

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	43 (1968)
Artikel:	Zur Eindeutigkeit konformer Abbildungen von Gebieten unendlichen Zusammenhangs.
Autor:	Meier-Solfrian, W.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-32925

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Eindeutigkeit konformer Abbildungen von Gebieten unendlichen Zusammenhangs

von W. MEIER-SOLFRIAN in Zürich.

Einleitung

In der Theorie der konformen Abbildungen betrachtet man verschiedene Klassen von Normalgebieten¹⁾ und fragt nach Existenz und Eindeutigkeit einer 1 – 1-konformen Abbildung eines beliebigen Gebietes auf ein Normalgebiet einer Klasse. In vorliegender Arbeit wenden wir uns der Eindeutigkeitsfrage zu und verweisen für die Existenz auf die Arbeiten von GRÖTZSCH [4], JENKINS [8], COURANT [3] und STREBEL [14].

Für Kreisgebiete²⁾ endlichen Zusammenhangs beweist KOEBE [10] Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe eines iterierenden Verfahrens. Eine von CARLEMAN [2] und SHIFFMAN [12] erstmals verwendete Beweisführung von Eindeutigkeitssätzen hat sich als sehr erweiterungsfähig erwiesen. Die Methode ist kurz die folgende:

Seien f_1 und f_2 zwei 1 – 1-konforme Abbildungen eines Gebietes auf zwei Normalgebiete G bzw. H derselben Klasse. Man behauptet: Bei gegebener Normierung von f_1 und f_2 ist $h=f_2 \circ f_1^{-1} : G \rightarrow H$ die Identität, d.h. $g=h-\text{id}=0$. Mit der Antithese $g \neq 0$ wird zufolge der Normierung g auch nicht konstant. Die Berechnung des Argumentenzwachses von $g(z)$ längs des Randes von G führt zu einem Widerspruch zum Argumentenprinzip.

GRÖTZSCH [5] erweitert die Methode, indem er kleine Verschiebungen des Bildgebietes einführt, und er sowie COURANT [3] beweisen Eindeutigkeitssätze von Abbildungen auf Normalgebiete endlichen Zusammenhangs mit konvexen Randkurven. STREBEL [13] beweist mit dieser erweiterten Methode zwei Eindeutigkeitssätze des Kreisnormierungsproblems für Gebiete mit höchstens abzählbar vielen Randkomponenten. Beide Sätze enthalten zusätzliche Voraussetzungen an die durch die konforme Abbildung induzierte Zuordnung der Randpunkte.

Mit Hilfe derselben Methode beweisen wir unter Verwendung der Untersuchungen über die Ränderzuordnungen bei 1 – 1-konformen Abbildungen (§ 2) und zweier topologischer Hilfssätze (§ 3) zwei Eindeutigkeitssätze (Sätze 3 und 4), welche die genannten Eindeutigkeitssätze in folgendem Sinne erweitern:

¹⁾ Eine allgemeine Definition von Normalgebieten gibt COURANT [3].

²⁾ Das sind Gebiete, die von Kreisen und Punkten berandet sind; man spricht dann oft vom sog. Kreisnormierungsproblem.

a) Wir betrachten Normalgebiete mit konvexen Randkurven (die auch punktförmig sein können) und lassen auch überabzählbar viele Randkomponenten zu, (Voraussetzungen (C) und (D) in § 4).

b) Die Voraussetzungen an die induzierte Zuordnung der Randpunkte sind allgemeiner, (Eigenschaft (A₀) in § 2, Voraussetzung (A) in § 4).

So umfasst das Korollar zu Satz 3 die Aussagen beider Eindeutigkeitssätze für Kreisgebiete von STREBEL [13]. Der Satz 4 erweitert einen Eindeutigkeitssatz von COURANT [3] für endlichen Zusammenhang auf den Fall von überabzählbar vielen Randkomponenten.

In § 1 beweisen wir einen Satz über analytische Fortsetzbarkeit, welcher folgenden Eindeutigkeitssatz als Korollar liefert:

Ein Kreisgebiet mit lauter punktförmigen Randkomponenten, welche auf einer abzählbaren Menge von paarweise disjunkten, abgeschlossenen und rektifizierbaren Jordanbogen liegen, lässt sich nur durch eine lineare Transformation auf ein anderes Kreisgebiet konform abbilden.

Bezeichnungen und Begriffe

Die Menge der Randkomponenten eines Gebietes G bezeichnen wir mit Γ und deren Elementen mit C . Die Menge Γ ist mit der üblichen metrischen Topologie versehen (siehe z.B. [13]). Mit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ bezeichnen wir den perfekten Kern von Γ ; er ist definiert als Durchschnitt aller Ableitungen Γ^α von Γ . Der perfekte Kern Γ_0 ist dann und nur dann leer, wenn Γ höchstens abzählbar ist. Dann gibt es Ordnungszahlen, deren zugehörige Ableitungen verschwinden und somit eine kleinste, etwa β , mit $\Gamma^\beta = \emptyset$. Zu dem ist β keine Limeszahl (Beweis in [13]), d.h. es gibt eine Zahl $\beta' = \beta - 1$, deren zugehörige Ableitung aus nur endlich vielen Randkomponenten besteht. Ist Γ überabzählbar, so zerfällt Γ in den überabzählbaren perfekten Kern Γ_0 und die höchstens abzählbare Menge $\Gamma - \Gamma_0$. Mit Δ bezeichnen wir die Randkomponentenmenge eines Gebietes H , mit $\Delta_0 \subset \Delta$ den perfekten Kern und mit D die Elemente von Δ .

§ 1. Hebbare Punktmengen

Wir betrachten ein ebenes Gebiet G und eine vollkommen unzusammenhängende relativ abgeschlossene Teilmenge E von G . Sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G - E)$ die Menge der 1-1-konformen Abbildungen f von $G - E$, welche höchstens eine abzählbare Teilmenge von E in nicht-punktförmige Randkomponenten des Bildgebietes überführen.

E heisse hebbare bezüglich \mathcal{F} , wenn sich jedes $f \in \mathcal{F}$ in E analytisch fortsetzen lässt.

SATZ 1. *Eine vollkommen unzusammenhängende und relativ abgeschlossene Teilmenge E von G ist hebbare bezüglich $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G - E)$, wenn sie auf einer abzählbaren*

Menge B von paarweise disjunkten, abgeschlossenen und rektifizierbaren Jordanbogen³⁾ b liegt.

KOROLLAR. *Ein Kreisgebiet mit lauter punktförmigen Randkomponenten, dessen Randkomponentenmenge E die im Satz 1 genannte Hebbarkeitsbedingung erfüllt, lässt sich nur durch eine lineare Transformation auf ein anderes Kreisgebiet konform abbilden.*

Beweis: 1) Wir zeigen zunächst, dass E hebbare ist unter der Voraussetzung, dass E auf einem einzigen abgeschlossenen rektifizierbaren Jordanbogen b in G liegt.

Vom Bildgebiet H können wir voraussetzen, dass es den Punkt $w=\infty$ nicht als Randpunkt besitzt, denn durch eine Transformation $w \mapsto 1/w - w_0$ mit $w_0 \in H$ können wir diese Voraussetzung immer erreichen.

Sei $f: G - E \rightarrow H$ eine 1-1-konforme Abbildung aus \mathcal{F} und A die höchstens abzählbare Teilmenge derjenigen Punkte von E , die durch f in nicht-punktförmige Randkomponenten von H übergeführt werden. Dann gehen die Punkte der Menge $E - A$ in punktförmige Randkomponenten von H über, weshalb die Abbildung f in natürlicher Weise in diese Menge fortgesetzt werden kann. Zudem definieren wir für jeden Punkt $a \in A$ den Bildpunkt $f(a)$ als beliebigen Punkt derjenigen Randkomponente von H , welche dem Punkt a entspricht. Die so definierte Abbildung f ist stetig in $E - A$, denn für $z \in E - A$ ist $f(z)$ eine punktförmige Randkomponente von H , und daher lässt sich in jeder Umgebung U von $f(z)$ eine Jordankurve um $f(z)$ legen, die in H verläuft und deren Urbild eine Umgebung $V \subset G$ von z umfasst; das Bild von V liegt somit in U . Die Punkte von A sind somit die einzigen Unstetigkeitspunkte von f , und auf A ist f beschränkt.

