

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 43 (1968)  
  
**Artikel:** Über isometrische Abbildungen in abzählbarer dimensionalen Räumen über reellen Körpern.  
**Autor:** Gross, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32928>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über isometrische Abbildungen in abzählbar dimensionalen Räumen über reellen Körpern

von H. GROSS (Zürich)

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Dr. JULIUS RÜTSCH, gewidmet.

## 0. Einleitung

Seien  $k$  ein Körper,  $\text{char } k \neq 2$ ,  $E$  ein  $k$ -Vektorraum,  $\Phi: E \times E \rightarrow k$  eine  $\varepsilon$ -hermitesche Form; seien ferner  $V$  und  $\bar{V}$  zwei beliebige, bezüglich  $\Phi$  isometrische Teilräume. In [1] wurde die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen es unter den Isometrien  $\tau: V \cong \bar{V}$  eine Isometrie  $\tau_0$  gibt, die sich zu einer Isometrie auf ganz  $E$  erweitern lässt. Für endlich dimensionales  $E$  ist die Lösung bekannt: der Wittsche Satz besagt, dass sich *jedes*  $\tau$  zu einer Isometrie auf ganz  $E$  erweitern lässt. Für Räume  $E$  von überabzählbarer algebraischer Dimension ist fast nichts bekannt, es sei denn  $(E, \Phi)$  sei zufällig ein Hilbertraum. Ist dagegen  $E$  von abzählbarer algebraischer Dimension, so gibt [1] erschöpfende Auskunft auf die Frage, vorausgesetzt, dass die Räume  $V$  und  $\bar{V}$  „genügend viele“ isotrope Vektoren enthalten. Diese Bedingung ist für grosse Klassen von Körpern, unabhängig von dem speziellen  $\Phi$ , automatisch immer erfüllt; so etwa für die Klasse der Kneserkörper oder die Klassen der  $C_i$ -Körper (s. [3], [4]). Die in [1] verwendeten Beweise versagen aber, wenn zum Beispiel  $\Phi$  eine definite Form über einem angeordneten Körper ist. Dass die Beweise in diesen Fällen versagen müssen, folgt aus den weiter unten bewiesenen Sätzen, aus denen nun hervorgeht, dass der Sachverhalt bei Fehlen genügend vieler isotroper Vektoren tatsächlich viel komplizierter ist als im andern Falle. Zur Illustration sei Folgendes erwähnt. *Ist  $(E, \Phi)$  ein Raum über den rationalen Zahlen, aufgespannt von einer abzählbaren orthonormierten Basis, dann lassen sich  $2^{\aleph_0}$  Hyperebenen  $V_i$  in  $E$  angeben mit  $V_i^\perp = (0)$ , von denen keine zwei sich durch irgend einen orthogonalen Automorphismus von  $E$  aufeinander abbilden lassen. Dagegen gilt nach [1]: Definiert man anstelle von  $\Phi$  auf demselben Raume eine Form  $\Psi$  indem man eine orthogonale Basis einführt, bei der unendlich vielen Basisvektoren die Länge  $+1$  und unendlich vielen die Länge  $-1$  zugeschrieben wird, dann können in dem Raume  $(E, \Psi)$  irgendwelche zwei Hyperebenen  $V, \bar{V}$  mit  $V^\perp = \bar{V}^\perp = (0)$  immer durch einen geeigneten orthogonalen Automorphismus von  $E$  aufeinander abgebildet werden.*

In dieser Note werden bloss Isometrien zwischen Hyperebenen betrachtet. Die zugelassenen *symmetrischen* Formen sind beliebig, die zugelassenen *angeordneten* Körper  $k$  sollen zwei Bedingungen erfüllen: (i) *die Anordnung von  $k$  ist archimedisch*, (ii) *es gibt eine natürliche Zahl  $m$ , nur von  $k$  abhängig, derart, dass jede nicht ausgeartete Form in  $m$  Variablen über  $k$  die Zahl  $+1$  oder  $-1$  (oder beide) darstellt*. Beispiele

sind etwa die Körper der rationalen Zahlen, der reellen algebraischen Zahlen, der reellen Zahlen; dabei ist der Reihe nach  $m=4$ ,  $m=1$ ,  $m=1$ . Wegen (i) kann  $k$  immer als Teilkörper der reellen Zahlen aufgefasst werden; wegen (ii) lässt sich  $k$  auf höchstens eine Weise anordnen. Unter den angegebenen Bedingungen werden unten (Satz 4) einfache, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, dass zwei Hyperebenen von  $E$  sich durch einen orthogonalen Automorphismus von  $E$  aufeinander abbilden lassen.

Gewisse offensichtliche Verallgemeinerungen auf beliebige  $\varepsilon$ -hermitesche Formen mögen bei dieser speziellen Untersuchung unerwähnt bleiben. Dass es nicht gelungen ist, Fälle nicht-archimedisch angeordneter Körper mitzuerfassen, erscheint uns dagegen als unnatürliche Einschränkung. Schliesslich bleibt der vermutlich viel schwierigere Fall beliebiger isometrischer Teilräume von  $E$  über angeordneten Körpern zu lösen.

