

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	43 (1968)
Artikel:	Famille des traces sur les droites complexes d'une fonction plurisousharmonique ou entière dans C^n .
Autor:	Hengartner, Walter
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-32929

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Famille des traces sur les droites complexes d'une fonction plurisousharmonique ou entière dans C^n

WALTER HENGARTNER (Paris)

On étudie dans cet article quelques propriétés des fonctions plurisousharmoniques ou entières dans C^n sur les droites complexes $C^1(z \cdot u)$. Si V est une fonction plurisousharmonique non constante dans C^n , le maximum $M(r) = \max_{\|z\|=r} V(z)$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$, et l'on a $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \infty$. Lorsque V est d'ordre fini, c.à.d.

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \varrho < \infty,$$

possède un ordre précisé $\varrho(r)$ de VALIRON [1] tel que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} M(r) \cdot r^{-\varrho(r)} = a \neq 0, \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho.$$

Nous utiliserons de manière fondamental le fait que la régularisée supérieure de l'indicatrice cerclée de V par rapport à l'ordre précisé $\varrho(r)$

$$L_c^*(z, V, \varrho(r)) = \limsup_{z' \rightarrow z} \limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z' \cdot u) \cdot |u|^{-\varrho(|u|)}, \quad u \in C^1, \quad z' \in C^n$$

est log-plurisousharmonique, c.à.d. $\log L^*(z, V, \varrho(r))$ est plurisousharmonique dans C^n .

On montrera aussi que toute fonction entière dans C^n d'ordre fini est de même ordre précisé $\varrho(r)$, de même genre q et de la même classe (de convergence ou de divergence) [cf. R. NEVANLINNA [1]] sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ sauf pour les z appartenants à un ensemble négligeable dans C^n . D'autre part, le fait que la régularisée supérieure de l'indicatrice cerclée de la fonction

$$N(z, a, F) = \int_0^{\|z\|} [n_z(t, a, F) - n_z(0, a, F)] \cdot t^{-1} dt + n_z(0, a, F) \cdot \log \|z\|$$

est log-plurisousharmonique dans C^n ($n_z(t, a, F)$ désignant le nombre de zéros dans le cercle $\|z \cdot u\| < t$ sur $C^1(z \cdot u)$) nous permet d'obtenir des résultats sur la distribution de zéros sur les droites $C^1(z \cdot u)$ qui généralisent ceux de P. LELONG [1], [2], ..., [7].

I. Les fonctions plurisousharmoniques d'ordre précisé $\varrho(r)$

1.) Soit C^n l'espace à n dimensions complexes, dont les points seront notés

$z = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $\eta_i \in C$ muni de la norme $\|z\| = (\sum_{j=1}^n \eta_j \cdot \bar{\eta}_j)^{1/2}$.

DÉFINITION 1: Une fonction $V(z)$ à valeur réelle définie dans un domaine D de C^n sera dite plurisousharmonique, si

- (a) pour tout $z \in D$ on a $-\infty \leq V(z) < \infty$
- (b) $V(z)$ est bornée supérieurement sur tout compact $K \subset D$
- (c) la restriction de V à toute composante connexe de $C^1(z_1 + z_2 \cdot u) \cap D$ est soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique.

Pour une fonction plurisousharmonique non constante V le maximum $M(r) = \max_{\|z\|=r} V(z)$ est une fonction croissante et convexe de $\log r$.

DÉFINITION 2: Une fonction plurisousharmonique dans C^n sera dite d'ordre précisé $\varrho(r)$, si l'on a:

$$\limsup_{\|z\| \rightarrow \infty} V(z) \cdot \|z\|^{-\varrho(\|z\|)} = a \neq 0, \infty$$

où $\varrho(r)$ est une fonction positive, continue, dérivable par morceaux et partout dérivable à droite et à gauche pour $r > 0$ telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varrho'(r) \cdot r \cdot \log r = 0.$$

En appliquant un théorème de B. J. LEVIN [1], on montre:

PROPOSITION 1: *Toute fonction plurisousharmonique d'ordre fini et non constante possède un ordre précis $\varrho(r)$.*

2.) P. LELONG [6] a introduit les ensembles polaires et négligeables de la manière suivante:

DÉFINITION 3: Un ensemble E sera dit polaire dans un domaine D de C^n , s'il existe une fonction plurisousharmonique dans D telle qu'on ait $E \subset \{z / V(z) = -\infty\}$.

DÉFINITION 4: Un ensemble E sera dit négligeable dans un domaine D de C^n , s'il existe une suite croissante V_q de fonctions plurisousharmoniques sur D , localement bornée supérieurement telle qu'on ait $\lim_{q \rightarrow \infty} V_q(z) = W(z)$ et $E \subset \{z / W(z) < \operatorname{regsup} W(z) = \limsup_{z' \rightarrow z} W(z')\}$.

Une réunion dénombrable d'ensembles polaires (resp. négligeables) dans un domaine D est encore polaire (resp. négligeable). De plus tous les ensembles polaires sont négligeables, et tous les ensembles négligeables sont de R^{2n} -capacité nulle.

¹⁾ L'inégalité $(1 - \varepsilon) \cdot k^\varrho \cdot r^{\varrho(r)} \leq (k \cdot r)^{\varrho(k \cdot r)} \leq (1 + \varepsilon) \cdot k^\varrho \cdot r^{\varrho(r)}$ est uniforme par rapport à k , $k > 0$.

3.) On appelle «indicatrice cerclée» d'une fonction plurisousharmonique dans C^n d'ordre $\varrho(r)$ l'expression suivante:

$$L_c(z, V, \varrho(r)) = \limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z \cdot u) \cdot |u|^{-\varrho(|u|)}, \quad u \in C^1, \quad (1)$$

et sa régularisée supérieure est

$$L_c^*(z, V, \varrho(r)) = \operatorname{reg} \sup L_c(z, V, \varrho(r)) = \limsup_{z' \rightarrow z} L_c(z', V, \varrho(r)). \quad (2)$$

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 1: Soit V une fonction plurisousharmonique dans C^n d'ordre $\varrho(r)$. On a:

- (a) $L_c^*(z, V, \varrho(r))$ est plurisousharmonique
- (b) $L_c^*(z \cdot u, V, \varrho(r)) = |u|^\varrho \cdot L_c^*(z, V, \varrho(r))$
- (c) $\log L_c^*(z, V, \varrho(r))$ est plurisousharmonique.

Démonstration: Soit K un compact contenu dans la boule $B_{2n}(0, R)$, et soit $\limsup_{r \rightarrow \infty} M(r) \cdot r^{-\varrho(r)} = a \neq 0, \infty$, où $M(r) = \max_{\|z\|=r} V(z)$. On peut choisir $\varrho(r)$ telle que $r^{\varrho(r)} \geq 1$ pour tous les $r > 0$.

Il existe un $u_0 \in C^1$ de façon que

- (a) $M(R \cdot |u|) \cdot (R \cdot |u|)^{-\varrho(R \cdot |u|)} \leq a + \varepsilon$ pour tous les $|u| > |u_0|$, $\varepsilon > 0$
- (b) $(R \cdot |u|)^{\varrho(R \cdot |u|)} \cdot |u|^{-\varrho(|u|)} \leq R^\varrho + \eta$ pour tous les $|u| > |u_0|$, $\eta > 0$.