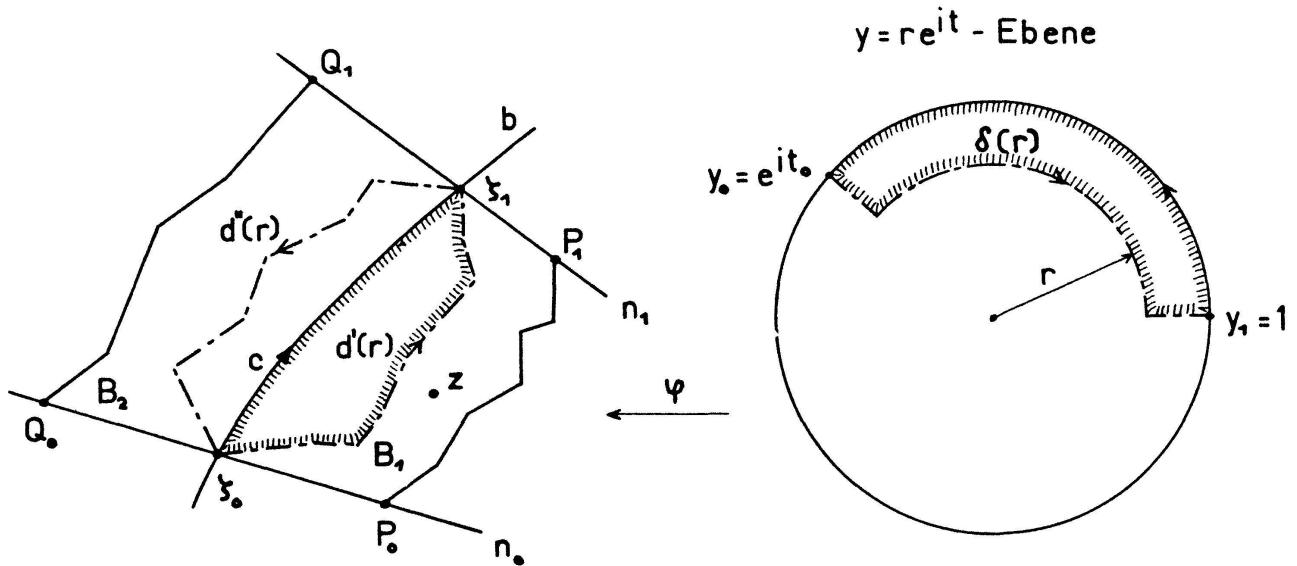
Seien c ein abgeschlossener Teilbogen von b und $\zeta: I_t \rightarrow c$, wobei $I_t = (0 \leq t \leq 1)$, eine Parametrisierung von c . Dann ist ζ in I_t von endlicher Variation und $\zeta^{-1}(A \cap c)$ ist höchstens abzählbar und daher eine Menge der Variation Null bezüglich $\zeta(t)$. Somit existiert das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\int_c f d\zeta = \int_0^1 f(\zeta(t)) d\zeta(t). \quad (1.1)$$

Die Endpunkte ζ_0 und ζ_1 des abgeschlossenen Teilbogens c von b wählen wir derart, dass sie nicht in E liegen und der orientierte und rektifizierbare Bogen b in diesen Punkten eine wohlbestimmte Tangente besitzt. Sodann legen wir durch ζ_0 und ζ_1 die Kurvennormalen n_0 bzw. n_1 . Auf n_0 bzw. n_1 wählen wir auf derselben Seite von b die Punkte P_0 bzw. P_1 , auf der andern Seite Q_0 bzw. Q_1 derart, dass die Strecken $Q_0 P_0$

³⁾ Nach KERÉKJARTÓ [9, p. 51] lässt sich durch jede abgeschlossene, vollkommen unzusammenhängende und beschränkte Punktmenge der Ebene eine Jordankurve legen, welche die ganze Punktmenge enthält.

auf n_0 und $Q_1 P_1$ auf n_1 in G verlaufen und ausser ζ_0 und ζ_1 keine Punkte von b enthalten. Jeden der Punkte P_0, Q_0 verbinden wir mit je einem in $G - E$ verlaufenden Polygon mit den Punkten P_1 bzw. Q_1 , welche b nicht schneiden und so nahe an b verlaufen, dass das Innere des geschlossenen und orientierten Polygons $p = (\zeta_0 P_0 P_1 \zeta_1 Q_1 Q_0 \zeta_0)$ als Teilgebiet von G einfach zusammenhängend ist. Die Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1 seien zudem so gewählt, dass die Orientierung von p mit der positiven Orientierung der Ebene übereinstimmt. Die orientierten Polygone $\zeta_0 P_0 P_1 \zeta_1$ und $\zeta_1 Q_1 Q_0 \zeta_0$ nennen wir p' bzw. p'' , so dass $p = p' + p''$. Das Innere der geschlossenen Kurve $p' - c$ sei mit B' und das Innere von $p'' + c$ mit B'' bezeichnet. Das einfach zusammenhängende Gebiet B' bilden wir 1-1-konform auf die Einheitskreisscheibe K der $y = re^{it}$ -Ebene ab. Der Bogen $-c$ entspreche dabei dem Bogen $\{e^{it} \mid 0 \leq t \leq t_0\}$,



der Punkt ζ_1 geht in $y_1 = 1$ und ζ_0 in $y_0 = e^{it_0}$ über. In K betrachten wir für $0 < r < 1$ die Kurve $\delta(r)$ mit dem Anfangspunkt $y_0 = e^{it_0}$ und dem Endpunkt $y_1 = 1$, bestehend aus der Strecke von $y_0 = e^{it_0}$ nach re^{it_0} , dem Bogen $\{re^{it} \mid t_0 \geq t \geq 0\}$ und der Strecke von $y = r$ nach $y_1 = 1$. Das Bild von $\delta(r)$ unter der Umkehrabbildung $\varphi: K \rightarrow B'$ ist eine Kurve $d'(r)$ in B' mit dem Anfangspunkt ζ_0 und dem Endpunkt ζ_1 . Auf gleiche Weise wie $d'(r)$ in B' erhalten wir für dieselbe Zahl r eine Kurve $d''(r)$ in B'' mit dem Anfangspunkt ζ_1 und dem Endpunkt ζ_0 . Das Innere der geschlossenen Kurve $d(r) = d'(r) + d''(r)$ heisse B_0 . Das Gebiet $B_1 = B' - \bar{B}_0$ hat den orientierten Rand $p' - d'(r) = d_1$ und $B_2 = B'' - \bar{B}_0$ ist berandet durch $p'' - d''(r) = d_2$. Nun gilt $d_1 + d_2 = p' - d'(r) + p'' - d''(r) = p - d(r)$. Für einen beliebigen Punkt z in B_1 gilt somit nach Cauchy

$$2 \cdot \pi \cdot i \cdot f(z) = \int_{d_1 + d_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_p \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{d(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.2)$$

Für $r \rightarrow 1$ strebt $d(r)$ gegen die doppelt durchlaufene Kurve c , und wir behaupten, dass

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{d(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \text{gilt.} \quad (1.3)$$

Dann ist nämlich f in die Menge $E \cap c$ analytisch fortsetzbar, denn für $f(z)$ haben wir die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_p \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

deren rechte Seite eine im Innern von p , also auch auf $E \cap c$, analytische Funktion darstellt, die in B_1 mit f übereinstimmt.

Um die Behauptung (1.3) zu beweisen, schreiben wir das Integral über $d(r) = d'(r) + d''(r)$ als Summe der Integrale über $d'(r)$ und $d''(r)$ und zeigen, dass diese Integrale für $r \rightarrow 1$ gegen jene über c bzw. $-c$ konvergieren.

Die obige 1-1-konforme Abbildung $\varphi: K \rightarrow B'$ ist auf $|y|=1$ stetig, und $\varphi(e^{it})$ ist in $(0 \leq t \leq t_0)$ von endlicher Variation, denn c ist rektifizierbar. Mit (1.1) existiert somit das Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$\int_0^{t_0} \frac{f(\varphi(e^{it}))}{\varphi(e^{it}) - z} d\varphi(e^{it}) = \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I_c.$$

Nach einem Satz von F. und M. RIESZ (siehe etwa [6, p. 369]) ist $\varphi(e^{it})$ sogar absolut stetig, und I_c lässt sich als Lebesgue-Integral schreiben:

$$I_c = \int_0^{t_0} \frac{f(\varphi(e^{it}))}{\varphi(e^{it}) - z} \cdot \frac{d\varphi(e^{it})}{dt} dt.$$

Für $r \rightarrow 1$ strebt $d'(r)$ gegen c und wir behaupten:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{d'(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I_c. \quad (1.4)$$

Aus (1.4) folgt dann (1.3) unmittelbar, denn die Konvergenz des Integrals über $d''(r)$ gegen $-I_c$ zeigt man wie (1.4).