Es sei noch Folgendes bemerkt: jeder abzählbar dimensionale Raum  $(E, \Phi)$  mit nicht ausgearteter symmetrischer Form  $\Phi$  über einem Körper der Charakteristik ungleich 2 und der Eigenschaft (ii) besitzt Orthogonalbasen mit sämtlichen Basisvektoren der Längen<sup>1)</sup>  $\pm 1$  ([2]). Ist  $k$  auch noch angeordnet, wie vorausgesetzt, so zerfällt  $(E, \Phi)$  in einen positiv definiten und einen negativ definiten orthogonalen Summanden,  $E = {}_+E \oplus {}_-E$ . Die Räume  ${}_+E$  und  ${}_+E$  sind nicht eindeutig bestimmt, wohl aber ihre Dimensionen  ${}_+n = \dim {}_+E$ ,  ${}_+n = \dim {}_+E$ ; wir sagen dann,  $(E, \Phi)$  sei vom Index  $({}_+n, {}_-n)$ . Über Körpern mit den Eigenschaften (i) und (ii) sind somit die abzählbar dimensionalen  $(E, \Phi)$  mit nicht ausgeartetem, symmetrischem  $\Phi$  durch den Index  $({}_+n, {}_-n)$  eindeutig charakterisiert. Beschränken wir uns auf einen positiv definiten Raum  $(F, \Phi)$  über einem Körper der angegebenen Art, so beruht der Existenzbeweis für orthonormierte Basen auf dem folgenden Sachverhalt: *Ist  $F$  irgendwie orthogonal zerlegt,  $F = G \oplus H$  mit unendlichdimensionalem  $H$ , so gibt es zu jedem  $h \in H$  einen  $m$ -dimensionalen Teilraum  $H_m \subset H$  mit  $h \in H_m$  und  $H_m$  aufgespannt von einer orthonormierten Basis.* (Siehe [2] oder den Beweis zu Theorem 1 in GROSS/FISCHER, *Quadratic Forms and Linear Topologies*, II, Math. Ann. 159, 285–308.)

## I. Ein Spezialfall

Im Folgenden sei  $k$  immer ein Teilkörper der reellen Zahlen,  $k \subset \mathbf{R}$ , mit der Eigenschaft, dass es ein  $m$  gibt, sodass jede Form über  $k$  in  $m$  Variablen  $+1$  oder  $-1$  (oder beide) darstellt. Ist  $\Phi$  eine symmetrische Bilinearform auf dem  $k$ -Vektorraum  $E$ ,  $\Phi: E \times E \rightarrow k$ , so sprechen wir manchmal vom Raume  $(E, \Phi)$ . Zwei solche Räume  $(E, \Phi)$  und  $(F, \Psi)$  heissen *isometrisch* oder *isomorph*, falls es einen Vektorraumisomorphismus  $T: E \rightarrow F$  gibt mit  $\Phi(x, y) = \Psi(Tx, Ty)$  für alle  $x, y \in E$ ;  $T$  heisst dann eine

<sup>1)</sup> Unter der Länge eines Vektors  $x$  in  $(E, \Phi)$  verstehen wir das Körperelement  $\|x\| = \Phi(x, x)$ ;  $x \perp y$  ist gleichbedeutend mit  $\Phi(x, y) = 0$ .

*Isometrie.*  $(E, \Phi)$  und  $(\bar{E}, \bar{\Phi})$  seien isomorphe Räume von abzählbarer algebraischer Dimension,  $V \subset E$  und  $\bar{V} \subset \bar{E}$  Teilräume mit der Eigenschaft

$$V^\perp = (0), \quad \bar{V}^\perp = (0), \quad \dim E/V = \dim \bar{E}/\bar{V} = 1 \quad (1)$$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Paare  $(E, V)$ ,  $(\bar{E}, \bar{V})$  *isomorph* nennen, falls es eine Isometrie  $T: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $T(V) = \bar{V}$  gibt. Ferner betrachten wir in diesem Abschnitt bloss Paare  $(E, V)$  mit *positiv definitem Raum*  $(V, \Phi)$ .

Unter einer Standardbasis eines solchen Paares  $(E, V)$  verstehen wir eine Basis  $\{e_0, e_i\}_{i \geq 1}$  von  $E$ , wobei  $(e_i)_{i \geq 1}$  eine orthonormierte Basis von  $V$  ist und  $e_0$  irgend ein Einheitsvektor, der nicht in  $V$  liegt, also  $\|e_0\| = 1$  und  $E = V \oplus k(e_0)$ ; es gibt immer unendlich viele Standardbasen. Für solche Basen definieren wir die „zugehörigen“  $\gamma_i$ :

$$\gamma_i = \Phi(e_0, e_i) \quad (i \geq 1) \quad (2)$$

und ihre Quadratsumme in  $\mathbf{R}$

$$s = \sum_1^\infty \gamma_i^2 \quad (3)$$

Falls die Summe divergent ist, schreiben wir  $s = \infty$ .

Es sei  $\mathbf{R}^*/k^{*2}$  die Faktorgruppe der multiplikativen Gruppe  $\mathbf{R}^*$  der von Null verschiedenen reellen Zahlen modulo Quadratfaktoren aus  $k^*$ . Zu dieser Gruppe von Quadratklassen fügen wir noch die Klassen  $[0] = 0 \cdot k^{*2}$  und  $[\infty] = \infty \cdot k^{*2}$  hinzu, die nur aus 0 respektive  $\infty$  bestehen sollen. (Das Rechnen mit  $\infty$  befolgt die üblichen Gesetze:  $a < \infty$  für alle  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \cdot \infty = \infty$  für alle  $a > 0$  und  $a \in \mathbf{R}$ , &c.) Die so erhaltene Menge aller Quadratklassen sei  $g_k, g_k = \mathbf{R}^*/k^{*2} \cup \{[0], [\infty]\}$ . Wir können dann den folgenden Satz beweisen:

**SATZ 1.** *Sei  $\{e_0, e_i\}_{i \geq 1}$  eine Standardbasis des Paares  $(E, V)$ .  $s$  sei die in (2), (3) definierte Grösse (also  $s = \infty$  oder  $s \in \mathbf{R}$ ). Dann ist die Quadratklasse  $[s-1] = (s-1)k^{*2}$  von  $s-1$  eine Invariante des Paares  $(E, V)$ , d.h. sie ist unabhängig von der speziellen Wahl der Standardbasis.*