On a alors:

$V_u(z) = V(z \cdot u) \cdot |u|^{-\varrho(|u|)} \leq M(R \cdot |u_0|) + (a + \varepsilon) \cdot (R^\varrho + \eta)$ pour tous les $z \in K \subset B_{2n}(0, R)$. $V_u(z)$ est une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornée supérieurement, et (a) du théorème 1 résulte d'un théorème de P. LELONG [6]. D'autre part le théorème de HARTOGS (P. LELONG [6]) entraîne, que $L_c^*(z, V, \varrho(r))$ n'est pas identiquement nulle.

On obtient (b) du théorème 1 par l'égalité

$$\begin{aligned} L_c(z \cdot u, V, \varrho(r)) &= \limsup_{|v| \rightarrow \infty} V(z \cdot u \cdot v) \cdot |u \cdot v|^{-\varrho(|u \cdot v|)} \lim_{|v| \rightarrow \infty} |u \cdot v|^{\varrho(|u \cdot v|)} \cdot |v|^{-\varrho(|v|)} \\ &= |u|^\varrho \cdot L_c(z, V, \varrho(r)), \end{aligned}$$

et (c) est une conséquence de (a) et (b) d'après un théorème de P. LELONG [6].

REMARQUES:

(a) Considérons l'ensemble de droites $C^1(z_1 + z_2 \cdot u)$, $z_1 \in C^n$, $z_2 \in C^n$ et $u \in C^1$. La régularisée de l'indicatrice cerclée

$$L_c^*(z_1, z_2, V, \varrho(r)) = \operatorname{reg} \sup_{z_1 \times z_2} \limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z_1 + z_2 \cdot u) \cdot |u|^{-\varrho(|u|)}$$

est plurisousharmonique de z_1 et de z_2 , et on a

$$L_c^*(z_1, z_2, V, \varrho(r)) \equiv L_c^*(z_2, V, \varrho(r)).$$

(b) On sait que pour toute fonction plurisousharmonique dans C^n satisfaisant à

$$V(z \cdot u) = |u|^\varrho \cdot V(z),$$

il existe une fonction entière dont l'indicatrice cerclée régularisée est $V(z)$. Par contre, on peut trouver des ordres précisés $\varrho(r)$ tendant vers ϱ tel qu'il n'existe pas une fonction entière F satisfaisant à

$$L_c^*(z, \log |F|, \varrho(r)) = V(z).$$

Exemple: $\varrho(r) = \log r / \log r$, et $L_c^* \equiv \frac{1}{2}$.

COROLLAIRE 1: *L'ordre précisé d'une fonction V plurisousharmonique dans C^n est l'ordre précisé de V sur toutes les traces $C^1(z \cdot u)$ sauf pour des z appartenant à un ensemble négligeable.*

REMARQUE: L'ordre $\varrho(z)$ d'une fonction plurisousharmonique V sur une droite $C^1(z \cdot u)$ est défini par

$$\varrho(z) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \log^+ M(z \cdot r) / \log r, \quad M^+(z) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} V^+(z \cdot e^{i\theta}).$$

Soit $\mu > V^+(0) + 1$. Il existe une fonction $R(z, \mu)$ telle que $M^+(z \cdot R(z, \mu)) = \mu$.

Donc

$$-\frac{\log R(z, \mu)}{\log \mu}, \quad V^+(0) + 1 < \mu < \infty$$

est une famille de fonctions plurisousharmoniques dans C^n , localement bornée supérieurement, et

$$-\frac{1}{\varrho(z)} = \limsup_{\mu \rightarrow \infty} -\frac{\log R(z, \mu)}{\log \mu} \leq 0.$$

est donc égal à une constante pour tous les z hors d'un ensemble polaire. On peut énoncer:

Si V est une fonction plurisousharmonique dans C^n d'ordre infini, alors V est d'ordre infini sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ sauf pour les z appartenant à un ensemble polaire.

COROLLAIRE 2: *Si V est une fonction plurisousharmonique dans C^n de type moyen d'ordre $\vec{\varrho}$ de Lindelöf²⁾, V est de type moyen d'ordre $\vec{\varrho}$ sur toutes les traces $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.*

COROLLAIRE 3: *Soient $C^1(z_1 \cdot u)$ et $C^1(z_2 \cdot u)$ deux droites complexes dans C^n et V une fonction plurisousharmonique dans C^n , positive et d'ordre fini. En comparant V*

²⁾ On emploie comme fonction de comparaison de $\log M(r)$ les fonctions $r^{\varrho_0} \cdot (\log r)^{\varrho_1} \cdot (\log_2 r)^{\varrho_2} \cdot \dots \cdot (\log_n r)^{\varrho_n}$; $\vec{\varrho} = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_n)$.

sur les deux droites, alors

$$h(z_1, z_2) = \limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z_1 \cdot u)/V(z_2 \cdot u)$$

est positive hors d'un ensemble $\{z_1\}$ négligeable.

COROLLAIRE 4: Si V_1 et V_2 sont deux fonctions plurisousharmoniques dans C^n , positives et du même ordre précisé $\varrho(r)$, alors

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} V_1(z \cdot u)/V_2(z \cdot u)$$

est positive sur toutes les droites complexes $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.

D'après le théorème 1 et l'inégalité de V. AVANISSIAN [1]

$$L(V^+, 0, r) \leq M^+(r) \leq L(V^+, 0, R) \cdot (1+k) \cdot (1-k)^{-2n+1}, \quad k = r/R < 1, \quad (3)$$

où V est plurisousharmonique, $M(r) = \max_{\|z\|=r} V(z)$, et où L est la moyenne sur la sphère $S_{2n-1}(0, r)$, on a:

COROLLAIRE 5: Si V est plurisousharmonique dans C^n , d'ordre $\varrho(r)$, $M(r) = \max_{|z|=r} V(z)$ et $L(V, 0, r) = (1/\omega_{2n-1}) \cdot \int_{\|z\|=r} V(z) d\omega_{2n-1}$, on a:

(a) $L(V^+, 0, r)$ est d'ordre $\varrho(r)$

(b) $\limsup_{r \rightarrow \infty} L(V^+, 0, r)/M(r) = a \neq 0, \infty$

(c) $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z \cdot u)/M(|u|) = a(z)$ est positive hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable et finie pour $\|z\| \leq 1$, $u \in C^1$.

REMARQUES:

1.) (b) est un résultat plus précis que celui de PH. NOVERRAZ [1]

2.) Si V est de croissance régulière (c.à.d. $\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r) \cdot r^{-\varrho(r)} > 0$), alors $\liminf_{r \rightarrow \infty} L(V^+, 0, r)/M(r)$ est positif et $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} V(z \cdot u)/M(|u|)$ est finie pour tous les $z \in C^n$.

4.) Soit V une fonction plurisousharmonique dans C^n , d'ordre fini et $V(0) > -\infty$, et soient $T(z, V) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} V^+(z \cdot e^{i\theta}) d\theta$ et $T(r, V) = L(V^+, 0, r) = L(T(z, V), 0, r)$, L étant définie dans le corollaire 5.

DÉFINITION 5: a) Nous dirons que V est de la classe de convergence (resp. de divergence) par rapport à s , $s > 0$, si

$$\int_R^\infty T(r, V) \cdot r^{-s-1} dr$$

est convergente (resp. divergente).

b) Nous dirons que V est de la classe de convergence (resp. de divergence) par rapport à s , $s > 0$, sur une droite complexe $C^1(z \cdot u)$, si

$$\int_R^\infty T(\alpha \cdot r, V) \cdot r^{-s-1} \cdot dr, \quad \alpha = z/\|z\|$$

est convergente (resp. divergente).