Zum Beweis von (1.4) betrachten wir eine gegen 1 konvergierende Folge (r_n) , wobei $0 < r_n < 1$, und setzen: $\varphi(r_n e^{it}) = \varphi_n(t)$ und $\varphi(e^{it}) = \varphi(t)$. Die Ableitung von φ nach $y = r e^{it}$ bezeichnen wir mit $\varphi'(r e^{it})$ und setzen $\varphi'(r_n e^{it}) = \varphi'_n(t)$. Unter $\varphi'(e^{it}) = \varphi'(t)$ verstehen wir den Grenzwert von $\varphi'(r e^{it})$ für $r \rightarrow 1$, wo dieser existiert. Zudem schreiben wir

$$\frac{f(\varphi_n(t))}{\varphi_n(t) - z} = F_n(t) \quad \text{und} \quad \frac{f(\varphi(t))}{\varphi(t) - z} = F(t).$$

Nun gilt

$$\frac{d\varphi(re^{it})}{dt} = r \cdot i \cdot e^{it} \cdot \varphi'(re^{it}),$$

und nach [6, p. 369] gilt fast überall auf $|y|=1$

$$\frac{d\varphi(e^{it})}{dt} = i \cdot e^{it} \cdot \varphi'(e^{it}).$$

Die Integrale über die Teilbogen von $d'(r)$, die den radialen Teilstrecken von $\delta(r)$ entsprechen, konvergieren mit $r \rightarrow 1$ gegen Null, und somit lautet unsere Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} F_n(t) \cdot r_n e^{it} \cdot \varphi'_n(t) dt = \int_0^{t_0} F(t) \cdot e^{it} \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1.5)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_0} (F_n r_n e^{it} \varphi'_n - F e^{it} \varphi') dt \right| = \\ &= \left| \int_0^{t_0} (F_n r_n e^{it} \varphi'_n - F e^{it} \varphi'_n) dt + \int_0^{t_0} (F e^{it} \varphi'_n - F e^{it} \varphi') dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{t_0} |F_n r_n - F| \cdot |\varphi'_n| dt + \int_0^{t_0} |F| \cdot |\varphi'_n - \varphi'| dt. \end{aligned}$$

Die Funktion $F(t)$ ist beschränkt: $|F(t)| \leq M$, also

$$\int_0^{t_0} |F| \cdot |\varphi'_n - \varphi'| dt \leq M \cdot \int_0^{t_0} |\varphi'_n - \varphi'| dt;$$

und dass das letzte Integral mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, folgt aus bekannten Sätzen: nach einem Satz in [6, p. 369] gehört die Funktion $\varphi'(re^{it})$ der Klasse H_1 an, für deren Elemente ein zweiter Satz, [6, p. 355] u.a. die gewünschte Konvergenz aussagt.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} |F_n r_n - F| \cdot |\varphi'_n| dt = 0 \quad \text{gilt.} \quad (1.6)$$

Die Funktion $F_n - F$ (und somit auch $F_n r_n - F$) strebt mit $n \rightarrow \infty$ fast überall auf $[0, t_0]$ gegen Null; die Ausnahmemenge ist die höchstens abzählbare Menge

$\varphi^{-1}(A \cap c)$. Nach einem Satz von D. F. EGOROW [11, p. 99] ist die Konvergenz auf einer abgeschlossenen Menge P vom Masse $t_0 - \eta$ gleichmässig, wobei $\eta > 0$ beliebig klein gemacht werden kann. D.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 derart, dass $|F_n(t)r_n - F(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in P$, sobald $n > n_0$. Zudem ist $F_n r_n - F$ beschränkt:

$$|F_n(t)r_n - F(t)| \leq N \quad \text{für alle } t \text{ und } n.$$

Somit gilt für $n > n_0$, wenn $Q = [0, t_0] - P$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} |F_n r_n - F| \cdot |\varphi'_n| dt &= \int_P |F_n r_n - F| \cdot |\varphi'_n| dt + \\ &+ \int_Q |F_n r_n - F| \cdot |\varphi'_n| dt \leq \varepsilon \cdot \int_P |\varphi'_n| dt + N \cdot \int_Q |\varphi'_n| dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Wir wählen nun η so klein, dass $\int_Q |\varphi'| dt < \varepsilon$ wird. Dann ist für alle hinreichend grossen n

$$\int_Q |\varphi'_n| dt < \varepsilon \quad \text{und ebenso} \quad \int_P |\varphi'_n| dt < \int_P |\varphi'| dt + \varepsilon = C + \varepsilon,$$

und daraus folgt (1.6).

Wir haben gezeigt, dass jede Abbildung $f: G - E \rightarrow H$ aus \mathcal{F} in die Punktmenge $E \cap c$ auf einem geeigneten abgeschlossenen Teilbogen c von b analytisch fortsetzbar ist. Nun können wir b bis auf die Endpunkte durch solche Teilbogen c ausschöpfen und somit f in alle Mengen $E \cap c$ und schliesslich auch in die isolierten Endpunkte analytisch fortsetzen. Also ist E hebbbar bezüglich $\mathcal{F}(G - E)$.

2) Nun liege E auf der genannten Menge B von rektifizierbaren Jordanbogen b . Um die Hebbareit von E zu zeigen, betrachten wir zunächst eine beliebige kompakte Teilmenge E_0 von E . Nun ziehen wir eine in $G - E$ verlaufende Jordankurve γ , welche E_0 im Innern enthält. Dann hat γ von E einen positiven Abstand ϱ . Seien b_1, b_2, \dots jene Bogen aus B , welche Punkte von E_0 enthalten. Durch Weglassen offener Kurvenstücke, die keine Punkte von E enthalten, können wir jeden Bogen b_i ($i = 1, 2, \dots$) in endlich viele Teilbogen $b_{i,n}$ zerlegen, dass die Länge jedes Teilbogens kleiner ist als $\min(\varrho/2, 1/i)$ und jeder Teilbogen wenigstens einen Punkt von E enthält. Die so erhaltenen Teilbogen haben keine Punkte mit γ gemeinsam, und die im Innern von γ gelegenen Teilbogen bilden eine abzählbare Menge B_0 von abgeschlossenen, paarweise disjunkten rektifizierbaren Jordanbogen, auf denen die Menge E_0 liegt. Die Folge der Längen der Bogen aus B_0 konvergiert gegen Null. Nun definieren wir in B_0 die Topologie, welche auf der Menge der Randkomponenten eines Gebietes üblich ist. (vergl. [13]). Dann ist B_0 kompakt, denn jeder Häufungspunkt z einer Folge (b_n) von Bogen aus B_0 ist Häufungspunkt einer Punktfolge aus E_0 , liegt also in E_0 und somit auch auf einem Bogen von B_0 .

Wir bilden die Menge B^1 der Häufungselemente von B_0 , dann die Menge B^2 der Häufungselemente von B^1 , usw. Derart erhalten wir die Folge

$$B_0 \supset B^1 \supset B^2 \supset \dots \supset B^\omega \supset \dots \supset B^\alpha \supset \dots$$

der Ableitungen der Menge B_0 ; dabei bezeichnet ω den Ordnungstypus der natürlichen Zahlen, und α ist eine beliebige Ordnungszahl. Ist α eine Limeszahl, so ist B^α definiert als $\bigcap_{\beta < \alpha} B^\beta$. Der Durchschnitt aller Ableitungen ist eine perfekte Menge und heisst der perfekte Kern von B_0 . Dieser ist genau dann leer, wenn B_0 höchstens abzählbar ist. Es gibt also in unserm Fall eine Ordnungszahl α' , so dass $B^{\alpha'}$ leer ist. Nun bilden wir die Mengen $M_\alpha = B_0 - B^\alpha$ für $\alpha = 1, 2, \dots, \omega, \dots$. Dann ist $B_0 = \bigcup M_\alpha$. Wir zeigen durch transfinite Induktion nach α , dass f in die ganze Menge E_0 analytisch fortgesetzt werden kann.

Die Kurven von $M_1 = B_0 - B^1$ sind isoliert und f lässt sich in die Teilmenge von E_0 , die auf M_1 liegt, analytisch fortsetzen. Dieselbe Eigenschaft habe nun die Teilmenge von E_0 , die auf den M_β mit $\beta < \alpha$ liegt. Ist α keine Limeszahl, so ist $M_\alpha = M_{\alpha-1} \cup (B^{\alpha-1} - B^\alpha)$. In die Punkte von E_0 auf $M_{\alpha-1}$ können wir f analytisch fortsetzen, d.h. wir können die Bogen von $M_{\alpha-1}$ aus B_0 entfernen; dann sind aber die Bogen in $B^{\alpha-1} - B^\alpha$ isoliert und f lässt sich auch in die Punkte darauf analytisch fortsetzen.

Ist α eine Limeszahl, so gilt

$$M_\alpha = B_0 - B^\alpha = B_0 - \bigcap_{\beta < \alpha} B^\beta = \bigcup_{\beta < \alpha} (B_0 - B^\beta) = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$$

d.h. f lässt sich auch in diesem Fall in alle Punkte von E_0 auf M_α analytisch fortsetzen und somit in die ganze Menge E_0 .

Da E_0 eine beliebige kompakte Teilmenge von E war, folgt die Hebbareit von E bezüglich \mathcal{F} und Satz 1 ist bewiesen.

§ 2. Zur Ränderzuordnung bei 1 – 1-konformen Abbildungen

Mit \mathcal{H} bezeichnen wir im Folgenden die Familie von ebenen Gebieten, deren Randkomponenten aus stark konvexen Jordankurven und Punkten bestehen und die den Punkt ∞ nicht als Randpunkt besitzen.

