

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Cohomologie des algèbres commutatives topologiques.
Autor: André, Michel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32921>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Cohomologie des algèbres commutatives topologiques

MICHEL ANDRÉ

Introduction

Ce travail est consacré à la définition et à l'étude de groupes de cohomologie $H_t^n(A, B, W)$ où B est une A -algèbre commutative topologique et W un B -module. En particulier il est intéressant d'étudier d'une manière approfondie le premier groupe de cohomologie puisque sa nullité est équivalente à la lissité formelle de l'algèbre topologique en question. A la base de l'étude de ces groupes de cohomologie «topologique» se trouve évidemment la théorie des groupes de cohomologie «discrète» (et d'homologie), comme elle est développée dans le fascicule [An]: on en rappelle les points essentiels au cours du premier paragraphe.

Comme dans le cas discret, on commence par établir d'une part deux suites exactes longues (Propositions 2.1 et 2.2)

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_t^n(A, B, W') \rightarrow H_t^n(A, B, W) \rightarrow H_t^n(A, B, W'') \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_t^n(B, C, W) \rightarrow H_t^n(A, C, W) \rightarrow H_t^n(A, B, W) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

d'autre part un théorème de décomposition (Théorème 3.2)

$$H_t^n(A, B \otimes_A C, W) \cong H_t^n(A, B, W) \oplus H_t^n(A, C, W)$$

avec des conditions faisant intervenir des Tor. La démonstration de ce théorème est longue. Mais une fois ce cap franchi, on établit divers résultats sans trop de difficultés.

Dans une première étape, on met en relation les propriétés de lissité formelle de la A -algèbre topologique B et de la A' -algèbre topologique $B \otimes_A A'$. On établit deux résultats (Propositions 4.2 et 4.3); ils sont connus mais sous des hypothèses plus fortes. Dans une deuxième étape, on démontre que les groupes de cohomologie «topologique» et les groupes de cohomologie «discrète» sont isomorphes dans le cas d'une algèbre noethérienne préadmissible (Théorème 5.3). Par conséquent dans ce cas il est possible de caractériser les algèbres formellement lisses à l'aide du premier groupe d'homologie (Corollaire 5.4).

Dans une dernière étape, on met en relation le premier groupe d'homologie (étroitement lié à la notion de lissité formelle) et le deuxième groupe d'homologie (étroitement lié à la notion de régularité). En fait on établit (Théorème 6.7) un isomorphisme

$$H_1(k, A, K) \otimes_K L \cong H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L)$$

où A est algèbre locale sur le corps k de caractéristique $p > 0$ et où K et L sont les corps résiduels des anneaux locaux A et $A \otimes_k k^{1/p}$. De cet isomorphisme découlent en

particulier deux résultats intéressants. D'une part on obtient une nouvelle démonstration du fait qu'une algèbre locale noethérienne sur un corps est formellement lisse pour sa topologie préadique si et seulement si elle est géométriquement régulière (Corollaire 6.8). D'autre part on obtient une généralisation du critère de séparabilité de MacLane (Théorème 6.4). Pour une extension de corps, on calcule l'espace vectoriel $H_1(k, K, K)$ au moyen du noyau de l'homomorphisme canonique de $K \otimes_k k^{1/p}$ dans un corps algébriquement clos contenant K .

I. Homologie des algèbres commutatives discrètes

Avant de passer à l'étude homologique des algèbres commutatives topologiques rappelons les points essentiels de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives discrètes. Pour les définitions, pour les démonstrations et pour des résultats plus complets, je renvoie au fascicule [An]. Tous les anneaux ont des unités.

On part d'un triple (A, B, W) où A est un anneau commutatif, B une A -algèbre commutative et W un B -module. On lui associe des groupes d'homologie $H_n(A, B, W)$ pour $n=0, 1, 2, \dots$. La construction se fait au moyen d'un complexe inspiré de la théorie de l'homologie singulière, voir [An] p. 61–63. Les foncteurs H_n covariant en A , en B et en W jouissent en particulier des propriétés suivantes. Nous les retrouverons dans le cas topologique.

En premier lieu, on rencontre deux longues suites exactes, comme il se doit pour une théorie d'homologie.

PROPOSITION 1.1. *Soient une A -algèbre B et une suite exacte de B -modules:*

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0.$$

Il existe alors une suite exacte longue:

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B, W') \rightarrow H_n(A, B, W) \rightarrow H_n(A, B, W'') \rightarrow H_{n-1}(A, B, W') \rightarrow \cdots.$$

Voir [An] Proposition 15.2.

PROPOSITION 1.2. *Soient une A -algèbre B , une B -algèbre C et un C -module W . Il existe alors une suite exacte longue:*

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B, W) \rightarrow H_n(A, C, W) \rightarrow H_n(B, C, W) \rightarrow H_{n-1}(A, B, W) \rightarrow \cdots.$$

Voir [An] Proposition 18.2.

En second lieu, on rencontre une formule de décomposition pour le produit tensoriel.

PROPOSITION 1.3. *Soient deux A -algèbres B et C et un $B \otimes_A C$ -module W . Si l'on a*

$$\mathrm{Tor}_i^A(B, C) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots$$

alors l'homomorphisme naturel

$$H_*(A, B, W) \oplus H_*(A, C, W) \rightarrow H_*(A, B \otimes_A C, W)$$

est un isomorphisme.

Voir [An] Proposition 19.3.

Comme nous le savons, nous retrouverons ces trois résultats dans le cas topologique. En ce qui concerne les deux premiers, le passage du cas discret au cas topologique est immédiat. Il n'en est pas ainsi du troisième, il nous faudra remonter à la démonstration. C'est d'ailleurs le seul point essentiel où il est nécessaire d'utiliser à nouveau la définition explicite des groupes d'homologie.

L'intérêt des groupes d'homologie est dû en particulier aux résultats suivants concernant les basses dimensions.

PROPOSITION 1.4. *Soient une A -algèbre B et un B -module W . Alors le groupe $H_0(A, B, W)$ est isomorphe au groupe des A -différentielles de B dans W .*

Voir [An] Proposition 25.1.

PROPOSITION 1.5. *Soient un corps K et un sous-corps k . Alors le groupe $H_1(k, K, K)$ est nul si l'extension est séparable.*

Voir [An] Proposition 22.2.

La réciproque de cette proposition est un résultat bien connu : voir [Gr] Théorème 19.6.1. Nous la retrouverons d'ailleurs sous la forme d'un isomorphisme généralisant le critère de séparabilité de MacLane.

PROPOSITION 1.6. *Soient un corps K et un sous-corps k . Alors le groupe $H_2(k, K, K)$ est nul.*

Voir [An] Proposition 22.2.

Remarquons que ce résultat est équivalent à l'existence d'une base de transcendance séparante pour une extension séparable de type fini.

PROPOSITION 1.7. *Soit un anneau local noethérien A de corps résiduel L . Alors le groupe $H_2(A, L, L)$ est nul si et seulement si l'anneau A est régulier.*

Voir [An] Propositions 27.1 et 27.2.

Ce résultat découle du fait que $H_2(A, L, L)$ est isomorphe au quotient $\text{Tor}_2^A(L, L) / \text{Tor}_1^A(L, L) \cdot \text{Tor}_1^A(L, L)$.

Bien entendu, on a de même des groupes de cohomologie $H^n(A, B, W)$ pour $n=0, 1, 2, \dots$. Les foncteurs H^n sont covariants en W et contravariants en A et en B . On a alors sept propositions duales des précédentes. Ceci n'est pas surprenant puisque les groupes d'homologie et de cohomologie sont liés les uns aux autres par une suite spectrale.

PROPOSITION 1.8. *Soient une A -algèbre B et un B -module W . Il existe alors une suite*

spectrale

$$\mathrm{Ext}_B^p(H_q(A, B, B), W) \Rightarrow_p H^n(A, B, W).$$

Voir [An] Proposition 16.1.

Nous sommes prêts maintenant à passer au cas topologique.