**KOROLLAR.** *Falls  $(E, V)$  und  $(\bar{E}, \bar{V})$  isomorph sind, dann ist  $[s-1] = [\bar{s}-1]$ .*

**Beweis.** Es seien  $B = \{e_0, e_i\}_{i \geq 1}$  und  $\bar{B} = \{\bar{e}_0, \bar{e}_i\}_{i \geq 1}$  zwei Standardbasen von  $(E, V)$ . Wir betrachten noch die Standardbasis  $B^* = \{e_0, \bar{e}_i\}_{i \geq 1}$ .  $s, \bar{s}, s^*, \gamma_i, \bar{\gamma}_i$  und  $\gamma_i^*$  seien die entsprechenden, gemäss (2) und (3) eingeführten Grössen. Wir betrachten zunächst den Basiswechsel  $B \rightarrow B^*$ . Es gibt eine zeilenfinite invertierbare Matrix  $(\alpha_{ij})$  mit  $\bar{e}_i = \sum \alpha_{ij} e_j$ , ( $i \geq 1$ ). Ferner ist  $\gamma_i^* = \Phi(e_0, \bar{e}_i) = \Phi(e_0, \sum \alpha_{ij} e_j) = \sum \alpha_{ij} \gamma_j$ . Da  $(e_i)_{i \geq 1}, (\bar{e}_i)_{i \geq 1}$  orthonormierte Basen sind, ist  $(\alpha_{ij})$  eine gewöhnliche orthogonale Matrix und definiert einen orthogonalen Automorphismus  $A$  im gewöhnlichen Hilbertschen Folgenraum. Ist also  $s \neq \infty$ , dann ist  $(\gamma_i)_{i \geq 1}$  ein Vektor dieses Hilbertraumes und die Norm seines Bildes unter  $A$  ist gerade  $\sum \gamma_i^{*2} = s^*$ , also ist  $s = s^*$ . Mit demselben Argument folgt natürlich, dass  $s^* = \infty$  falls  $s = \infty$  ist. Also gilt beim Übergang  $B \rightarrow B^*$

sogar  $s=s^*$ . Es bleibt der Übergang  $B^* \rightarrow \bar{B}$  zu diskutieren. Für eine geeignete natürliche Zahl  $N$  gilt

$$\bar{e}_0 = \lambda_0 e_0 + \sum_1^N \lambda_i \bar{e}_i \quad (\lambda_0 \neq 0) \quad (4)$$

Also, da alle Vektoren Einheitsvektoren sind

$$\|\bar{e}_0\| = 1 = \lambda_0^2 + \sum \lambda_i^2 + 2\lambda_0 \sum \lambda_i \gamma_i^* \quad (5)$$

Nach (4) ist

$$\bar{\gamma}_j = \Phi(\bar{e}_0, \bar{e}_j) = \lambda_0 \Phi(e_0, \bar{e}_j) + \sum \lambda_i \Phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \lambda_0 \gamma_j^* + \lambda_j$$

also folgt wegen (5), dass  $\sum_1^N \bar{\gamma}_j^2 = \sum (\lambda_0 \gamma_j^* + \lambda_j)^2 = \lambda_0^2 \sum_1^N \gamma_j^{*2} + 1 - \lambda_0^2$  ist. Schliesslich ist für alle  $j > N$  nach (4)  $\bar{\gamma}_j = \Phi(\bar{e}_0, \bar{e}_j) = \lambda_0 \gamma_j^*$ . Ist also  $s^* = \infty$  dann auch  $\bar{s} = \infty$ . Andernfalls ergibt unsere Rechnung  $\bar{s} = \sum_1^N \bar{\gamma}_j^2 + \sum_{N+1}^\infty \bar{\gamma}_j^2 = \lambda_0^2 \sum_1^\infty \gamma_j^{*2} + 1 - \lambda_0^2 = \lambda_0^2 s^* + 1 - \lambda_0^2$ . Somit ist  $\bar{s} - 1 = \lambda_0^2 (s^* - 1)$  und daher  $(s-1)k^{*2} = (s^* - 1)k^{*2}$ . Damit ist Satz 1 bewiesen. Das Korollar ist eine unmittelbare Folge, denn bei einer Isomorphie der Paare gehen Standardbasen in Standardbasen über.

Die Invariante  $[s-1] = (s-1)k^{*2}$  lässt sich auch geometrisch deuten. Es sei  $K$  die Einheitskugel von  $V$ ,  $K = \{x \in V; \|x\| = 1\}$ . Ist  $e_0$  irgend ein Einheitsvektor mit  $E = V \oplus k(e_0)$ , so betrachten wir den „Winkel“  $\Phi(e_0, x)$  zwischen  $e_0$  und den Vektoren  $x$  auf  $K$ , oder bequemer, dessen Quadrat  $\Phi^2(e_0, x)$ . Ist z.B. stets  $\Phi^2(e_0, x) < 1$  auf  $K$ , so heisst das, dass  $(E, \Phi)$  definit ist; umgekehrt ist  $(E, \Phi)$  indefinit, falls  $\Phi^2(e_0, x)$  auf  $K$  nicht durch 1 beschränkt ist. Man überzeugt sich ohne Mühe, dass die Invariante  $[s-1]$  des Paares  $(E, V)$  gerade durch das Supremum in  $\mathbf{R}$  von  $\Phi^2(e_0, x)$  auf  $K$  definiert wird; genauer, es ist einfach  $[s-1] = [\sup_{x \in K} \Phi^2(e_0, x) - 1]$  (wobei für das Supremum  $\infty$  gesetzt wird, falls  $\Phi^2(e_0, x)$  auf  $K$  nicht beschränkt ist).

