Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Epimorphismen von kommutativen Ringen.
Autor: Storrer, Hans Heiner
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32930

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Epimorphismen von kommutativen Ringen

HANS HEINER STORRER

Einleitung

Die vorliegende Arbeit untersucht Fragen, die sich aus der wohlbekannten Tatsache ergeben, dass ein Epimorphismus in der Kategorie der Ringe keine surjektive Abbildung zu sein braucht. So ist zum Beispiel die Einbettung des Ringes $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen in den Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen ein Epimorphismus, denn jeder Ring-Homomorphismus, der auf $\mathbf{Q}$ definiert ist, ist offensichtlich schon durch seine Werte auf $\mathbf{Z}$ bestimmt.

Wir werden ausschliesslich kommutative Ringe mit Einselement betrachten, obwohl einige Resultate auch auf nichtkommutative Ringe übertragen werden könnten.

Im ersten Kapitel bringen wir die grundlegenden Definitionen und eine Reihe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein Homomorphismus $f: R \to S$ ein Epimorphismus ist.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir hauptsächlich epimorphe Erweiterungen $R \subset S$, das sind Monomorphismen $f: R \to S$, die zugleich Epimorphismen sind.

ISBELL [12] hat in diesem Zusammenhang folgende Definitionen aufgestellt: Ein Element d aus S wird von R dominiert, wenn für jeden Homomorphismus f mit Definitionsbereich S der Wert $f(d)$ durch die Werte von f auf R bestimmt ist. Die Menge aller dominierten Elemente heisst das Dominion $\mathrm{Dom}(R, S)$. Die Erweiterung $R \subset S$ ist genau dann epimorph, wenn $\mathrm{Dom}(R, S) = S$ ist.

Ein Ring R heisst dominant, wenn für alle $S \supset R$ stets $\mathrm{Dom}(R, S) = R$ ist und saturiert, wenn wenigstens stets $\mathrm{Dom}(R, S) \neq S$ ist, d.h. wenn R keine echten epimorphen Erweiterungen besitzt.

Wir geben verschiedene notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen dafür an, dass ein Ring dominant oder saturiert ist. Es scheint aber schwierig zu sein, Bedingungen zu finden, die notwendig und hinreichend zugleich sind und die für alle Ringe gelten.

Dies ist aber sehr wohl möglich, wenn wir uns auf bestimmte Klassen von Ringen beschränken. Wir erhalten dann zum Beispiel folgende Resultate: Ein noetherscher Ring ist genau dann saturiert, wenn er artinsch ist. Ein semiprimer Ring ist genau dann saturiert, wenn er regulär ist.

Einige unserer Resultate haben Analoga in der Kategorie der Halbgruppen, welche in den Arbeiten von ISBELL [12] und HOWIE und ISBELL [11] untersucht worden ist.

Das dritte Kapitel befasst sich mit Quotientenringen. Wir gehen von der anfangs gemachten Feststellung aus, dass $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ ein Epimorphismus ist. Allgemeiner ist die

Einbettung eines Ringes R in seinen (klassischen) Quotientenring $Q_{cl}(R)$ stets ein Epimorphismus.

Da der Körper $\mathbf{Q}$ saturiert ist, ist $\mathbf{Q}$ eine maximale epimorphe Erweiterung von $\mathbf{Z}$ und die Frage liegt nahe, ob nicht der Quotientenring eines Ringes auf diese Weise charakterisiert werden könnte.

In dieser Allgemeinheit ist die Frage zu verneinen. Man sieht nämlich, dass etwa auch die Erweiterung $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}_2$ ein Epimorphismus ist, dabei ist $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}_2$ regulär und daher saturiert.

Man gelangt aber zu gewissen Resultaten, wenn man nur wesentliche epimorphe Erweiterungen $R \subset S$ betrachtet, d.h. Erweiterungen, bei denen jedes von Null verschiedene Ideal von S einen von Null verschiedenen Durchschnitt mit R hat. Dies ist keine allzugrosse Einschränkung, denn wenn $R \subset S$ epimorph ist, dann gibt es stets ein Ideal I von S, sodass S/I eine wesentliche epimorphe Erweiterung von R ist.

Wenn es eine maximale wesentliche epimorphe Erweiterung von R gibt, die bis auf Isomorphie eindeutig ist, dann nennen wir sie eine epimorphe Hülle von R. Diese Definition hat natürlich in beliebigen Kategorien einen Sinn (man beachte, dass der Begriff „wesentlich" in jeder Kategorie definiert werden kann). Am Ende des dritten Kapitels geben wir einige Anwendungen auf verschiedene Kategorien, die zeigen, dass wohlbekannte Begriffe, wie zum Beispiel die vollkommene Hülle eines Körpers oder die Vervollständigung eines metrischen Raumes Spezialfälle der epimorphen Hülle sind.

In der Kategorie der Ringe ist die Situation aber recht kompliziert. Wir sind nicht in der Lage, die Existenz der epimorphen Hülle $E(R)$ eines Ringes R im allgemeinen nachzuweisen; die Schwierigkeit liegt dabei im Beweis der Eindeutigkeit. Immerhin haben wir folgende Hauptresultate:

Wenn der klassische Quotientenring $Q_{cl}(R)$ saturiert ist, dann existiert $E(R)$ und ist gleich $Q_{cl}(R)$. Dies ist insbesondere für Integritätsbereiche richtig, wir haben somit eine Definition des Quotientenkörpers gefunden, welche nur Aussagen über Abbildungen verwendet. Das zweite Hauptergebnis lautet wie folgt:

Es sei R ein semiprimer Ring (d.h. ein Ring ohne nilpotente Elemente $\neq 0$), dann existiert $E(R)$ und es gilt $R \subset Q_{cl}(R) \subset E(R) \subset Q(R)$. Dabei ist $Q(R)$ der vollständige Quotientenring im Sinn von Utumi und Lambek.

In Bezug auf die Terminologie halten wir uns an das Buch von Lambek [13], in welchem sämtliche hier nicht explizit definierten Begriffe erläutert sind.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren B. Eckmann und J. Lambek für ihre Unterstützung und ihr Interesse recht herzlich danken.

I. Allgemeines über Ring-Epimorphismen

1. *Definitionen*

In der ganzen Arbeit sollen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt ist,

folgende Vereinbarungen gelten: Alle Ringe sind kommutativ und haben ein Einselement; alle Moduln sind unitär. Ein Ring-Homomorphismus führt das eine Einselement in das andere über; speziell enthält ein Unterring das Einselement des umfassenden Ringes.

Mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir die Kategorie der kommutativen Ringe mit Einselement und mit $\mathfrak{M}_R$ die Kategorie der R-Moduln.

DEFINITION 1.1. Es sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f: A \to B$ in $\mathfrak{C}$ heisst ein *Epimorphismus*, wenn für alle C in $\mathfrak{C}$ und alle $g, h: B \to C$ die Zusammensetzungen gf und hf nur dann gleich sind, wenn $g = h$ ist.

Dual wird der Begriff des *Monomorphismus* definiert. Es ist leicht zu sehen, dass eine Abbildung in $\mathfrak{R}$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn sie eineindeutig ist.

Ein Epimorphismus in $\mathfrak{R}$ braucht dagegen, wie in der Einleitung erwähnt, keine surjektive Abbildung zu sein. In diesem Zusammenhang ist ein Resultat von OORT und STROOKER [16] erwähnenswert: Ein Epimorphismus $f: R \to S$ in $\mathfrak{R}$ ist genau dann surjektiv, wenn S vermöge f zu einem endlich erzeugten R-Modul wird.

2. *Notwendige und hinreichende Bedingungen*

LEMMA 2.1. *Es seien $f: R \to S$ und $g: R \to T$ zwei Abbildungen in $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[d, "p_1"] \\ T \arrow[r, "p_2"'] & S \otimes_R T \end{tikzcd}$$

ist ein Cocartesisches Quadrat (ein „pushout" in anderer Terminologie).

Bei der Bildung des Tensorproduktes tragen S bzw. T die durch f bzw. g induzierte R-Modulstruktur. p_1 und p_2 sind durch $p_1(s) = s \otimes 1$ bzw. $p_2(t) = 1 \otimes t$ definiert.

(b) *Wenn f (bzw. g) ein Epimorphismus ist, so auch p_2 (bzw. p_1).*

(c) *Wenn $S = T$ und $f = g$ ist, so sind p_1 und p_2 Monomorphismen.*

Beweis.

(a) ist klar, wenn man beachtet, dass $S \otimes_Z T$ das Coprodukt in $\mathfrak{R}$ ist ([15], p. 181).

(b) ist eine wohlbekannte Eigenschaft des Cocartesischen Quadrats.

(c) Unter diesen Voraussetzungen faktorisiert die Identität $1_S: S \to S$ über $S \otimes_R S$, d.h. es gibt ein $q: S \otimes_R S \to S$ mit $qp_1 = 1_S$, $qp_2 = 1_S$, woraus die Behauptung folgt.

Die folgenden Kriterien sind zum Teil wohlbekannt, wir geben aber der Vollständigkeit halber die Beweise an.

SATZ 2.2. *Es sei $f: R \to S$ ein Ring-Homomorphismus. M und N seien S-Moduln. Mit M' und N' seien die R-Moduln bezeichnet, die man vermöge f aus M und N erhält.*

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *$f: R \to S$ ist ein Epimorphismus in $\mathfrak{R}$.*

(b) *Im Cocartesischen Quadrat*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ S & \xrightarrow[p_2]{} & S\otimes_R S \end{array}$$

ist $p_1=p_2$.

(c) p_1 *oder* p_2 *ist ein Isomorphismus in* $\mathfrak{R}$ *und damit auch in* $\mathfrak{M}_R$ *und* $\mathfrak{M}_S$.