II. Définition et suites exactes

Considérons deux anneaux commutatifs A et B munis de topologies linéaires, un homomorphisme continu de A dans B et un B -module W discret annulé par un idéal ouvert de B . Dorénavant on parlera plus simplement de l'anneau topologique A , de la A -algèbre topologique B et du B -module W , les conditions supplémentaires étant sous-entendues. Considérons maintenant les paires du type suivant: (A_α, B_α) où A_α est un idéal ouvert de A et B_α un idéal ouvert de B avec $A_\alpha \cdot B \subset B_\alpha$ et $B_\alpha \cdot W = 0$. Puis on ordonne l'ensemble de ces paires:

$$(A_\alpha, B_\alpha) > (A_\beta, B_\beta) \quad \text{dès que} \quad A_\alpha \supset A_\beta \quad \text{et} \quad B_\alpha \supset B_\beta.$$

On obtient ainsi un ensemble filtrant et on pose

$$H_t^n(A, B, W) = \varinjlim H^n(A/A_\alpha, B/B_\alpha, W).$$

Remarquons que dans la définition de ces groupes de cohomologie on peut remplacer l'ensemble filtrant utilisé par n'importe lequel de ses sous-ensembles cofinaux. Il est alors clair que $H_t^n(A, B, W)$ est un foncteur covariant en W , contravariant en A et en B et que les deux résultats suivants découlent immédiatement des résultats correspondants du cas discret.

PROPOSITION 2.1. *Soient une A -algèbre topologique B et une suite exacte courte de B -modules:*

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0.$$

Il existe alors une suite exacte longue:

$$\cdots \rightarrow H_t^n(A, B, W') \rightarrow H_t^n(A, B, W) \rightarrow H_t^n(A, B, W'') \rightarrow H_t^{n+1}(A, B, W') \rightarrow \cdots.$$

Démonstration. Appliquer la proposition 1.1 et le fait que le foncteur \varinjlim en question est exact.

PROPOSITION 2.2. *Soient une A -algèbre topologique B , une B -algèbre topologique C et un C -module W . Il existe alors une suite exacte longue:*

$$\cdots \rightarrow H_t^n(B, C, W) \rightarrow H_t^n(A, C, W) \rightarrow H_t^n(A, B, W) \rightarrow H_t^{n+1}(B, C, W) \rightarrow \cdots.$$

Démonstration. Appliquer la proposition 1.2 et le fait que le foncteur \varinjlim en question est exact.

Le troisième résultat, correspondant à la proposition 1.3, apparaît au cours du troisième paragraphe.

Le premier groupe de cohomologie $H_t^1(A, B, W)$ est bien connu et est dénoté par $\text{Exalcotop}_A(B, W)$ dans [Gr] par exemple. Ainsi la suite exacte de la proposition 2.2 prolonge une suite exacte plus courte bien connue (voir [Gr] Corollaire 20.3.7). En outre le foncteur $H_t^1(A, B, \cdot)$ est nul si et seulement si la A -algèbre B est *formellement lisse* (voir [Gr] Définition 19.3.1 et Proposition 19.4.4).

Dans le cas général, il est difficile de comparer $H_t^n(A, B, W)$ avec $H^n(A, B, W)$ où A et B sont débarrassés de leurs topologies. Pour le moment contentons-nous du résultat suivant en basses dimensions. Il sera généralisé dans le cas noethérien au cours du cinquième paragraphe. Notons la convention suivante pour un anneau topologique A : pour indiquer qu'il s'agit de l'anneau muni de sa topologie, on écrit A_t et pour indiquer qu'il s'agit de l'anneau débarrassé de sa topologie, c'est-à-dire muni de la topologie discrète, on écrit A_d .

LEMME 2.3. *Soient un anneau topologique A et un A -module W . Supposons la topologie de A préadmissible. Alors les groupes de cohomologie*

$$H_t^0(A_d, A_t, W) \quad \text{et} \quad H_t^1(A_d, A_t, W)$$

sont nuls.

Démonstration. Il faut donc démontrer:

$$\varinjlim \text{Der}(A, A/I^n, W) = 0 = \varinjlim \text{Hom}_A(I^n/I^{2n}, W)$$

pour n assez grand et tendant vers l'infini, I étant un idéal de définition de la topologie de A : voir [An] Proposition 25.1. La première limite est nulle car $\text{Der}(A, A/I^n, W)$ est nul. La deuxième limite est nulle car l'homomorphisme canonique de I^{2n}/I^{4n} dans I^n/I^{2n} est nul.

COROLLAIRE 2.4. *Soient une A -algèbre topologique B et un B -module W . Supposons la topologie de A préadmissible. Alors les homomorphismes canoniques en basses dimensions sont respectivement*

$$\begin{aligned} H_t^0(A_t, B, W) &\rightarrow H_t^0(A_d, B, W) && \text{un isomorphisme} \\ H_t^1(A_t, B, W) &\rightarrow H_t^1(A_d, B, W) && \text{un isomorphisme} \\ H_t^2(A_t, B, W) &\rightarrow H_t^2(A_d, B, W) && \text{un monomorphisme.} \end{aligned}$$

Démonstration. Appliquer le lemme 2.3 et la proposition 2.2 pour le triple suivant

$$A_d \rightarrow A_t \rightarrow B.$$

III. Produit tensoriel

Soient B et C deux A -algèbres topologiques. Considérons le produit tensoriel

$B \otimes_A C$ muni de la topologie suivante: les idéaux

$$\text{Im}(B_\beta \otimes_A C) + \text{Im}(B \otimes_A C_\gamma)$$

où B_β est un idéal ouvert de B et C_γ un idéal ouvert de C , forment un système fondamental de voisinages de 0. On a alors

$$B \otimes_A C / \text{Im}(B_\beta \otimes_A C) + \text{Im}(B \otimes_A C_\gamma) = B/B_\beta \otimes_A C/C_\gamma.$$

Ceci étant, nous allons voir sous quelle condition on a un isomorphisme

$$H_t^n(A, B \otimes_A C, W) \cong H_t^n(A, B, W) \oplus H_t^n(A, C, W)$$

(voir la proposition 1.3 pour le cas discret). Commençons par un lemme (voir [An] Proposition 17.1 pour le cas discret).

LEMME 3.1. *Soient une A -algèbre topologique B et un B -module W . Soient encore $(A_\alpha \dots)$ un système fondamental d'idéaux ouverts de A et $(B_\alpha \dots)$ un système fondamental d'idéaux ouverts de B avec $A_\alpha \cdot B \subset B_\alpha$ et $B_\alpha \cdot W = 0$. Soient enfin pour chaque paire (A_α, B_α) une A/A_α -algèbre simpliciale libre X_α^* avec une augmentation $\varepsilon_\alpha: X_\alpha^0 \rightarrow B/B_\alpha$ et pour chaque paire de paires $(A_\alpha, B_\alpha) > (A_\beta, B_\beta)$ un homomorphisme $x_{\alpha\beta}^*: X_\beta^* \rightarrow X_\alpha^*$ de A/A_β -algèbres simpliciales augmentées, tout cela satisfaisant à la condition de naturalité: $x_{\alpha\beta}^* \circ x_{\beta\gamma}^* = x_{\alpha\gamma}^*$. Ceci étant, les X_α^* ont en particulier une structure de groupe abélien simplicial et on suppose ce qui suit de leur homologie absolue. D'une part l'augmentation ε_α identifie $H_0(X_\alpha^*)$ à B/B_α et $H_0(x_{\alpha\beta}^*)$ à l'homomorphisme canonique de B/B_β sur B/B_α . D'autre part pour tout α il existe un β plus petit tel que $H_m(x_{\alpha\beta}^*)$ soit nul pour tout $m > 0$. Alors sous ces conditions pour tout $n \geq 0$, le n -ième groupe de cohomologie $H_t^n(A, B, W)$ est isomorphe au n -ième groupe d'homologie du complexe suivant:*

$$\dots \rightarrow \varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, X_\alpha^{n-1}, W) \rightarrow \varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, X_\alpha^n, W) \rightarrow \dots$$

la différentielle étant obtenue par somme alternée des différents homomorphismes de face.