Le théorème suivant précise un résultat de P. LELONG [7].

THÉORÈME 2: Si V est une fonction plurisousharmonique dans C^n , et si V est de la classe de convergence par rapport à s , $s > 0$, sur un ensemble de droites $C^1(z \cdot u)$, où z appartient à un ensemble non négligeable, alors $V(z \cdot u)$, $u \in C^1$, est de la classe de convergence par rapport à s .³⁾

Démonstration:

a) Si V est d'ordre zéro, alors V est de la classe de convergence par rapport à tous les $s > 0$.

b) Soit l'ordre de V positif, et soit $V_1(z) = \begin{cases} V^+(z) & \text{si } V(0) = -\infty \\ [V(z) - V(0) - 1]^+, & \text{si } V(0) > -\infty. \end{cases}$ ⁴⁾

La fonction

$$W(z) = \int_0^1 T(z \cdot t, V_1) \cdot t^{-s-1} \cdot dt = \|z\|^s \cdot \int_0^{\|\epsilon\|} T(\alpha \cdot t, V_1) \cdot t^{-s-1} \cdot dt, \quad \alpha = z/\|z\| \quad (4)$$

est plurisousharmonique dans C^n , possédant un ordre précisé $s(r)$, et $W(z \cdot u)$ est d'ordre $s(r)$ sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable. En posant

$$\phi_\alpha(r, s) = \int_0^r T(\alpha \cdot t, V_1) \cdot t^{-s-1} \cdot dt, \quad W(z \cdot r) = \|z\|^s \cdot r^s \cdot \phi_\alpha(r \cdot \|z\|, s),$$

$\phi_\alpha(r, s)$ est une fonction non décroissante, et il existe donc $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_\alpha(r, s) \leq \infty$.

Posons $M(r, W) = \max_{\|z\|=r} W(z)$. D'après le corollaire 5 $\limsup_{r \rightarrow \infty} W(z \cdot r)/M(r, W)$ est positive pour tous les $z \in [C^n - E_1]$, où E_1 est négligeable.

Soit $V(z \cdot u)$, $u \in C^1$, de la classe de convergence sur un ensemble $\{z\}$ non négligeable dans C^n . Il existe donc un ensemble E , non négligeable, où

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_\alpha(r, s) = K_\alpha \neq 0, \infty \quad \text{c.à.d.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} W(z \cdot r) \cdot r^{-s} \neq 0, \infty. \quad (5)$$

³⁾ D'après la remarque qui suit la proposition 1 V est d'ordre fini.

⁴⁾ V_1 et V sont de la même classe sur une droite complexe $C^1(z \cdot u)$.

S'il existe une droite $C^1(z \cdot u)$, sur laquelle V est de la classe de divergence par rapport à s , alors $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r, W) \cdot r^{-s} = \infty$, et l'on a sur $[E - E_1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(z \cdot r) \cdot r^{-s} = \limsup_{r \rightarrow \infty} W(z \cdot r) / M(r, W) \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} M(r, W) \cdot r^{-s} = \infty,$$

ce qui contredit (5).

Il nous reste de montrer la convergence de $\int_R^\infty T(r, V) \cdot r^{-s-1} \cdot dr$. A cause de l'inégalité de AVANISSIAN (3), $T(r, V)$, $T(r, V_1)$, et $M(r, V_1)$ sont de la même classe par rapport à s . D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} R^s \cdot \int_0^R T(r, V_1) \cdot r^{-s-1} \cdot dr &= (1/\omega_{2n-1}) \int_0^1 \int_{\|z\|=R} T(z \cdot t, V_1) \cdot t^{-s-1} \cdot dt \cdot d\omega_{2n-1} \\ &\leq \max_{\|z\|=R} W(z) \leq R^s \cdot \int_0^R M(r, V_1) \cdot r^{-s-1} \cdot dr, \end{aligned}$$

ce qui établit l'énoncé.

REMARQUES: Si s est plus petit que l'ordre de V , V est de la classe de divergence et $V(z \cdot u)$, $u \in C^1$, est de la classe de divergence par rapport à s pour tous les z hors d'un ensemble négligeable. D'autre part, si s est plus grand que l'ordre de V , V et $V(z \cdot u)$ sont de la classe de convergence pour tous les z .

Soient $N(z, V) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} V(z \cdot e^{i\theta}) d\theta$ et $N(r, V) = L(V, 0, r) = L(N(z, V), 0, r)$.
 $(L(V, 0, r) = (1/\omega_{2n-1}) \cdot \int_{\|z\|=r} V(z) d\omega_{2n-1})$.

DÉFINITION 6: Le genre q d'une fonction V plurisousharmonique dans C^n , d'ordre fini ϱ , est défini par

$q = [\varrho]$, si ϱ n'est pas entier, $[\varrho]$ désignant la partie entière de ϱ .

$q = \varrho - 1$, si ϱ est entier, $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, V) \cdot r^{-\varrho} = 0$ et $\int_R^\infty N(r, V) \cdot r^{-\varrho-1} \cdot dr < \infty$
 $q = \varrho$, autrement.

On définit de la même manière le genre q_z de V sur une droite $C^1(z \cdot u)$, et l'on obtient:

COROLLAIRE 6: Une fonction plurisousharmonique dans C^n , d'ordre fini possède le même genre $q_z = q$ sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.

P. LELONG [5] a donné une représentation d'une fonction V plurisousharmonique dans C^n d'ordre fini et pluriharmonique dans une environ de $z=0$ par

$$V(z) = H(z) + \int_{C^n} e_n(a, z, q_N) \cdot d\mu(a)$$

où H est une fonction harmonique dans C^n d'ordre fini et $e_n(a, z, q_N)$ s'obtient en écrivant

$$\|a - z\|^{2n-2} = \|a\|^{2n-2} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(z_i, \bar{z}_k)\right), \quad n \geq 2,$$

Q_j désignant le polynôme homogène de degré j de l'ensemble des variables z_i, \bar{z}_k . Si $z \neq a$,

$$e_n(a, z, q_N) = -\|a - z\|^{2n-2} + \|a\|^{2n-2} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{q_N} Q_j(z_i, \bar{z}_k)\right), \quad n \geq 2,$$

et le genre q de V est déterminé par

$$q = \max(q_N, \varrho(H)),$$

q_N désignant le genre de $N(r, V)$ et $\varrho(H)$ l'ordre de $H(z)$.

II. Les fonctions T et N de R. Nevanlinna d'une fonction entière dans C^n

5.) Soit $F(z) = F(0) + \sum_{k=m}^{\infty} A_k(z)$ une fonction entière dans C^n à valeur complexe,

où les A_k sont des polynômes homogènes et $A_m \neq 0$. Définissons d'après R. NEVANLINNA [1]

$$T(z, F) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log^+ |F(z \cdot e^{i\theta})| d\theta \quad (6)$$

$$N(z, a, F) = \begin{cases} 0, & \text{si la restriction de } T \text{ à la droite } C^1(z \cdot u) \text{ est constante} \\ \int_0^{\|z\|} [n_z(t, a, F) - n_z(0, a, F)] \cdot t^{-1} \cdot dt \\ & + n_z(0, a, F) \cdot \log \|z\| \quad \text{autrement,} \end{cases} \quad (7)$$

$n_z(t, a, F)$ désignant le nombre de zéros de $F(z \cdot u) - a$ dans le cercle $\|z \cdot u\| \leq t$. En appliquant le premier théorème fondamental sur les fonctions méromorphes de R. NEVANLINNA [1], on a:

$$N(z, a, F) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta - \log |F(0) - a|, \quad \text{si } F(0) \neq a \quad (8)$$

et

$$N(z, a, F) = \begin{cases} 0, & \text{si } F(z \cdot u) - a \equiv 0 \quad \text{en } u, \quad u \in C^1 \\ (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta - w(z) & \text{autrement,} \end{cases} \quad (8')$$

où $w(z \cdot u)$, $u \in C^1$ est une constante en u et cette constante est égale à $\log|A_m(z/\|z\|)|$ pour tous les z hors d'un ensemble polaire.