(d) *Für jedes* M *gilt:* $M\cong M'\otimes_R S$ *in* $\mathfrak{M}_S$, *wobei* $M'\otimes_R S$ *die übliche* S*-Modul-Struktur trägt.*

(e) *Für alle* M *und* N *gilt:* $\mathrm{Hom}_S(M, N)\cong\mathrm{Hom}_R(M', N')$, *d.h. die durch* f *induzierte Einbettung von* $\mathfrak{M}_S$ *in* $\mathfrak{M}_R$ *ist voll.*

(f) *Für alle* M *und* N *gilt:* $M'\otimes_R N'\cong M\otimes_S N$.

Beweis.

(a)$\Rightarrow$(b): Da $p_1 f=p_2 f$ ist, muss $p_1=p_2$ sein.

(b)$\Rightarrow$(a): Es seien $g, h: S\to T$ mit $gf=hf$ gegeben. Wegen der universellen Eigenschaft des Cocartesischen Quadrats gibt es dann ein $k: S\otimes_R S\to T$ mit $kp_1=g$, $kp_2=h$, woraus $g=h$ folgt.

(b)$\Rightarrow$(c): Nach Lemma 2.1. (c) gibt es ein q mit $qp_1=qp_2=1_S$. Man hat dann $p_1 qp_1=p_1$ und $1_{S\otimes S}p_1=p_1$. Lemma 2.1. (b) sagt uns dann, dass $p_1 q=1_{S\otimes S}$ ist.

Es ist klar, dass $p_1=p_2$ und q auch R- und S-Modul-Homomorphismen sind, denn q ist durch $q(s\otimes s')=ss'$ definiert.

(c)$\Rightarrow$(b): Wenn etwa p_1 ein Isomorphismus ist, so gilt wegen $qp_1=qp_2$ auch $p_1=p_2$, denn $p_1^{-1}q=1_{S\otimes S}$.

(c)$\Rightarrow$(d): Man findet nachstehende Folge von Isomorphismen abelscher Gruppen: $M\cong M\otimes_S S\cong M\otimes_S(S\otimes_R S)\cong(M\otimes_S S)\otimes_R S\cong M'\otimes_R S$. Alle diese Isomorphismen sind aber auch S-Modul-Isomorphismen.

(d)$\Rightarrow$(e): Wir betrachten das Paar adjungierter Funktoren:

$F:\mathfrak{M}_R\to\mathfrak{M}_S \quad FA=A\otimes_R S$

$G:\mathfrak{M}_S\to\mathfrak{M}_R \quad GM=M'$

Nach (d) ist $FGM\cong M$ und aus der Adjungiertheit von F und G folgt:

$\mathrm{Hom}_S(M, N)\cong\mathrm{Hom}_S(FGM, N)\cong\mathrm{Hom}_R(GM, GN)=\mathrm{Hom}_R(M', N')$

(e)$\Rightarrow$(b): Es sei $p_1\neq p_2$, d.h. es gebe ein t in S mit $t\otimes 1\neq 1\otimes t$. Wir betrachten den Automorphismus a der additiven Gruppe von $S\otimes_R S$, der durch $a(s\otimes s')=s'\otimes s$ definiert ist. a ist ein R-Homomorphismus, aber kein S-Homomorphismus, denn $a(t(1\otimes 1))=a(t\otimes 1)=1\otimes t$, aber $ta(1\otimes 1)=t(1\otimes 1)=t\otimes 1$.

(d)$\Rightarrow$(f): Man hat $M\otimes_S N\cong(M\otimes_S S)\otimes_S N\cong M\otimes_S(S\otimes_R S)\otimes_S N\cong$ $(M\otimes_S S)\otimes_R(N\otimes_S S)\cong M'\otimes_R N'$.

(f)$\Rightarrow$(c): Wenn $S\otimes_R S$ nicht isomorph S ist, so ist (f) nicht erfüllt, wenn man $M=N=S$ setzt.

II. Saturierte und dominante Ringe

3. *Definitionen*

In diesem Kapitel werden wir uns hauptsächlich mit Erweiterungen von Ringen befassen. Wir nennen eine Erweiterung *epimorph*, wenn die zugehörige Einbettungsabbildung ein Epimorphismus ist. $R \subset S$ heisst eine echte Erweiterung, wenn $R \neq S$ ist.

Die folgenden Definitionen stammen im wesentlichen von ISBELL [12].

DEFINITION 3.1. Es sei $R \subset S$ eine Erweiterung von Ringen. Man sagt, dass ein Element d aus S von R *dominiert* wird, wenn für alle Ringe T und alle $g, h: S \to T$ aus $g(r) = h(r)$ für alle $r \in R$ folgt, dass $g(d) = h(d)$ ist.

Die Menge aller dominierten Elemente bildet einen Unterring von S, der R enthält und der das *Dominion* $\mathrm{Dom}(R, S)$ von R in S genannt wird.

Ein Element $s \in S$ liegt genau dann in $\mathrm{Dom}(R, S)$, wenn in $S \otimes_R S$ die Beziehung $s \otimes 1 = 1 \otimes s$ gilt, d.h. wenn (mit den Bezeichnungen von Satz 2.2.) $p_1(s) = p_2(s)$ ist.

DEFINITION 3.2. Ein Ring R heisst *dominant*, wenn für alle Erweiterungen $R \subset S$ stets $R = \mathrm{Dom}(R, S)$ ist. (ISBELL nennt dies „absolutely closed"). Ein Ring R heisst *stark dominant*, falls jedes homomorphe Bild von R (inklusive R) dominant ist.

Ein Ring R heisst *saturiert*, falls er keine echten epimorphen Erweiterungen besitzt.

Ein Ring R heisst *stark saturiert*, falls jedes homomorphe Bild von R (inklusive R) saturiert ist.

Man sieht ohne weiteres, dass folgende Implikationen gelten:

$$\begin{array}{ccc} & \text{stark dominant} & \\ & \Downarrow \qquad \Downarrow & \\ \text{dominant} & & \text{stark saturiert} \\ & \Downarrow \qquad \Downarrow & \\ & \text{saturiert} & \end{array}$$

Wir werden im Abschnitt 7. Beispiele angeben, die zeigen, dass keine der Umkehrungen richtig ist.

Das folgende Lemma ist eine Variante eines Resultats von ISBELL.

LEMMA 3.3. *Es sei $R \subset S$ und $s \in S$. Es gebe Elemente $a, b \in R$ und $t \in S$ mit $s = at$ und $a = tb$.* Dann ist $s \in \mathrm{Dom}(R, S)$.

Beweis. Es seien $g, h: S \to T$ gegeben mit $g(r) = h(r)$ für alle $r \in R$. Man hat dann $g(s) = g(at) = h(a)\, g(t) = h(t)\, h(b)\, g(t) = h(t)\, g(b)\, g(t) = h(t)\, g(a) = h(ta) = h(s)$.

4. *Notwendige Bedingungen*

Wir gebrauchen folgende Schreibweise: (r) bezeichnet das durch r erzeugte Hauptideal und X^* den Annullator der Menge X: $X^* = \{r \in R \mid rx = 0 \text{ für alle } x \in X\}$.

LEMMA 4.1. *R sei saturiert. Dann ist für jedes $a \in R$ und jede natürliche Zahl j mindestens eine (und damit genau eine) der folgenden Bedingungen A_j, B_j erfüllt:* $A_j: (a^j) = (a^{j+1})$, $\quad B_j: (a^j)^* \neq (a^{j+1})^*$.

Beweis. Wir nehmen an, dass es ein $a \in R$ und eine Zahl k gibt, sodass A_k und B_k beide nicht erfüllt sind und konstruieren eine echte epimorphe Erweiterung von R.

Es sei $R[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über R, I das durch $a^{k+1}x - a^k$ erzeugte Hauptideal von $R[x]$ und R' der Restklassenring $R[x]/I$. Die Restklasse von r modulo I bezeichnen wir mit $\bar{r}$.

Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $R \to R'$, gegeben durch $r \mapsto \bar{r}$, ein Monomorphismus ist. Es sei $\bar{r} = 0$, dann hat r die Form $r = q(x)(a^{k+1}x - a^k)$, mit $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n$.

Nach Voraussetzung ist $(a^{k+1})^* = (a^k)^*$ und ein Koeffizientenvergleich ergibt dann ohne weiteres $r = -q_0 a^k = 0$.

Mit S bezeichnen wir nun den Unterring von R', der durch R und das Element $y = \bar{x}^{2k} a^k$ erzeugt wird und behaupten:

(a) $R \to S$ ist ein Monomorphismus,

(b) $R \to S$ ist nicht surjektiv,

(c) $R \to S$ ist ein Epimorphismus.

(a) ist klar, weil schon $R \to R'$ ein Monomorphismus ist.

(b) Unter mehrfacher Verwendung der Relation $a^{k+1}\bar{x} = a^k$ findet man $a^{k+1}(a^{k-1}y) = a^{2k}y = a^{3k}\bar{x}^{2k} = a^{3k-1}\bar{x}^{2k-1} = \cdots = a^{k+1}\bar{x} = a^k$. Wäre nun $y \in R$, so hätte man einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass A_k nicht erfüllt ist.

(c) Die obenerwähnte Relation führt auch auf folgende Beziehungen: $y = y^2 a^k$, denn $y^2 a^k = \bar{x}^{4k} a^{3k} = \cdots = \bar{x}^{2k} a^k = y$ und $a^k = y^2 a^{3k}$, denn $y^2 a^{3k} = \bar{x}^{4k} a^{5k} = \cdots = \bar{x} a^{k+1} = a^k$. Nach Lemma 3.3. gilt folglich $y \in \mathrm{Dom}(R, S)$, und da S von R und y erzeugt wird, ist $\mathrm{Dom}(R, S) = S$, das heisst, die (echte) Erweiterung $R \subset S$ ist epimorph.

KOROLLAR 4.2. *In einem saturierten Ring ist jedes Element entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.*

Beweis. Es sei a kein Nullteiler, dann ist B_1 nicht erfüllt, somit muss A_1 gelten, d.h. es gibt ein b mit $a = ba^2$.