Démonstration. Utilisons la notation de [An] Paragraphe 15 et considérons le complexe double suivant:

$$\lim_{\rightarrow} \prod_{\Delta_{i_1 p} A/A_\alpha \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_{i_0} A/A_\alpha \rightarrow X_\alpha^q} \text{Der}(A/A_\alpha, \Delta_{i_p} A/A_\alpha, W).$$

Pour la définition des deux différentielles, voir [An] Proposition 4.1. Nous allons voir que les deux suites spectrales correspondant à ce complexe double sont dégénérées et donnent les isomorphismes souhaités.

Dans la première suite spectrale (d'abord la différentielle concernant p , puis celle concernant q , pour obtenir le terme E_2) le groupe $E_1^{q,p}$ est isomorphe au groupe $\varinjlim H^p(A/A_\alpha, X_\alpha^q, W)$. Mais X_α^q est une A/A_α -algèbre libre, par conséquent $E_1^{q,p}$ est nul si p n'est pas nul et $E_1^{q,0}$ est isomorphe à $\varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, X_\alpha^q, W)$ selon [An]

Corollaire 16.3. Ainsi la suite spectrale en question est dégénérée et fait intervenir le groupe suivant en dimension n : $H_n(\lim_{\rightarrow} \text{Der}(A/A_\alpha, X_\alpha^*, W))$.

Passons maintenant à la deuxième suite spectrale. Nous allons rencontrer des groupes de cohomologie singulière notés H_{sing}^* et des groupes d'homotopie notés π^* . Nous utiliserons le théorème de Moore: les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie absolue d'un groupe abélien simplicial sont isomorphes. Pour calculer le terme E_1 de la suite spectrale en question, on peut écrire le complexe double sous la forme suivante:

$$\lim_{\rightarrow} \prod_{\Delta_{i_p} A/A_\alpha \rightarrow \dots \Delta_{i_0} A/A_\alpha} \underbrace{X_\alpha^q \times \dots \times X_\alpha^q}_{i_0 \text{ fois}} \underbrace{W \times \dots \times W}_{i_p \text{ fois}}$$

Par conséquent le terme $E_1^{p,q}$ est isomorphe au groupe suivant:

$$\lim_{\rightarrow} \prod_{\Delta_{i_p} A/A_\alpha \rightarrow \dots \Delta_{i_0} A/A_\alpha} H_{\text{sing}}^q(\underbrace{X_\alpha^* \times \dots \times X_\alpha^*}_{i_0 \text{ fois}}, \underbrace{W \times \dots \times W}_{i_p \text{ fois}})$$

Mais par hypothèse pour tout α , il existe un β plus petit tel que $H_m(x_{\alpha\beta}^*)$ soit nul pour tout $m > 0$, autrement dit tel que $\pi_m(x_{\alpha\beta}^*)$ soit nul pour tout $m > 0$ et tout 0-simplexe de base. En conséquence, la restriction de $x_{\alpha\beta}^*$ à chacune des composantes connexes de X_β^* est homotope à 0. Il en est donc de même de tout produit $x_{\alpha\beta}^* \times \dots \times x_{\alpha\beta}^*$. Par suite on a

$$H_{\text{sing}}^q(x_{\alpha\beta}^* \times \dots \times x_{\alpha\beta}^*, W \times \dots \times W) = 0 \quad \text{si } q > 0.$$

Ainsi $E_1^{p,q}$ est nul si q n'est pas nul et $E_1^{p,0}$ est isomorphe à

$$\lim_{\rightarrow} \prod_{\Delta_{i_p} A/A_\alpha \rightarrow \dots \Delta_{i_0} A/A_\alpha} \underbrace{B/B_\alpha \times \dots \times B/B_\alpha}_{i_0 \text{ fois}} \underbrace{W \times \dots \times W}_{i_p \text{ fois}}$$

c'est-à-dire à

$$\lim_{\rightarrow} \prod_{\Delta_{i_p} A/A_\alpha \rightarrow \dots \Delta_{i_0} A/A_\alpha \rightarrow B/B_\alpha} \text{Der}(A/A_\alpha, \Delta_{i_p} A/A_\alpha, W).$$

Par conséquent la suite spectrale en question est dégénérée et fait intervenir le groupe $H_t^n(A, B, W)$ en dimension n .

En résumé nous avons démontré que le complexe total associé au complexe double décrit au début de la démonstration a l'homologie suivante en dimension n :

$$H_t^n(A, B, W) \cong H_n(\lim_{\rightarrow} \text{Der}(A/A_\alpha, X_\alpha^*, W)).$$

Le lemme est donc démontré. On peut le démontrer sous une hypothèse plus faible (β dépendant non seulement de α mais encore de m) en utilisant le théorème de Hurewicz dans le cas relatif. Mais nous en savons bien assez pour démontrer le résultat qui nous intéresse.

Quand on désire appliquer le lemme ci-dessus, il est parfois facile de trouver de

«bons» x_α^* mais plus difficile de les relier par de «bons» $x_{\alpha\beta}^*$. On sent le besoin d'avoir dans une certaine mesure une construction fonctorielle. On peut utiliser dans ce sens la construction pas à pas décrite dans [An] Paragraphe 6 et dans [An] Démonstration de la proposition 17.2. Résumons-en les points essentiels.

On part avec un anneau discret X et une X -algèbre discrète Y et on va construire une X -algèbre simpliciale libre au-dessus de Y : on note par $\varepsilon_n^i: Y_n \rightarrow Y_{n-1}$ les différentes faces et par $\varepsilon_0^0: Y_0 \rightarrow Y_{-1} = Y$ l'augmentation. La construction se fait pas à pas pour $n=0, 1, 2, \dots$. Au pas n on connaît déjà Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} et les homomorphismes les reliant les uns aux autres et on construit Y_n et les homomorphismes le reliant aux précédents. A chaque pas un choix est à effectuer. D'une manière précise au pas n on doit choisir une X -algèbre libre Ω_n , un X -homomorphisme $\omega_n: \Omega_n \rightarrow Y_{n-1}$ et une base de Ω_n , le tout satisfaisant à la condition suivante: ω_n envoie les générateurs de Ω_n dans l'idéal $\text{Ker } \varepsilon_{n-1}^0 \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon_{n-1}^{n-1}$. Alors au moyen de $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ on construit Y_n et les homomorphismes le concernant.

Cette construction pas à pas jouit des deux propriétés suivantes.

A) Si les images par ω_n des générateurs de Ω_n engendrent l'idéal $\text{Ker } \varepsilon_{n-1}^0 \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon_{n-1}^{n-1}$, alors le groupe d'homologie absolue $H_{n-1}(Y_*)$ est nul.

B) Si deux X -algèbres simpliciales Y'_* et Y''_* au-dessus de Y' et de Y'' peuvent être obtenues par la construction pas à pas, alors la X -algèbre simpliciale $Y_* = Y'_* \otimes_X Y''_*$ au-dessus de $Y = Y' \otimes_X Y''$ peut être obtenue par la construction pas à pas. (Autrement dit le produit tensoriel de deux constructions pas à pas est une construction pas à pas; on a en particulier $\omega_n = \omega'_n \otimes \omega''_n$.)

Remarquons finalement que le choix des ω_n dans la construction pas à pas peut être fait de manière canonique en prenant comme ensemble de générateurs de Ω_n l'ensemble des éléments de $\text{Ker } \varepsilon_{n-1}^0 \cap \dots \cap \text{Ker } \varepsilon_{n-1}^{n-1}$. On peut alors utiliser la propriété A. On dénote par $S_*(X, Y)$ l'algèbre simpliciale obtenue par ce choix canonique de tous les ω_n .

Venons-en maintenant au théorème de décomposition qui est le sujet de ce paragraphe.

