsto x \vee y$  soit continue,*
- 2)  *$T^*: C \times C \rightarrow C$  est continue,*

- 3)  $C$  possède une base compacte  $B$  avec  $B * B \subset B$ ,
- 4)  $x \in C - \{0\}$  appartient à une génératrice extrémale du cône  $C$ , si et seulement si pour tout  $y, z \in Z$  au moins l'une des deux conditions  $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$  ou  $(y \vee z) * x = (y * x) \vee (z * x)$  est satisfaite,
- il existe alors un groupe compact  $G$ , déterminé à un isomorphisme bicontinu près, tel que  $Z$  et  $M(G)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d'espace de Riesz et d'algèbre réelle et tel que, par cet isomorphisme,  $C$  et  $M^+(G)$ , muni de la topologie faible, soient homéomorphes.

1.  $Z$  satisfait aux hypothèses du théorème 3.

Considérons la base  $B$ . Pour  $y, z \in Z$  arbitraires posons  $f_{yz}(x) = (y \vee z) * x - (y * x) \vee (z * x)$ . De 4) on tire que  $E(B) = B \cap \{x \mid f_{yz}(x) = 0\}$  pour tout  $y, z \in Z$ . D'après 1)  $f_{yz}$  est continue, il en résulte que  $E(B)$  est fermé.

Il existe dans ces conditions, d'après le théorème 3, un compact  $K$  et une bijection  $\Phi$  de  $Z$  sur  $M(K)$ . Cette bijection  $\Phi$  est un isomorphisme pour les structures d'espace de Riesz de  $Z$  et de  $M(K)$  et un homéomorphisme de  $C$  sur  $M^+(K)$ .  $\Phi$  permet de définir sur  $M(K)$  une structure d'algèbre  $\Phi(x) * \Phi(y) = \Phi(x * y)$  pour tout  $x, y \in Z$ .

Soient  $P = \{\alpha \lambda \mid \alpha \in [0,1], \lambda \in \Phi(B)\}$  et l'application  $T^\otimes: P \times P \rightarrow M(K \times K)$  définie par  $T^\otimes(\lambda, \mu) = \lambda \otimes \mu$  où  $\lambda \otimes \mu$  désigne la mesure sur  $K \times K$  produit des mesures  $\lambda$  et  $\mu \in P$ .  $P$  est compact donc borné et par conséquent, d'après ([4] chap. III, § 5, no. 3, prop. 4)  $T^\otimes$  est continue. On désigne par  $P \otimes P$  l'image de  $P \times P$  par  $T^\otimes$ .

Considérons sur  $P \times P$  la relation d'équivalence  $R$  définie par  $T^\otimes(\lambda, \mu) = T^\otimes(\lambda', \mu')$  où  $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in P$ . Si  $\lambda, \mu \in P - \{0\}$  il est élémentaire que la classe d'équivalence, suivant  $R$ , contenant  $(\lambda, \mu)$  est  $\{(a\lambda, a^{-1}\mu) \in P \times P \mid a > 0\}$ ; quant à la classe contenant  $(\lambda, 0)$  ou  $(0, \mu)$  c'est  $P \times \{0\} \cup \{0\} \times P$ . Il en résulte l'existence d'une application  $T: P \otimes P \rightarrow M^+(K)$  qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 & P \otimes P & \\
 & \nearrow T^\otimes \quad \searrow T & \\
 P \times P & \xrightarrow{T^*} & M^+(K)
 \end{array}$$

2.  $T$  est continue.

Soit  $\pi: P \times P \rightarrow P \times P/R$  l'application canonique associée à la relation d'équivalence  $R$ .  $T^\otimes$  se factorise ainsi sur  $P \times P/R$  en un homéomorphisme  $T_R^\otimes$  de  $P \times P/R$  sur  $P \otimes P$  ([1] chap. 1, § 3, prop. 6). De même  $T^*$  se factorise sur  $P \times P/R$  en une application continue  $T_R^*$  de  $P \times P/R$  dans  $M^+(K)$ .

De la description donnée ci-dessus des classes d'équivalence suivant  $R$  dans  $P \times P$  résulte la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P \otimes P & & \\
 & \nearrow T^\otimes & \downarrow & \searrow T & \\
 P \times P & \xrightarrow{T^*} & T_R^{\otimes -1} & \xrightarrow{M^+(K)} & \\
 & \searrow \pi & \downarrow & \nearrow T_R^* & \\
 & & P \times P/R & & 
 \end{array}$$

$T_R^{\otimes -1}$  et  $T_R^*$  étant continues, il en est donc de même de  $T$ .

3.  $T(q(K \times K)) \subset q(K)$ .

