Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Doppelverhältnisse und quasikonforme Abbildungen.
Autor: Renggli, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32914

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Doppelverhältnisse und quasikonforme Abbildungen

H. RENGGLI

§ 1. Einleitung

1. Sei h ein orientierungstreuer Homöomorphismus der Riemannschen Zahlenkugel Z auf sich. Sind z_1, z_2, z_3 drei beliebige verschiedene Punkte in Z, so gibt es zwei Möbiustransformationen l_1 und l_2, so dass $l_1(0)=z_1$, $l_1(1)=z_2$, $l_1(\infty)=z_3$ und $l_2(h(z_1))=0$, $l_2(h(z_2))=1$, $l_2(h(z_3))=\infty$ gelten. Somit ist f, $f=l_2 \circ h \circ l_1$, ein orientierungstreuer Homöomorphismus von Z auf sich mit 0, 1 und ∞ als Fixpunkten. Lässt man nun bei festem h die drei Punkte z_1, z_2, z_3 beliebig variieren, so erhält man auf diese Weise eine ganze Schar $\mathfrak{F}$ von normierten Abbildungen f. Man kann es jetzt so auffassen, dass jedes f die Verzerrungseigenschaften von h bezüglich dreier Grundpunkte ausdrückt.

Es scheint deshalb natürlich sich zu fragen, wann die Schar $\mathfrak{F}$ einem Verzerrungssatze genügt. Wir zeigen im §2, dass dies genau dann der Fall ist, falls $\mathfrak{F}$ eine gewisse Kompaktheitsbedingung erfüllt. Zugleich werden wir das Resultat gerade für eine ganze Schar $\mathfrak{H}$ von solchen Homöomorphismen h beweisen (Satz 1). Dieser Satz verallgemeinert ein Resultat von A. BEURLING und L. AHLFORS ([3], Theorem 2), das sich auf Homöomorphismen der reellen Zahlengeraden auf sich bezieht. Wir haben den von A. BEURLING und L. AHLFORS gegebenen Beweis mutatis mutandis auf den Fall der Zahlenkugel übertragen.

2. Schränkt man $\mathfrak{F}$ und damit h durch derartige Bedingungen ein, so kann h nicht ein beliebiger Homöomorphismus sein. Vielmehr ist h in diesem Falle quasikonform (Satz 2). Dies leitet über zum Problem, die quasikonformen Automorphismen von Z gegenüber den topologischen abzugrenzen. Das kann natürlich auf viele weitere Arten geschehen, so unter anderm auch durch einschränkende Bedingungen für die Veränderung der Doppelverhältnisse bei der betreffenden Abbildung. Es ist ein orientierungstreuer Homöomorphismus von Z auf sich genau dann quasikonform, falls für die Doppelverhältnisse eine sogenannte Verzerrungsfunktion existiert oder falls alle Doppelverhältnisse vom absoluten Betrag 1 quasiinvariant sind (Satz 2). Dass sich bei quasikonformen Automorphismen von Z die Doppelverhältnisse nicht beliebig ändern können, ist übrigens schon bemerkt worden (cf. [1], p. 294).

Für den Beweis benötigen wir einmal Satz 1, also eine gewisse Verzerrungsaussage. Für verwandte Betrachtungen von Verzerrungseigenschaften normierter quasikonformer Automorphismen von Z verweisen wir auf die Arbeit von O. LEHTO, K. I. VIRTANEN und J. VÄISÄLÄ [7]. Andererseits brauchen wir als wesentliches Hilfsmittel einen Satz von F. W. GEHRING [4], dass nämlich die quasikonformen Abbildungen

durch die Beschränktheit der Kreisdilatation gekennzeichnet werden können.

Uebrigens sind die Doppelverhältnisse bei einem quasikonformen Automorphismus von Z im allgemeinen nicht quasiinvariant. Vielmehr ist ein quasikonformer Automorphismus f der Ebene E genau dann quasiisometrisch in E, falls die Doppelverhältnisse für die durch $f(\infty)=\infty$ erweiterte quasikonforme Abbildung von Z auf sich quasiinvariant sind (Satz 3).