On voit aisément que $T(z, F)$ et, si $F(0) \neq a$, $N(z, a, F)$ sont non-négatives, continues et plurisousharmoniques dans C^n .

DÉFINITION 7: Si $F(z) = F(0) + \sum_{k=m}^{\infty} A_k(z)$, $A_m \neq 0$, est une fonction entière dans C^n , nous poserons:

$$T(r, F) = L(\log^+ |F|, 0, r) \quad (9)$$

$$N(r, a, F) = \begin{cases} L(\log |F - a|, 0, r) - \log |F(0) - a|, & \text{si } F(0) \neq a \\ L(\log |F - a|, 0, r) - L(\log |A_m|, 0, 1) & \text{autrement,} \end{cases} \quad (10)$$

L étant la moyenne sur la sphère $S_{2n-1}(0, r)$.

En utilisant la relation (6), la définition 5 est équivalente à la suivante:

DÉFINITION 7': Si $F(z)$ est une fonction entière dans C^n ,

$$T(r, F) = L(T(z, F), 0, r) \quad (11)$$

$$N(r, a, F) = L(N(z, a, F), 0, r) \quad (12)$$

Soit $m(r, a, F) = L(m(z, a, F), 0, r)$, où $m(z, a, F)$ est la fonction osculatrice de $F(z \cdot u)$ définie par

$$m(z, a, F) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log^+ |1/(F(z \cdot e^{i\theta}) - a)| d\theta, & \text{si } a \neq \infty \\ T(z, F), & \text{si } a = \infty. \end{cases}$$

La définition 5' permet d'énoncer les deux théorèmes fondamentaux de R. NEVANLINNA pour les fonctions entières dans C^n .

THÉORÈME 3: Soit $F(z)$ une fonction entière dans C^n et

$$G(z) = z \cdot \operatorname{grad} F(z) = \sum_{j=1}^n z_j \cdot \frac{\partial F}{\partial z_j}$$

(a) $T(r, F) = N(r, a, F) + m(r, a, F) + O(1)$ pour tous les $a \in C^1$, r tendant vers l'infini.

(b) Si F est d'ordre fini, $m(r, \infty, G/F) = O(\log r)$, $r \rightarrow \infty$.

(c) Si a_1, a_2, \dots, a_q sont des nombres complexes et finis tels que $a_i \neq a_j$, si $i \neq j_q$ et $q \geq 2$, et si F est d'ordre fini, on a:

$$(q-1) \cdot T(r, F) \leq \sum_{j=1}^q N(r, a_j, F) - N(r, 0, G) + O(\log r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Démonstration:

1. On obtient (a) aisément d'après la définition 7' et le premier théorème fondamental de R. NEVANLINNA.

2. Soit $F(z) = F(0) + \sum_{k=m}^{\infty} A_k(z)$ une fonction entière dans C^n d'ordre fini et $G(z) = \sum_m^{\infty} k \cdot A_k(z) = z \cdot \text{grad } F(z)$, $A_m \neq 0$. Posons

$$\left. \begin{aligned} F(z \cdot u) &= \varphi_z(u) = \varphi_{\alpha}(\|z\| \cdot u) \quad \text{où } \alpha = z/\|z\| \quad \text{et } u \in C_1, \\ G(z \cdot u) &= \varphi_{1,z}(u) = \varphi_{1,\alpha}(\|z\| \cdot u) = \|z\| \cdot u \cdot \frac{d\varphi_{\alpha}(s)}{ds} \Big|_{s=\|z\| \cdot u} \\ &= \|z\| \cdot u \cdot \varphi'_{\alpha}(\|z\| \cdot u). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Pour une fonction $g(u)$ entière dans C^1 , $g(0) \neq 0$, W. K. HAYMAN [1] a montré l'inégalité suivante:

$$\left. \begin{aligned} m(r, \infty, g'/g) &\leq 4 \cdot \log^+ T(R, g) + 4 \cdot \log^+ \log^+(1/|g(0)|) + 5 \cdot \log^+ R \\ &\quad + \log^+(1/r) + 6 \cdot \log^+(1/(R-r)) + 14, \quad 0 < r < R. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Si $F(0)=0$, $\psi_z(u) = \phi_z(u)/u^m$ est entière dans C^1 et $\psi_z(0) \neq 0$ hors d'un ensemble $\{z\}$ polaire. En posant $R=2 \cdot \|z\|$ et $r=\|z\|$ dans la relation (14), on obtient

$$\begin{aligned} m(z, \infty, G/F) &\leq (\frac{1}{2} \pi) \cdot \int_0^{2\pi} \log^+ |\varphi'_{\alpha}(\|z\| \cdot e^{i\theta}) / \varphi_{\alpha}(\|z\| \cdot e^{i\theta})| d\theta + \log \|z\| + \log 2 \\ &\leq 4 \cdot \log^+ T(2z, F) + C_1 \cdot \log^+ \|z\| + C_2 \cdot \log^+(1/\|z\|) + C_3, \end{aligned}$$

C_j étant constant et, en tenant compte de la définition 7',

$$m(r, \infty, G/F) = 4 \cdot \log^+ T(2r, F) + O(\log r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Supposant que F soit d'ordre fini, c.à.d. $\log T(2r, F) = O(\log r)$, (b) est établi.

3. D'après les relations (10) et (12) on a:

$$\begin{aligned} N(r, 0, G) &= L(\log |G|, 0, r) - L(\log |m \cdot A_m|, 0, 1) \\ &= L(N(r \cdot \alpha, 0, \varphi'_{\alpha}), 0, r) + \log r, \quad \text{où } m \geq 1, \alpha = z/\|z\| \quad \text{et } r = \|z\|. \end{aligned}$$

Appliquant le deuxième théorème fondamental de R. NEVANLINNA et le résultat de (b), on obtient, compte tenu de la définition 7', (c).

6.) PROPOSITION 2: *L'indicatrice cerclée régularisée de $N(z, a, F)$ par rapport à l'ordre précisé $\sigma_a(r)$ de $N(z, a, F)$ est log-plurisousharmonique dans C^n .*

En effet, c'est évident, si $F(0) \neq a$. Autrement, si $F(0) = a$, on a ou bien $F(z) \equiv a$ et $N(z, a, F) \equiv 0$, ou bien

$$N(z, a, F) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } F(z \cdot u) - a \equiv 0 \quad \text{en } u, \quad u \in C^1 \\ (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta - w(z), & \text{autrement} \end{array} \right\} \quad (8')$$

où $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta$ est une fonction non constante et plurisousharmonique dans C^n , donc

$$L_c^*(z, N(z, a, F), \sigma_a(r)) = L_c^*\left(z, (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta, \sigma_a(r)\right).$$

COROLLAIRE 7: $N(z, a, F)$ possède le même ordre précisé $\sigma_a(r)$ sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable, et $\sigma_a(r) \equiv \varrho(r)$ pour tous les $a \in C^1$ sauf peut-être pour une valeur a_0 , dans le cas, où ϱ est entier.