THÉOREME 3.2. *Soient deux A -algèbres topologiques B et C et un $B \otimes_A C$ -module W . Soient $(A_\alpha \dots)$, $(B_\alpha \dots)$ et $(C_\alpha \dots)$ des systèmes fondamentaux d'idéaux ouverts de A , de B et de C respectivement avec $A_\alpha \cdot B \subset B_\alpha$ et $A_\alpha \cdot C \subset C_\alpha$. Supposons en outre que pour tout i avec $0 < i \leq N$ et pour tout α , il existe un β plus petit que α tel que l'homomorphisme suivant soit nul:*

$$\text{Tor}_i^{A/A_\beta}(B/B_\beta, C/C_\beta) \rightarrow \text{Tor}_i^{A/A_\alpha}(B/B_\alpha, C/C_\alpha).$$

Alors sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$H_i^j(A, B \otimes_A C, W) \rightarrow H_i^j(A, B, W) \oplus H_i^j(A, C, W)$$

est un isomorphisme pour $j=0, 1, 2, \dots, N$ et un monomorphisme pour $j=N+1$.

Démonstration. Nous allons utiliser la construction pas à pas décrite ci-dessus et cela de la manière suivante. Soit $N \geq 0$. A deux X -algèbres Y' et Y'' on va faire correspondre de manière fonctorielle une X -algèbre simpliciale libre $S_*^N(X, Y', Y'')$ au-dessus de $Y' \otimes_X Y''$. C'est l'algèbre simpliciale obtenue au moyen de la construction pas à pas en choisissant les homomorphismes ω_n de la manière suivante: pour $n=0, 1, \dots, N+1$, on prend $\omega_n = \omega'_n \otimes \omega''_n$ où les ω'_n et ω''_n sont canoniques et pour $n=N+2, N+3, \dots$, on prend ω_n canonique. Autrement dit on procède comme suit. On considère l'algèbre simpliciale $S_*(X, Y')$ au-dessus de Y' et l'algèbre simpliciale $S_*(X, Y'')$ au-dessus de Y'' . On en prend le produit tensoriel qui est une algèbre simpliciale au-dessus de $Y' \otimes_X Y''$. Comme on le sait (propriété B) cette algèbre simpliciale est obtenue par la construction pas à pas. On garde alors seulement les pas $0, 1, \dots, N, N+1$ de cette construction (autrement dit on garde les simplexes jusqu'à la dimension $N+1$ incluse). Puis on termine cette construction partielle de manière canonique. Vu le caractère fonctoriel de cette dernière opération, on peut construire un homomorphisme naturel d'algèbres simpliciales augmentées:

$$v^N: S_*(X, Y') \otimes_X S_*(X, Y'') \rightarrow S_*^N(X, Y', Y'')$$

qui est un isomorphisme en dimension $0, 1, \dots, N, N+1$. Les groupes d'homologie absolue de $S_*^N(X, Y', Y'')$ sont les suivants:

$$\begin{aligned} H_n(S_*^N(X, Y', Y'')) &= \text{Tor}_n^X(Y', Y'') \quad \text{si } 0 \leq n \leq N \\ &= 0 \quad \text{si } N < n. \end{aligned}$$

Dans le premier cas on peut remplacer le but de v^N par la source de v^N et c'est alors immédiat car $S_*(X, Y)$ est une résolution libre du X -module Y en vertu de la propriété A. Dans le deuxième cas on applique la propriété A directement.

Ceci étant, voici la démonstration du théorème. On applique le lemme 3.1 à la A -algèbre topologique $B \otimes_A C$ en prenant

$$X_\alpha^* = S_*^N(A/A_\alpha, B/B_\alpha, C/C_\alpha).$$

Vu les hypothèses du théorème il est immédiat de vérifier les conditions du lemme. Du lemme découle donc le fait que le groupe

$$H_i^n(A, B \otimes_A C, W)$$

est isomorphe au n -ième groupe d'homologie du complexe suivant:

$$\varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, S_*^N(A/A_\alpha, B/B_\alpha, C/C_\alpha), W).$$

Considérons d'autre part le complexe suivant:

$$\begin{aligned} \varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, S_*(A/A_\alpha, B/B_\alpha) \otimes_{A/A_\alpha} S_*(A/A_\alpha, C/C_\alpha), W) &\cong \\ \varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, S_*(A/A_\alpha, B/B_\alpha), W) \oplus \varinjlim \text{Der}(A/A_\alpha, S_*(A/A_\alpha, C/C_\alpha), W). \end{aligned}$$

En vertu de [An] Proposition 17.1, son n -ième groupe d'homologie est isomorphe au groupe

$$H_t^n(A, B, W) \oplus H_t^n(A, C, W).$$

Utilisons maintenant l'homomorphisme v^N pour chacun des α . Il nous fait passer du premier complexe au deuxième complexe et par suite de l'homologie du premier à l'homologie du deuxième. Ce dernier homomorphisme est un isomorphisme en dimensions $0, 1, \dots, N$ et un monomorphisme en dimension $N+1$ car v^N est un isomorphisme en dimensions $0, 1, \dots, N, N+1$. Compte tenu des deux isomorphismes établis ci-dessus, nous avons donc bien établi les assertions du théorème.

Par des manipulations purement formelles, on peut déduire divers corollaires de ce théorème; retenons le suivant.

COROLLAIRE 3.3. *Soient deux A -algèbres topologiques D et B , une B -algèbre topologique C et un $D \otimes_A C$ -module W . Soient $(A_\alpha \dots), (B_\alpha \dots), (C_\alpha \dots)$ et $(D_\alpha \dots)$ des systèmes fondamentaux d'idéaux ouverts de A , de B , de C et de D avec $A_\alpha \cdot D \subset D_\alpha$, $A_\alpha \cdot B \subset B_\alpha$ et $B_\alpha \cdot C \subset C_\alpha$. Supposons en outre que pour tout i avec $0 < i \leq N$ et pour tout α , il existe un β plus petit que α tel que les homomorphismes suivants soient nuls:*

$$\begin{aligned} \text{Tor}_i^{A/A_\beta}(D/D_\beta, B/B_\beta) &\rightarrow \text{Tor}_i^{A/A_\alpha}(D/D_\alpha, B/B_\alpha) \\ \text{Tor}_i^{A/A_\beta}(D/D_\beta, C/C_\beta) &\rightarrow \text{Tor}_i^{A/A_\alpha}(D/D_\alpha, C/C_\alpha). \end{aligned}$$

Alors sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$H_t^j(D \otimes_A B, D \otimes_A C, W) \rightarrow H_t^j(B, C, W)$$

est un isomorphisme pour $j=0, 1, 2, \dots, N$ et un monomorphisme pour $j=N+1$. En particulier on a, sans condition, un monomorphisme

$$H_t^1(D \otimes_A B, D \otimes_A C, W) \rightarrow H_t^1(B, C, W).$$

Démonstration. Voir [An] Proposition 19.6.

IV. Algèbres formellement lisses

Nous allons voir de quelle manière le corollaire 3.3 s'applique à l'étude des algèbres formellement lisses. En fait nous allons démontrer deux résultats connus ([Gr] Corollaire 19.4.6 et Proposition 19.4.7) sous des hypothèses moins fortes. Rappelons qu'une A -algèbre topologique B est formellement lisse si et seulement si pour tout B -module W le groupe $H_t^1(A, B, W)$ est nul.

Commençons par un lemme. Puisque le groupe $H_t^*(A, B, W)$ dépend de W d'une manière fonctorielle et puisqu'il existe un homomorphisme canonique de l'anneau B dans l'anneau des endomorphismes du B -module W , le groupe $H_t^*(A, B, W)$ peut être muni d'une structure naturelle de B -module.

LEMME 4.1. Soient deux A -algèbres topologiques B et A' et un B -module W . Supposons d'une part le A -module A' plat et d'autre part l'une des conditions suivantes satisfaite:

- i) le A -module A' est projectif de type fini
- ii) l'anneau A est noethérien et la A -algèbre B est de type fini.