BEMERKUNG. Dieses Korollar folgt auch direkt aus der Tatsache, dass ein Ring R stets epimorph in seinen klassischen Quotientenring $Q_{cl}(R)$ eingebettet ist.

LEMMA 4.3. *R sei dominant. Dann ist für jedes geordnete Paar a, b von Elementen aus R mindestens eine (und damit genau eine) der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:* $A: (a) \subset (b)$, $\quad B: (b)^* \not\subset (a)^*$.

Beweis. Es gebe ein Paar a, b, das beide Bedingungen nicht erfüllt. Wir konstruieren eine Erweiterung S von R, in welcher $R \neq \mathrm{Dom}(R, S)$ ist.

S sei der Restklassenring von $R[x]$ modulo dem Ideal J, das durch $bx-a$ erzeugt wird.

Genau wie im Beweis von Lemma 4.1. zeigt man, dass die Abbildung $R \to S$ ein Monomorphismus ist.

Wir betrachten nun das Element $z=\bar{x}^2 b \in S$ und zeigen, dass es nicht in R liegt. Läge es nämlich in R, so hätte man eine Beziehung $x^2 b - r = q(x)(bx-a)$ für ein gewisses $r \in R$, mit $q(x)$ wie oben.

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$
\begin{array}{ll}
(0) & -q_0 a = -r \\
(1) & q_0 b - q_1 a = 0 \\
(2) & q_1 b - q_2 a = b \\
(3) & q_2 b - q_3 a = 0 \\
\cdots & \\
(n) & q_{n-1} b - q_n a = 0 \\
(n+1) & q_n b \qquad = 0
\end{array}
$$

Nach Voraussetzung ist $(b)^* \subset (a)^*$ und man erhält $q_{n-1} b = \cdots = q_2 b = 0$, somit $q_2 a = 0$ und daher $q_1 b = b$. Aus $(q_1 - 1) b = 0$ folgt $(q_1 - 1) a = 0$, d.h. $q_1 a = q_0 b = a$, und man hat $(a) \subset (b)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Nach Lemma 3.3. liegt z aber in $\mathrm{Dom}(R, S)$, denn es gelten die Beziehungen $z = \bar{x} a$ und $a = \bar{x} b$.

KOROLLAR 4.4. *In einem dominanten Ring R ist jedes Hauptideal ein Annullatorideal, d.h. es gilt $(r) = (r)^{**}$ für alle $r \in R$.*

Beweis. Es existiere ein $b \subset R$ mit $(b) \neq (b)^{**}$. Dann gibt es ein $a \notin (b)$, $a \in (b)^{**}$. Aus der trivialen Gleichheit $(b)^{***} = (b)^*$ folgt dann $(b)^* \subset (a)^*$ und die Bedingungen A und B sind beide nicht erfüllt.

5. *Hinreichende Bedingungen*

Die beiden folgenden Definitionen entstammen einer Arbeit von COHN [4].

DEFINITION 5.1. Es sei M ein R-Modul. Ein Untermodul N heisst *rein* in M, falls die Folge $0 \to N \otimes_R U \to M \otimes_R U$ für alle R-Moduln U exakt ist.

N ist zum Beispiel dann rein in M, wenn M/N flach oder wenn N direkter Summand in M ist.

DEFINITION 5.2. Ein Ring R heisst *rein*, wenn er in jedem Erweiterungsring S ein reiner R-Untermodul ist.

Beispiele von reinen Ringen sind die (VON NEUMANN-) regulären Ringe (jeder Modul ist flach) und die selbstinjektiven Ringe (R ist R-direkter Summand in jedem S).

LEMMA 5.3. *Ein reiner Ring ist dominant.*

Beweis. (Vgl. [4], Lemma 4.1.).

Es sei R rein und $R \subset S$. Aus der exakten Folge von R-Moduln

$$0 \to R \to S \xrightarrow{q} S/R \to 0$$

entsteht durch Bildung des Tensorproduktes mit S bzw. S/R das nachstehende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{p} & S \otimes_R S \\ & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q\otimes 1} \\ 0 & \to & S/R & \xrightarrow[\bar{p}]{} & S/R \otimes_R S \end{array}$$

Dabei ist $p(s) = s \otimes 1$, $\bar{p}(\bar{s}) = \bar{s} \otimes 1$.

Es sei nun $s \in \mathrm{Dom}(R, S)$, d.h. $s \otimes 1 = 1 \otimes s$ in $S \otimes_R S$. Es ist dann $(q \otimes 1)(1 \otimes s) = q(1) \otimes s = 0$, somit auch $(q \otimes 1)(s \otimes 1) = (q \otimes 1)(p(s)) = \bar{p}(q(s)) = 0$.

Daraus folgt $q(s) = 0$, d.h. $s \in R$ und es ist $R = \mathrm{Dom}(R, S)$.

KOROLLAR 5.4. *Reguläre Ringe und selbstinjektive Ringe sind dominant und (a fortiori) saturiert.*

Für unsere weiteren Untersuchungen benötigen wir die Definition und einige Eigenschaften der π-regulären Ringe.

DEFINITION 5.5. Ein Ring R heisst *π-regulär*, wenn es zu jedem $r \in R$ ein $x \in R$ und eine natürliche Zahl n gibt, sodass $r^n x r^n = r^n$ gilt.

Beispiele von π-regulären Ringen sind die regulären und die artinschen Ringe.

Die folgenden Resultate sind vermutlich zum Teil wohlbekannt.

LEMMA 5.6. *Folgende Aussagen über einen Ring R sind äquivalent:*

(a) *R ist π-regulär.*

(b) *Zu jedem $r \in R$ existiert ein $y \in R$ und eine natürliche Zahl n mit $r^{n+1} y = r^n$.*

(c) *Das Jacobson-Radikal* $\mathrm{Rad}\, R = N$ *ist ein Nilideal und $\bar{R} = R/N$ ist regulär.*

(d) *R/P ist regulär, wo $P = \mathrm{rad}\, R$ das Primradikal (d.h. der Durchschnitt aller Primideale) von R ist.*

(e) *In jedem homomorphen Bild von R (inklusive R) ist jedes Element entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.*

(f) *Jedes Primideal von R ist ein maximales Ideal von R.*

Beweis.

(a)$\Rightarrow$(b): Man setzt $y = r^{n-1} x$.

(b)$\Rightarrow$(a): Unter mehrfacher Verwendung der Beziehung $r^{n+1} y = r^n$ rechnet man nach, dass $r^{2n} y^n = r^{2n-1} y^{n-1} = \cdots = r^{n+1} y = r^n$ ist.

(a), (b)$\Rightarrow$(c): Es sei $r \in N$. Aus (a) folgt, dass $r^n x \in N$ ein Idempotent ist. Das einzige Idempotent im Radikal ist aber Null, sodass $r^n = r^n x r^n = 0$ ist.

In $\bar{R}$ gilt wegen (b) $\bar{r}^{n+1}\bar{y}=\bar{r}^n$, für ein gewisses, von $\bar{r}$ abhängiges $\bar{y}$. Daraus folgt aber durch einfache Rechnung $(\bar{r}^n\bar{y}-\bar{r}^{n-1})^2=0$, und da es in $\bar{R}$ keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ gibt, gilt $\bar{r}^n\bar{y}=\bar{r}^{n-1}$. Durch Wiederholung dieses Prozesses erhält man schliesslich $\bar{r}^2\bar{y}=\bar{r}$.

(c)$\Rightarrow$(d): Wenn N ein Nilideal ist, so ist $N=P$.

(d)$\Rightarrow$(b): Es sei $r\in R$. Da R/P regulär ist, gibt es ein $x\in R$, sodass $r-r^2x\in P$ ist. P ist ein Nilideal und somit gilt $(r-r^2x)^n=r^n(1-rx)^n=0$ für ein gewisses n.

Entwickelt man den Klammerausdruck, so erhält man $r^n(1-prx)=0$, wo p ein Polynom in rx ist. Mit $y=px$ ergibt sich dann $r^n=r^{n+1}y$.

(a)$\Rightarrow$(f): Jedes homomorphe Bild eines π-regulären Rings ist wieder π-regulär und ein π-regulärer Integritätsbereich ist offensichtlich ein Körper.

(f)$\Rightarrow$(e): Wenn in R jedes Primideal ein maximales Ideal ist, dann ist auch jedes Primideal ein minimales Primideal, und dies alles gilt auch in jedem homomorphen Bild $\bar{R}$ von R. Es ist aber wohlbekannt (vgl. z.B. [2], p. 94), dass jedes minimale Primideal eines Rings aus lauter Nullteilern besteht. Daraus folgt, dass jedes maximale Ideal von $\bar{R}$ aus lauter Nullteilern besteht.

(e)$\Rightarrow$(a): Es sei R nicht π-regulär, dann konstruieren wir ein homomorphes Bild R/I, das einen Nichtnullteiler $\bar{a}$ enthält, der keine Einheit ist.

Es gebe also ein $a\in R$, sodass $a^{2n}x\neq a^n$ ist, für alle $x\in R$ und alle natürlichen Zahlen n. Dann ist a weder nilpotent noch eine Einheit. Falls a kein Nullteiler ist, so sind wir fertig, denn dann ist schon R selbst nicht π-regulär. Es sei a ein Nullteiler. Wir betrachten die aufsteigende Kette von Annulatoridealen $(a)^*\subset(a^2)^*\subset\cdots\subset(a^n)^*\subset\cdots$. und bilden ihre Vereinigung I.

a ist kein Nullteiler modulo I, denn wenn $ab\in I$ ist, so gibt es ein n mit $ba^{n+1}=0$, woraus $b\in I$ folgt. a ist auch keine Einheit modulo I, denn wäre $ac-1\in I$, so hätte man $a^{m+1}c=a^m$ für ein geeignetes m. Dann wäre aber, wie unter (b) gezeigt, $a^{2m}c^m=a^m$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Bemerkung. Die Äquivalenz von (d) und (f) ist als Übungsaufgabe in Bourbaki ([2], chap. II, § 4, ex. 16d) formuliert, der Zusammenhang mit den π-regulären Ringen scheint indessen nirgends bemerkt worden zu sein.