La proposition 2 et le corollaire 3 nous donnent:

THÉORÈME 4: Soit F une fonction entière dans C^n d'ordre fini et $F \not\equiv 0$. Les limites

$$(a) \limsup_{r \rightarrow \infty} T(z_1 \cdot r, F)/T(z_2 \cdot r, F)$$

$$(b) \limsup_{r \rightarrow \infty} M(z_1 \cdot r, F)/M(z_2 \cdot r, F)$$

$$(c) \limsup_{r \rightarrow \infty} N(z_1 \cdot r, a, F)/N(z_2 \cdot r, a, F), \text{ si } N(z, a, F) \not\equiv 0,$$

sont positives hors d'un ensemble $\{z_1\}$ négligeable, $M(z, F)$ définie par

$$M(z, F) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \log |F(z \cdot e^{i\theta})| \quad \text{et } z_1, z_2, \in C^n.$$

En effet, il existe une fonction $R(z_1, z_2)$ qui est finie hors d'un ensemble $\{z_1\}$ négligeable, telle que $N(z_1 \cdot r, a, F)/N(z_2 \cdot r, a, F)$ est positive pour tous les $r > R(z_1, z_2)$.

7.) PROPOSITION 3: Si $N(z \cdot r, a, F)$ est de la classe de convergence par rapport à $s > 0$ pour $z \in E$, et si E n'est pas négligeable, alors $N(z \cdot r, a, F)$ est de la classe de convergence par rapport à s pour tous les z , et $N(r, a, F)$ est de la même classe.

Démonstration:

a) Si $F(0) \neq a$, c'est une conséquence du théorème 2.

b) Soit $F(0) = a$, ou bien $F \equiv a$ et $N(z, a, F) \equiv 0$, ou bien $N(r, a, F)$ est une fonction croissante, donc

$$\int_R^\infty N(\alpha \cdot r, a, F) \cdot r^{-s-1} dr = \begin{cases} 0, & \text{si } F(z \cdot u) - a \equiv 0 \text{ en } u, u \in C^1 \\ (2\pi)^{-1} \int_R^\infty dr \int_0^{2\pi} \log |F(\alpha \cdot r \cdot e^{i\theta}) - a| \cdot r^{-s-1} d\theta + o(1), \\ & \text{autrement, } \alpha = z/\|z\|, \end{cases}$$

et

$$\int_R^\infty N(r, a, F) \cdot r^{-s-1} dr = (1/\omega_{2n-1}) \int_R^\infty dr \int_{\|\omega\|=r}^{2\pi} \log |F(z) - a| \cdot r^{-s-1} d\omega + o(1)$$

Le théorème 2, appliqué à $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \log |F(z \cdot e^{i\theta}) - a| d\theta$, établit l'énoncé.

8.) Une fonction F entière dans C^n d'ordre fini peut se représenter sur une droite $C^1(z \cdot u)$ par

$$F(z \cdot u) - a = \prod_{z,a}(u) \cdot e^{P_{z,a}(u)} \quad (15)$$

où $P_{z,a}(u)$ est une polynôme et $\prod_{z,a}(u)$ le produit canonique de WEIERSTRASS par rapport au genre $q_{z,a}$, $q_{z,a}$ désignant le plus petit nombre entier s , tel que $N(z, a, F)$ est de classe de convergence sur $C^1(z \cdot u)$. par rapport à $q+1$.

PROPOSITION 4: *Le produit canonique $\prod_{z,a}(u)$ d'une fonction entière dans C^n d'ordre fini, défini par (15), possède le même genre $q_{z,a}$ sur toutes les droites $C'(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.*

DÉFINITION 6": Le genre q d'une fonction F entière dans C^n d'ordre fini ϱ est défini par:

$q = [\varrho]$, si ϱ n'est pas entier, $[\varrho]$ désignant la partie entière de ϱ ,

$q = \varrho - 1$, si $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) \cdot r^{-\varrho} = 0$ et $\int_R^\infty N(r, 0, F) \cdot r^{-\varrho-1} dr < \infty$,

$q = \varrho$, autrement.

On définit de la même manière le genre q_z de F sur une droite $C^1(z \cdot u)$. D'autre part on peut obtenir q_z par

$$q_z = \max [q_{z,0}, \rho(e^{P_{z,0}(u)})]$$

Résumons l'énoncé précédent:

THÉORÈME 5: *Soit F une fonction entière dans C^n d'ordre fini.*

a) *F est d'ordre $\varrho(r)$, de genre q et de la même classe (de convergence ou de divergence) par rapport à s , $s > 0$, sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.*

b) *$N(z, a, F)$ est du même ordre précis $\sigma_a(r)$, et de la même classe (de convergence où de divergence) par rapport à s , $s > 0$, sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable, et $\sigma_a(r) = \varrho(r)$ pour tous les $a \in C^1$ sauf peut être pour une valeur a_0 , dans le cas où q est entier.*

III. Sur la distribution des zéros et sur les défauts d'une fonction entière dans C^n

9) Soit F une fonction entière dans C^n d'ordre fini ϱ , et soient $n_z(r, a, F)$, $N(z, a, F)$, $N(r, a, F)$, $T(z, F)$ et $T(r, F)$ les fonctions définies dans le chapitre II. P. LELONG [1], [2] a montré le résultat suivant:

THÉORÈME (A): *Soit F une fonction entière dans C^n . Si $F(z \cdot u) - a$, $u \in C^1$, n'a*

aucun zéro pour $z \in E$, et si E n'est pas négligeable, alors $F(z \cdot u) - a$ n'a jamais de zéros.

Nous avons déjà montré (proposition 2) que $N(z, a, F)$ possède le même ordre précisé $\sigma_a(r)$ sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable. Le résultat suivant généralisé le théorème (A).

THÉORÈME 6: *Soit F une fonction entière dans C^n . Si $F(z \cdot u)$, $u \in C^1$, n'a qu'un nombre fini de zéros pour tout $z \in E$, et si E n'est pas polaire, il existe un polynôme $P_m(z)$ de degré m et une fonction entière $G(z)$ telle que*

$$F(z) = P_m(z) \cdot e^{G(z)}. \quad (16)$$

F possède alors le même nombre fini m de zéros (compté avec leur ordre de multiplicité) sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ sauf pour des z appartenant à un ensemble polaire. Sur une droite correspondant à cet ensemble polaire, la fonction $F(z \cdot u)$ a un nombre de zéros inférieur à m , ou est identiquement nulle.

Démonstration: En tenant compte de la proposition 1 et de la remarque qui suit cette proposition, $N(z, 0, F)$ possède un ordre précisé $\sigma(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = 0$, ou est identiquement nulle.

Nous montrons d'abord qu'il existe un polynôme $P_m(z)$ de degré m et une fonction entière $G(z)$ satisfaisant à (16). Lorsque $z \in E$, on a

$$F(z \cdot u) = P_z(u) \cdot e^{g_z(u)}$$

où $P_z(u)$ est un polynôme de u et $g_z(u)$ une fonction entière de u . D'autre part, il existe d'après un théorème de P. LELONG [5] et [7] une fonction F_0 entière dans C^n et d'ordre zéro telle que

$$F_0(z) = F(z) \cdot e^{-G(z)}$$

où G est une fonction entière dans C^n . (On voit aisément que $F(z) = 0 \Leftrightarrow F_0(z) = 0$.)