Alors l'homomorphisme canonique

$$H_t^*(A, B, W) \otimes_A A' \rightarrow H_t^*(A, B, W \otimes_A A')$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Vu le bon comportement du produit tensoriel par rapport aux limites inductives, il suffit de démontrer que les homomorphismes canoniques

$$H^*(A/A_\alpha, B/B_\alpha, W) \otimes_A A' \rightarrow H^*(A/A_\alpha, B/B_\alpha, W \otimes_A A')$$

sont des isomorphismes. Choisissons maintenant une A/A_α -résolution simpliciale de B/B_α : voir [An] Proposition 17.2. Notons-la Y_α^* et utilisons-la pour calculer les groupes de cohomologie en question: voir [An] Proposition 17.1. Le A -module A' est plat, par conséquent nous en avons terminé si nous démontrons que les homomorphismes canoniques

$$\text{Der}(A/A_\alpha, Y_\alpha^*, W) \otimes_A A' \rightarrow \text{Der}(A/A_\alpha, Y_\alpha^*, W \otimes_A A')$$

sont des isomorphismes. Faisons la démonstration en dimension n et appelons E un ensemble d'éléments de Y_α^n formant une base de cette algèbre libre. Il nous faut donc démontrer que l'homomorphisme canonique

$$(\prod_E W) \otimes_A A' \rightarrow \prod_E (W \otimes_A A')$$

est un isomorphisme. Cela a lieu par exemple si le A -module A' est projectif de type fini ou si l'ensemble E est fini. Le premier cas du lemme est donc démontré. Pour démontrer le deuxième, il faut encore remarquer que la résolution simpliciale Y_α^* peut être choisie de type fini en toutes les dimensions. En effet l'anneau A/A_α est alors noethérien et la A/A_α -algèbre B/B_α est alors de type fini et on peut appliquer [An] Proposition 17.2.

PROPOSITION 4.2. Soient une A -algèbre topologique B et une A -algèbre topologique A' munie de la topologie déduite de celle de A . Supposons d'une part le A -module A' fidèlement plat et d'autre part l'une des conditions suivantes satisfaite:

- i) le A -module A' est projectif de type fini
- ii) l'anneau A est noethérien et la A -algèbre B est de type fini.

Alors $B \otimes_A A'$ est une A' -algèbre formellement lisse si et seulement si B est une A -algèbre formellement lisse.

Démonstration. D'après le corollaire 3.3, pour tout $B \otimes_A A'$ -module W , on a un monomorphisme

$$H_t^1(A', B \otimes_A A', W) \rightarrow H_t^1(A, B, W).$$

Par conséquent si B est formellement lisse, $B \otimes_A A'$ est formellement lisse.

Inversément supposons maintenant la A' -algèbre $B \otimes_A A'$ formellement lisse; il nous faut démontrer que le groupe $H_t^1(A, B, W)$ est nul pour tout B -module W . Commençons par appliquer le corollaire 3.3 en remplaçant (A, B, C, D) par (A_d, A_t, B, A'_d) . Puisque les anneaux A_d et A'_d sont discrets et que le A -module A' est plat, les conditions du corollaire sont satisfaites pour tout N . Par conséquent on a un isomorphisme

$$H_t^*(A_t \otimes_{A_d} A'_d, B \otimes_{A_d} A'_d, \bar{W}) \rightarrow H_t^*(A_t, B, \bar{W}).$$

D'autre part la topologie de A' est déduite de celle de A . Par conséquent on peut remplacer $\cdot \otimes_{A_d} A'_d$ par $\cdot \otimes_{A_t} A'_t$. Ainsi on a un isomorphisme

$$H_t^*(A', B \otimes_A A', \bar{W}) \rightarrow H_t^*(A, B, \bar{W}).$$

Prenons $\bar{W} = W \otimes_A A'$ et appliquons le lemme 4.1 qui nous permet d'écrire le but de cet isomorphisme sous une autre forme. Nous avons donc établi l'existence d'un isomorphisme

$$H_t^*(A', B \otimes_A A', W \otimes_A A') \rightarrow H_t^*(A, B, W) \otimes_A A'.$$

Puisque $B \otimes_A A'$ est formellement lisse, la source est nulle en dimension 1. Le but est donc nul en dimension 1. Mais A' est fidèlement plat, par conséquent le groupe $H_t^1(A, B, W)$ lui-même est nul, ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 4.3. *Soient A un anneau topologique préadmissible, I un idéal de définition de A et B une A -algèbre topologique. Soient $(A_\alpha \dots)$ et $(B_\alpha \dots)$ des systèmes fondamentaux d'idéaux ouverts de A et de B respectivement avec $A_\alpha \cdot B \subset B_\alpha$. Supposons en outre que pour tout α , il existe un β plus petit que α tel que l'homomorphisme suivant soit nul*

$$\mathrm{Tor}_1^{A/A_\beta}(B/B_\beta, A/I) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{A/A_\alpha}(B/B_\alpha, A/I)$$

(par exemple si B est un A -module formellement projectif). Alors B/IB est une A/I -algèbre formellement lisse si et seulement si B est une A -algèbre formellement lisse.

Démonstration. D'après le corollaire 3.3, pour tout B/IB -module W , on a un monomorphisme

$$H_t^1(A/I, B/IB, W) \rightarrow H_t^1(A, B, W).$$

Par conséquent si B est formellement lisse, B/IB est formellement lisse.

Inversément supposons maintenant la A/I -algèbre B/IB formellement lisse; il nous faut démontrer que le groupe $H_t^1(A, B, W)$ est nul pour tout B -module W . Comme il est toujours sous-entendu, W est annulé par un B_α donc en particulier par un I^n . On fait la démonstration par induction sur n . Pour $n=1$, on a d'après le corollaire 3.3:

$$H_t^1(A, B, W) \cong H_t^1(A/I, B/IB, W) \cong 0.$$

Le passage de $n-1$ à n est immédiat puisque l'on a une suite exacte:

$$H_t^1(A, B, IW) \rightarrow H_t^1(A, B, W) \rightarrow H_t^1(A, B, W/IW).$$

La proposition est donc démontrée.

Le premier groupe de cohomologie est étroitement lié à la notion de lissité formelle. En fait on « mesure » de combien une algèbre n'est pas formellement lisse à l'aide d'un certain premier groupe de cohomologie. Le deuxième groupe de cohomologie est étroitement lié à la notion de régularité. En fait on « mesure » de combien un anneau n'est pas régulier à l'aide d'un certain deuxième groupe de cohomologie. En outre ces deux notions (lissité formelle et régularité) sont aussi étroitement liées, voir [Gr] Théorème 22.5.8 par exemple. Ces relations sont à peu près du type suivant: une certaine algèbre est formellement lisse si et seulement si un certain anneau est régulier. Il semble donc souhaitable de les faire découler de relations plus fortes du type suivant: un certain premier groupe de cohomologie est isomorphe à un certain deuxième groupe de cohomologie. Voici un résultat dans cette direction.

PROPOSITION 4.4. *Soient B une A -algèbre topologique préadmissible et J un idéal de définition de B . Supposons la A -algèbre topologique B/J formellement lisse. Alors pour tout B/J -module W on a un isomorphisme naturel:*

$$H_t^1(A, B, W) \cong H_t^2(B, B/J, W).$$

En particulier la A -algèbre B est formellement lisse si et seulement si le foncteur $H_t^2(B, B/J, \cdot)$ est nul.

Démonstration. Le cas particulier de la proposition découle immédiatement du cas général si l'on tient compte de la remarque suivante. Le groupe $H_t^1(A, B, W)$ est nul pour tout B -module W s'il l'est pour tout B -module W annulé par J : voir la démonstration de la proposition 4.3.