Das nächste Lemma verallgemeinert das folgende bekannte Resultat: Ein noetherscher Ring, in dem jedes Primideal maximal ist, ist artinsch.

Lemma 5.7. *Ein π-regulärer Ring R, der die Maximalbedingung für Annullatorideale erfüllt, ist artinsch.*

Beweis. Wir wenden einen Satz von Small an, der die Ringe charakterisiert, die einen artinschen klassischen Quotientenring besitzen ([19], Theorem C. Es genügt, den Beweis von Theorem B zu betrachten, der sich in unserm Spezialfall direkt anwenden lässt). R erfüllt die Voraussetzungen dieses Satzes, denn $N=\operatorname{Rad}R$ ist wegen

der Maximalbedingung nilpotent (HERSTEIN/SMALL [10]) und ein Annullatordieal (SMALL [18], Lemma 1.16). Da $R=Q_{cl}(R)$ gilt, ist das Lemma bewiesen.

DEFINITION 5.8. Ein Ideal I eines Ringes R heisst *T-nilpotent*, falls es zu jeder Folge $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ von Elementen aus I eine Zahl p gibt, sodass das Produkt $a_1 a_2 \ldots a_p = 0$ ist.

SATZ 5.9. *Der Ring R erfülle die beiden folgenden Bedingungen:*
(a) $N = \operatorname{Rad} R$ *ist T-nilpotent;*
(b) $\bar{R} = R/N$ *ist regulär.*
Dann ist R stark saturiert.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass R saturiert ist und zeigen nachher, dass jedes homomorphe Bild von R ebenfalls die Bedingungen (a) und (b) erfüllt.

Es sei $f: R \to S$ eine epimorphe Erweiterung von R. Wir müssen zeigen, dass $R=S$ ist. f induziert eine Abbildung $g: R/N \to S/NS$, die sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus ist. Nach Voraussetzung ist aber R/N regulär und damit saturiert (Korollar 5.4.), g ist daher ein Isomorphismus und man erhält die Darstellung $S = R + NS$.

Wir nehmen nun an, es sei $R \neq S$ und zeigen, dass dann N nicht T-nilpotent ist. Für die folgenden Überlegungen setzen wir fest, dass alle $n \in N$, $r \in R$ und $s \in S$ sein sollen.

Zunächst eine Bemerkung: Wenn es ein Paar von Elementen n, s gibt mit $ns \notin R$, dann gibt es auch Elemente n', s' mit $nn's' \notin R$. Man hat nämlich eine Darstellung $s = r + \sum n_i s_i$ und es ist $ns = nr + \sum n n_i s_i$. Dabei können offensichtlich nicht alle $n n_i s_i \in R$ sein und ein beliebiges dieser Produkte liefert n' und s'.

Nach Voraussetzung gibt es nun ein s_0, das nicht in R liegt. Es hat eine Darstellung $s_0 = r_0 + \sum n_j s_j$ und wiederum können nicht alle $n_j s_j \in R$ sein. Wir finden also n_1, s_1 mit $n_1 s_1 \notin R$. Nach der Bemerkung gibt es dann $n' = n_2$, $s' = s_2$ mit $n_1 n_2 s_2 \notin R$. Wir können diesen Prozess beliebig oft wiederholen und finden schliesslich zwei Folgen $n_1, n_2, \ldots$ und $s_1, s_2, \ldots$ mit $n_1 n_2 \ldots n_k s_k \notin R$ für alle k. A fortiori ist dann $n_1 n_2 \ldots n_k \neq 0$ für alle k, was bedeutet, dass N nicht T-nilpotent ist.

Damit ist der erste Teil bewiesen und es bleibt zu zeigen, dass auch jedes homomorphe Bild von R die Eigenschaften (a) und (b) hat. Da R nach Lemma 5.6. π-regulär ist, gilt jedenfalls (b) in jedem homomorphen Bild.

Es bleibt zu beweisen, dass auch (a) stets erfüllt ist. Dazu sei I ein beliebiges Ideal von R und $h: R \to R/I$ die zugehörige Projektion. Dann gilt stets $h(\operatorname{Rad} R) \subset \operatorname{Rad}(R/I)$, wir werden aber zeigen, dass hier sogar $h(\operatorname{Rad} R) = \operatorname{Rad}(R/I)$ ist, woraus dann die Behauptung unmittelbar folgt.

Es sei $h(a) \in \operatorname{Rad}(R/I)$, dann müssen wir ein $q \in N$ finden, sodass $h(q) = h(a)$ ist. R/N ist regulär, es gibt somit ein $x \in R$ und ein $q_1 \in N$ mit $a - a^2 x = q_1$. Man hat

dann $a=a^2x+q_1=a(ax)+q_1=(a^2x+q_1)\,ax+q_1=a^3x^2+(q_1ax+q_1)=a^3x^2+q_2$, mit $q_2\in N$. Indem man wiederum a durch a^2x+q_1 ersetzt, erhält man die Beziehungen $a=a^4x^3+q_3=\cdots=a^mx^{m-1}+q_{m-1}$. Nach Voraussetzung ist aber $h(a)\in\mathrm{Rad}(R/I)$ und da dies ein Nilideal ist, muss $a^m\in I$ sein, für ein gewisses m, woraus folgt, dass $h(a)=h(q_{m-1})$ ist.

Damit ist Satz 5.9. vollständig bewiesen.

Es ist erwähnenswert, dass sich nach HAMSHER [9] und RENAULT [17] die in Satz 5.9. beschriebene Klasse von Ringen R dadurch charakterisieren lässt, dass jeder R-Modul maximale Untermoduln besitzt.

Die Anwendung dieser Resultate hätte uns einen Teil des Beweises erspart, doch haben wir einen direkten Beweis vorgezogen.

6. *Anwendungen auf gewisse Klassen von Ringen*

Wir sind nun in der Lage, für einige Klassen von Ringen notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen.

Ein Ring heisst semiprim, wenn er keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente enthält.

SATZ 6.1. *R sei ein semiprimer Ring. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) *R ist rein.*

(b) *R ist stark dominant.*

(c) *R ist dominant.*

(d) *R ist stark saturiert.*

(e) *R ist saturiert.*

(f) *R ist regulär.*

Beweis. Da ein homomorphes Bild eines regulären Ringes regulär ist, folgt aus Korollar 5.4. sofort, dass (f)$\Rightarrow$(a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(e) und (b)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(f) gilt. Um (e)$\Rightarrow$(f) zu zeigen, wenden wir Lemma 4.1. an. Für jedes $a\in R$ ist die Bedingung B_1 nicht erfüllt, weil R semiprim ist, somit muss A_1 gelten, was gerade besagt, dass R regulär ist.

SATZ 6.2. *R sei ein Ring, der die Maximalbedingung für Annullatorideale erfüllt. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) *R ist stark saturiert.*

(b) *R ist saturiert.*

(c) *R ist ein artinscher Ring.*

Beweis.

(a)$\Rightarrow$(b): Dies ist klar.

(c)$\Rightarrow$(a): Dies folgt aus Satz 5.9.

(b)$\Rightarrow$(c): Es sei a ein beliebiges Element aus R. Wir betrachten die aufsteigende

Folge von Annullatoridealen $(a)^* \subset (a^2)^* \subset \cdots \subset (a^n)^* \subset \cdots$. Wegen der Maximalbedingung muss es ein k mit $(a^k)^* = (a^{k+1})^*$ geben.

Die Bedingung B_k von Lemma 4.1. ist dann nicht erfüllt, folglich muss A_k gelten und es gibt ein $y \in R$ mit $a^{k+1} y = a^k$. Nach Lemma 5.6. ist R somit π-regulär und nach Lemma 5.7. artinsch.

KOROLLAR 6.3. *R sei ein noetherscher Ring. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) *R ist stark saturiert.*

(b) *R ist saturiert.*

(c) *R ist ein artinscher Ring.*

Wir erinnern an zwei Definitionen. Ein Ring R heisst ein *Quasi-Frobenius-Ring*, wenn er eine (und damit auch die andere) der beiden folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:

(a) R ist noethersch und selbstinjektiv.

(b) R ist artinsch und jedes Ideal ist ein Annullatorideal.

Ein Ring R heisst ein *Hauptidealring*, wenn jedes Ideal ein Hauptideal ist. (R braucht also kein Integritätsbereich zu sein.)

SATZ 6.4. *R sei ein Hauptidealring. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

(a) *R ist stark dominant.*

(b) *R ist dominant.*

(c) *R ist stark saturiert.*

(d) *R ist saturiert.*

(e) *R ist ein Quasi-Frobenius-Ring.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass (e) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (d) gilt.

Es ist bekannt (FAITH [5], LEVY [14]), dass jedes homomorphe Bild (inklusive R) eines artinschen Hauptidealringes R ein Quasi-Frobenius-Ring ist. Wegen Korollar 5.4. gilt somit (e) $\Rightarrow$ (a), und da ein saturierter noetherscher Ring artinsch ist (Satz 6.3.), hat man auch (a) $\Rightarrow$ (d).

7. *Gegenbeispiele*

In diesem Abschnitt geben wir drei Beispiele, die zeigen, dass sich die nach Definition 3.2. aufgeführten Implikationen nicht umkehren lassen.

Wir notieren noch eine einfache notwendige Bedingung:

LEMMA 7.1. *Ein stark saturierter Ring ist π-regulär.*

Beweis. Wenn R nicht π-regulär ist, so ist nach Lemma 5.6. R/P nicht regulär, dann ist aber R/P nach Satz 6.1. auch nicht saturiert.

Weiter benötigen wir ein Lemma, das auch an sich von Interesse ist und das übrigens auch für nichtkommutative Ringe gilt.