3. Da man quasikonforme Abbildungen lokal verändern kann ohne sie global abändern zu müssen, ist eine quasikonforme Abbildung f eines Gebietes G sicher erst dann eindeutig bestimmt, wenn man sie auf einer in G dichten Punktmenge kennt. Welchen Bedingungen muss aber f dort genügen, damit f auf eindeutige Weise zu einer quasikonformen Abbildung von G erweitert werden kann? Dies hängt zusammen mit der Frage der Verallgemeinerung von quasikonformen Abbildungen auf beliebige Punktmengen. Wir zeigen im § 4, dass die sogenannten Abbildungen von beschränkter Dreiecksdilatation eine solche natürliche Verallgemeinerung darstellen.

Sei also S eine beliebige in der Ebene E gelegene Punktmenge und f eine eineindeutige Abbildung von S in E. Seien nun P, Q, R drei beliebige verschiedene Punkte in S, und sei zum Beispiel für die Längen $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ der Seiten des Dreiecks PQR die Ungleichung $\overline{PQ}\leqslant\overline{PR}$ erfüllt. Wir nennen jetzt f von beschränkter Dreiecksdilatation auf S, falls eine Zahl C, $C\geqslant 1$, existiert, so dass für alle derartigen Dreiecke bezüglich ihrer Bilder P' Q' R' die Beziehung $\overline{P'Q'}\leqslant C\cdot\overline{P'R'}$ gültig ist. Offenbar ist diese Bedingung von globaler Natur.

Eine Abbildung f, $f:S\to E$, von beschränkter Dreiecksdilatation lässt sich eindeutig zu einer topologischen Abbildung der bezüglich Z abgeschlossenen Hülle $\bar{S}$ erweitern (Lemma 5). Ist ferner S dicht in einem Gebiete G, so ist entweder die Erweiterung oder dann ihre konjugierte quasikonform in G (Satz 4). Nun ist aber eine quasikonforme Abbildung eines Gebietes G in E im allgemeinen nicht von beschränkter Dreiecksdilatation, doch besitzt sie auf jeder kompakten Teilmenge beschränkte Dreiecksdilatation (Zusatz 2).

Der Zusammenhang der Funktionen von beschränkter Dreiecksdilatation mit den quasikonformen Abbildungen beruht natürlich darauf, dass die Dreiecksdilatation in natürlicher Weise die Kreisdilatation verallgemeinert. Einen Ansatz die Kreisdilatation zu verallgemeinern stellen die Θ-Abbildungen von F. W. Gehring ([5], 8) dar. Ferner muss auch der Satz von A. Mori ([9], Lemma 4) in diesem Zusammenhang genannt werden, den wir übrigens zum Beweise von Zusatz 2 heranziehen.

4. Der Begriff der Funktionen von beschränkter Dreiecksdilatation gestattet es auch, verschiedene Fragen der quasikonformen Abbildungen von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu betrachten. Sei f ein zunehmender Homöomorphismus der reellen Zahlengeraden R auf sich. Genau dann ist f quasisymmetrisch, falls f beschränkte Dreiecksdilatation besitzt (Satz 5). Ist ferner f eine Abbildung von R in E und hat f beschränkte Dreiecksdilatation, so ist $f(R)$ eine sogenannte Quasigerade

(Satz 6). Ueberdies sind die quasikonformen Abbildungen einer Halbebene, die sich zu quasikonformen Abbildungen der Ebene erweitern lassen, genau Abbildungen von beschränkter Dreiecksdilatation (Satz 7).

Ist f auf S von beschränkter Dreiecksdilatation und S nicht beschränkt, so kann f nur durch $f(\infty)=\infty$ stetig im Punkte ∞ ergänzt werden (Lemma 4). Nimmt man nun den Punkt ∞ als Fixpunkt zur Definition von f hinzu, so kann die Eigenschaft beschränkte Dreiecksdilatation zu besitzen, durch Änderung von Doppelverhältnissen bei der Abbildung f ausgedrückt werden. Man hat dazu nur das aus den vier Punkten P, R, Q, ∞ gebildete Doppelverhältnis zu betrachten.