Soient  $k_i \in K$ .  $T(q(k_1, k_2)) = T(q(k_1) \otimes q(k_2)) = q(k_1) * q(k_2)$ . Il existe  $b_i \in E(B)$  avec  $\Phi(b_i) = q(k_i)$ , donc  $q(k_1) * q(k_2) = \Phi(b_1) * \Phi(b_2) = \Phi(b_1 * b_2)$ . Or pour tout  $x, y \in Z$   $(b_1 * b_2) * (x \vee y) = (b_1 * b_2) * x \vee (b_1 * b_2) * y$ , donc d'après 4)  $b_1 * b_2$  appartient à une génératrice extrémale du cône  $C$  (or d'après 3),  $b_1 * b_2 \in B$ , il en résulte que  $b_1 * b_2 \in E(B)$  donc  $\Phi(b_1 * b_2) \in q(K)$ , par suite  $T(q(K \times K)) \subset q(K)$ .

Il résulte de 3. que  $\alpha = q^{-1} T q$  est une application continue de  $K \times K$  dans  $K$ .

4. Si  $\lambda, \mu \in M(K)$  et  $f \in C(K)$  alors

$$\lambda * \mu(f) = \int \int_{K \times K} f(\alpha(k_1, k_2)) d\lambda(k_1) d\mu(k_2). \quad (1)$$

$\alpha$  permet de définir une application  $u: C(K) \rightarrow C(K \times K)$  à savoir  $u(f) = f\alpha$  pour tout  $f \in C(K)$ .  $u$  est ainsi une application linéaire continue du Banach  $C(K)$  dans le Banach  $C(K \times K)$ . Par conséquent la transposée  ${}^t u$  de  $u$  est une application continue de  $M(K \times K)$  dans  $M(K)$ , ces deux espaces étant munis de leurs topologies faibles respectives ([3] chap. IV, § 4, corollaire de la prop. 6). Si  $\xi = q(k_1) \otimes q(k_2)$  avec  $k_i \in K$ , il est évident que  ${}^t u(\xi) = T(\xi)$ . De façon plus générale, vu la linéarité de  $T$  sur  $P \otimes P$ , si  $\xi$  est le produit de deux mesures positives à support fini et de norme non supérieure à 1 (donc  $\xi \in P \otimes P$ ) on a encore  ${}^t u(\xi) = T(\xi)$ . Or d'après ([4] chap. III, § 3, corollaire 2 du théorème 1) toute mesure positive  $\xi$  est adhérente à l'ensemble des mesures positives dont le support est fini, contenu dans celui de  $\xi$  et dont la norme est non supérieure à  $\|\xi\|$ . Il résulte de 2. que pour tout  $\lambda, \mu \in P$   $T(\lambda \otimes \mu) = {}^t u(\lambda \otimes \mu)$ ; de façon plus explicite  $\lambda * \mu(f) = \lambda \otimes \mu(f\alpha)$  pour tout  $f \in C(K)$  ou encore (1). La représentation analogue du produit  $\lambda * \mu$  pour  $\lambda, \mu$  quelconques dans  $M(K)$  est alors immédiate.

Si nous posons  $\alpha(k_1, k_2) = k_1 k_2$  pour  $k_i \in K$ , on munit ainsi  $K$  d'une structure de semi-groupe compact.

5.  $K$  est un groupe.

Si  $K$  n'est pas un groupe, il existe (c.f. [6] Theorem 9.16)  $\{k_1, k_2, k_3\} \subset K$  avec  $k_2 \neq k_3$  et  $k_1 k_2 = k_1 k_3$  (ou bien  $k_2 k_1 = k_3 k_1$ ).  $k_2 \neq k_3$  entraîne  $q(k_2) \wedge q(k_3) = 0$ .

Pour  $A = q(k_1) * (q(k_2) \vee q(k_3))$  on a d'une part  $A = q(k_1) * (q(k_2) + q(k_3)) = 2q(k_1 k_2)$  et d'autre part, vu 4),  $A = q(k_1) * q(k_2) \vee q(k_1) * q(k_3) = q(k_1 k_2) \vee q(k_1 k_3) = q(k_1 k_2)$ .  $K$  est donc un groupe.

Supposons que  $G_1$  et  $G_2$  soient deux groupes compacts avec  $M(G_1)$  et  $M(G_2)$  isomorphes, en tant qu'algèbres et espaces de Riesz, par une application  $\Omega$  et dont les cônes positifs  $M^+(G_1)$  et  $M^+(G_2)$ , munis respectivement de la topologie faible, soient homéomorphes par cette même application; posons alors

$B_i = \{\mu \in M^+(G_i) \mid \|\mu\| = 1\}$ .  $B_i$  est une base compacte du cône  $M^+(G_i)$ , et l'on a  $B_i * B_i \subset B_i$ . Il est immédiat que  $\Omega(B_1)$  est une base du cône  $M^+(G_2)$ , et que  $\Omega(B_1) * \Omega(B_1) \subset \Omega(B_1)$ , or d'après la remarque 2. de la proposition 5, une telle base est unique donc  $\Omega(B_1) = B_2$ . Il en résulte l'existence d'un isomorphisme bicontinu de  $G_1$  sur  $G_2$ . En posant  $G = K$  on obtient ainsi le résultat annoncé.