Die Nützlichkeit der Invarianten  $[s-1]$  besteht in dem folgenden

**SATZ 2.** Sind  $(E, V)$ ,  $(\bar{E}, \bar{V})$  zwei Paare mit gleichen Invarianten  $[s-1]$ ,  $[\bar{s}-1]$ , dann sind sie isomorph.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass man in  $(E, V)$  oder  $(\bar{E}, \bar{V})$  Standardbasen so einführen kann, dass  $s = \bar{s}$  ist. Ist  $s = 1$  oder  $s = \infty$  so ist wegen  $[s-1] = [\bar{s}-1]$  auch  $s = \bar{s}$  für irgendwelche Standardbasen. Es mögen diese Fälle nicht vorliegen und es sei etwa  $\bar{s} < s$ . Es ist also  $\bar{s} - 1 = \lambda_0^2 (s - 1)$  für ein  $\lambda_0 \in k^*$  und  $0 < \lambda < 1$ . Nach Voraussetzung über unsere Körper  $k$  gibt es  $m$  Körperelemente  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  mit  $\sum_1^m \lambda_i^2 = 1 - \lambda_0^2$ . Wählen wir daher im Raume  $e_0^\perp \cap V$   $m$  orthonormierte Vektoren  $e_1^*, \dots, e_m^*$  und setzen  $e^* = \lambda_0 e_0 + \sum_1^m \lambda_i e_i^*$  so gilt  $\|e^*\| = 1$ . Die Vektoren  $e_1^*, \dots, e_m^*$  können ferner zu einer ortho-

normierten Basis von  $V$  ergänzt werden,  $V = k(e_i^*)_{i \geq 1}$ . Für die Standardbasis  $\{e_0^*, e_i^*\}_{i \geq 1}$  gilt dann  $s^* - 1 = \lambda_0^2(s - 1)$  nach dem Beweis von Satz 1. Also hat man jetzt  $s^* - 1 = s - 1$ ,  $s^* = s$ .

Wir wollen also im Folgenden annehmen, dass  $s = \bar{s}$  ist für zwei festgewählte Basen  $(e_i)_{i \geq 1}$ ,  $(\bar{e}_i)_{i \geq 1}$  von  $V$  und  $\bar{V}$  respektive. Die gesuchte Isometrie  $T: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $T(V) = \bar{V}$  wird dann folgendermassen konstruiert. Wir nehmen an, wir hätten bereits endlichdimensionale Teilräume  $V_r \subset V$ ,  $\bar{V}_r \subset \bar{V}$  konstruiert mit den Eigenschaften: (i) *Es gibt eine Isometrie  $T_r: k(e_0) \oplus V_r \rightarrow k(\bar{e}_0) \oplus \bar{V}_r$  mit  $T_r e_0 = \bar{e}_0$  und  $T_r(V_r) = \bar{V}_r$* , (ii)  $V_r$  und  $\bar{V}_r$  werden von orthonormierten Basen aufgespannt.

Ist  $e_n$  der erste Basisvektor mit  $e_n \notin V_r$ , so soll in  $V_r^\perp \cap V$  ein endlichdimensionaler Raum  $W$  bestimmt werden, der von einer orthonormierten Basis aufgespannt wird und derart, dass  $e_n \in V_r \oplus W$  ist. Ferner soll dann in  $\bar{V}_r^\perp \cap \bar{V}$  ein Raum  $\bar{W}$  konstruiert werden, der gleiche Dimension hat wie  $W$ , ebenfalls von einer Orthogonalbasis aufgespannt wird und derart, dass sogar  $\bar{\Phi}(\bar{e}_0, \bar{w}_i) = \Phi(e_0, w_i)$  ist für alle Vektoren zweier geeigneter orthonormierter Basen  $(w_i)_i$  und  $(\bar{w}_i)_i$  von  $W$  und  $\bar{W}$  respektive. Folgendes ist dann klar:  $T_r$  kann zu einer Isometrie  $k(e_0) \oplus (V_r \oplus W) \rightarrow k(\bar{e}_0) \oplus (\bar{V}_r \oplus \bar{W})$  erweitert werden, indem man einfach  $w_i$  auf  $\bar{w}_i$  abbildet für alle  $i$ . Setzt man also  $V_{r+1} = V_r \oplus W$ ,  $\bar{V}_{r+1} = \bar{V}_r \oplus \bar{W}$ , so sind die Voraussetzungen (i), (ii) für  $r+1$  anstelle von  $r$  wieder erfüllt. Zudem enthält  $V_{r+1}$  einen vorgeschriebenen Basisvektor mehr als  $V_r$ . Alterniert man zwischen den Rollen von  $V_r$  und  $\bar{V}_r$ , so erhält man zwei Folgen geschachtelter Räume  $V_r$  und  $\bar{V}_r$  mit  $V \subset \bigcup V_r$  sowohl als auch  $\bar{V} \subset \bigcup \bar{V}_r$ . Es ist dann  $V = \bigcup V_r$  und  $\bar{V} = \bigcup \bar{V}_r$ ; ferner ist klar, dass man durch das schrittweise Erweitern von  $T_r$  eine Isometrie  $T: E \rightarrow E$  konstruiert hat mit  $T(V) = \bar{V}$ .