Damit erhält man eine gegenüber Möbiustransformationen invariante Formulierung der Dreiecksdilatation. In Satz 8 zeigen wir, wie sich damit kompliziertere Probleme der quasikonformen Fortsetzung behandeln lassen. Vorbereitend dazu geben wir in Lemma 8 eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass eine quasikonforme Abbildung eines von endlich vielen getrennt gelegenen Kreisen berandeten Teilgebietes der Ebene sich zu einer quasikonformen Abbildung von Z erweitern lässt. In diesem Zusammenhang möchten wir auf die Arbeit von G. SPRINGER [11] hinweisen. Die obige Bedingung ergänzt die Sätze von G. SPRINGER, doch unterscheiden sich seine Fragestellungen und Methoden in verschiedener Hinsicht von den unsrigen.

5. Für die meisten von uns zitierten Sätze konnten wir auf die neuern zusammenfassenden Darstellungen von O. LEHTO und K. I. VIRTANEN [8] einerseits und von L. V. AHLFORS [2] andererseits hinweisen. Die ältern von uns benutzten Sätze findet man auch im Buch von H. P. KÜNZI [6].

§ 2. Ein Verzerrungssatz

Es sei $\mathfrak{H}$ eine nicht leere Schar von orientierungstreuen Homöomorphismen der Riemannschen Zahlenkugel Z auf sich. Mit $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ bezeichnen wir die aus $\mathfrak{H}$ durch beidseitige Komposition mit konformen Automorphismen von Z gebildete Menge, das heisst mit jedem $h\in\mathfrak{H}$ gehört jede Abbildung $l_2\circ h\circ l_1$ zu $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, wobei l_1 und l_2 beliebige Möbiustransformationen sind. Also ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ abgeschlossen gegenüber Komposition mit konformen Automorphismen von Z. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ die Schar aller orientierungstreuen Homöomorphismen von Z auf sich, die die Punkte 0, 1 und ∞ als Fixpunkte besitzen, und mit $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ den Durchschnitt $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$. Schliesslich werde die komplexe Zahlenebene mit E notiert.

Eine Folge f_i von Abbildungen von E in E heisst lokal gleichmässig konvergent in E, falls zu jedem z, $z\in E$, eine Umgebung existiert, in der die Folge f_i bezüglich der euklidischen Metrik gleichmässig konvergiert. Da E lokalkompakt ist, ist die lokal gleichmässige Konvergenz gleichbedeutend mit der gleichmässigen Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von E.

Nun beweisen wir

SATZ 1. *Jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ ist genau dann relativ folgenkompakt in $\mathfrak{N}$ bezüglich lokaler gleichmässiger Konvergenz in E, falls $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ einem Verzerrungssatze genügt, mit andern Worten es sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *Aus jeder unendlichen Teilmenge von $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ lässt sich eine Folge auswählen, die in E lokal gleichmässig gegen ein Element aus $\mathfrak{N}$ konvergiert.*

b) *Es gibt zwei für positive r definierte positive zunehmende Funktionen M und m mit $M(r) \geqslant m(r)$ und $\lim_{r \to 0} M(r) = 0$, so dass bei gegebenem r für jedes $f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ und für jede komplexe Zahl z mit $|z| = r$ die Ungleichungen $m(r) \leqslant |f(z)| \leqslant M(r)$ gelten.*

Beweis. Wir führen für jedes $f \in \mathfrak{N}$ die beiden Funktionen $N(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ und $n(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ ein. Dann definieren wir $M(r) = \sup_{f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})} N(r, f)$ bzw. $m(r) = \inf_{f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})} n(r, f)$. Ist nun a) erfüllt, so lassen sich zwei in E lokal gleichmässig konvergente Folgen f_i und f_j aus $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ auswählen, so dass $M(r) = \lim_{i \to \infty} N(r, f_i)$ bzw. $m(r) = \lim_{j \to \infty} n(r, f_j)$ gelten und die Grenzfunktionen $f_M = \lim_{i \to \infty} f_i$ und $f_m = \lim_{j \to \infty} f_j$ zu $\mathfrak{N}$ gehören. Aus der gleichmässigen Konvergenz auf $|z| = r$ folgt aber die stetige Konvergenz für $|z| = r$. Folglich sind sogar die Beziehungen $M(r) = N(r, f_M)$ und $m(r) = n(r, f_m)$ erfüllt. Ferner ergibt sich, dass die Funktionen M und m definiert und zunehmend sind und dass $M(r) \geqslant m(r) > 0$ gilt. Ueberdies ist $m(r) \leqslant |f(z)| \leqslant M(r)$ für $f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ und $|z| = r$.