Pour la démonstration du cas général, on utilise le triple suivant $(A, B, B/J)$ et la suite exacte lui correspondant

$$H_t^1(A, B/J, W) \rightarrow H_t^1(A, B, W) \rightarrow H_t^2(B, B/J, W) \rightarrow H_t^2(A, B/J, W) \rightarrow H_t^2(A, B, W).$$

Le premier terme est nul, il suffit donc de démontrer que le dernier homomorphisme est un monomorphisme. Ce sera chose faite si l'on vérifie que pour tout $k \geq 1$ l'homomorphisme canonique

$$H_t^2(A, B/J, W) \rightarrow H_t^2(A, B/J^k, W)$$

est un monomorphisme. C'est le cas car H_t^2 est contravariant par rapport à la deuxième variable et car le A -homomorphisme $B/J^k \rightarrow B/J$ a un relèvement puisque la A -algèbre B/J est formellement lisse. La proposition est donc démontrée.

Nous étudierons d'une manière plus approfondie les relations entre premiers et deuxièmes groupes de cohomologie au cours du sixième paragraphe. Cela se fera sous

des hypothèses supplémentaires: A sera un corps et B un anneau local noethérien, mais sans hypothèse concernant la A -algèbre B/J . Vu la proposition 1.7, il est tout à fait naturel de se restreindre au cas noethérien. D'ailleurs nous allons voir que dans ce cas on peut remplacer les groupes de cohomologie «topologique» par les groupes de cohomologie «discrète».

V. Cas noethérien

Nous allons continuer l'étude entreprise précédemment (lemme 2.3 et corollaire 2.4) concernant les relations existant entre les cohomologies «topologique» et «discrète».

LEMME 5.1. *Soient un anneau noethérien A et un idéal I . Soient encore deux entiers $i > 0$ et $k > 0$. Alors il existe un entier $l > k$ tel que l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/I^l, A/I^l) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^A(A/I^k, A/I^k)$$

soit nul.

Démonstration. Dans le cas $i=1$, il s'agit de l'homomorphisme canonique de I^l/I^{2l} dans I^k/I^{2k} qui est nul si $l \geq 2k$.

Dans le cas $i > 1$, posons $j = i - 1$. Il revient alors au même de démontrer que l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^l) \rightarrow \mathrm{Tor}_j^A(I^k, A/I^k)$$

est nul pour un certain l . On peut évidemment remplacer A/I^l par A/I^k . Il suffit donc de démontrer que pour $j > 0$ et $k > 0$, il existe $l > k$ tel que l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^k) \rightarrow \mathrm{Tor}_j^A(I^k, A/I^k)$$

soit nul.

Soit M_* une résolution libre de type fini (en chaque dimension) du A -module A/I^k . Une telle résolution existe puisque A est noethérien. Puis on munit $I^l \otimes_A M_j$ de la filtration canonique:

$$F_n(I^l \otimes_A M_j) = I^n(I^l \otimes_A M_j)$$

pour $n = 0, 1, \dots$. On désigne encore par F_* la filtration induite par la filtration définie ci-dessus sur les sous-modules de $I^l \otimes_A M_j$ et sur leurs quotients. Puisque M_j est de type fini, toutes ces filtrations sont q -bonnes en vertu du théorème d'Artin-Rees: voir [Se] p. II 9. En particulier $\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^k)$ est muni d'une filtration q -bonne. Mais ce module est annulé par I^k . Par conséquent

$$F_n(\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^k)) = 0 \quad \text{pour } n \text{ grand.}$$

D'autre part l'homomorphisme canonique envoie $F_n(I^l \otimes_A M_j)$ dans $F_{n+l-k}(I^k \otimes_A M_j)$. Par suite l'homomorphisme canonique envoie $F_n(\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^k))$ dans $F_{n+l-k}(\mathrm{Tor}_j^A(I^k, A/I^k))$.

$(I^k, A/I^k)$). En prenant n nul et l assez grand (en fonction de j et de k) on voit donc que l'homomorphisme canonique envoie $\mathrm{Tor}_j^A(I^l, A/I^k)$ dans 0. Le lemme est ainsi démontré.

COROLLAIRE 5.2. *Soient un anneau noethérien A et un idéal I . Munissons A de la topologie discrète: A_d et de la topologie I -préadique: A_t . Alors les groupes de cohomologie $H_t^n(A_d, A_t, W)$ sont tous nuls.*

Démonstration. Nous allons utiliser les trois isomorphismes canoniques:

$$A_t \rightrightarrows A_t \otimes_{A_d} A_t \rightarrow A_t.$$

En vertu du lemme précédent les conditions du théorème 3.2 sont satisfaites pour le produit tensoriel $A_t \otimes_{A_d} A_t$ avec N infini. Par suite l'homomorphisme canonique

$$H_t^*(A_d, A_t \otimes_{A_d} A_t, W) \rightarrow H_t^*(A_d, A_t, W) \oplus H_t^*(A_d, A_t, W)$$

est un isomorphisme. Autrement dit, l'homomorphisme diagonal

$$H_t^*(A_d, A_t, W) \rightarrow H_t^*(A_d, A_t, W) \oplus H_t^*(A_d, A_t, W)$$

est un isomorphisme. Par conséquent le groupe $H_t^*(A_d, A_t, W)$ est nul. Remarquons que l'idée d'utiliser un produit tensoriel pour démontrer la nullité de certains groupes de cohomologie n'est pas nouvelle: voir [An] Lemmes 20.1 et 22.1.

THÉOREME 5.3. *Soient une A -algèbre topologique B et un B -module W . Supposons les anneaux topologiques A et B noethériens et préadmissibles. Alors l'homomorphisme canonique*

$$H_t^*(A, B, W) \rightarrow H^*(A, B, W)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Immédiate à l'aide du corollaire 5.2 et de la proposition 2.2 appliquée aux triples (A_d, A_t, B_t) et (A_d, B_d, B_t) .

COROLLAIRE 5.4. *Soit une A -algèbre topologique B . Supposons les anneaux topologiques A et B noethériens et préadmissibles. Soit J un idéal de définition de B . Alors la A -algèbre topologique B est formellement lisse si et seulement si d'une part le B/J -module $H_0(A, B, B/J)$ est projectif et d'autre part le B/J -module $H_1(A, B, B/J)$ est nul.*

Démonstration. En vertu du théorème précédent on peut oublier les topologies de A et de B et affirmer que l'on a la lissité formelle si et seulement si $H^1(A, B, W)$ est nul pour tout B -module W annihilé par un idéal I^n . On sait que cette condition est satisfaite si et seulement si $H^1(A, B, W)$ est nul pour tout B/J -module W . On a évidemment une suite spectrale

$$\mathrm{Ext}_{B/J}^p(H_q(A, B, B/J), W) \Rightarrow_p H^n(A, B, W)$$

(remplacer les B -modules par des B/J -modules dans la démonstration de la proposi-

tion 1.8). En particulier pour tout B/J -module W on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{B/J}^1(H_0(A, B, B/J), W) \rightarrow H^1(A, B, W) \rightarrow \text{Hom}(H_1(A, B, B/J), W) \rightarrow \text{Ext}_{B/J}^2(H_0(A, B, B/J), W).$$

Si $H_0(A, B, B/J)$ est projectif et $H_1(A, B, B/J)$ nul, il est bien clair que $H^1(A, B, W)$ est nul pour tout B/J -module W . Inversément si cette condition est satisfaite, le terme Ext^1 est nul pour tout B/J -module W , par conséquent le B/J -module $H_0(A, B, B/J)$ est projectif. Mais alors le terme Ext^2 et par suite le terme Hom sont nuls pour tout B/J -module W , par exemple $H_1(A, B, B/J)$ lui-même. Ainsi le B/J -module $H_1(A, B, B/J)$ est nul. La démonstration est donc achevée.

Notons encore le résultat suivant qui complète un résultat connu concernant la complétion : voir [An] Proposition 21.1.

COROLLAIRE 5.5. *Soit une A -algèbre topologique B . Supposons les anneaux topologiques A et B noethériens et préadmissibles. Soient \hat{A} et \hat{B} les complétés séparés de A et de B . Soit en outre un \hat{B} -module W . Alors l'homomorphisme canonique*

$$H_*(A, B, W) \rightarrow H_*(\hat{A}, \hat{B}, W)$$

est un isomorphisme.