Sur une droite $C^1(z \cdot u)$, $z \in E$,

$$F_0(z \cdot u) = P_z(u) \cdot e^{g_z(u) - G(z \cdot u)}$$

est un polynôme de u . Le lemme suivant montre que F_0 est un polynôme dans C^n .

LEMME: *Soit F_0 une fonction entière dans C^n . Si $F_0(z \cdot u)$ sont des polynômes de u pour les appartenant à un ensemble non polaire, alors F_0 est un polynôme dans C^n .*

En effet, si $F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)$ est une fonction transcendente (c.à.d. F_0 n'est pas un polynôme) où les A_k sont des polynômes homogènes de degré k , alors l'ensemble

$D = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ est polaire dans C^n , D_k étant défini par

$$D_k = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } A_k = 0 \\ \{z/A_k(z) = 0\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Lorsque F_0 est transcende, l'ensemble de z où $F_0(z \cdot u)$ est un polynôme de u , est contenu dans D et donc polaire, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

La régularisée de l'indicatrice cerclée de $\log|F_0|$ par rapport à l'ordre précisé $\log\log r/\log r$ est une constante m , m entier, ce qui établit l'énoncé.

10.) Etudions maintenant la distribution des zéros d'une fonction F entière dans C^n et d'ordre fini ϱ , et désignons par les $\{b_{kz}\}_{k=1}^{\infty}$ les familles de zéros distincts de l'origine sur les droites $C^1(z \cdot u)$ où F n'est pas identiquement nulle. L'intégration partielle

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r_0 < |b_{kz}| \leq r} |b_{kz}^{-s}| &= r^{-s} \cdot n_z(r, 0, F) - r_0^{-s} \cdot n_z(r_0, 0, F) \\ &\quad + s \cdot r^{-s} \cdot N(\alpha \cdot r, 0, F) - r_0^{-s} \cdot s \cdot N(\alpha \cdot r_0, 0, F) \\ &\quad + s^2 \cdot \int_{r_0}^r N(\alpha \cdot t, 0, F) \cdot t^{-s-1} dt \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

nous montre que $\sum_k |b_{kz}|^{-s}$, $s > 0$, est ou bien convergente sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ où $F(z \cdot u)$ n'est pas identiquement nulle, ou bien divergente pour tous les $z \in C^n$ hors d'un ensemble négligeable. De plus, si $F(0) \neq 0$, la fonction

$$\left. \begin{aligned} \psi_s(z) &= \|z\|^s \cdot \sum_{|b_{kz}| \leq \|z\|} |b_{kz}|^{-s} - n_z(\|z\|, 0, F) \\ &= s \cdot N(z, 0, F) + s^2 \cdot \int_0^1 N(z \cdot t, 0, F) \cdot t^{-s-1} dt \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

est plurisousharmonique dans C^n pour tous les $s > 0$. Il est évident, qu'on a la convergence de $\sum_k |b_{kz}|^{-s}$ si $s > \varrho$ et divergence si $0 < s < \varrho$. De plus, si l'ordre ϱ de F n'est pas entier, $\sum_k |b_{kz}|^{-s}$ est convergente si et seulement si F est de la classe de convergence par rapport à ϱ .

Lorsque ϱ est entier et positif, le théorème 5 nous donnera le résultat suivant. Soit $f(u)$ une fonction entière dans C^1 d'ordre entier et positif ϱ et d'ordre précis $\varrho(r)$. En désignant par les b_k ses zéros distincts de l'origine, on pourra donc toujours (c.à.d.

indépendant du genre de f) écrire cette fonction sous la forme:

$$f(u) = u^m \cdot \exp \left[\sum_{k=0}^{\varrho} c_k \cdot u^k \right] \cdot \prod_k E(u/b_k, \varrho) \quad (19)$$

où m désigne un entier positif ou nul et où l'on s'est servie de la notation de WEIERSTRASS

$$E(w, \varrho) = (1 - w) \cdot \exp \left[\sum_{k=1}^{\varrho} w^k / k \right].$$

En posant $S(r) = r^\varrho \cdot |c_\varrho + \varrho^{-1} \cdot \sum_{|b_k| \leq r} b_k^{-\varrho}|$, A. PFLUGER [1], [2] et B.J. LEVIN [1] ont montré que

$$\max [n(r, 0, f), S(r)]$$

est d'ordre précis $\varrho(r)$. Appliquant le théorème 5, on obtiendra alors:

PROPOSITION 6: Soient les $\{b_{kz}\}_{k=1}^{\infty}$ les familles des zéros distincts de l'origine d'une fonction entière dans C^n d'ordre entier et positif et d'ordre précis $\varrho(r)$ sur les traces $C^1(z \cdot u)$, z appartenant à $C^n - E$, où E est défini par $E = \{z/F(z \cdot u) \equiv 0, u \in C^1\}$. La représentation (19) de $F(z \cdot u)$, $z \in C^n - E$, nous donnera:

- (a) Si F appartient au type minimum d'ordre ϱ , $|c_{\varrho, z} + \varrho^{-1} \cdot \sum_k b_{k, z}^{-\varrho}| = 0$ pour tous les $z \in C^n - E$. ($\sum_k b_{k, z}^{-\varrho}$ est donc convergente.)
- (b) Si F appartient au type moyen d'ordre ϱ , alors $\limsup_{r \rightarrow \infty} |\sum_{|b_{kz}| \leq r} b_{kz}^{-\varrho}| < \infty$ pour tous les $z \in C^n - E$.
- (c) Si $N(r, 0, F) = o(r^{\varrho(r)})$, alors $S_z(r) = r^\varrho \cdot |c_{\varrho, z} + \varrho^{-1} \sum_{|b_{kz}| \leq r} b_{k, z}^{-\varrho}|$ est d'ordre $\varrho(r)$ et $\sum_{|b_{kz}| \leq r} |b_{k, z}|^{-\varrho}$ est du même ordre précis $\tau(r)$ sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.

11) R. NEVANLINNA et G. VALIRON ont défini les défauts (ou valeur déficiente) pour une valeur a , $a \in C^1$, d'une fonction méromorphe de la manière suivante:

DÉFINITION 8: Nous appellerons «défaut de NEVANLINNA» pour la valeur a d'une fonction entière dans C^n et non constante l'expression suivante:

$$\delta(a) = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} N(r, a, F)/T(r, F)$$

et sur une droite complexe $C^1(z \cdot u)$:

$$\delta_z(a) = \begin{cases} 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} N(z \cdot r, a, F)/T(z \cdot r, F) \\ \text{si } F(z \cdot u) \text{ n'est pas une constante par rapport à } u \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉFINITION 9: Nous appellerons «défaut de VALIRON» pour la valeur a d'une fonction entière dans C^n et non constante l'expression suivante:

$$\Delta(a) = 1 - \liminf_{r \rightarrow \infty} N(r, a, F)/T(r, F)$$

et sur une droite complexe $C^1(z \cdot u)$:

$$\Delta_z(a) = \begin{cases} 1 - \liminf_{r \rightarrow \infty} N(z \cdot r, a, F)/T(z \cdot r, F) & \text{si } F(z \cdot u) \text{ n'est pas une constante par rapport à } u \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME 7: Soit F une fonction entière dans C^n , non constante et d'ordre précisé $\varrho(r)$. Si $\delta_z(a)=1$ sur un ensemble $\{z\}$ non négligeable, alors:

- (a) $\Delta_z(a)=1$ et $\sum_{b \neq a, \infty} \delta_z(b)=0$ pour tous les z hors d'un ensemble négligeable.
- (b) $\Delta(a)=1$ et $\sum_{b \neq a, \infty} \delta(b)=0$
- (c) La fonction $S_z(r)$ définie dans la proposition 6 par rapport à $F(z) \cdot z$ est d'ordre $\varrho(r)$ pour tous les z hors d'un ensemble négligeable.
- (d) S'il existe une droite complexe $C^1(z_0 \cdot u)$, où $\liminf_{r \rightarrow \infty} T(z_0 \cdot r, F) \cdot r^{-\varrho(r)}$ est positive, alors on a $\delta_{z_0}(a)=1$ et $\delta(a)=1$.