LEMMA 7.2. *Das Produkt von beliebig vielen selbstinjektiven Ringen ist selbstinjektiv.*

Beweis. Es sei $R=\prod_i R_i$, wobei jedes R_i als R_i-Modul injektiv sei. R_k wird zu einem R-Modul vermöge der Projektion $p_k: R \to R_k$, dabei ist $\operatorname{Ker} p_k = \prod_{i \neq k} R_i$.

SNAPPER [20] gibt folgende notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass der R_k-Modul R_k auch als R-Modul injektiv ist:

(S): Es sei $u \in \operatorname{Ker} p_k$, $a \in R_k$. Dann folgt aus $u^* a = 0$, dass $a=0$ ist. Dabei ist u^* wie üblich der Annullator von u in R.

In unserm Fall ist offensichtlich $R_k \subset u^*$ für alle $u \in \operatorname{Ker} p_k$. Es sei $u^* a = 0$, dann ist auch $R_k a = 0$ und somit $a=0$. (S) ist somit erfüllt und R_k ist R-injektiv.

R ist aber als R-Modul das direkte Produkt der R-Moduln R_i und somit injektiv nach einem bekannten Satz über das direkte Produkt injektiver Moduln.

BEISPIEL 7.3. Ein Ring, der dominant und daher saturiert, aber nicht stark saturiert und daher nicht stark dominant ist.

Wegen Korollar 5.4. und Lemma 7.1. genügt es einen Ring R anzugeben, der selbstinjektiv, aber nicht π-regulär ist.

Dazu sei $R_n = \mathbf{Z}/(p^n)$ für eine beliebige feste Primzahl p. Wir setzen $R = \prod_{n=1}^{\infty} R_n$. R ist nach Lemma 7.2. selbstinjektiv, nach Lemma 5.6. aber nicht π-regulär, denn $\operatorname{Rad} R$ ist kein Nilideal.

BEISPIEL 7.4. Ein Ring, der saturiert, aber nicht dominant ist.

Es sei K ein Körper, $K[x, y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten, I das durch x^2, xy und y^2 erzeugte Ideal von $K[x, y]$ und $R = K[x, y]/I$.

R ist artinsch und daher saturiert, erfüllt aber die Bedingungen A und B von Lemma 4.3. nicht, denn $(\bar{x})^* = (\bar{y})^* = (\bar{x}, \bar{y})$, aber es ist weder $(\bar{x}) \subset (\bar{y})$ noch $(\bar{y}) \subset (\bar{x})$.

BEISPIEL 7.5. Ein Ring, der stark saturiert und dominant, aber nicht stark dominant ist.

Es sei $K[x, y]$ wie oben, J das durch x^2 und y^2 erzeugte Ideal von $K[x, y]$ und $R = K[x, y]/J$.

R ist ein Quasi-Frobenius-Ring (sogar eine Frobenius-Algebra über K), somit dominant und stark saturiert. $R/(\bar{x}\bar{y})$ ist aber gerade der Ring von Beispiel 7.4., der nicht dominant ist.

III. Die epimorphe Hülle

8. *Definition*

In diesem Abschnitt soll $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kategorie bezeichnen.

DEFINITION 8.1. Ein Monomorphismus $f: A \to B$ in $\mathfrak{C}$ heisst *wesentlich*, falls für

alle Objekte C und alle $g: B \to C$ die Zusammensetzung gf nur dann ein Monomorphismus ist, wenn g ein Monomorphismus ist.

DEFINITION 8.2. Eine Abbildung, die sowohl ein Mono- als auch ein Epimorphismus ist, heisst ein *Bimorphismus*. Ein Objekt A heisst *saturiert*, falls jeder Bimorphismus mit Definitionsbereich A ein Isomorphismus ist.

Die folgende Definition ist durch die Diskussion in der Einleitung motiviert.

DEFINITION 8.3. Die *epimorphe Hülle* $E(A)$ eines Objektes A aus $\mathfrak{C}$ besteht aus einem Objekt E und einem wesentlichen Bimorphismus $f: A \to E$, sodass für jedes Objekt B und jeden wesentlichen Bimorphismus $h: A \to B$ ein $g: B \to E$ existiert mit $gh = f$.

Wir werden meistens darauf verzichten, die Abbildung f anzuführen und nur $E(A)$ oder E schreiben.

LEMMA 8.4. *Mit den Bezeichnungen von Definition* 8.3. *gilt:*

(a) *Die Abbildung g ist ein wesentlicher Bimorphismus.*

(b) *Die Abbildung g ist eindeutig bestimmt.*

(c) *Die epimorphe Hülle von A ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(d) *Jeder wesentliche Bimorphismus $k: E \to C$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis.

(a) Dies ist unmittelbar klar.

(b) Dies gilt, weil h ein Epimorphismus ist.

(c) Es seien (E, f) und (E', f') zwei epimorphe Hüllen von A. Dann gibt es ein $g: E' \to E$ und ein $g': E \to E'$ mit $gf' = f$ und $g'f = f'$. Aus $g'gf' = f'$ und $gg'f = f$ folgt dann, dass g und g' ein Paar von inversen Isomorphismen bilden, welche mit f und f' verträglich sind.

(d) Mit $k: E \to C$ ist auch $kf: A \to C$ ein wesentlicher Bimorphismus. Es existiert deshalb ein $g: C \to E$ mit $f = ghf$, woraus folgt, dass $gh = 1_E$ ist. Daneben ist aber $hghf = h1_E f = hf$ und somit $hg = 1_C$.

Man beachte, dass (d) im allgemeinen nicht bedeutet, dass E saturiert ist, sondern nur, dass E die folgende, schwächere Eigenschaft besitzt: Jeder wesentliche Bimorphismus mit Definitionsbereich E ist ein Isomorphismus.

Wir werden aber sehen (Korollar 9.3.) dass in der Kategorie $\mathfrak{R}$ der Ringe diese beiden Eigenschaften äquivalent sind.

Über die Existenz der epimorphen Hülle kann im allgemeinen nichts ausgesagt werden.

9. *Die epimorphe Hülle in der Kategorie der Ringe*

Im folgenden bezieht sich alles wieder auf die Kategorie $\mathfrak{R}$.

Eine Erweiterung von Ringen heisst wesentlich, wenn die zugehörige Einbettungsabbildung ein wesentlicher Monomorphismus ist.

Dies ist gleichbedeutend damit, dass jedes von Null verschiedene Ideal von S einen von Null verschiedenen Durchschnitt mit R hat, oder auch damit, dass es zu jedem $s \in S$, $s \neq 0$, ein $s' \in S$ gibt mit $s's \in R$, $s's \neq 0$.

BEMERKUNG 9.1. Eine stärkere Forderung ist die, dass $R \subset S$ eine wesentliche Erweiterung in der Kategorie der R-Moduln ist. Dann hat nämlich sogar jeder von Null verschiedene Untermodul von S einen von Null verschiedenen Durchschnitt mit R, mit andern Worten, das oben definierte Element s' liegt sogar in R.

LEMMA 9.2. *Es sei $f: R \to S$ eine epimorphe Erweiterung. Dann gilt:*

(a) *Es gibt eine wesentliche epimorphe Erweiterung $f': R \to S'$ und einen Epimorphismus $q: S \to S'$ mit $f' = qf$.*

(b) *Wenn $R \subset S$ eine echte Erweiterung ist, so ist auch $R \subset S'$ echt.*

Beweis.

(a) In der Familie aller Ideale J von S mit $J \cap R = 0$ gibt es nach dem Zornschen Lemma maximale Elemente. Eines davon bezeichnen wir mit I und q sei die Projektion $S \to S/I$. Dann ist es klar, dass $f' = qf$ ein wesentlicher Bimorphismus ist.

(b) Wir nehmen an, die Erweiterung $R \subset S'$ sei nicht echt, d.h. es sei $R = S'$. Dann ist offensichtlich $S = R + I$, und da $R \cap I = 0$ ist, ist S als R-Modul die direkte Summe $S = R \oplus I$.

Da $f: R \subset S$ ein Epimorphismus ist, hat man nach Satz 2.2. $S \cong S \otimes_R S$ und aus der exakten Folge von R-Moduln $0 \to R \to S \to S/R \to 0$ folgt durch Bildung des Tensorproduktes mit S, dass $S \otimes_R S/R = 0$ ist. Dann gilt $(R \oplus I) \otimes_R I \cong I \oplus (I \otimes_R I) = 0$, was nur möglich ist, wenn $I = 0$ ist. Dann ist aber $S = S' = R$ und $f: R \to S$ ist keine echte Erweiterung.

Aus diesem Lemma folgt sofort

KOROLLAR 9.3. *Jeder wesentliche Bimorphismus mit Definitionsbereich R sei ein Isomorphismus. Dann gilt dies auch für jeden beliebigen Bimorphismus, d.h. R ist saturiert.*

SATZ 9.4. *Wir setzen voraus, dass die epimorphe Hülle (E, f) von R existiert.*

Es sei $h: R \to S$ eine beliebige epimorphe Erweiterung von R, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Epimorphismus $g: S \to E$ mit $gh = f$.

Beweis. Dieser Satz folgt unmittelbar aus Definition 8.3. und Lemma 9.2. Die Eindeutigkeit von g ist klar, weil h ein Epimorphismus ist. Das im Beweis von Lemma 9.2. definierte Ideal I ist somit eindeutig bestimmt.

Wir untersuchen nun die Existenz der epimorphen Hülle $E(R)$ eines Ringes R.

Wenn diese existiert, so ist sie wegen Lemma 8.4. notwendigerweise eine wesentliche epimorphe Erweiterung von R, die keine echten wesentlichen epimorphen Erweiterungen mehr zulässt. Aus Korollar 9.3. folgt dann, dass $E(R)$ eine saturierte,

wesentliche epimorphe Erweiterung von R ist, oder, was auf dasselbe herauskommt, eine Erweiterung, die maximal ist in der Familie aller wesentlichen epimorphen Erweiterungen von R.