LEMMA 1. *Die Folge der Durchmesser $d_n = d(C_n)$ einer Folge (C_n) von Randkomponenten eines Gebietes $G \in \mathcal{H}$ konvergiert gegen Null.*

Beweis: G hat höchstens abzählbar viele nicht-punktförmige Randkomponenten. Sei C_1, C_2, \dots eine Abzählung derselben und (C_{n_i}) eine Teilfolge mit $d_{n_i} \geq d > 0$ für alle n_i . Wir wählen auf jedem C_{n_i} zwei Punkte z'_{n_i} und z''_{n_i} mit $|z'_{n_i} - z''_{n_i}| \geq d$. Durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge können wir erreichen, dass die Punktfolgen (z'_{n_i})

und (z'_{n_i}) konvergieren. Wir schreiben $z' = \lim z'_{n_i}$ und $z'' = \lim z''_{n_i}$ und behaupten, dass z' und z'' auf derselben Randkomponenten C liegen. Denn würden sie auf verschiedenen Komponenten C' und C'' liegen, so gäbe es eine in G verlaufende Jordankurve γ , die C' von C'' trennt, und von einem gewissen n_{i_0} an würden die Punkte z'_{n_i} im Innern (bzw. Äußern) und die z''_{n_i} im Äußern (bzw. Innern) von γ liegen, was nur möglich wäre, wenn γ die C_{n_i} schneiden würde.

Die Randpunkte z' und z'' liegen also auf C und die offene Strecke $z'z''$ im Innern von C . Falls G im Äußern von C liegt, folgt aus der starken Konvexität von C , dass es eine Zahl N gibt, so dass alle Strecken $z'_{n_i}z''_{n_i}$ mit $n_i > N$ die Kurve C schneiden. Das ist aber ein Widerspruch, denn diese Strecken müssen im Innern der C_{n_i} liegen.

Liegt G im Innern von C , so wählen wir auf der Strecke $z'z''$ einen Gebietspunkt z . Da die Strecken $z'_{n_i}z''_{n_i}$ gegen die Strecke $z'z''$ konvergieren, gibt es eine Folge (z_{n_i}) mit z_{n_i} auf der Strecke $z'_{n_i}z''_{n_i}$, die gegen z konvergiert. Da aber die Strecken $z'_{n_i}z''_{n_i}$ im Äußern von G liegen, folgt der Widerspruch, dass z nicht in G liegt.

SATZ 2. *Jeder Randpunkt eines Gebietes $G \in \mathcal{H}$ ist erreichbar.*

Beweis. Zu einem beliebigen Randpunkt von G , den wir als $z=0$ annehmen können, konstruieren wir einen in G verlaufenden Jordanbogen, der gegen diesen Randpunkt konvergiert und in diesem Punkt noch stetig ist.

Dazu betrachten wir die Kreisscheibe $K_r = \{z \mid |z| < r\}$ für eine zunächst noch feste Zahl $r > 0$. Mit ∂K_r bezeichnen wir den Rand von K_r und mit \bar{C} die zu den Randkomponenten C von G gehörenden Komplementärkontinuen⁴⁾. Der Punkt $z=0$ liege auf der Komponenten C_0 . Als Folge von Lemma 1 gibt es höchstens endlich viele von C_0 verschiedene Randkomponenten, wir nennen sie C_1, \dots, C_n , welche sowohl den Kreis $|z|=r$ als auch den Kreis $|z|=r/2$ treffen.

Sei W das Komplement von $\bigcup_{i=0}^n \bar{C}_i$ bezüglich der z -Ebene. Dann zerfällt $W \cap K_r$ in gewisse Gebietskomponenten, von denen genau eine, etwa W_r , den Punkt $z=0$ als Randpunkt besitzt. Für eine passende Zahl $0 < \varrho < r/2$ ist der Durchschnitt der Kreisscheibe K_ϱ mit den C_i für $i = 1, \dots, n$ leer, und $K_\varrho \cap W_r$ enthält eine wohlbestimmte Komponente K'_ϱ , welche $z=0$ als Randpunkt hat. Zudem gilt $K'_\varrho \subset W_r$ und somit $K'_\varrho \cap G \subset W_r \cap G$. Von einer Randkomponenten C von G , für welche $W_r - (\bar{C} \cap W_r)$ in wenigstens zwei Komponenten zerfällt, sagen wir, sie zerlege das Gebiet W_r . Nach Konstruktion von W_r liegen alle W_r zerlegenden Randkomponenten in $|z| > r/2$. Daraus folgt, dass jede Randkomponente C von G , welche K'_ϱ trifft, das Gebiet W_r nicht zerlegt. Daher ist $K'_\varrho \cap G$ ganz in einer wohlbestimmten Komponente V_r von $W_r \cap G$ enthalten, und V_r hat $z=0$ als Randpunkt, denn $z=0$ ist Randpunkt von $K'_\varrho \cap G$, also auch von V_r . Zudem hat das Gebiet V_r Randpunkte auf $\partial K_r \cap G$, denn

⁴⁾ Das zu einer Randkomponente C gehörige Komplementärkontinuum \bar{C} ist die Vereinigung von C mit denjenigen Komponenten seines Komplements bezüglich der Vollebene, die zu G fremd sind.

jede Komponente von $W_r \cap G$ hat diese Eigenschaft; das liegt daran, dass jede Randkomponente von G , welche W_r zerlegt, den Kreis ∂K_r treffen muss.

Für $r_1 < r$ gilt $V_{r_1} \subset V_r$, und wir können unsren Jordanbogen folgendermassen konstruieren: Als Anfangspunkt wählen wir einen beliebigen Randpunkt z von V_r auf $\partial K_r \cap G$ und verbinden diese durch einen in V_r verlaufenden Jordanbogen mit einem Punkt z_1 in V_r mit $|z_1| = r_1$, der Randpunkt von V_{r_1} ist. Nun wählen wir eine gegen Null konvergierende Folge $r_1 > r_2 > \dots$ und verlängern den Jordanbogen innerhalb V_{r_1} nach einem Punkt z_2 in V_{r_1} mit $|z_2| = r_2$, der Randpunkt ist von V_{r_2} . Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir den gewünschten Jordanbogen, und der Satz 2 ist bewiesen.

Wir betrachten nun zwei Gebiete G und H aus der Klasse \mathcal{H} und nehmen an, es gebe eine $1-1$ -konforme Abbildung $f: G \rightarrow H$. Den Randkomponenten C von G sind dadurch umkehrbar eindeutig die Randkomponenten D von H zugeordnet. C und D seien zwei entsprechende, nicht-punktförmige Randkomponenten von G bzw. H . Sei p ein gegen den Punkt $P \in C$ konvergierender Einschnitt von G . Für $f(p) = q$ sind zwei Fälle möglich: entweder konvergiert q gegen einen einzigen Punkt oder gegen ein zusammenhängendes Teilkontinuum von D . Sei $\{p\}$ die Gesamtheit aller gegen P konvergierenden Einschnitte von G . Wir bilden die Vereinigung I_P aller Punkte von D , welche Häufungspunkte der Einschnitte $f(p) = q$ sind, wenn p die Menge $\{p\}$ durchläuft. $I_P = \tilde{f}(P)$ besteht aus einem Punkt oder einem zusammenhängenden Teilkontinuum von D .

Für die im weiteren untersuchten $1-1$ -konformen Abbildungen $f: G \rightarrow H$ wollen wir über die induzierte Zuordnung \tilde{f} der Punkte je zweiter entsprechender, nicht-punktförmiger Randkomponenten C und D folgende Voraussetzung fordern:

(A₀) *Für je zwei verschiedene Punkte P, Q von C besteht $I_P \cap I_Q$ aus höchstens zwei Punkten.*

Unter der Voraussetzung (A₀) folgen für die durch eine orientierungserhaltende $1-1$ -konforme Abbildung f induzierte Zuordnung \tilde{f} der Punkte von C zu denjenigen von D folgende Eigenschaften:

a) Die Menge M derjenigen Punkte P auf C , für welche $\tilde{f}(P) = I_P$ ein eigentliches Kurvenstück ist, ist höchstens abzählbar.

b) Die Beschränkung der Zuordnung \tilde{f} auf $C - M$ ist eine orientierungserhaltende Abbildung von $C - M$ in D .

Wäre b) nicht erfüllt, so könnte man mit Hilfe der Erreichbarkeit aller Randpunkte und einer in G hinreichend nahe an C verlaufenden Jordankurve einen Widerspruch zur Orientierungserhaltung von f konstruieren.

Die Bedingung (A₀) an f ist äquivalent zu der entsprechenden Bedingung an f^{-1} : Seien R ein Punkt von D und $\{r\}$ die Menge der Einschnitte von H , die gegen R konvergieren. $J_R \subset C$ sei die Menge der Häufungspunkte der Kurven $f^{-1}(r)$ für alle r aus $\{r\}$. Dann ist (A₀) äquivalent mit

(A₁) *Für je zwei verschiedene Punkte R, S von D besteht $J_R \cap J_S$ aus höchstens zwei Punkten.*

Beweis. Sei (A₀) erfüllt, und als Antithese zu (A₁) seien R und S zwei verschiedene Punkte von D derart, dass sich die Intervalle J_R und J_S auf C überlappen. Wir zeigen zunächst: die Menge $J_R \cap J_S$ enthält ein ganzes Intervall J mit $\tilde{f}(J) = R$.