Es bleibt also noch zu zeigen, wie man die Räume  $W$  und  $\bar{W}$  konstruiert. Da  $V = V_r \oplus V_r^\perp$  ist, können wir  $e_n$  entsprechend in Komponenten zerlegen,  $e_n = e'_n + e''_n$ ,  $e'_n \in V_r$ ,  $e''_n \in V_r^\perp$ . Nach der am Schlusse der Einleitung gemachten Bemerkung gibt es in  $V_r$  einen  $m$ -dimensionalen Raum  $W$ , aufgespannt von einer orthonormierten Basis  $w_1, \dots, w_m$  mit  $e''_n \in W$ . Also ist  $e_n \in V_r \oplus W$ . Jetzt ist folgende Aufgabe zu lösen: In  $\bar{V}_r^\perp$  suche man  $m$  orthonormierte Vektoren  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$  derart, dass

$$\bar{\Phi}(\bar{e}_0, \bar{w}_i) = \Phi(e_0, w_i) \quad (1 \leq i \leq m) \quad (6)$$

gilt. Nehmen wir an, wir hätten solche Vektoren  $\bar{w}_i$  mit der Eigenschaft (6) bereits gefunden für alle  $i < t \leq m$ . Der Fall, dass man noch gar keine  $\bar{w}_i$  gefunden hat ist dabei eingeschlossen. Wir zeigen, wie man dann  $\bar{w}_t$  findet. In  $V_r^\perp$  und  $\bar{V}_r^\perp$  wählen wir orthonormierte Basen  $(v_i)_{i \geq 1}$ ,  $(\bar{v}_i)_{i \geq 1}$ , wobei  $v_i = w_i$  ( $i \leq m$ ) und  $\bar{v}_i = \bar{w}_i$  ( $i < t$ ) sein soll. Wegen (ii) können diese beiden Basen zu orthonormierten Basen  $B'$ ,  $\bar{B}'$  von  $V$  und  $\bar{V}$  ergänzt werden durch Voranstellen orthonormierter Basen von  $V_r$  respektive  $\bar{V}_r$ . Da nun nach der eingangs vorgenommenen Normierung  $s = \bar{s}$  ist,  $s$  und  $\bar{s}$  aber nicht von den in  $V$ ,  $\bar{V}$  gewählten Orthogonalbasen abhängig sind (nach dem Beweise von Satz 1),

folgt  $\sum_1^\infty \gamma_i'^2 = \sum_1^\infty \bar{\gamma}_i'^2$  für die soeben eingeführten Basen  $B'$ ,  $\bar{B}'$  von  $V$  und  $\bar{V}$ . Wegen (i) kann man in diesen Summen zunächst die ersten  $\dim V$  Glieder wegekürzen; wegen unserer Voraussetzung über die  $\bar{w}_i$  mit  $i < t$  können auch noch in jeder Summe die endlich vielen Glieder vor den Gliedern  $\Phi^2(e_0, v_t)$  respektive  $\bar{\Phi}^2(\bar{e}_0, \bar{v}_t)$  gekürzt werden. Es bleibt die Gleichung

$$\sum_t^\infty \Phi^2(e_0, v_t) = \sum_t^\infty \bar{\Phi}^2(\bar{e}_0, \bar{v}_t) \quad (7)$$

Wegen  $V^\perp = (0)$  sind in der Summe  $\sum_t^\infty \Phi^2(e_0, v_t)$  unendlich viele Glieder von Null verschieden. Daher folgt aus (7), dass es eine natürliche Zahl  $N$  gibt mit  $s_N = \sum_t^{t+N} \bar{\Phi}^2(\bar{e}_0, \bar{v}_t) > \Phi^2(e_0, v_t)$ . Wir setzen  $x = \Phi(e_0, v_t) \cdot s_N^{-1} \cdot \sum_t^{t+N} \bar{\Phi}(\bar{e}_0, \bar{v}_t) \bar{v}_t$ . Es ist dann  $\bar{\Phi}(\bar{e}_0, x) = \Phi(e_0, v_t)$ ; ferner ist  $\|x\| = \Phi^2(e_0, v_t) \cdot s_N^{-2} \cdot s_N < 1$ . In dem unendlichdimensionalen Raume  $\bar{V} \cap [\bar{V}_r \oplus k(\bar{e}_0) \oplus k(\bar{w}_i)_{i < t} \oplus k(x)]^\perp$  gibt es dann einen Vektor  $y$  mit  $\|y\| = 1 - \|x\| > 0$ . (Da  $\alpha = 1 - \|x\| > 0$  ist, ist  $\alpha$  jedenfalls Summe von  $m$  Quadraten in  $k$ , also enthält schon jeder  $m^2$ -dimensionale positiv definite Raum einen Vektor  $y$  der Länge  $\|y\| = \alpha$ .)  $\bar{w}_t = x + y$  ist der gesuchte Vektor. Durch  $m$ -maliges Wiederholen dieses Schrittes findet man in  $\bar{V}_r^\perp$   $m$  orthonormierte Vektoren  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$  mit der Eigenschaft (6). Wir setzen  $\bar{W} = k(\bar{w}_i)_{i \leq m}$ . Damit ist die Konstruktion der Räume  $W$ ,  $\bar{W}$ , und damit der Beweis von Satz 2 beendet.

## II. Verallgemeinerung der Invarianten

Es sei jetzt  $(E, \Phi)$  von beliebigem Trägheitsindex der Art  $(\aleph_0, -n)$ ,  $-n$  endlich. Wir sagen auch  $(E, \Phi)$  sei von endlichem negativem Index. Es sei wieder  $V$  ein Teilraum von  $E$  mit  $V^\perp = (0)$  und  $\dim E/V = 1$ . Da  $E$  von endlichem negativem Index ist, ist es auch der Teilraum  $(V, \Phi)$ . In diesem Abschnitt betrachten wir Zerlegungen von  $V$  des folgenden Typs: Es sei  $V = {}_+V \oplus {}_-V$  irgend eine orthogonale Zerlegung von  $V$  in einen positiv definiten Raum  $({}_+V, \Phi)$  und einen negativ definiten Raum  $({}_-_V, \Phi)$ , beide Räume  ${}_+V$  und  ${}_-_V$  aufgespannt von  $\pm 1$ -orthonormierten Basen  $(v_i)$  und  $(^-v_i)$  respektive. Eindeutig bestimmt sind dabei bloss die Dimensionen  $\dim {}_+V = \aleph_0$  und  $\dim {}_-V = n$ . Wir sprechen kurz von der Zerlegung  $(Z)$ ,

$$V = {}_+V \oplus {}_-V, \quad {}_+V = k(v_i)_{i \geq 1}, \quad {}_-V = k(^-v_i)_{i \leq n} \quad (Z)$$