Solche maximalen Erweiterungen existieren aber zu jedem Ring R, denn ISBELL [12] hat gezeigt, dass die Mächtigkeiten der Ringe S, in welche R epimorph eingebettet ist, beschränkt sind.

Da die Vereinigung einer aufsteigenden Kette von wesentlichen epimorphen Erweiterungen wieder eine wesentliche epimorphe Erweiterung ist, können wir das Zornsche Lemma anwenden und erhalten:

LEMMA 9.5. *In der Menge aller wesentlichen epimorphen Erweiterungen eines Ringes R gibt es maximale Elemente.*

Die Existenz der epimorphen Hülle steht fest, wenn wir gezeigt haben, dass es bis auf Isomorphie nur eine maximale, wesentliche epimorphe Erweiterung von R gibt. Diese Eindeutigkeit ist gleichbedeutend mit der Existenz der Abbildung g von Definition 8.3.

Wir haben folgendes Kriterium:

LEMMA 9.6. *Folgende Aussagen über einen Ring R sind äquivalent:*

(a) *Die epimorphe Hülle $E(R)$ existiert.*

(b) *Für alle Bimorphismen $f_1: R \to S$ und $f_2: R \to T$ sind die Abbildungen $p_1 f_1 = p_2 f_2$ aus dem Cocartesischen Quadrat (vgl. Lemma 2.1.) Monomorphismen.*

Beweis.

(a)$\Rightarrow$(b): Wie im Beweis von Lemma 9.2. wählen wir in S bzw. T Ideale I bzw. J, die maximal sind bezüglich der Eigenschaft, mit R den Durchschnitt Null zu haben. q_1 und q_2 seien die zugehörigen Projektionen. Wir finden dann folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & S \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "p_1"] & S/I \arrow[dd, "h_1"] \\
T \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "q_2"'] & S \otimes_R T \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
T/J \arrow[rr, "h_2"'] & & E(R)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind h_1 und h_2 die kanonischen Einbettungen von S/I bzw. T/J in $E(R)$, die existieren, weil $q_1 f_1$ und $q_2 f_2$ wesentliche Bimorphismen sind. Man hat ferner $h_1 q_1 f_1 = h_2 q_2 f_2$, sodass es ein k mit $k p_1 = h_1 q_1$ und $k p_2 = h_2 q_2$ gibt. $h_1 q_1 f_1$ ist aber ein Monomorphismus, damit auch $k p_1 f_1$ und schliesslich auch $p_1 f_1 = p_2 f_2$.

(b)$\Rightarrow$(a): Es seien $f_1: R \to S$ und $f_2: R \to T$ zwei maximale, wesentliche epimorphe Erweiterungen von R. Nach Lemma 2.1. sind dann p_1 und p_2 Epimorphismen. Nach Voraussetzung sind aber $p_1 f_1$ und $p_2 f_2$ Monomorphismen, somit auch p_1 und p_2 selbst, weil f_1 und f_2 wesentlich sind.

S und T sind aber saturiert und folglich sind die Bimorphismen p_1 und p_2 Isomorphismen. $p_2^{-1}p_1$ ist dann der gesuchte Isomorphismus zwischen S und T.

Dieses Kriterium erweist sich als wenig brauchbar, denn es ist nicht klar, ob Bedingung (b) stets erfüllt ist. Man weiss nämlich [8], dass die Behauptung (b) jedenfalls dann nicht allgemein gilt, wenn f und g beliebige Monomorphismen sind.

Wir können aber auf ganz anderm Wege in zwei Fällen die Existenz der epimorphen Hülle nachweisen; nämlich einerseits wenn $Q_{cl}(R)$ saturiert ist und anderseits, wenn R semiprim ist.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall.

DEFINITION 9.7. Eine Erweiterung $R \subset S$ heisst *flach*, wenn S ein flacher R-Modul ist.

LEMMA 9.8. *Jede flache epimorphe Erweiterung von R lässt sich in jede wesentliche saturierte Erweiterung von R einbetten.*

Beweis. Es seien $f: R \to S$ und $g: R \to T$ zwei Monomorphismen. Dabei sei S ein flacher R-Modul, f ein Epimorphismus, T saturiert und g wesentlich. Wir betrachten das übliche Cocartesische Quadrat:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[d, "p_1"] \\ T \arrow[r, "p_2"'] & S \otimes_R T \end{tikzcd}$$

Da S flach ist, ist p_1 ein Monomorphismus, somit auch $p_1 f = p_2 g$, und weil g wesentlich ist, ist auch p_2 ein Monomorphismus. p_2 ist aber auch ein Epimorphismus (Lemma 2.1.), somit ein Bimorphismus und, weil T saturiert ist, ein Isomorphismus. $p^{-1}p_1$ ist dann die gesuchte Einbettung und mit den natürlichen Identifikationen hat man $R \subset S \subset T$.

Es ist wohlbekannt, dass $Q_{cl}(R)$ ein flacher R-Modul ist. Daraus folgt:

KOROLLAR 9.9. *Der klassische Quotientenring $Q_{cl}(R)$ ist in jeder saturierten, wesentlichen epimorphen Erweiterung von R enthalten.*

SATZ 9.10. *Wenn der klassische Quotientenring $Q_{cl}(R)$ saturiert ist, dann existiert die epimorphe Hülle $E(R)$ von R und es ist $E(R) = Q_{cl}(R)$.*

Da ein Körper saturiert ist (Korollar 5.4.), erhalten wir als Spezialfall von Satz 9.10.

KOROLLAR 9.11. *R sei ein Integritätsbereich. Dann existiert die epimorphe Hülle $E(R)$ und ist gleich dem Quotientenkörper von R.*

10. *Ein Satz über Quotientenringe*

In den beiden folgenden Abschnitten wollen wir beweisen, dass die epimorphe Hülle eines semiprimen Rings stets existiert.

Dazu benötigen wir den Begriff des *vollständigen Quotientenringes* $Q(R)$ eines Ringes R.

Wir stellen hier die Definition und einige für uns wichtige Eigenschaften von $Q(R)$ zusammen. Weitere Einzelheiten, Beweise und die allgemeine Definition (für den nichtkommutativen Fall) finden sich im Buch von LAMBEK [13] dargestellt.

Ein Ideal D von R heisst *dicht*, falls sein Annullator $D^*=0$ ist. Ein Ideal heisst *gross*, falls es mit jedem von Null verschiedenen Ideal von R einen von Null verschiedenen Durchschnitt hat. Jedes dichte Ideal ist gross, und die Umkehrung gilt genau dann, wenn R semiprim ist.

Wir bilden die Menge Q_0 aller R-Homomorphismen $\varphi: D \to R$, wobei D die Menge aller dichten Ideale durchläuft. In Q_0 existiert in natürlicher Weise eine Äquivalenzrelation: Zwei Homomorphismen sind äquivalent, wenn sie auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen.

Q_0 modulo dieser Äquivalenzrelation trägt eine Ringstruktur, die durch die Addition bzw. das Hintereinander-Ausführen der Homomorphismen induziert wird. Der entstehende Ring enthält R als Unterring und heisst der vollständige Quotientenring $Q(R)$ von R.

$Q(R)$ ist als R-Modul eine wesentliche Erweiterung von R, somit a fortiori eine wesentliche Erweiterung von R in der Kategorie der Ringe. (Vgl. Bemerkung 9.1.)

$Q(R)$ ist genau dann regulär, wenn R semiprim ist.

Wir benötigen den folgenden Satz.

SATZ 10.1. *R sei ein semiprimer Ring und $R \subset S$ sei eine wesentliche Erweiterung. Dann ist $Q(R) \subset Q(S)$.*

Unser Beweis folgt Argumenten von FAITH und UTUMI [6]. Es ist zweckmässig, in diesem Abschnitt die Bezeichnung für den Annullator zu modifizieren: Es sei X eine Untermenge von R, Y eine Untermenge von S, dann bezeichnen wir mit X^R bzw. Y^S den Annullator von X in R bzw. von Y in S. Natürlich gilt $X^R = X^S \cap R$.

Die beiden folgenden Hilfssätze gelten unter den Voraussetzungen von Satz 10.1.

LEMMA 10.2.

(a) *S ist semiprim.*

(b) *Es sei $A \cap B = 0$ für zwei Ideale von R, dann ist auch $SA \cap B = 0$.*

(c) *Unter denselben Voraussetzungen ist auch $SA \cap SB = 0$.*

(d) *Es sei $\sum A_i$ eine direkte Summe in R, dann ist $\sum SA_i$ eine direkte Summe in S.*

(e) *Wenn I ein grosses Ideal von S ist, dann ist $I \cap R$ ein grosses Ideal in R.*

Beweis.

(a) Dies ist klar.

(b) Es sei $A \cap B = 0$. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein Ideal C in R, das maximal ist unter allen C' mit $A \subset C'$ und $C' \cap B = 0$. Dann ist $B \subset C^R$, somit folgt

aus $(C^{RR} \cap B)\, C^R = 0$, dass $(C^{RR} \cap B)\, B = 0$ und daher auch $(C^{RR} \cap B)^2 = 0$ ist. Da R semiprim ist, muss $C^{RR} \cap B = 0$ sein, und wegen $C \subset C^{RR}$ folgt aus der Maximalität von C, dass $C = C^{RR}$ ist.

Man setzt nun $D = C^{RS}$, dann ist $SC \subset D$ und $R \cap D = C^{RR} = C$. Es folgt $SA \cap B \subset SC \cap B \subset D \cap B = D \cap (R \cap B) = C \cap B = 0$.

(c) Wegen (b) ist $SA \cap B = 0$, somit auch $SA \cap (R \cap B) = (SA \cap R) \cap B = 0$. Wiederum nach (b) ist dann $(SA \cap R) \cap SB = 0$, weil aber $R \subset S$ wesentlich ist, muss $SA \cap SB = 0$ sein.