Démonstration: L'inégalité

$$L_c(z, N(z, a, F), \varrho(r)) \leq [1 - \delta_z(a)] \cdot L_c(z, T(z, F), \varrho(r)) \quad (20)$$

et la proposition 2 entraînent que $N(r, a, F)=o(r^{\varrho(r)})$ et donc (c). D'autre part, on a:

$$L_c(z, T(z, F), \varrho(r)) \leq [1 - \Delta_z(a)]^{-1} \cdot L_c(z, N(z, a, F), \varrho(r))$$

respectivement

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} T(r, F) \cdot r^{-\varrho(r)} \leq [1 - \Delta(a)]^{-1} \cdot \limsup_{r \rightarrow \infty} N(r, a, F) \cdot r^{-\varrho(r)}$$

et par suite $\Delta(a)=1$ et $\Delta_z(a)=1$ pour tous les z hors d'un ensemble négligeable. Le deuxième théorème fondamental de R. NEVANLINNA (resp. le théorème 3) nous donne

$$T(z, F) \leq N(z, a, F) + N(z, b, F) + O(\log r), \quad r \rightarrow \infty \quad \text{et}$$

$$T(r, F) \leq N(r, a, F) + N(r, b, F) + O(\log r), \quad r \rightarrow \infty,$$

ce qui établissent (a) et (b).

S'il existe une droite $C^1(z_0 \cdot u)$ sur laquelle $\liminf_{r \rightarrow \infty} T(z_0 \cdot r) \cdot r^{-\varrho(r)}$ est positive, alors $\liminf_{r \rightarrow \infty} T(r, F) \cdot r^{-\varrho(r)}$ est aussi positive et l'on a des inégalités

$$1 - \delta_{z_0}(a) \leq L_c(z_0, N(z, a, F), \varrho(r)) \cdot \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{\varrho(r)}/T(z_0 \cdot r, F) = 0 \quad \text{et}$$

$$1 - \delta(a) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} N(r, a, F) \cdot r^{-\varrho(r)} \cdot \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{\varrho(r)}/T(r, F) = 0.$$

DÉFINITION 10: Nous dirons qu'une fonction F entière dans C^n est de croissance régulière par rapport à l'ordre précisé $\varrho(r)$, si

- (a) F est d'ordre précisé $\varrho(r)$
- (b) $\liminf_{r \rightarrow \infty} T(r, F) \cdot r^{-\varrho(r)} > 0$

DÉFINITION 11: Nous dirons qu'une fonction entière dans C^n est de croissance régulière sur les droites complexes $C^1(z \cdot u)$ par rapport à l'ordre précisé $\varrho(r)$, si

- (a) F est d'ordre précisé $\varrho(r)$
- (b) $\liminf_{r \rightarrow \infty} T(z \cdot r, F) \cdot r^{-\varrho(r)} > 0$, si $\limsup_{r \rightarrow \infty} T(z \cdot r, F) \cdot r^{-\varrho(r)} > 0$.

On voit aisément qu'une fonction de croissance régulière sur les droites est de croissance régulière.

COROLLAIRE 8: Soit F une fonction entière dans C^n et de croissance régulière sur les droites $C^1(z \cdot u)$ par rapport à l'ordre $\varrho(r)$. Si a est une valeur exceptionnelle de Borel de $F(z \cdot u)$, (c.à.d. $\delta_z(a)=1$), pour $z \in E$, et si E n'est pas négligeable, alors a est une valeur exceptionnelle de Borel sur toutes les droites $C^1(z \cdot u)$ hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable.

THÉORÈME 8: Soit F une fonction entière dans C^n d'ordre $\varrho(r)$.

(a) S'il existe une droite complexe $C^1(z_0 \cdot u)$ telle que l'indicatrice $L_c(z_0, N(z, a, F), \varrho(r))$ soit positive, on a alors $\delta(a) < 1$ et $\delta_z(a) < 1$ pour tous les z hors d'un ensemble négligeable.

(b) Soit $\varphi'_z(u) = dF(z \cdot u)/du$. S'il existe une droite complexe $C^1(z \cdot u)$ telle que $\limsup_{r \rightarrow \infty} N(z_0 \cdot r, 0, \varphi'_z) \cdot r^{-\varrho(r)}$ soit positive, alors on a $\sum_{a \neq \infty} \delta(a) < 1$ et $\sum_{a \neq \infty} \delta_z(a) < 1$ pour tous les z hors d'un ensemble négligeable.

Démonstration:

1. (a) est une conséquence de la proposition 2.

2. Soit $F(z) = F(0) + \sum_{k=m}^{\infty} A_k(z)$, $A_m \neq 0$. La fonction $G(z) = z \cdot \text{grad } F(z)$ est aussi d'ordre $\varrho(r)$. Si la limite $\limsup_{r \rightarrow \infty} N(z_0 \cdot r, 0, \varphi'_z) \cdot r^{-\varrho(r)}$ est positive, il existe un $j \geq m$ tel que

$$\begin{aligned} N(z_0 \cdot r, 0, \varphi'_z) &= (2 \pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \log |G(z_0 \cdot r \cdot e^{i\theta})| d\theta - \log |j \cdot A_j(z_0/\|z_0\|)| \\ &\quad - \log \|z_0 \cdot r\|. \end{aligned}$$

$N(z, 0, \varphi'_z)$ et $N(z, 0, G)$ sont alors d'ordre $\varrho(r)$, et l'on a les inégalités $\delta(0, G) < 1$ et $\delta_z(0, \varphi_z) < 1$ pour tous les z hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable. D'après un

résultat de H. WITTICH [1] on obtient donc

$$\sum_{a \neq \infty} \delta_z(a, F) \leq \delta_z(0, \varphi'_z) < 1.$$

On peut déduire de (11) et (12) la relation $\sum_{a \neq \infty} \delta(a, F) \leq \delta(0, G)$, par laquelle (b) est établi.