Dazu sei P ein innerer Punkt von $J_R \cap J_S$, der nicht zu der in a) genannten Menge M gehört, d.h. P hat einen wohlbestimmten Bildpunkt $\tilde{f}(P)$, und die Bilder $f(p)$ der Einschnitte $p \in \{p\}$ konvergieren alle gegen $\tilde{f}(P)$. Weil $P \in J_R$, gibt es einen gegen R konvergierenden Einschnitt r derart, dass $f^{-1}(r)$ den Punkt P als Häufungspunkt besitzt.

Konvergiert nun $f^{-1}(r)$ gegen P, so folgt $\tilde{f}(P) = R$; gibt es zwei verschiedene solche Punkte P und P', so wird das ganze Kurvenstück J mit den Endpunkten P und P' auf R abgebildet.

Andernfalls gibt es einen gegen R konvergierenden Einschnitt r, dessen Urbild $f^{-1}(r)$ ein ganzes Kurvenstück J_0 von C als Häufungspunkte besitzt und $J_1 = J_0 \cap J_R \cap J_S$ ist ein nicht-punktförmiges Kurvenstück. Sei P ein innerer Punkt von J_1 und nicht im M. Dann gibt es einen gegen P konvergierender Einschnitt p, der $f^{-1}(r)$ in einer gegen P konvergenten Punktfolge schneidet und es folgt $\tilde{f}(P) = R$. Wiederum wird das ganze Intervall J zwischen zwei solchen Punkten auf R abgebildet.

Man zeigt nun analog, dass ein Intervall $J' \subset J_R \cap J_S$, das mit J ein ganzes Kurvenstück gemeinsam hat, auf S abgebildet wird. Für einen Punkt Q aus $J' \cap J$, der nicht in M liegt, also einen wohlbestimmten Bildpunkt $\tilde{f}(Q)$ hat, haben wir den Widerspruch $\tilde{f}(Q) = R \neq S = \tilde{f}(Q)$. Ebenso schliesst man von (A₁) auf (A₀).

\tilde{f} hat somit die gleichen Eigenschaften wie die durch f^{-1} induzierte Zuordnung \tilde{f}^{-1} .

Wir wollen noch zwei für (A₀) hinreichende Bedingungen (A₂) und (A₃) angeben. Seien C und D wiederum zwei entsprechende nicht-punktförmige Randkomponenten von G bzw. H. Dann haben wir als zwei hinreichende Bedingungen für (A₀):

- (A₂) Auf C oder D liegen jene Punkte diskret, welche Häufungspunkte sind von andern Randkomponenten von G bzw. H.
- (A₃) Das Bild $f(p)$ jedes gegen einen Punkt P von C konvergierenden Einschnittes p von G konvergiert gegen einen wohlbestimmten Punkt von D. Auch die entsprechende Bedingung an f^{-1} impliziert die Voraussetzung (A₀).

§ 3. Zwei topologische Hilfssätze

In der komplexen Ebene seien zwei Jordankurven c und d gegeben, die sich in höchstens endlich vielen Punkten schneiden und nirgends berühren. Letzteres soll folgendes bedeuten: die Durchschnitte jeder ebenen Umgebung eines gemeinsamen

Punktes von c und d mit dem Innern bzw. dem Äussern der einen treffen je sowohl Inneres als auch Äusseres der andern Kurve.

Nun sei $f: c \rightarrow d$ eine topologische orientierungserhaltende Abbildung mit $f(z) \neq z$ für alle $z \in c$. Durch $v(z) = f(z) - z$ definiert f ein stetiges Vektorfeld v auf c . Sei j die Drehzahl dieses Vektorfeldes. Dann ist $-j \cdot 2\pi = \Delta_c \arg v(z)$ die Argumentänderung des Vektors $v(z)$ bei einmaligem negativem Umlauf von z auf c .

LEMMA 2. *Für zwei sich nicht berührende Jordankurven c und d gilt: Es ist $\Delta_c \arg(f(z) - z) \leq 0$ für alle topologischen orientierungserhaltenden Abbildungen $f: c \rightarrow d$ ohne Fixpunkte genau dann, wenn c und d höchstens zwei Schnittpunkte haben.*

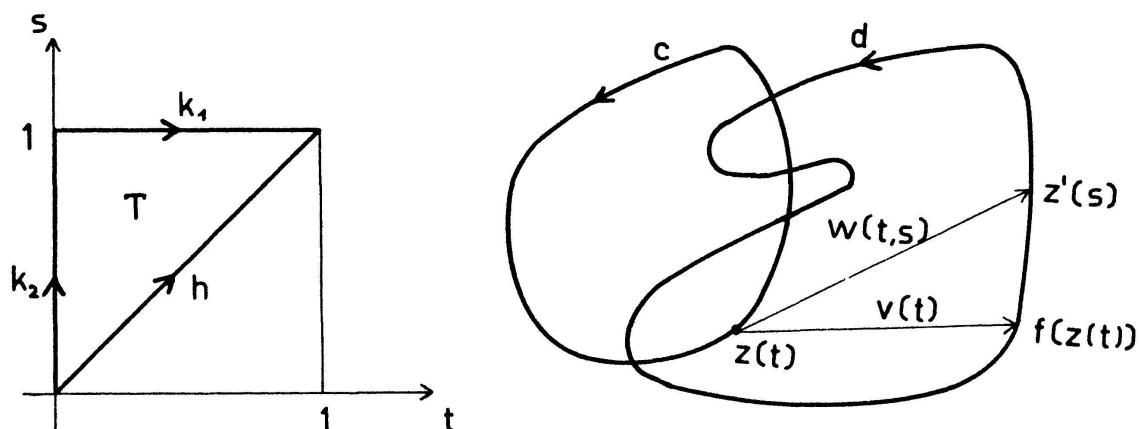
Beweis: Die Kurve c sei parametrisiert durch $t \mapsto z(t)$ mit $t \in I_t = (0 \leq t \leq 1)$ und $z(0) = z(1)$. Diese Parametrisierung soll auf c die positive Orientierung induzieren. Eine ebenfalls die positive Orientierung induzierende Parametrisierung von d erhalten wir, wenn wir setzen $z'(s) = f(z(s))$ mit $s \in I_s = (0 \leq s \leq 1)$. Zudem wählen wir die Parametrisierung von c derart, dass $z'(0) = z'(1) = f(z(0))$ nicht auf c und $z(0) = z(1)$ im Innern von d liegt. Letzteres ist deshalb eine erlaubte Annahme, weil in den Fällen, in denen c und d keine gemeinsamen Punkte haben, offenbar $j \geq 0$ ist für alle betrachteten Abbildungen f .

Auf dem abgeschlossenen Dreieck

$$T = \{(t, s) \in I_t \times I_s \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$$

definieren wir auf folgende Weise ein Vektorfeld⁵⁾:

Jedem Punkt (t, s) aus T ordnen wir den Vektor $w(t, s) = z'(s) - z(t)$ zu, also den in die (t, s) -Ebene verpflanzten Vektor mit dem Anfangspunkt $z(t)$ und dem Endpunkt $z'(s)$.



⁵⁾ Die Beweisidee wurzelt in einem Beweis von H. HOPF [7] für den Satz, dass die Drehungszahl des Tangentenfeldes einer einfachen geschlossenen Kurve gleich ± 1 ist.

Ist $t=s$, so haben wir $w(t,s)=v(t)=f(z(t))-z(t)$. Der Rand von T sei $d=h-k_1-k_2$, wobei h die Strecke ist von $(0,0)$ nach $(1,1)$, k_1 jene von $(0,1)$ nach $(1,1)$ und k_2 jene von $(0,0)$ nach $(0,1)$. Auf d ist das Vektorfeld w stetig, ebenso im Innern von T bis auf höchstens soviele isolierte Singularitäten, wie die Kurven c und d Schnittpunkte haben; denn ein Schnittpunkt ist durch $z(t')=z'(s')$, $(t' \neq s')$, gekennzeichnet, und der Punkt (t', s') liegt nur dann in T , wenn $t' < s'$. Weil f topologisch ist, hat das Vektorfeld w in (t', s') mit $t' < s'$ eine isolierte Nullstelle. Um jede derartige Singularität $q=(t', s')$ in T legen wir ein hinreichend kleines Quadrat R_q mit den Eckpunkten $(t'-\varepsilon, s'-\varepsilon)$, $(t'+\varepsilon, s'-\varepsilon)$, $(t'+\varepsilon, s'+\varepsilon)$, $(t'-\varepsilon, s'+\varepsilon)$. Die Drehungszahl des Vektorfeldes w auf dem Rand ∂R_q heisst der Index j_q der Singularität q .