(d) Es sei $A_i \cap \sum_{i \neq j} A_j = 0$ für alle i. Nach (c) ist dann auch $SA_i \cap S \sum_{i \neq j} A_j = SA_j \cap \sum_{i \neq j} SA_j = 0$ für alle i.

(e) Wenn $I \cap R$ nicht gross in R ist, dann gibt es ein Ideal $A \neq 0$ in R mit $I \cap R \cap A = 0$, wegen (b) ist dann auch $I \cap R \cap SA = 0$. Da $R \subset S$ wesentlich ist, muss dann $I \cap SA = 0$ sein, d.h. I ist nicht gross in S.

LEMMA 10.3. *Es seien I und J Annullatorideale in S und es sei $I \cap R \subset J \cap R$. Dann ist $I \subset J$.*

Beweis. Aus $I \cap R \subset J \cap R$ folgt $(I \cap J) \cap R = I \cap R$. Da $I \cap J$ auch ein Annullatorideal ist, genügt es, folgendes zu zeigen:

Es sei $I \cap R = J \cap R$, dann ist $I = J$.

Dazu setzen wir $K = I \cap J$ und $L = I \cap K^S$.

Dann ist $L \subset I$ und $K \cap L = 0$, letzteres weil S semiprim ist. Man hat $L \cap R \subset I \cap R = J \cap R$, somit auch $L \cap R \subset K \cap R$, d.h. $L \cap R = L \cap K \cap R = 0$ und da $R \subset S$ wesentlich ist, muss $L = 0$ sein.

$I \cap K^S$ ist also gleich Null, und da K ein Annullatorideal ist, gilt $I \subset K^{SS} = K$. Daraus folgt $I = K$; analog ergibt sich $J = K$.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes.

Ein Element q aus $Q(R)$ wird durch einen Homomorphismus $\varphi: D \to R$ repräsentiert, wobei D ein grosses Ideal von R ist.

Wir werden φ zunächst auf ein grosses Ideal $D' \subset D$ einschränken, φ und die eingeschränkte Abbildung φ' repräsentieren dabei dasselbe Element q. φ' wird dann zu einer Abbildung $\bar{\varphi}: SD' \to S$ erweitert, sodass $\bar{\varphi}$ ein Element $\bar{q}$ aus $Q(S)$ repräsentiert.

Es sei also $\varphi: D \to R$. In D existiert nach dem Zornschen Lemma eine Menge $\{d_i\}$ von Elementen aus D, die maximal ist bezüglich der Eigenschaft, dass $\sum R d_i$ direkt ist. Das Ideal $D' = \sum R d_i$ ist ebenfalls gross in R, denn wegen der Maximalität der Menge $\{d_i\}$ hat D' mit jedem Ideal $D'' \subset D$ einen Durchschnitt $\neq 0$ und somit auch mit jedem Ideal aus R.

Wegen Lemma 10.2 (d) ist $\bar{D} = \sum S d_i$ eine direkte Summe in S. Es ist leicht zu sehen, dass $\bar{D}$ ein grosses Ideal von S ist. Man hat $d_i^R \subset \varphi(d_i)^R$, somit $d_i^S \cap R \subset \varphi(d_i)^S \cap R$. Lemma 3.8. zeigt, dass dann $d_i^S \subset \varphi(d_i)^S$ ist.

Die Abbildung $\varphi_i: Sd_i \to S$, definiert durch $d_i \mapsto \varphi(d_i)$, ist daher für alle i ein S-Homomorphismus und da die Summe $\sum Sd_i$ direkt ist, existiert ein $\bar{\varphi} = \sum \varphi_i: \bar{D} \to S$. Diesem $\bar{\varphi}$ entspricht ein Element $\bar{q}$ aus $Q(S)$.

Es ist eine Routineangelegenheit, zu verifizieren, dass die Zuordnung $q \mapsto \bar{q}$ ein Ringhomomorphismus ist.

Wenn $\bar{q}=0$ ist, so annulliert $\bar{\varphi}$ ein grosses Ideal I von S, dann ist aber $I \cap R$ ein grosses Ideal von R (Lemma 10.2. (e)), für welches $\bar{\varphi}(I \cap R) = \varphi'(I \cap R) = 0$ gilt. φ' annulliert also ebenfalls ein grosses Ideal und das zugehörige q muss Null sein; die Zuordnung $q \mapsto \bar{q}$ ist also ein Monomorphismus.

Schliesslich ist klar, dass die so erhaltene Einbettung $Q(R) \subset Q(S)$ auf R die Identität ist.

Damit ist Satz 10.1. bewiesen.

11. *Die epimorphe Hülle eines semiprimen Ringes*

LEMMA 11.1. *R sei ein semiprimer Ring. Es sei $E(R)$ der Durchschnitt aller regulären Ringe P_i mit $R \subset P_i \subset Q(R)$.*

Dann ist $E(R)$ eine saturierte, wesentliche epimorphe Erweiterung von R.

Wir erinnern daran, dass $Q(R)$ regulär ist, somit gibt es tatsächlich solche Ringe P_i.

Beweis.

(a) $E(R)$ ist eine wesentliche Erweiterung von R:

Dies folgt daraus, dass $Q(R)$ als R-Modul eine wesentliche Erweiterung von R ist und somit auch sein Unterring $E(R)$. (Vgl. Bemerkung 9.1.).

(b) $E(R)$ ist saturiert:

Wir zeigen, dass $E(R)$ regulär ist. Es ist wohlbekannt (LAMBEK [13], p. 36, ex. 3), dass es in einem regulären Ring P zu jedem r ein eindeutig bestimmtes r' gibt mit $rr'r=r$ und $r'rr'=r'$. Falls nun r in $E(R)$, d.h. in allen P_i liegt, so auch r', was bedeutet, dass $E(R)$ regulär ist.

(c) Die Einbettung $R \subset E(R)$ ist ein Epimorphismus:

Es sei $\mathscr{F}$ die Familie aller epimorphen Erweiterungen $R \subset F$, $F \subset E(R)$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathscr{F}$ maximale Elemente, von denen wir eines mit F_0 bezeichnen.

Es sei r ein beliebiges Element aus F_0, dann gibt es nach der obenstehenden Bemerkung ein $r' \in E(R)$, das, wie sofort zu sehen ist, die Beziehungen $r' = r^2 r'$ und $r^2 = r' r^3$ erfüllt. Nach Lemma 3.3. ist F_0 epimorph in den durch F_0 und r' erzeugten Unterring von $E(R)$ eingebettet.

Wegen der Maximalität von F_0 ist dann r' schon ein Element von F_0, dieser Ring ist also regulär, und da $E(R)$ der kleinste reguläre Unterring von $Q(R)$ ist, der R umfasst, muss $F_0 = E(R)$ sein. $E(R)$ gehört somit zur Familie $\mathscr{F}$, was bedeutet, dass die Einbettung $R \subset E(R)$ ein Epimorphismus ist.

LEMMA 11.2. *Jede saturierte, wesentliche epimorphe Erweiterung S von R ist isomorph zu $E(R)$, d.h. $E(R)$ ist die epimorphe Hülle von R.*

Beweis. Nach Satz 10.1. ist $Q(R) \subset Q(S)$. In $Q(S)$ können wir folglich den Durchschnitt $S' = S \cap Q(R)$ bilden. S ist nach Voraussetzung semiprim (Lemma 10.2. (a)) und saturiert, also regulär, und da auch $Q(R)$ regulär ist, ist S' ein regulärer Ring mit $R \subset S' \subset Q(R)$, sodass $R \subset E(R) \subset S' \subset S$ gilt.

Nach Voraussetzung ist R sowohl in $E(R)$ als auch in S epimorph eingebettet, damit ist auch $E(R) \subset S$ epimorph und da $E(R)$ saturiert ist, folgt $E(R) = S$.

$Q(R)$ ist aber bis auf Isomorphie über R eindeutig bestimmt, somit auch sein Unterring $E(R)$.

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz:

SATZ 11.3. *R sei ein semiprimer Ring. Dann existiert die epimorphe Hülle $E(R)$ und zwar ist $E(R)$ der Durchschnitt aller regulären Unterringe von $Q(R)$, die R enthalten und man hat folgende Inklusionen: $R \subset Q_{cl}(R) \subset E(R) \subset Q(R)$.*

LEMMA 11.4. *Der Ring R sei semiprim und erfülle die Maximalbedingung für Annullatorideale. Dann ist $E(R) = Q_{cl}(R)$.*

Beweis. In diesem Fall ist $Q_{cl}(R) = Q(R)$. (LAMBEK [13], p. 113, ex. 5).

KOROLLAR 11.5. *R sei ein Integritätsbereich. Dann ist $E(R)$ der Quotientenkörper von R (Vgl. Korollar* 9.11.*).*

BEISPIEL 11.6. Wir wollen die epimorphe Hülle eines Ringes in einem Fall bestimmen, wo sie nicht mit dem klassischen Quotientenring zusammenfällt.

Es sei X ein überabzählbarer topologischer Raum mit der diskreten Topologie, $X^* = X \cup \infty$ seine Alexandroffsche Kompaktifizierung und $R = C(X^*)$, der Ring aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X^*. R ist natürlich semiprim.

Eine Funktion $f: X^* \to \mathbf{R}$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|f(x) - f(\infty)| > \varepsilon$ nur für endlich viele $x \in X^*$ gilt. f nimmt dann an höchstens abzählbar vielen Stellen Werte an, die von $f(\infty)$ verschieden sind.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass jedes Element in R entweder ein Nullteiler oder eine Einheit ist, d.h. dass $Q_{cl}(R) = R$ gilt.

R ist aber nicht regulär: Es sei $x_1, x_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus X, dann ist die Funktion $g: X^* \to \mathbf{R}$, die durch $g(x_i) = 1/i$, $g(x) = 0$ für alle andern x definiert ist, stetig. g kann aber nicht Vielfaches eines idempotenten Elements aus R sein, denn ein solches müsste an allen Stellen x_i den Wert 1 annehmen, wäre also nicht stetig.