Précisons ce qui suit. Puisqu'il s'agit d'homologie les quatre anneaux de l'homomorphisme canonique sont considérés comme étant discrets. En outre W est supposé être un \hat{B} -module, pour l'anneau topologique \hat{B} . Autrement dit si J est un idéal de définition de B , alors W est un B/J^n -module pour un certain n .

Démonstration. On a donc quatre anneaux noethériens et préadmissibles. On peut appliquer deux fois le théorème 5.3 :

$$\begin{aligned} H_t^*(A, B, W) &\cong H^*(A, B, W) \\ H_t^*(\hat{A}, \hat{B}, W) &\cong H^*(\hat{A}, \hat{B}, W). \end{aligned}$$

Mais de la définition même des groupes H_t^* découle immédiatement ce qui suit :

$$H_t^*(A, B, W) \cong H_t^*(\hat{A}, \hat{B}, W).$$

Par conséquent l'homomorphisme canonique

$$H^*(\hat{A}, \hat{B}, W) \rightarrow H^*(A, B, W)$$

est toujours un isomorphisme.

Utilisons maintenant la suite spectrale rencontrée au cours de la démonstration du corollaire 5.4. Elle nous dit en particulier que l'homomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{B/J}(H_*(\hat{A}, \hat{B}, B/J), W) \rightarrow \text{Hom}_{B/J}(H_*(A, B, B/J), W)$$

est un isomorphisme pour tout B/J -module injectif W . Par conséquent l'homomorphisme canonique

$$H_*(A, B, B/J) \rightarrow H_*(\hat{A}, \hat{B}, B/J)$$

est lui-même un isomorphisme. Par un argument standard on démontre alors le corollaire pour tout B/J -module. On passe au cas général par induction au moyen de la proposition 1.1.

VI. Algèbres sur un corps

Continuons l'étude des relations entre les premiers et les deuxièmes groupes de cohomologie, comme nous y invite la proposition 4.4. Vu les résultats du paragraphe précédent, il semble normal de remplacer les groupes de cohomologie par des groupes d'homologie.

Commençons par le cas simple des corps. Considérons un corps K et un sous-corps k . Nous savons que $H_2(k, K, K)$ est toujours nul (Proposition 1.6) et que $H_1(k, K, K)$ est nul si l'extension est séparable (Proposition 1.5). Nous allons établir un isomorphisme entre $H_1(k, K, K)$ et un deuxième groupe d'homologie aisément calculable.

LEMME 6.1. *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$ et K un surcorps de $k^{1/p}$. Alors l'homomorphisme canonique*

$$H_1(k, K, K) \rightarrow H_1(k^{1/p}, K, K)$$

est nul.

Démonstration. Soit P le corps premier de k . De la proposition 1.2 découle alors le diagramme suivant avec deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} H_1(P, K, K) & \rightarrow & H_1(k, K, K) & \longrightarrow & H_0(P, k, K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(P, K, K) & \rightarrow & H_1(k^{1/p}, K, K) & \rightarrow & H_0(P, k^{1/p}, K). \end{array}$$

Puisque $H_1(P, K, K)$ est nul, il suffit de démontrer que l'homomorphisme canonique

$$H_0(P, k, K) \rightarrow H_0(P, k^{1/p}, K)$$

est nul. Cela est bien clair en vertu des égalités suivantes pour les différentielles absolues de $k^{1/p}$: si x est un élément de k , alors

$$dx = d(x^{1/p})^p = p x^{p-1/p} d(x^{1/p}) = 0.$$

Rappelons le résultat suivant.

LEMME 6.2. *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$ et k' un sous-corps de $k^{1/p}$. Soit A une k -algèbre qui soit un anneau local d'idéal maximal I . Alors le produit tensoriel $A \otimes_k k'$ est un anneau local. L'idéal maximal est formé des éléments du produit tensoriel dont une puissance appartient à l'image de $I \otimes_k k'$.*

Nous établirons des isomorphismes entre premiers et deuxièmes groupes d'homologie au moyen du résultat suivant.

LEMME 6.3. Soient X un corps, C une X -algèbre, Y un surcorps de X et Z une $C \otimes_X Y$ -algèbre qui soit un corps. Alors l'homomorphisme canonique

$$H_2(C, Z, Z) \rightarrow H_2(C \otimes_X Y, Z, Z)$$

est un monomorphisme. En outre il existe un monomorphisme naturel

$$H_2(C \otimes_X Y, Z, Z) \rightarrow H_1(X, C, Z)$$

qui est un isomorphisme si l'homomorphisme canonique

$$H_1(X, Z, Z) \rightarrow H_1(Y, Z, Z)$$

est nul.

Démonstration. De la proposition 1.2 découle le diagramme suivant avec deux suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(X, Z, Z) & \rightarrow & H_2(C, Z, Z) & \longrightarrow & H_1(X, C, Z) & \longrightarrow & H_1(X, Z, Z) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ H_2(Y, Z, Z) & \rightarrow & H_2(C \otimes_X Y, Z, Z) & \xrightarrow{\varepsilon} & H_1(Y, C \otimes_X Y, Z) & \xrightarrow{\delta} & H_1(Y, Z, Z). \end{array}$$

Nous en savons ce qui suit :

- a) $H_2(X, Z, Z)$ est nul (Proposition 1.6)
- b) $H_2(Y, Z, Z)$ est nul (Proposition 1.6)
- c) β est un isomorphisme ([An] Proposition 19.6).

D'après a) et c) l'homomorphisme $\varepsilon \circ \alpha$ est un monomorphisme, donc α est un monomorphisme. D'après b), l'homomorphisme ε est un monomorphisme. D'après c), le monomorphisme $\beta^{-1} \circ \varepsilon$ est bien défini. Si γ est nul, $\delta \circ \beta$ est nul, donc δ est nul et ε est un isomorphisme. Le monomorphisme $\beta^{-1} \circ \varepsilon$ est alors un isomorphisme. Le lemme est ainsi démontré.

THÉORÈME 6.4. Soient un corps K et un sous-corps k de caractéristique $p > 0$. Considérons le produit tensoriel $K \otimes_k k^{1/p} = B$ et l'idéal maximal J des éléments nilpotents de B . Alors les espaces vectoriels sur B/J

$$H_1(k, K, K) \otimes_K B/J \quad \text{et} \quad H_2(B, B/J, B/J)$$

sont isomorphes de manière naturelle. Le deuxième espace vectoriel se calcule de la manière suivante: on considère le complexe suivant de B -modules

$$J \otimes_B J \xrightarrow{\tau} J \otimes_B J \xrightarrow{\pi} J$$

où $x \otimes y$ est envoyé sur xy par π et sur $x \otimes y - y \otimes x$ par τ et on forme le B -module $\text{Ker } \pi / \text{Im } \tau$ annulé par J .

L'idéal J est le noyau de l'homomorphisme du produit tensoriel $K \otimes_k k^{1/p}$ dans une extension de K algébriquement close. Par conséquent J mesure de combien les extensions K et $k^{1/p}$ de k ne sont pas linéairement disjointes. D'autre part, comme le

démontre le théorème, l'espace vectoriel $H_1(k, K, K)$ est nul si et seulement si l'extension K de k est séparable. Par conséquent cet espace vectoriel mesure de combien l'extension n'est pas séparable. Le théorème met en relation ces deux mesures. On a donc obtenu une généralisation du critère de séparabilité de MacLane.

Démonstration. On applique le lemme 6.3 en remplaçant (X, C, Y, Z) par $(k, K, k^{1/p}, B/J)$. On vérifie que la condition de ce lemme est satisfaite en appliquant le lemme 6.1 en remplaçant (k, K) par $(k, B/J)$. Alors l'isomorphisme du lemme 6.3 est l'isomorphisme du théorème.

La deuxième partie du théorème est un cas particulier de [An] Proposition 26.2.