Nun ist die Drehzahl $i(d)$ des Vektorfeldes w auf dem Rand d von T gleich der Summe der Indizes j_q der isolierten Nullstellen q im Innern von T , d.h.

$$i(d) = \sum_q j_q. \quad (3.1)$$

Aus $d=h-k_1-k_2$ erhalten wir

$$i(d) = i(h) - i(k_1) - i(k_2). \quad (3.2)$$

Auf h ist aber $t=s$, also ist $i(h)=j$ = Drehungszahl des Vektorfeldes v auf c . Auf k_1 ist $s=1$ und $0 \leq t \leq 1$, daraus folgt

$$i(k_1) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z'(0) = z'(1) \text{ im Äussern von } c \text{ (Fall } a\text{)} \\ 1, & \text{falls } z'(0) = z'(1) \text{ im Innern von } c \text{ (Fall } \bar{a}\text{)} \end{cases} \quad (3.3)$$

Analog erhält man, da $z(0)=z(1)$ nach Voraussetzung im Innern von d liegt, die Gleichung

$$i(k_2) = 1. \quad (3.4)$$

Aus (3.2), (3.3) und (3.4) folgt

$$i(h) = j = i(d) + \begin{cases} 1 & \text{im Fall } a \\ 2 & \text{im Fall } \bar{a}. \end{cases}$$

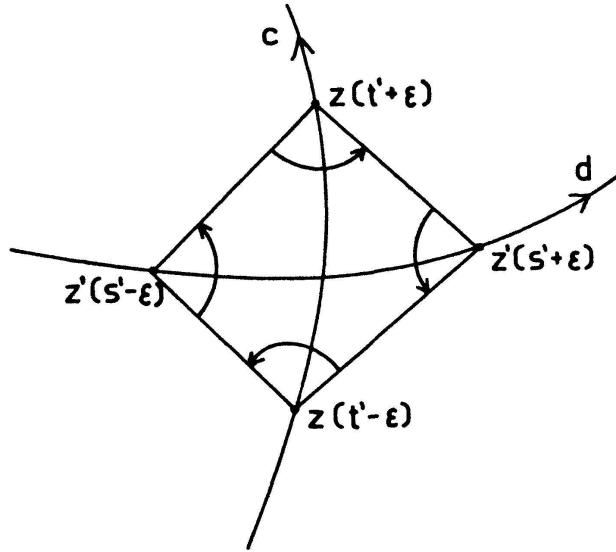
Also ist $j \geq 0$ genau dann, wenn

$$i(d) \geq \begin{cases} -1 & \text{im Fall } a \\ -2 & \text{im Fall } \bar{a} \end{cases} \quad (3.5)$$

erfüllt ist.

Wir wollen nun die j_q berechnen. Sei $z(t')=z'(s')$ mit $t' \neq s'$ ein Schnittpunkt von c und d . Falls $t' < s'$, so ist $q=(t', s')$ in T eine isolierte Singularität des Feldes w . Schneidet dann die Kurve d die Kurve c in diesem Punkte derart, dass sie aus dem Innern von c in das Äussere verläuft (in ihrer positiven Orientierung), dann ist $j_q = +1$. Denn dem hinreichend kleinen Quadrat R_q in T mit dem Mittelpunkt q entspricht das Viereck $z(t'-\varepsilon), z'(s'+\varepsilon), z(t'+\varepsilon), z'(s'-\varepsilon)$. Dem positiven Umlauf um den Rand ∂R_q entspricht eine Drehung des Vektors $w(t, s)=z'(s)-z(t)$ um genau 2π , d.h. $j_q=1$, wie behauptet. Im umgekehrten Fall, wenn d die Kurve c von aussen

nach innen durchstösst, haben wir einen negativen Schnittpunkt, d.h. für $q=(t', s')$ mit $t' < s'$ gilt dann $j_q = -1$.



Sei m die Anzahl der positiven Schnittpunkte (mit $j_q = +1$) und n diejenige der negativen. Dann schreiben sich die Gleichungen (3.1) und (3.5) in der Form

$$i(d) = \sum_q j_q = m - n \geq \begin{cases} 1 & \text{im Fall } a \\ 2 & \text{im Fall } \bar{a}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Sei N die Anzahl aller Schnittpunkte $z(t')=z'(s')$. Darunter sind solche, für die $t' > s'$, welche somit keine Singularitäten des Feldes $w(t, s)$ ergeben. Wir nennen sie die neutralen Schnittpunkte, ihre Anzahl sei r , so dass $N=r+m+n$.

Für $N=2$ findet man durch Aufzählen der sechs Unterfälle, dass $j \geq 0$ für alle betrachteten Abbildungen, und für $N=4$ findet man leicht ein Beispiel, wo $j < 0$ und Lemma 2 ist bewiesen. Sobald man aber über die Abbildung $f: c \rightarrow d$ etwas mehr weiß, lässt sich die Schnittpunktzahl beträchtlich erhöhen. Wir benötigen:

LEMMA 3. *Seien c und d zwei Jordankurven, die sich nicht berühren und endlich viele Schnittpunkte haben, welche im Innern zweier abgeschlossener und getrennter Kurvenstücke I_1 und I_2 von c liegen; unter den endlich vielen Teilbogen, in welche d durch die Schnittpunkte zerlegt wird, gebe es genau zwei Bogen d_1, d_2 , von denen jeder je einen Endpunkt auf I_1 und I_2 hat. Die zwei abgeschlossenen Komplementärbogen von d zu $d_1 \cup d_2$ seien d_3 und d_4 , dabei schneide d_3 nur I_1 und d_4 nur I_2 . Falls für eine topologische und orientierungserhaltende Abbildung $f: c \rightarrow d$ die Durchschnitte $f(I_1) \cap d_3$ und $f(I_2) \cap d_4$ beide leer sind, so gilt $\Delta_c \arg v(z) \leq 0$.*

Beweis. Wir wählen die Parametrisierung von c und die Nummerierung der Schnittpunkte $z(t_i) = z'(s_i) = z'_i$, $(i=1, \dots, k)$, $(t_i \neq s_i)$ derart, dass $z(t_1), \dots, z(t_p)$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ auf I_1 und $z(t_{p+1}), \dots, z(t_k)$ mit $t_{p+1} < t_{p+2} < \dots < t_k$ auf I_2 liegen. Nach

Voraussetzung liegt $f(I_1)$ auf d nicht zwischen z'_i und z'_{i+1} für $i=1, \dots, p-1$. Daraus folgt, dass eine Beziehung $s_i > t_i$ (oder $s_i < t_i$) für ein einziges $i \in \{1, \dots, p\}$ dieselbe Relation für alle $i=1, \dots, p$ impliziert. Analoges gilt für $f(I_2)$ und es folgt: Ist ein Schnittpunkt neutral (bzw. nicht neutral, d.h. positiv oder negativ), so sind es auch alle Schnittpunkte, die auf demselben Kurvenstück I_1 oder I_2 liegen. Sind die Schnittpunkte auf einem Kurvenstück neutral und auf dem andern nicht, so sind die auf letzterem abwechselungsweise positiv und negativ, also

$$\sum_{(q)} j_q \geq -1 \quad \text{und} \quad j \geq 0.$$

Gibt es keine neutralen Schnittpunkte, so ist $\sum j_q = 0$, denn die Anzahl der Schnittpunkte ist gerade. In diesem Fall dürfen die Schnittpunkte sogar beliebig liegen, unabhängig von I_1 und I_2 .

Lemma 3 ist bewiesen.

§ 4. Die Eindeutigkeitssätze

Wir werden zwei Eindeutigkeitssätze über je eine $1-1$ -konforme Abbildung $h: G \rightarrow H$ beweisen. Die vorkommenden Voraussetzungen sind folgende:

- (A) Die durch h induzierte Zuordnung \tilde{h} der Punkte je zweier entsprechender nicht-punktförmiger Randkomponenten $C \in \Gamma$ und $D \in \Delta$ hat die Eigenschaft (A_0) des § 2.
- (B) Die Randkomponenten von G und H sind Punkte oder stark konvexe Jordan-kurven, und zwei einander entsprechende nicht-punktförmige Randkomponenten $C \in \Gamma$ und $D \in \Delta$ sind homothetisch⁶⁾.
- (C) Sei Γ'_0 die nur aus Punkten bestehende Teilmenge des perfekten Kerns Γ_0 ; dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{\Gamma - \Gamma'_0}$ der Menge $\Gamma - \Gamma'_0$ höchstens abzählbar.
- (D) Die Abbildung h lässt sich in jede kompakte Teilmenge E von Γ'_0 analytisch fortsetzen.

Erster Eindeutigkeitssatz

Seien G und H Gebiete der z - bzw. w -Ebene, die beide den Punkt ∞ enthalten und $h: G \rightarrow H$ eine $1-1$ -konforme Abbildung. Dann gilt

SATZ 3. *h hat die Form $h(z) = az + b$, $a > 0$, wenn h in einer Umgebung von $z = \infty$ folgende Entwicklung hat: $h(z) = az + b + c/z + d/z^2 + \dots$, $a > 0$, und die Voraussetzungen (A), (B), (C) und (D) erfüllt sind.*

⁶⁾ Zwei Kurven C und D heißen homothetisch, wenn sie durch eine Homothetie, d.i. eine Abbildung der Form $z \mapsto az + b$, $a > 0$, miteinander verknüpft sind; der Fixpunkt $z_0 = b/(1 - a)$ heißt Homothetiezentrum.