#### REMARQUES.

1. Nous avons utilisé de façon essentielle la continuité dans les deux variables de la convolution sur le cône  $M^+(G)$ . Dans le cas d'un groupe localement compact  $G'$  cette propriété est, en général, non vérifiée dans  $M^{1+}(G')$  (pour la topologie  $\sigma(M^1(G'), C_0(G'))$ ). Ceci constitue un des obstacles principaux à une extension des résultats qui vont suivre au cas du groupe localement compact.

2. A la place de l'hypothèse 3) on peut, par exemple, imposer celles de la proposition 5. Une autre solution consiste à introduire sur  $Z$ , conformément à ce que nous avons annoncé au début, une structure supplémentaire, à savoir une structure d'algèbre de Banach.

**THÉORÈME 7.** *Soit  $Z$  une algèbre localement convexe munie d'un cône  $C$  localement compact définissant sur  $Z$  une structure d'espace de Riesz et d'une norme qui en fait un espace de Banach. On suppose, en outre, que  $Z$  satisfasse aux propriétés suivantes:*

1.  $(x, y) \mapsto x \vee y$  est  $\tau$ -continue,
2.  $T^*: C \times C \rightarrow C$  est  $\tau$ -continue,
3. la norme, dont est munie  $Z$ , est sur le cône  $C$  multiplicative et  $\tau$ -continue,
4.  $Z$ , en tant qu'espace de Banach et espace de Riesz, est un  $A$ - $L$ -espace dont la boule unité est  $\tau$ -fermée.
5.  $x \in C - \{0\}$  appartient à une génératrice extrémale du cône  $C$  si et seulement si pour tout  $y, z \in Z$  l'une au moins des deux conditions  $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$  ou  $(y \vee z) * x = (y * x) \vee (z * x)$  est satisfaite.

*Dans ce cas il existe un groupe compact  $G$ , déterminé à un isomorphisme bicontinu près, tel que  $Z$  et  $M(G)$  soient isomorphes pour leurs structures respectives d' $A$ - $L$ -espace et d'algèbre réelle et tel que par cet isomorphisme  $C$  et  $M^+(G)$ , muni de la topologie faible, soient homéomorphes.*

Il suffit de montrer que  $B = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}$ , dont nous savons (c.f. Théorème 4)

que c'est une base compacte du cône  $C$ , satisfait à l'hypothèse 3) du théorème 6. Ceci est assuré par la multiplicativité de la norme  $x \mapsto \|x\|$  sur le cône  $C$ .

#### REMARQUES.

1. On peut vérifier directement que la structure d' $A$ - $L$ -espace introduite fait de  $Z$  une algèbre de Banach. Il suffit de montrer que pour tout  $x, y \in Z$ ,  $\|x * y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .  $Z$  étant un espace de Riesz et  $C * C \subset C$ , on a  $|x * y| \leq |x| * |y|$ . Cette inégalité, jointe au fait que  $Z$  est un  $A$ - $L$ -espace, entraîne

$$\|x * y\| \leq \||x| * |y|\| = \||x|\| \cdot \||y|\|,$$

c'est-à-dire

$$\|x * y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. Il n'a pas été supposé que l'algèbre  $Z$  possède un élément unité ni qu'elle soit munie d'une involution. Il est intéressant de noter que les hypothèses faites, en particulier 5., assurent l'existence de l'un et de l'autre.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI, N., *Topologie générale* (Hermann, Paris 1961 [Act. Sci. Indust., 1142]), chap. I-II.
- [2] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1953 [Act. Sci. Indust., 1189]), chap. I-II.
- [3] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann, Paris 1955 [Act. Sci. Indust., 1229]), chap. III-V.
- [4] BOURBAKI, N., *Intégration* (Hermann, Paris 1952 [Act. Sci. Indust., 1175]), chap. I-IV.
- [5] EDWARDS, D.A., *On the Homeomorphic Affine Embedding of a Locally Compact Cone into a Banach Dual Space Endowed with the Vague Topology*, Proc. London Math. Soc. (3) 14, 399-414 (1964).
- [6] HEWITT, E., and ROSS, K.A., *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. I (Springer, 1963).
- [7] KAKUTANI, S., *Concrete Representation of Abstract (L)-Space and the Mean Ergodic Theorem*, Ann. of Math. (2) 42, 523-537 (1941).
- [8] KAKUTANI, S., *Concrete Representation of Abstract (M)-Space*, Ann. of Math. (2) 42, 994-1024 (1941).
- [9] KELLEY, J.L. and NAMIOKA, I., *Linear Topological Spaces* (Van Nostrand, 1961).
- [10] LINDENSTRAUSS, J., *Extension of Compact Operators*, Mem. Amer. Math. Soc. n° 48 (1964).
- [11] RIEFFEL, M. A., *A Characterization of Commutative Group Algebras and Measure Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 812-814 (1963).
- [12] RIEFFEL, M.A., *A Characterization of the Group Algebras of Finite Groups*, Pacific J. Math. 16, n° 2, 347-363 (1966).

Reçu le 15 décembre 1967