Zu der Zerlegung  $(Z)$  wählen wir noch irgend einen Vektor  $e_0$  mit

$$E = V \oplus k(e_0), \quad e_0 \perp {}_-V, \quad \|e_0\| = 1. \quad (8)$$

Solche  $e_0$  gibt es immer unendlich viele. Wir definieren

$$\gamma_i = \Phi(e_0, v_i), \quad s = \sum_1^\infty \gamma_i^2; \quad (9)$$

$s$  ist also nichts anderes als die früher definierte Invariante des Paares  $({}_+V \oplus k(e_0), {}_+V)$ , genauer, invariant war dabei bloss die Quadratklasse  $[s-1] = (s-1)k^{*2}$ . Wir behaupten, dass diese Quadratklasse sogar eine Invariante des Paares  $(E, V)$  ist:

**SATZ 3.** *Sei  $s$  die durch (Z), (8) und (9) definierte Grösse (also  $s = \infty$  oder  $s \in \mathbf{R}$ ). Die Quadratklasse  $[s-1] = (s-1)k^{*2}$  hängt nicht von der speziellen Wahl der Zerlegung (Z), der speziellen Wahl der Basen in (Z) noch von der speziellen Wahl von  $e_0$  in (8) ab.*

**KOROLLAR.** *Sind  $(E, V), (\bar{E}, \bar{V})$  isomorph,  $(E, \Phi)$  und  $(\bar{E}, \bar{\Phi})$  von endlichem negativem Index, dann gilt  $[s-1] = [\bar{s}-1]$ .*

*Beweis.* Basen  $(v_i)$  und  $(\bar{v}_i)$  einer Zerlegung (Z), zusammen mit einem Vektor  $e_0$  der Eigenschaft (8) wollen wir kurz eine Standardzerlegung nennen, auf die wir mit „ $\langle Z, e_0 \rangle$ “ hinweisen. Es sei also  $\langle Z, \bar{e}_0 \rangle$  eine zweite Standardzerlegung,

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= {}_+\bar{V} \oplus {}_-\bar{V}, & {}_+\bar{V} &= k(\bar{v}_i)_{i \geq 1}, & {}_-\bar{V} &= k(\bar{v}_i)_{i \leq n} \\ E &= \bar{V} \oplus k(\bar{e}_0), & \bar{e}_0 &\perp {}_-\bar{V}, & \|\bar{e}_0\| &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (Z)$$

Sie definiert gemäss (9) eine Grösse  $\bar{s}$  und es ist zu zeigen, dass  $(\bar{s}-1)k^{*2} = (s-1)k^{*2}$  gilt. Zu diesem Ende schieben wir eine Standardzerlegung  $\langle Z^*, e_0^* \rangle$  dazwischen, derart, dass  $(s-1)k^{*2} = (s^*-1)k^{*2}$  und  $s^* = \bar{s}$  gilt. Eine Zerlegung  $\langle Z^*, e_0^* \rangle$  mit dieser Eigenschaft findet man wie folgt:

Da  ${}_-\bar{V}$  endlich dimensional ist, gibt es eine natürliche Zahl  $N$  derart, dass  ${}_-\bar{V} \subset {}_-V \oplus k(v_i)_{1 \leq i \leq N}$  und  $\bar{e}_0 \in {}_-V \oplus k(v_i)_{1 \leq i \leq N} \oplus k(e_0)$  ist. Es sei  $K$  der Orthogonalraum zu  ${}_-\bar{V}$  in  ${}_-_V \oplus k(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ , also

$$K \oplus {}_-\bar{V} = k(v_i)_{1 \leq i \leq N} \oplus {}_-V. \quad (10)$$

Aus  $V = k(v_i)_{i > N} \oplus (k(v_i)_{i \leq N} \oplus {}_-V) = k(v_i)_{i > N} \oplus (K \oplus {}_-\bar{V})$  folgt daher, dass

$$k(v_i)_{i > N} \oplus K = {}_+\bar{V} \quad (11)$$

ist. Wegen  ${}_-_V \cong {}_-\bar{V}$  und (10) ergibt sich aus dem Wittschen Satz (für endlich dimensionale Räume) insbesondere, dass  $K$  eine orthonormierte Basis  $(z_i)_{1 \leq i \leq N}$  besitzt. Die Abbildung definiert durch  $\bar{v}_i \rightarrow \bar{v}_i, v_j \rightarrow z_j$  ( $1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq N$ ) ist eine Isometrie  $A$ . Für jedes  $N+n$ -Tupel  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$  von Körperelementen, das mit Hilfe der Matrix von  $A$  (bezüglich der beiden Basen) transformiert wird, bleibt  $\sum_1^N \alpha_i^2 - \sum_1^n \beta_i^2$

invariant. Insbesondere gilt

$$\sum_1^N \Phi^2(e_0, v_j) - \sum_1^n 0^2 = \sum_1^N \Phi^2(e_0, z_j) - \sum_1^n \Phi^2(e_0, \bar{v}_i) \quad (12)$$

Wegen unserer Wahl von  $N$  hat man eine Darstellung

$$e_0 = \lambda_0 \bar{e}_0 + \sum_1^N \lambda_i z_i + \sum_1^n \mu_i \bar{v}_i, \quad (\lambda_0 \neq 0) \quad (13)$$

Insbesondere ist

$$\|e_0\| = 1 = \lambda_0^2 + \sum_1^N \lambda_i^2 - \sum_1^n \mu_i^2 + 2\lambda_0 \sum_1^N \lambda_i \Phi(\bar{e}_0, z_i) \quad (14)$$