KOROLLAR. *Seien G und H zwei Kreisgebiete. Eine 1–1-konforme Abbildung $h:G \rightarrow H$ ist notwendig eine lineare Transformation, wenn die Voraussetzungen (A), (C) und (D) erfüllt sind.*

BEWEIS. In der genannten Entwicklung können wir $b=0$ und $a=1$ setzen, denn durch die Parallelverschiebung von H um den Vektor $-b$ und die Streckung mit dem Faktor $1/a$ werden die Voraussetzungen (A), (B), (C) und (D) nicht berührt.

Dann hat die in G reguläre Funktion $g(z)=h(z)-z$ in $z=\infty$ eine einfache Nullstelle, und die Behauptung lautet $g(z)\equiv 0$. Dagegen nehmen wir an, dass $g(z)\not\equiv 0$. Dann ist wegen $g(\infty)=0$ die Funktion g auch nicht konstant. Nun legen wir die w -Ebene derart auf die z -Ebene, dass die Koordinatenachsen zusammenfallen und betrachten zunächst die nach Voraussetzung (C) höchstens abzählbare Menge $\overline{\Gamma - \Gamma'_0}$. Diese Menge besitzt eine letzte nicht-verschwindende Ableitung Γ_1 , welche aus nur endlich vielen Randkomponenten besteht. Die ihr entsprechende Menge in Δ sei Δ_1 .

Nun wählen wir zwei Zahlen $R>0$ und $\varepsilon>0$ derart, dass der Kreis $|z|=R$ alle Randkomponenten von G in seinem Innern enthält und die Funktion $g(z)+a$ für alle a mit $|a|<\varepsilon$ in $|z|>R$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Nun können wir die w -Ebene um einen Vektor a_1 (wir wählen $|a_1|<\varepsilon/2$) derart verschieben, dass für alle Komponenten von Γ_1 und deren Bilden in Δ_1 folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- a) Je zwei einander entsprechende Komponenten von Γ_1 und Δ_1 schneiden sich entweder nicht oder in zwei getrennten Punkten.
- b) Im Falle zweier Schnittpunkte ist in diesen die Zuordnung $\tilde{g}_1(z)=\tilde{g}(z)+a_1$ ungleich Null; dabei bedeutet $\tilde{g}(z)=\tilde{h}(z)-z$ die induzierte Zuordnung der Randpunkte.

Die Möglichkeit von a) folgt aus der Voraussetzung (B), denn je zwei stark konvexe und homothetische Kurven sind entweder identisch oder haben höchstens zwei gemeinsame Punkte (Beweis siehe [3]); und in beiden Fällen kann man durch eine geeignete Parallelverschiebung der einen erreichen, dass sie sich entweder nicht oder in zwei getrennten Punkten schneiden.

Die Möglichkeit von b) folgt aus den Eigenschaften einer zulässigen Ränderzuordnung: Es gelte $\tilde{h}(z)=z$ für einen Punkt $z \in C$. Liegt dann z in M ,⁷⁾ so nehmen wir die beliebig kleine Verschiebung von H so vor, dass z nicht mehr auf dem Intervall $\tilde{h}(z)$ liegt, wohl aber der neue Schnittpunkt der Kurven.

Liegt z in $C-M$ und hat $\tilde{h}(z)$ nur den Punkt z als Urbild, so grenzen wir auf C ein beliebig kleines Intervall I ab, das z im Innern enthält, und wählen die Verschiebung derart, dass der Schnittpunkt von C und D in $J=\tilde{h}(I)$, aber ausserhalb I liegt.

Liegt schliesslich z in $C-M$ und wird ein ganzes Intervall I von C auf den Punkt

⁷⁾ Def. von M siehe § 2, Eigenschaft a).

$\tilde{h}(z)$ abgebildet, so können wir H derart verschieben, dass der Punkt $\tilde{h}(z)$ nicht mehr in I liegt, wohl aber der Schnittpunkt von C und D .

In allen Fällen kann man somit die beliebig kleine Verschiebung von H so wählen, dass ausser a) auch b) für alle endlich vielen $C \in \Gamma_1$ erfüllt ist, und nach allen weiteren hinreichend kleinen Verschiebungen kein Bildpunkt mit einem Urbildpunkt zusammenfällt.

Weiter behaupten wir: um jede Komponente $C \in \Gamma_1$ können wir eine in G und hinreichend nahe an C verlaufende Jordankurve c legen, dass für c und $h_1(c)$ die Voraussetzungen zu Lemma 3 erfüllt sind. Dabei ist $h_1(z) = h(z) + a_1$.

In den Fällen, wo C oder $\tilde{h}_1(C) = D$ punktförmig ist oder C und D keine Punkte gemeinsam haben, ist die Behauptung trivial. Wir nehmen somit an, dass C und $D = \tilde{h}_1(C)$ zwei verschiedene Schnittpunkte z_0 und z_1 haben. Nach b) gilt $\tilde{g}_1(z_i) \neq 0$ für $i = 0, 1$.

Durch einen Querschnitt q von G wollen wir ein Teilgebiet U_0 , das z_0 als Randpunkt hat, derart abgrenzen, dass \bar{U}_0 und $h_1(\bar{U}_0)$ punktfremd sind. Um q zu konstruieren, wählen wir auf C ein Intervall I , welches z_0 , aber nicht z_1 enthält und von der abgeschlossenen Punktmenge $J = \tilde{h}_1(I)$ einen positiven Abstand r besitzt. Die Endpunkte von I seien z_2 und z_3 , beide in $C - M$. Nun betrachten wir zwei Gebietspunkte Q_2, Q_3 von G , verbinden Q_2 mit z_2 durch einen Einschnitt q_2 und Q_3 mit z_3 durch einen Einschnitt q_3 . Wir können Q_2 und Q_3 so nahe an z_2 bzw. z_3 wählen, dass die Bilder $h_1(q_2)$ und $h_1(q_3)$ von q_2 und q_3 einen Abstand $> r/2$ haben. Die Punkte Q_2 und Q_3 können wir mit einem in G und so nahe an C verlaufenden Jordanbogen q_1 verbinden, dass q_1 zusammen mit q_2 und q_3 den gewünschten Querschnitt q bildet. Denn jeden Punkt P von q_1 können wir so nahe an I wählen, dass er auf einem Einschnitt p von P nach einem Punkt auf I liegt mit der Eigenschaft, dass der Abstand von p und $h_1(p)$ grösser als $r/2$ ist. Das durch q abgetrennte abgeschlossene Gebiet \bar{U}_0 hat somit mit $h_1(\bar{U})$ keine Punkte gemeinsam.

Eine entsprechende Konstruktion führen wir im andern Schnittpunkt z_1 von C und D durch und erhalten ein Teilgebiet U_1 mit dem Randpunkt z_1 und $h_1(\bar{U}_1) \cap \bar{U}_1 = \emptyset$.

Nun ziehen wir eine in G verlaufende Jordankurve c so nahe an C , dass die Schnittpunkte von c und $h_1(c)$ alle in $U_0 \cup U_1$ liegen. Zudem können wir c so wählen, dass $\bar{U}_i \cap c$ für $i = 0, 1$ aus einem einzigen Kurvenstück I_i besteht. Somit haben wir für c und $h_1(c)$ die Voraussetzungen zu Lemma 3 hergestellt.

Diese Konstruktion führen wir für alle Komponenten von Γ_1 durch und erhalten ein System von Jordankurven c in G , von denen jede eine Komponente von Γ_1 umschliesst, und die wir alle ausserhalb voneinander und in $|z| < R$ wählen können. Das Gebiet, welches durch Herausschneiden des abgeschlossenen Innern aller Kurven c aus G entsteht, sei G_1 . Nach Lemma 3 gilt $\Delta_c \arg g_1(z) \leq 0$ für alle c . Es gilt aber auch $\Delta_c \arg(g_1(z) + a) \leq 0$ für alle a mit hinreichend kleinem Betrag. Daher können wir nach dem in [13] ausführlich beschriebenen Verfahren in endlich vielen Schritten

ein Gebiet $G_k \subset G$ und eine Funktion g_k konstruieren mit folgenden Eigenschaften:

- 1) G_k ist berandet von endlich vielen Jordankurven c und einer in $\Gamma - (\overline{\Gamma} - \Gamma'_0) \subset \Gamma'_0$ liegenden kompakten Teilmenge E von Γ .
- 2) g_k hat in G_k wenigstens eine Nullstelle und
- 3) auf allen c ist $\Delta_c \arg g_k(z) \leq 0$.

Nach Voraussetzung (D) lässt sich die Beschränkung von h auf G_k und damit auch g_k in E analytisch fortsetzen. g_k ist somit holomorph im Gebiet G'_k , welches von den endlich vielen Jordankurven c berandet ist. Sie ist aber auch auf dem abgeschlossenen Gebiet $\overline{G'_k}$ holomorph und für jede Randkurve gilt $\Delta_c \arg g_k(z) \leq 0$. Das ist ein Widerspruch zum Argumentenprinzip. Satz 3 ist bewiesen.