Sei r_k, $r_k > 0$, eine Nullfolge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen f_k aus $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ und komplexe Zahlen z_k mit $|z_k| = r_k$, so dass die Ungleichungen $M(r_k) < \varepsilon + |f_k(z_k)|$ gelten. Nun dürfen wir annehmen, dass die Folge f_k bereits in E lokal gleichmässig gegen ein Element $f \in \mathfrak{N}$ konvergiert. Da die Konvergenz im Nullpunkt stetig ist, ergibt sich $f(0) = \lim_{k \to \infty} f_k(z_k)$, also $\lim_{k \to \infty} M(r_k) = 0$.

Es gelte b). Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $M(r) < \varepsilon$, falls $r < \delta$. Somit ist $|f(z)| < \varepsilon$ für jedes $f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$, sobald $|z| < \delta$ gilt. Sei

$$g(z) = \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{f(1 + z_0) - f(z_0)}, \qquad z_0 \text{ komplex.}$$

Nun ist offenbar $g \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$, also $|g(z)| < \varepsilon$ für $|z| < \delta$. Daraus ergibt sich

$$|f(z + z_0) - f(z_0)| < \varepsilon |f(1 + z_0) - f(z_0)| < 2\varepsilon M(r^*)$$

für $1 + |z_0| < r^*$ und $|z| < \delta$, $f \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$. Die Schar $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ ist demnach in jeder kompakten Teilmenge von E gleichgradig stetig. Da sie überdies in jeder kompakten Teilmenge gleichmässig beschränkt ist, enthält jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ eine Folge f_i, die in E lokal gleichmässig gegen eine auf E stetige Grenzfunktion f kon-

vergiert. Bezeichnet l die durch $l(z)=z^{-1}$ erklärte Transformation, so lassen sich dieselben Ueberlegungen auf die durch $h_i=l\circ f_i\circ l$ definierte Folge h_i, $h_i\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$, anwenden. Also dürfen wir annehmen, dass die Grenzfunktion f auch in einer Umgebung des Punktes ∞ stetig ist.

Die durch

$$g_i(z)=\frac{f_i(z+z')-f_i(z')}{f_i(1+z')-f_i(z')}$$

definierte Folge g_i gehört ebenfalls zu $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$. Sei $r'=|z'|$ und $r'>0$. Dann sind für die Folgen f_i und g_i nach Voraussetzung die Ungleichungen $0<m(r')\leqslant|f_i(z')|$ und $|g_i(-z')|\leqslant M(r')$ erfüllt. Da f normiert ist, gilt somit $f(1+z')-f(z')\neq 0$ für jedes z'. Da auch die Beziehungen $0<m(r)\leqslant|g_i(z)|$ für $|z|=r$ und $r>0$ gelten, ergibt sich jetzt $f(z+z')\neq f(z')$ für $z\neq 0$, das heisst f ist eineindeutig.

Also ist f eineindeutig und stetig auf Z und somit ein Homöomorphismus von Z auf sich. Da f überdies orientierungstreu sein muss, gilt $f\in\mathfrak{N}$ und Satz 1 ist bewiesen.

BEMERKUNG 1. *Die beiden Verzerrungsfunktionen M und m hängen natürlich von der betrachteten Klasse $\mathfrak{H}$ ab. Ueberdies sind sie auch voneinander abhängig. Für $l(z)=z^{-1}$ gilt nämlich $l\circ f\circ l\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$, sobald $f\in\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$. Damit lässt sich die Beziehung $M(r)\cdot m(r^{-1})=1$ leicht herleiten.*

§ 3. Quasikonforme Abbildungen

1. Sind z_1, z_2, z_3, z_4 vier verschiedene Punkte der Riemannschen Zahlenkugel Z, so verstehen wir unter dem Doppelverhältnis $D(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$ die Zahl

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}.$$

Sei h ein orientierungstreuer Homöomorphismus von Z auf sich und D ein beliebiges Doppelverhältnis. Dann bezeichnen wir mit D_h das zugeordnete Doppelverhältnis

$$D\big(h(z_1)\,h(z_2)\,h(z_3)\,h(z_4)\big).$$

Wir übernehmen die Bezeichnungen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ des vorigen Abschnittes. Gilt eine der Aussagen von Satz 1, so kann die Schar $\mathfrak{H}$ nicht aus beliebigen Homöomorphismen bestehen. Vielmehr gilt