IV. Quelques remarques et exemples

12.) H. WITTICH [1] a étudié le défaut de R. NEVANLINNA d'une fonction entière dans C^1 de la forme

$$f(u) = \sum_{j=1}^m P_j(u) \cdot e^{a_j \cdot u}, \quad a_i \neq a_j, \quad \text{si } i \neq j$$

P_j étant des polynômes non identiquement nuls, et il a trouvé:

$$N(r, a, f) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \cdot U(a_1, a_2, \dots, a_m, 0) \cdot r \cdot (1 + \varepsilon(r)) & \text{si } a \neq 0 \\ (2\pi)^{-1} \cdot U(a_1, a_2, \dots, a_m) \cdot r \cdot (1 + \varepsilon(r)) & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

$$T(r, f) = N(r, a, f) + O(\log r), \quad a \neq 0,$$

et $\delta(0, f) = 1 - U(a_1, a_2, \dots, a_m)/U(a_1, a_2, \dots, a_m, 0)$, où $U(b_1, b_2, \dots, b_k)$ désigne le périmètre du plus petit domaine convexe contenant les points b_1, b_2, \dots, b_k , et où $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$.

EXEMPLE 1: Soit $F(z) = F(z_1, z_2) = e^{z_1} + e^{z_2}$. On obtiendra d'après H. WITTICH:

$$\delta_z(a) = 1 - \frac{2 \cdot |z_1 - z_2|}{|z_1| + |z_2| + |z_1 - z_2|}.$$

L'exemple 1 montre qu'il existe des fonctions entières d'ordre fini telles que pour chaque valeur $\xi \in [0, 1]$ on ait une droite complexe $C^1(z \cdot u)$ sur laquelle $\delta_z(0, F) = \xi$.

Nous montrons maintenant que le corollaire 8 et par suite le théorème 7 n'est pas vrai pour $\delta_z(a) = d < 1$.

EXEMPLE 2: Soit $F(z) = F(z_1, z_2) = e^{z_1} + e^{z_2} + e^{i \cdot z_1} + e^{k \cdot (z_1 + i \cdot z_2)}$, $k > \frac{1}{2}$. Les défauts de R. NEVANLINNA sont:

$\delta_z(0, F) = 0$, si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, ou si $\arg(z_1) + \pi \leq \arg(z_2) \leq \arg(z_1) + 3\pi/2$.

$$\delta_z(0, F) = (2 - \sqrt{2})/(2 + 2 \cdot \sqrt{(k-1)^2 + k^2}),$$

$$\text{si } z_2 = [(m_1 + k \cdot m_3) + i \cdot (m_2 + k \cdot m_3)] \cdot z_1, m_j \in [0, 1] \quad \text{et}$$

$$\sum_{j=1}^3 m_j = 1.$$

Les trois ensembles

$$\begin{aligned} E_1 &= \{z/\delta_z(0, F) = 0\} \\ E_2 &= \{z/\delta_z(0, F) = (2 - \sqrt{2})/(2 + 2 \cdot \sqrt{(k-1)^2 + k^2})\} \\ E_3 &= C^2 - E_1 - E_2 \end{aligned}$$

sont des ensembles non négligeables. D'autre part, la limite $\lim_{r \rightarrow \infty} T(z \cdot r, F) \cdot r^{-1}$ existe pour tous les $z \in C^2$, et elle est positive hors d'un ensemble $\{z\}$ négligeable. F est alors de croissance régulière sur les droites $C^1(z \cdot u)$ par rapport à $\varrho(r) \equiv 1$. Le théorème 7 ne se généralise donc pas pour les défauts $\delta_z(a, F) = d < 1$.

13.) Nous donnons maintenant une généralisation du théorème (A) de P. LELONG pour les fonctions plurisousharmoniques dans C^n .

THÉORÈME 9. *Soit V une fonction continue et plurisousharmonique dans C^n . Si $V(z \cdot u)$, $u \in C^1$, est harmonique pour $z \in E$, et si E n'est pas polaire, alors V est pluriharmonique (c.à.d. V est harmonique sur toutes les droites complexes).*

Démonstration: On peut supposer $V(0) = 0$ sans diminuer la généralité.

a) La fonction $N(z, V) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} V(z \cdot e^{i\theta}) d\theta$ est identiquement nulle. En effet, $N(z, V)$ est plurisousharmonique dans C^n et $N(z \cdot u, V)$, $u \in C^1$, est identiquement nulle lorsque z appartient à E . Le domaine $\Omega = \{z/N(z, V) < 1\}$ est pseudoconvexe contenant l'origine. Soit $R(z) = \sup_{z \cdot u \in \Omega} |u|$. Alors $-\log R(z)$ est plurisousharmonique dans C^n , et l'on a ou bien $R(z) \equiv \infty$ et $N(z, V) \equiv 0$, ou bien $R(z) < \infty$ hors d'un ensemble polaire et $N(z \cdot u, V) \not\equiv 0$ en u hors d'un ensemble $\{z\}$ polaire, ce qui contredit l'hypothèse.

b) Nous montrons maintenant l'harmonicité sur les droites complexes $C^1(z + \eta \cdot u)$. Il suffit d'établir «la propriété de la moyenne», car V est continue.

Soit $h(z, \eta) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} V(z + \eta \cdot e^{i\theta}) d\theta$. Tenant compte de a), on obtient

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} h(z \cdot e^{i\tau}, \eta) d\tau &= (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z \cdot e^{i\tau} + \eta \cdot e^{i\theta}) d\tau d\theta \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z \cdot e^{i(\tau+\theta)} + \eta \cdot e^{i\theta}) d\tau d\theta \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} V[(z \cdot e^{i\tau} + \eta) e^{i\theta}] d\theta d\tau \equiv 0 \end{aligned}$$

La fonction $\psi(z, \eta) = h(z, \eta) - V(z)$ est continue et non-négative. D'autre part, $(2\pi)^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \psi(z \cdot e^{i\tau}, \eta) d\tau$ est identiquement nulle, ce qui établit l'énoncé.

En posant $V(z) = \log|F(z)|$, où F est une fonction entière dans C^n , on obtient le théorème (A) de P. LELONG.

BIBLIOGRAPHIE

- AVANISSIAN, V. [1], *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 78 (1961).
- HAYMAN, W. K. [1], *Meromorphic Functions*, Oxford Mathematical Monographs (1964).
- LELONG, P. [1] *Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 58 (1941).
- LELONG, P. [2], *Sur les valeurs lacunaires d'une relation à deux variables complexes*, Bull. des Sc. Math. 66 (1942).
- LELONG, P. [3], *Les fonctions plurisousharmoniques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 62 (1945).
- LELONG, P. [4], *Fonctions plurisousharmoniques et fonctions réelles*, Ann. de l'institut Fourier 11 (1961).
- LELONG, P. [5], *Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans C^n* , Journ. d'Analyse Math. 12 (1964).
- LELONG, P. [6], *Fonctions entières de type exponentiel dans C^n* , Ann. de l'institut Fourier 16 (1966).
- LELONG, P. [7], Cours de Montreal, été 1967, à paraître.
- LEVIN, B. J. [1], *Nullstellenverteilung ganzer Funktionen*, A-V-B (1962).
- NEVANLINNA, R. [1], *Eindeutige analytische Funktionen* (Springer, Berlin 1936).
- NOVERRAZ, Ph. [1], *Comparaison d'indicatrice de croissance pour des fonctions plurisousharmoniques ou entières d'ordre fini*, Journ. d'analyse Math. 12 (1964).
- PFLUGER, A. [1], *Über ganze Funktionen ganzer Ordnung*, Comment. Math. Helv. 18 (1946).
- PFLUGER, A. [1], *Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung*, Comment Math. Helv. 19 (1946).
- VALIRON, G. [1], *Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes*, L'enseignement math. (Genève 1960).
- WITTICH, H. [1], *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955).

Reçu le 27 Janvier 1968