Zweiter Eindeutigkeitssatz

Diesmal machen wir im Anschluss an [3], pp. 187ff folgende Voraussetzungen:

In den Randkomponentenmengen Γ und Δ von G bzw. H gibt es je zwei isolierte Komponenten C_1, C_2 und D_1, D_2 , wobei

- 1) $C_1 = D_1$ eine im Endlichen verlaufende Jordankurve ist, die G bzw. H im Innern enthält,
- 2) C_2 und D_2 homothetisch und sternförmig sind bezüglich des im Innern der Kurven gelegenen Homothetiezentrums.

Nun sei eine 1–1-konforme Abbildung $h: G \rightarrow H$ gegeben, welche C_1 in $D_1 = C_1$ und C_2 in D_2 überführt; es gilt der

SATZ 4. *Unter den obigen Voraussetzungen ist h die Identität, wenn*

- (i) *für die von C_1, D_1 und C_2, D_2 verschiedenen Paare entsprechender Randkomponenten (B) gilt,*
- (ii) *für h die Voraussetzung (A) erfüllt ist und $\tilde{h}(z_1) = z_1$ für einen Punkt $z_1 \in C_1$ und*
- (iii) *die Voraussetzungen (C) und (D) erfüllt sind.*

Beweis. Wiederum betrachten wir die Funktion $g(z) = h(z) - z$ und behaupten, dass $g = 0$ ist. Wenn wir $g \neq 0$ annehmen, so ist $g(z)$ auch nicht konstant. Die induzierte Zuordnung der Punkte von C_1 auf $D_1 = C_1$ ist, da diese Kurve in G und H isoliert ist, eine topologische Abbildung, die wir ebenfalls h nennen. Dann definiert $g(z)$ auf C_1 ein Vektorfeld, wobei die Endpunkte der Vektoren wieder auf C_1 liegen. Hätte $g(z)$ auf C_1 keine Nullstelle, so wäre die Argumentänderung von $g(z)$ bei einmaligem *positivem* Umlauf von z auf C_1 gleich 2π . Wir wissen aber, dass $g(z)$ wenigstens in z_1 auf C_1 eine Nullstelle hat. Da C_1 isolierte Randkomponente ist, können wir z_1 mit einem hinreichend kleinen und in G verlaufenden Kreisbogen derart umgehen, dass darauf

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \Delta \arg g(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int d \log g(z) < 0 \quad \text{wird.}$$

Dass auf C_1 die Nullstellen isoliert sind, überlegt man sich folgendermassen:

Das Innere von $C_1 = D_1$ bilden wir durch ψ 1-1-konform auf die Kreisscheibe $\{x:|x|<1\}$ ab und betrachten die 1-1-konforme Abbildung $\Psi = \psi \circ h \circ \psi^{-1}: \psi(G) \rightarrow \psi(H)$. Der Rand $|x|=1$ ist in beiden Gebieten $\psi(G)$ und $\psi(H)$ isoliert und Ψ lässt sich auf $|x|=1$ analytisch fortsetzen, also hat Ψ auf $|x|=1$ isolierte Nullstellen. Nun hat aber $\Psi(x) - x$ genau dann eine Nullstelle in $x_0 = \psi(z_0)$, wenn $g(z_0) = h(z_0) - z_0 = 0$ ist, also sind die Nullstellen von $g(z)$ auf C_1 isoliert.

Wir können daher jede Nullstelle mit einem hinreichend kleinen und in G verlaufenden Kreisbogen umgehen und erhalten von jeder Nullstelle einen negativen Beitrag. Also ist die genannte Argumentänderung kleiner als 2π , und da sie ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, haben wir $\Delta_{C_1} \arg g(z) \leq 0$ bei positivem Umlauf von z auf der Kurve C'_1 , welche mit C_1 zusammenfällt bis auf die Kreisbogen um die Nullstellen. Dieselbe Argumentenbedingung ist aber auch erfüllt für eine in G hinreichend nahe an C'_1 verlaufende Jordankurve c_1 .

Die isolierte Randkurve C_2 und ihr Bild D_2 sind sternförmig und homothetisch, sie haben somit entweder keine Schnittpunkte oder sind identisch. Im ersten Fall ist $1/2\pi \Delta_{C_2} \arg g(z) \leq -1$ bei negativem Umlauf von z auf C_2 ; ($g(z)$ bedeutet dabei wiederum die durch g induzierte topologische Randabbildung).

Ist $C_2 = D_2$, so gilt dieselbe Relation, falls $g(z)$ keine Nullstellen hat auf C_2 . Allfällige Nullstellen können wir wieder umgehen mit kleinen Kreisbogen in G , auf denen die Integration negative Beiträge liefert. Somit haben wir auf der Kurve C'_2 ($= C_2$ bis auf die Kreisbogen um die Nullstellen)

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{C'_2} \arg g(z) \leq -1$$

bei negativem Umlauf von z auf C'_2 . Dieselbe Beziehung gilt auch für eine in G und hinreichend nahe an C'_2 verlaufende Jordankurve c_2 , die c_1 nicht treffen soll.

Nun existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle a mit $|a| < \varepsilon$ die obigen Argumentbedingungen auch für die Funktion $g(z) + a$ und die Kurven c_1, c_2 noch erfüllt sind, für c_1 bei positivem, für c_2 bei negativem Umlauf.

Nun betrachten wir die nach Voraussetzung (C) höchstens abzählbare Menge $\overline{\Gamma - \Gamma'_0}$ (ohne C_1, C_2) und bilden ihre letzte nicht-verschwindende Ableitung Γ_1 , die nur aus endlich vielen Komponenten besteht. Wie oben fahren wir weiter und stellen in endlich vielen Schritten folgende Situation her:

Wir haben ein Gebiet $G_r \subset G$, das berandet ist von endlich vielen Jordankurven c_1, c_2, \dots, c_k und eine Funktion $g_r(z)$, die in \bar{G}_r holomorph ist. Zudem gilt

$$\Delta_c \arg g_r(z) \leq \begin{cases} 0 & \text{für } c = c_1 \quad (\text{bei positivem Umlauf}) \\ -1 & \text{für } c = c_2 \quad (\text{bei neg. Umlauf}) \\ 0 & \text{für } c = c_i \quad (i = 3, \dots, k) \quad (\text{bei neg. Umlauf}) \end{cases}$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^k \Delta_{c_i} \arg g_r(z) \leq -1,$$

im Widerspruch zur Tatsache, dass die Anzahl der Nullstellen nicht-negativ ist.

Die Voraussetzungen zu Satz 4 lassen sich folgendermassen abändern: Die Gebiete G und H liegen im Äussern der in 1) genannten Jordankurve und enthalten beide den Punkt ∞ . Im übrigen sollen die gleichen Voraussetzungen gelten. Die Funktion $g(z) = h(z) - z$ hat in diesem Fall höchstens zwei Pole: $P \leq 2$, und bezeichnet N die Anzahl der Nullstellen, so wird $N - P \geq -2$. Die obigen Integrationen müssen nun alle im negativen Umlaufsinn durchgeführt werden. Wir erhalten $(1/2\pi) \Delta_{c_1} \arg g_r(z) < -1$ und $(1/2\pi) \sum_{(c)} \Delta_c \arg g_r(z) < -2$. Wiederum folgt $g(z) \equiv 0$.

LITERATUR

- [1] AHLFORS, L. and BEURLING, A., *Conformal invariants and functiontheoretic nullsets*, Acta math. 83 (1950), 101–129.
- [2] CARLEMAN, T., *Sur la représentation conforme des domaines multiplement connexes*, C. R. Acad. Sci. Paris. 168 (1919), 843–845.
- [3] COURANT, R., *Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces*, Intersci. Publ., N.Y. 1950.
- [4] GRÖTZSCH, H., *Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip*, Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math. phys. Kl. 87 (1935).
- [5] GRÖTZSCH, H., *Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche*, Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math. phys. Kl. 87 (1935).
- [6] GOLUSIN, G. M., *Geometrische Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1957.
- [7] HOPF, H., *Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven*, Composito Mat. 2 (1935).
- [8] JENKINS, J. A., *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Ergebn. d. Mathem. [N.F.] Heft 18, Springer-Verlag 1958.
- [9] KERÉKJARTÓ, B. von, *Vorlesungen über Topologie I*, Grundlehren Bd. VIII, Springer, Berlin 1923.
- [10] KOEBE, P., *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung*, Math. Z. 7 (1920), 235–248.
- [11] NATANSON, I. P., *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Akademie Verlag, Berlin 1954.
- [12] SHIFFMAN, M., *Uniqueness theorems for conformal mapping of multiply connected domains*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 27 (1941).
- [13] STREBEL, K., *Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung*, Ann. Acad. Sci. Fennicae [Ser. A] 101 (1951), 1–21.
- [14] STREBEL, K., *Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs*, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 101–127.

Eingegangen den 6. Oktober 1967.