Dans le même ordre d'idée on a l'égalité de Cartier: voir [Gr] Théorème 21.7.1.

PROPOSITION 6.5. *Soit K une extension de type fini de k . Alors l'espace vectoriel $H_i(k, K, K)$ est de rang fini, $i=0, 1$. En outre on a l'égalité*

$$\mathrm{rg}_K H_0(k, K, K) - \mathrm{rg}_K H_1(k, K, K) = \deg \mathrm{tr}_k K.$$

Démonstration. A l'aide des propositions 1.2 et 1.6 on se ramène au cas d'une extension monogène d'un des trois types suivants:

- a) transcendante pure
- b) algébrique séparable
- c) radicielle

On peut alors calculer explicitement ([An] Propositions 20.3 et 25.1). On trouve alors pour l'égalité: $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$.

Approfondissons maintenant l'étude des relations entre les premiers et les deuxièmes groupes d'homologie. Le théorème 6.4 nous montre ce à quoi nous pouvons nous attendre. Nous traiterons maintenant le cas d'une algèbre sur un corps, locale et noethérienne si l'on veut exploiter l'isomorphisme qui sera établi. Rappelons deux faits. Considérons d'une part un corps k et une k -algèbre A noethérienne qui soit un anneau local d'idéal maximal I . Alors $H_1(k, A, A/I)$ est nul si et seulement si la k -algèbre A munie de la topologie I -préadique est formellement lisse: voir le corollaire 5.4. Considérons d'autre part un anneau B noethérien local d'idéal maximal J . Alors $H_2(B, B/J, B/J)$ est nul si et seulement si l'anneau B est régulier: voir la proposition 1.7.

Rappelons encore un résultat bien connu: voir [Gr] Corollaire 19.6.5.

PROPOSITION 6.6. *Soit une extension finie k' d'un corps k . Soit aussi une k -algèbre A qui soit un anneau local noethérien d'idéal maximal I et qui soit formellement lisse une fois munie de la topologie I -préadique. Alors l'anneau semi-local $A \otimes_k k'$ est régulier.*

Démonstration. Appelons M_i les idéaux maximaux du produit tensoriel $A \otimes_k k'$ et K_i les corps résiduels $A \otimes_k k' / M_i$ avec $i=1, 2, \dots, n$. Ce produit tensoriel est une A -algèbre de type fini, par conséquent il s'agit d'un anneau noethérien. Cet anneau semi-local est régulier si l'on démontre que chacun des anneaux locaux $(A \otimes_k k')_{M_i}$ est régulier. Appliquons le lemme 6.3 en remplaçant (X, C, Y, Z) par (k, A, k', K_i) .

On a donc un monomorphisme

$$H_2(A \otimes_k k', K_i, K_i) \rightarrow H_1(k, A, K_i).$$

Mais le but de ce monomorphisme est isomorphe à

$$H_1(k, A, A/I) \otimes_{A/I} K_i = 0.$$

Par suite la source de ce monomorphisme est un espace vectoriel nul. Il est d'ailleurs isomorphe à

$$H_2((A \otimes_k k')_{M_i}, K_i, K_i)$$

d'après [An] Proposition 20.3. Mais la nullité de ce dernier espace vectoriel entraîne la régularité de l'anneau local $(A \otimes_k k')_{M_i}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il existe une réciproque de la proposition précédente: voir [Gr] Théorème 22.5.8. Nous allons la déduire comme corollaire d'un isomorphisme généralisant celui du théorème 6.4.

THÉORÈME 6.7. *Soient un corps k de caractéristique $p > 0$ et une k -algèbre A qui soit un anneau local de corps résiduel K . Considérons l'anneau local $A \otimes_k k^{1/p}$ et son corps résiduel L . Alors les espaces vectoriels sur L*

$$H_1(k, A, K) \otimes_K L \quad \text{et} \quad H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L)$$

sont isomorphes. Si en outre k' désigne un corps compris entre k et $k^{1/p}$ et L' le corps résiduel de l'anneau local $A \otimes_k k'$, l'homomorphisme canonique

$$H_2(A \otimes_k k', L', L') \otimes_{L'} L \rightarrow H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L)$$

est un monomorphisme. De plus on a l'égalité suivante:

$$\bigcup \text{Im}[H_2(A \otimes_k k', L', L') \otimes_{L'} L] = H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L)$$

où k' parcourt l'ensemble filtrant des extensions k' de k finies et contenues dans $k^{1/p}$.

Démonstration. On démontre la première partie du théorème 6.7 comme la première partie du théorème 6.4, en appliquant la deuxième partie du lemme 6.3 où $(k, A, k^{1/p}, L)$ remplace (X, C, Y, Z) .

On démontre la deuxième partie du théorème en appliquant la première partie du lemme 6.3 où $(k', A \otimes_k k', k^{1/p}, L)$ remplace (X, C, Y, Z) . L'homomorphisme canonique

$$H_2(A \otimes_k k', L, L) \rightarrow H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L)$$

est donc un monomorphisme. Mais $H_i(L', L, L)$ est nul pour $i=2, 3$: voir [An] Proposition 22.2. On applique la proposition 1.2 en remplaçant (A, B, C) par $(A \otimes_k k', L', L)$ qui démontre alors que l'homomorphisme canonique

$$H_2(A \otimes_k k', L', L') \otimes_{L'} L \rightarrow H_2(A \otimes_k k', L, L)$$

est un isomorphisme.

Pour démontrer la troisième partie du théorème il faut et il suffit de vérifier l'égalité suivante:

$$\bigcup \operatorname{Im} [H_2(A \otimes_k k', L, L)] = H_2(A \otimes_k k^{1/p}, L, L).$$

Celle-là découle de [An] Proposition 18.4 en vertu de l'égalité suivante:

$$\bigcup (A \otimes_k k') = A \otimes_k k^{1/p}$$

où l'on identifie $A \otimes_k k'$ à son image dans $A \otimes_k k^{1/p}$.

Le théorème étant démontré, il est immédiat d'en déduire la réciproque de la proposition 6.6: voir [Gr] Théorème 22.5.8.

COROLLAIRE 6.8. *Soient un corps k de caractéristique $p > 0$ et une k -algèbre A locale noethérienne. Si pour toute extension finie k' de k telle que $k'^p \subset k$ l'anneau $A \otimes_k k'$ est régulier, alors la k -algèbre A est formellement lisse pour sa topologie préadique.*

Démonstration. Pour tout k' , l'anneau local $A \otimes_k k'$ est régulier, donc l'espace vectoriel $H_2(A \otimes_k k', L', L')$ est nul. D'après le théorème 6.7 l'espace vectoriel $H_1(k, A, K)$ est par suite nul, donc la k -algèbre A est formellement lisse.

Ajouté en mars 1968:

J'aimerais mentionner les deux travaux suivants:

S. LICHTENBAUM – M. SCHLESSINGER, *The Cotangent Complex of a Morphism*, Trans. A.M.S. 128 (1967), 41–70.

M. ANDRÉ, *On the Vanishing of the Second Homology Group of a Commutative Algebra*, Reports of the Midwest Category Seminar II, Springer Lecture Notes (1968).

Dans le premier, les groupes d'homologie $H_i(A, B, W)$ pour $i=0, 1, 2$ sont définis autrement et on y démontre également le corollaire 6.8. ci-dessus. Dans le deuxième, on voit apparaître une condition nécessaire et suffisante pour que $H_i^2(A, A/I, \dots)$ soit identiquement nul.

BIBLIOGRAPHIE

[An] M. ANDRÉ, *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Heidelberg (1967).

[Gr] A. GROTHENDIECK, *Eléments de géométrie algébrique*, IV, 1ère partie, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris (1964).

[Se] J.-P. SERRE, *Algèbre locale. Multiplicités*, Lecture Notes, Springer-Verlag, Heidelberg (1965).

Battelle Institute

Advanced Studies Center, Geneva, Switzerland

Reçu le 2 septembre 1967