Man kann zeigen, dass der vollständige Quotientenring $Q(R) = C(X)$ ist. (Vgl. [7], 3.2. und 3.7.). Die Einbettung $R \subset Q(R)$ ist durch die Beschränkung von $f: X^* \to \mathbf{R}$ auf X gegeben.

Die epimorphe Hülle $E(R)$ ist regulär, enthält also zu jedem $f \in R$ ein f' mit

$f^2 f' = f$ und $f'^2 f = f'$. f' ist wie folgt definiert: $f'(x) = 0$, wenn $f(x) = 0$, $f'(x) = 1/f(x)$ sonst.

Der Ring S, der von allen diesen f' erzeugt wird, besteht genau aus den Funktionen aus $C(X)$, die ausserhalb einer abzählbaren Punktmenge konstant sind. Man verifiziert nämlich, dass jede solche Funktion als Summe $f' + g'$ mit $f, g \in R$ dargestellt werden kann. S ist daher regulär und fällt mit $E(R)$ zusammen.

$E(R)$ ist demnach der Ring aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf X^+; dabei ist $X^+ = X \cup \infty$, versehen mit einer Topologie, in der die offenen Umgebungen von ∞ nicht die Komplemente der endlichen Mengen (wie in X^*), sondern die der abzählbaren Mengen sind.

Es ist nicht klar, ob die epimorphe Hülle von R ganz allgemein dadurch entsteht, dass in $Q(R)$ zu R alle Elemente r' mit $r^2 r' = r$ und $r'^2 r = r'$ adjungiert werden; mit andern Worten, ob der so erhaltene Ring S stets regulär ist, oder ob der Adjunktions-Prozess (ev. unendlich oft) fortgesetzt werden muss.

Wir bemerken noch, dass es vorkommen kann, dass zwar $Q_{cl}(R) \neq Q(R)$, aber $E(R) = Q_{cl}(R)$ ist. Dies ist etwa dann der Fall, wenn R ein nicht vollständiger Boolescher Ring ist. (LAMBEK [13], p. 45).

12. *Die epimorphe Hülle in einigen andern Kategorien*

Wir haben gesehen, dass die epimorphe Hülle in der Kategorie der Ringe jedenfalls dort, wo sie existiert, eine Verallgemeinerung des klassischen Quotientenringes ist.

Im folgenden zeigen wir an Beispielen, dass diese Konstruktion in einigen einfachen Fällen auf wohlbekannte Begriffe führt.

BEISPIEL 12.1. Wir betrachten die Kategorie $\mathfrak{Tf}$ der torsionsfreien abelschen Gruppen. BURGESS [3] hat gezeigt, dass ein Homomorphismus $f: A \to B$ in $\mathfrak{Tf}$ genau dann ein Epimorphismus ist, wenn $B/f(A)$ eine Torsionsgruppe ist.

Daraus ergibt sich ohne weiteres:

(a) Die saturierten Objekte sind genau die teilbaren torsionsfreien abelschen Gruppen.

(b) Die epimorphe Hülle von A existiert stets und ist gleich der injektiven Hülle von A, die, wie man sofort sieht, tatsächlich torsionsfrei ist.

BEISPIEL 12.2. Es sei $\mathfrak{K}$ die Kategorie der Körper. Nach BURGESS ist eine Körpererweiterung $K \subset L$ genau dann epimorph, wenn L in keinem Erweiterungskörper nicht-triviale Isomorphismen besitzt, die K elementweise festlassen. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass $K \subset L$ eine rein-inseparable Erweiterung ist. Dann gilt:

(a) Die saturierten Objekte sind gerade die vollkommenen Körper.

(b) Die epimorphe Hülle eines Körpers K existiert stets und ist gleich K, falls die Charakteristik p von K gleich Null ist, andernfalls ist sie gleich der „vollkommenen Hülle" $K^{p^{-\infty}}$. (Zur Definition von $K^{p^{-\infty}}$ vgl. z.B. BOURBAKI [1], p. 128).

BEISPIEL 12.3. Es sei $\mathfrak{M}$ die Kategorie der metrischen Räume mit dem metrischen Abbildungen, d.h. den Abbildungen, die den Abstand erhalten. $f: M \to N$ ist genau dann ein Epimorphismus in $\mathfrak{M}$, wenn $f(M)$ dicht in N ist. Daraus ergibt sich:

(a) Ein metrischer Raum ist genau dann saturiert, wenn er ein vollständiger metrischer Raum ist.

(b) Die epimorphe Hülle von M existiert stets und ist gleich der Vervollständigung von M.

Die beiden folgenden Beispiele sollen die Dualisierung des Begriffs der epimorphen Hülle etwas beleuchten.

BEISPIEL 12.4. Es sei $\mathfrak{Tf}^*$ die zu $\mathfrak{Tf}$ duale Kategorie. Jeder Bimorphismus ist wesentlich in $\mathfrak{Tf}^*$. Es gibt aber keine saturierten Objekte in dieser Kategorie, denn zu jeder torsionsfreien abelschen Gruppe B lässt sich eine echte Untergruppe A finden, sodass B/A eine Torsionsgruppe ist, anders gesagt, zu jedem Objekt B in $\mathfrak{Tf}^*$ gibt es ein Objekt A und einen wesentlichen Bimorphismus $f: A \to B$, der kein Isomorphismus ist.

In $\mathfrak{Tf}^*$ existiert daher die epimorphe Hülle nicht.

BEISPIEL 12.5. Es sei $\mathfrak{A}_K$ die Kategorie der algebraischen Erweiterungen eines festen Körpers K, und wir betrachten die duale Kategorie $\mathfrak{A}_K^*$. Dann findet man:

(a) Die saturierten Objekte in $\mathfrak{A}_K^*$ sind jene Erweiterungskörper L, für die $L = K^s$ gilt, wobei K^s die separable Abschliessung von K in L bezeichnet.

(b) Die epimorphe Hülle von L in $\mathfrak{A}_K^*$ existiert und ist gleich dem oben definierten K^s.

LITERATUR-VERZEICHNIS

[1] BOURBAKI, N. *Algèbre* (Hermann, Paris 1959 [Act. Sci. Ind., 1102]), Kap. 4 und 5.

[2] ———, *Algèbre commutative* (Hermann, Paris 1961 [Act. Sci. Ind., 1290]), Kap. 1 und 2.

[3] BURGESS, W., *The Meaning of Mono and Epi in Some Familiar Categories*, Canad. Math. Bull. *8*, 759–769 (1965).

[4] COHN, P.M., *On the Free Product of Associative Rings*, Math. Z. *71*, 380–398 (1959).

[5] FAITH, C., *On Köthe Rings*, Math. Ann. *164*, 207–212 (1966).

[6] FAITH, C. and UTUMI, Y., *Intrinsic Extensions of Rings*, Pacific J. Math. *14*, 505–512, (1964)

[7] FINE, N.J., GILLMAN, L. and LAMBEK, J., *Rings of Quotients of Rings of Continuous Functions*, (McGill University Press, Montreal 1965).

[8] FLANDERS, H., *Tensor and Exterior Powers*, J. Algebra *7*, 1–24 (1967).

[9] HAMSHER, R.M., *Commutative Rings over Which Every Module has a Maximal Submodule*, Notices Amer. Math. Soc. *13*, 639 (1966).

[10] HERSTEIN, I.N. and SMALL, L., *Nil Rings Satisfying Certain Chain Conditions*, Canad. J. Math, *16*, 771–776, (1964).

[11] HOWIE, J.M., and J.R. ISBELL, *Epimorphisms and Dominions*, II, J. Algebra *6*, 7–21 (1967).

[12] ISBELL, J.R., *Epimorphisms and Dominions. Proceedings of the Conference on Categorical Algebra* Springer Berlin, Heidelberg, New York 1966.

[13] LAMBEK, J., *Lectures on Rings and Modules* (Blaisdell, Waltham, Toronto and London 1966)

[14] LEVY, L.S., *Commutative Rings Whose Homomorphic Images are Self-Injective*, Pacific J. Math. *18*, 149–153 (1966).

[15] MacLane, S., *Homology* (Springer Berlin, Göttingen, Heidelberg 1963).
[16] Oort, F. and Strooker, J.R., *The Category of Finite Bialgebras over a Field*, Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. *A 70*, 163–169 (1967).
[17] Renault, G., *Sur les anneaux A, tels que tout A-module non nul contient un sous-module maximal*, C.R. Acad. Sci. Paris [Sér. A–B] *264*, 622–624 (1967).
[18] Small, L.W., *Orders in Artinian Rings*, J. Algebra *4*, 13–41 (1966).
[19] ———, *Correction and Addendum: 'Orders in Artinian Rings'*, J. Algebra *4*, 505–507 (1966).
[20] Snapper, E., *Injective Modules under Change of Rings*, Proc. Amer. Math. Soc. *16*, 788–793 (1965).
[21] Storrer, H. H., *Sur les épimorphismes dans la catégorie des anneaux commutatifs*, C.R. Acad. Sci. Paris [Sér. A–B] *266*, 263–265 (1968).
[22] ———, *Épimorphismes d'anneaux et anneaux des fractions*, C.R. Acad. Sci. Paris [Sér. A–B] *266*, 322–323 (1968).

Forschungsinstitut für Mathematik,
Eidg. Technische Hochschule,
8006 Zürich/Schweiz

Eingegangen den 20. Febr. 1968

Zusatz von 8. Okt 1968:

1) Zu Lemma 5.7, S. 386
Es muss zusätzlich noch verlangt werden, dass kein homomorphes Bild von R (inkl. R) eine unendliche direkte Summe von Idealen enthält.

2) Zu Satz 6.2, S. 388
Es muss die zusätzliche Voraussetzung von Lemma 5.7 gemacht werden.