Setzt man für  $e_0$  in (12) die Darstellung (13) ein, so erhält man

$$\sum_1^N \Phi^2(e_0, v_j) = \lambda_0^2 \sum_1^N \Phi^2(\bar{e}_0, z_i) + 1 - \lambda_0^2 \quad (15)$$

Ferner ist wegen (13)

$$\sum_{N+1}^\infty \Phi^2(e_0, v_j) = \lambda_0^2 \sum_{N+1}^\infty \Phi^2(\bar{e}_0, v_i) \quad (16)$$

Wir definieren also die Zerlegung  $\langle Z^*, e_0^* \rangle$  folgendermassen

$$\left. \begin{aligned} e_0^* &= \bar{e}_0, \quad {}_+V^* = {}_+\bar{V} \text{ und } v_i^* = z_i \text{ für } 1 \leq i \leq N, \quad v_i^* = v_i \text{ für } i > N \\ {}_-V^* &= {}_-\bar{V} \text{ und } {}_-v_i^* = {}_-\bar{v}_i \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned} \right\} \quad (Z^*)$$

Durch Addition von (15) und (16) erhalten wir  $s = \lambda_0^2 s^* + 1 - \lambda_0^2$ , also  $s - 1 = \lambda_0^2 (s^* - 1)$ . (Der Fall  $s = \infty$  ist miteingeschlossen.)

Um schliesslich von  $\langle Z^*, e_0^* \rangle$  zu  $\langle Z, \bar{e}_0 \rangle$  zu gelangen, hat man lediglich in  ${}_+V^* = {}_+\bar{V}$  die Basistransformation  $(v_i^*) \rightarrow (\bar{v}_i)$  durchzuführen. Dass dabei sogar  $s^* = \bar{s}$  ist, haben wir schon im Beweise von Satz 1 gesehen. Damit ist Satz 3 bewiesen.

### III. Beliebige Unterräume der Kodimension 1

Unsere verschiedenen Teilbetrachtungen können jetzt in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

**SATZ 4.**  *$k$  sei ein Teilkörper des reellen Zahlkörpers,  $k \subset \mathbf{R}$ , mit der Eigenschaft, dass es eine natürliche Zahl  $m$  gibt derart, dass jede nicht ausgeartete Form über  $k$  in  $m$  Variablen  $+1$  oder  $-1$  (oder beide) darstellt.*

*$(E, \Phi)$  und  $(\bar{E}, \bar{\Phi})$  seien halbeinfache isometrische  $k$ -Räume abzählbarer (algebraischer) Dimension.  $V$  und  $\bar{V}$  seien isometrische Unterräume der Kodimensionen 1 in  $E$  respektive  $\bar{E}$ .*

*Dann gibt es eine Isometrie  $T_0: V \rightarrow \bar{V}$ , die sich zu einer Isometrie  $T: E \rightarrow E$  erweitern*

lässt, dann und nur dann, wenn einer der folgenden vier sich gegenseitig ausschliessenden Fälle vorliegt.

- (i)  $V^\perp \neq (0)$ ,  $V^\perp \subset V$
- (ii)  $V^\perp \neq (0)$ ,  $V^\perp \not\subset V$ ,  $V^\perp \cong \bar{V}^\perp$
- (iii)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  ist vom Index  $(\aleph_0, \aleph_0)$
- (iv)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  ist vom Index  $(\aleph_0, -n)$  wo  $-n$  endlich ist, die Quadratklassen  $(s-1)k^{*2}$  und  $(\bar{s}-1)k^{*2}$  sind gleich. (Um  $s$  zu erhalten zerlege man  $V$  in irgend einer Weise in eine orthogonale Summe  $V = {}_+V \oplus {}_-V$  mit positiv definitem  ${}_+V$ , negativ definitem  ${}_ -V$ , beide Räume  ${}_+V$ ,  ${}_ -V$  aufgespannt von  $\pm 1$ -orthonormierten Basen. Man wähle einen Einheitsvektor  $v_0$  von  $E$  mit  $v_0 \notin V$ ,  $v_0 \perp {}_-V$  und definiere mit irgend einer orthonormierten Basis  $(v_i)_{i \geq 1}$  von  ${}_+V$  die Summe  $s = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^2(v_0, v_i)$ . Es ist  $s = \infty$  oder  $s \in \mathbf{R}$ )
- (v)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  ist vom Index  $({}_+n, \aleph_0)$  wo  ${}_+n$  endlich ist. Die Teilräume  $(V, -\Phi)$ ,  $(\bar{V}, -\bar{\Phi})$  von  $(E, -\Phi)$  respektive  $(\bar{E}, -\bar{\Phi})$  haben dieselben in (iv) definierten Quadratklassen.

*Beweis.* Die vier Fälle schliessen sich gegenseitig aus; umgekehrt fällt jedes Paar  $(E, V)$  unter einen der fünf Fälle:

(i)  $V^\perp \neq (0)$ ,  $V^\perp \subset V$ , (ii)  $V^\perp \neq (0)$ ,  $V^\perp \not\subset V$ , (iii)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  vom Index  $(\aleph_0, \aleph_0)$ , (iv)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  vom Index  $(\aleph_0, n)$ , (v)  $V^\perp = (0)$ ,  $\Phi$  vom Index  $(n, \aleph_0)$ . Es bleibt also zu zeigen, dass die in jedem Fall zusätzlich angegebenen Bedingungen notwendig und hinreichend sind für die Existenz einer Isometrie der gewünschten Art. Zu (i). Es sei  $V_0$  ein algebraisches Komplement von  $V^\perp$  in  $V$ ,  $(v_i)_{i \geq 1}$  sei irgend eine feste Orthogonalbasis von  $V_0$ . Ferner sei  $V^\perp = k(v)$ . Da  $V$  isotrop ist, besitzt  $E$  eine Basis aus isotropen Vektoren, also gibt es ein isotropes  $e \in E$  mit  $E = V \oplus k(e)$ . Da  $E$  halbeinfach ist, ist  $\Phi(v, e) \neq 0$ . Ersetzt man also  $v$  durch ein Vielfaches falls notwendig, so darf man voraussetzen, dass  $\Phi(v, e) = 1$  ist. Schliesslich setzen wir noch  $v'_i = v_i - \Phi(v_i, e)v$  und  $V'_0 = k(v'_i)_{i \geq 1}$ . Nach diesen Normierungen hat man  $V = V'_0 \oplus k(v)$ ,  $E = V'_0 \oplus k(v, e)$  und  $\Phi(v'_i, v'_j) = \Phi(v_i, v_j)$ . Nun ist wegen  $V \cong \bar{V}$  auch  $V \cap V^\perp \cong \bar{V} \cap \bar{V}^\perp$  und  $\bar{V}$  fällt daher ebenfalls unter (i). Man hat eine entsprechende Zerlegung  $\bar{V} = \bar{V}_0 \oplus \bar{V}^\perp$ . Bei einem Isomorphismus  $T_0: V \rightarrow \bar{V}$  wird  $V^\perp$  auf  $\bar{V}^\perp$  abgebildet und man kann  $\bar{V}_0 = T_0(V_0)$  und  $\bar{v}_i = T(v_i)$  annehmen,  $(\bar{v}_i)$  eine Orthogonalbasis von  $\bar{V}_0$ . Schliesslich seien  $\bar{v}$  und  $\bar{e}$  analoge Objekte zu den oben betrachteten,  $\|\bar{e}\| = 0$  und  $\Phi(\bar{v}, \bar{e}) = 1$ . Die lineare Abbildung definiert durch  $e \rightarrow \bar{e}$ ,  $v \rightarrow \bar{v}$ ,  $v'_i \rightarrow \bar{v}_i - \Phi(\bar{v}_i, \bar{e})\bar{v}$  ist eine Isometrie  $T: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $T(V) = \bar{V}$ .

Zu (ii). In diesem Falle ist  $V \oplus V^\perp = E$ , also  $V^\perp = k(v)$  nicht total isotrop. Ist daher zusätzlich  $\bar{V}^\perp \cong V^\perp$ , dann ist auch  $V^\perp$  nicht total isotrop, also  $\bar{V}^\perp \not\subset \bar{V}$  und daher auch  $\bar{V} \oplus \bar{V}^\perp = E$ , da  $E$  halbeinfach und  $\dim \bar{E}/\bar{V} = 1$  ist. Es ist jetzt klar, dass es eine Isometrie der gewünschten Art gibt. Ist umgekehrt  $T(V) = \bar{V}$  für eine Isometrie  $T: E \rightarrow \bar{E}$ , so ist natürlich  $T(V^\perp) = \bar{V}^\perp$ , also  $V^\perp \cong \bar{V}^\perp$ .

Zu (iii). Wir zitieren das Scholion in [1] pag. 159.

Zu (iv). Die eine Hälfte der Behauptung liefert das Korollar zu Satz 3. Es sei also umgekehrt  $(s-1)k^{*2} = (\bar{s}-1)k^{*2}$  vorausgesetzt für die beiden Räume  $V \subset E$ ,  $\bar{V} \subset \bar{E}$ . Wir haben eine Isometrie  $T: E \rightarrow \bar{E}$  mit  $T(V) = \bar{V}$  anzugeben. Jedenfalls gibt es Zerlegungen von der Art

$$E = {}_+V \oplus {}_-V \oplus k(e), \quad V = {}_+V \overset{\perp}{\oplus} {}_-V, \quad e \perp {}_-V, \quad \|e\| = 1$$

und eine entsprechende Zerlegung des Paares  $(\bar{E}, \bar{V})$ , wobei  ${}_ -V$  und  ${}_ -\bar{V}$  von einer  $-1$ -orthonormierten Basis aufgespannt werden. Aus  $V \cong \bar{V}$  folgt  $\dim {}_-V = \dim {}_- \bar{V}$ , also ist  ${}_ -V \cong {}_- \bar{V}$ . Da diese Räume senkrecht zu den algebraischen Komplementen  ${}_+V \oplus k(e)$  respektive  ${}_+ \bar{V} \oplus k(\bar{e})$  stehen, ist es für die Existenz des gesuchten  $T$  hinreichend, eine Isometrie  $T_0: {}_+V \oplus k(e) \rightarrow {}_+V \oplus k(\bar{e})$  anzugeben mit  $T_0({}_+V) = {}_+ \bar{V}$ . Aufgrund der Voraussetzung  $(s-1)k^{*2} = (\bar{s}-1)k^{*2}$  können wir Satz 2 zitieren.

Zu (v). Es ist klar, dass sich durch Übergang zu der entgegengesetzten Form dieser Fall auf den vorangehenden zurückführen lässt. Damit ist der Beweis von Satz 4 vollständig.

#### LITERATUR

- [1] GROSS, H., *On Witt's Theorem in the Denumerably Infinite Case*, Math. Ann. 170 (1967), 145–165.
- [2] KAPLANSKY, I., *Forms in Infinite Dimensional Spaces*, Ann. Acad. Bras. Ci 22 (1950), 1–17.
- [3] LANG, S., *On Quasi Algebraic Closure*, Ann. of Math. 55 (1952), 373–390.
- [4] NAGATA, T., *Note on a Paper of Lang Concerning Quasi Algebraic Closure*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto [Ser. A. Math] 30 (1957), 237–241.

Eingegangen den 18. Januar 1968