SATZ 2. *Sei $\mathfrak{H}$ eine nicht leere Schar von orientierungstreuen Homöomorphismen von Z auf sich. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *Es gibt eine Zahl K, $K\geqslant 1$, so dass jedes h, $h\in\mathfrak{H}$, höchstens K-quasikonform ist.*

b) *$\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ ist relativ folgenkompakt in $\mathfrak{N}$ bezüglich lokaler gleichmässiger Konvergenz in E.*

c) $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ *genügt einem Verzerrungssatz.*

d) *Es gibt eine für positive r definierte positive zunehmende Funktion M mit* $\lim_{r\to 0} M(r)=0$, *so dass für jedes $h\in\mathfrak{H}$ und jedes Doppelverhältnis D mit $|D|\leqslant r$ die Ungleichung $|D_h|\leqslant M(r)$ gilt.*

e) *Es gibt eine Konstante C, $C\geqslant 1$, so dass für jedes $h\in\mathfrak{H}$ und jedes Doppelverhältnis D mit $|D|=1$ die Beziehungen $C^{-1}\leqslant|D_h|\leqslant C$ richtig sind.*

Beweis. Ist a) erfüllt, so besteht $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ offensichtlich aus normierten quasikonformen Abbildungen, deren Maximaldilatationen K nicht übertreffen. Dann ist $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ nach bekannten Sätzen der quasikonformen Abbildungen (cf. [8], II. § 5) relativ folgenkompakt in $\mathfrak{N}$ bezüglich lokaler gleichmässiger Konvergenz in E. Somit folgt b), und gemäss Satz 1 gilt dann c). Es gibt also eine für $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ gültige mit M bezeichnete Verzerrungsfunktion.

Sei $h\in\mathfrak{H}$, und seien z_1, z_2, z_3, z_4 beliebige verschiedene Punkte in Z. Dann können wir zwei Möbiustransformationen l_1 und l_2 so wählen, dass $l_1(z_2)=1$, $l_1(z_3)=0$, $l_1(z_4)=\infty$, und $l_2(1)=h(z_2)$, $l_2(0)=h(z_3)$, $l_2(\infty)=h(z_4)$ gelten. Da jedes g, $g=l_2^{-1}\circ h\circ l_1^{-1}$, zu $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{H})$ gehört, genügt jedes g dem erwähnten Verzerrungssatz. Demnach ist $|D(g(z)\,1\,0\,\infty)|=|g(z)|\leqslant M(r)$, sobald $|D(z\,1\,0\,\infty)|=|z|\leqslant r$. Aus $h=l_2\circ g\circ l_1$ und der Tatsache, dass die Doppelverhältnisse bei Möbiustransformationen sich nicht ändern, folgt somit d). Setzt man $C=M(1)$ und benützt $D(a\,b\,c\,d)\cdot D(b\,a\,c\,d)=1$, so ergibt d) sofort e).

Sei $h\in\mathfrak{H}$, sei $h(\infty)=z_0$ und l eine Möbiustransformation mit $l(z_0)=\infty$. Dann hat $g=l\circ h$ den Punkt ∞ als Fixpunkt. Gilt für h die Aussage e), so gilt sie auch für g. Sind nun z_1, z_2, z_3 beliebige verschiedene komplexe Zahlen, so ist $|D(g(z_1)\,g(z_2)\,g(z_3)\,\infty)|\leqslant C$ richtig, sobald $|D(z_1\,z_2\,z_3\,\infty)|=1$ erfüllt ist. Also folgt für je drei verschiedene komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 mit $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|$ die Ungleichung

$$\left|\frac{g(z_1)-g(z_3)}{g(z_2)-g(z_3)}\right|\leqslant C.$$

Demnach ist die Kreisdilatation H durch C beschränkt und somit g höchstens C-quasikonform ([4]; [8], IV. § 4). Da dann auch h höchstens C-quasikonform ist, gilt a) und Satz 2 ist bewiesen.

2. Für eine quasikonforme Abbildung von Z auf Z ändern sich die Doppelverhältnisse gemäss Satz 2. Doch sind sie im allgemeinen nicht quasiinvariant. Vielmehr gilt

SATZ 3. *Sei f ein orientierungstreuer Homöomorphismus von Z auf sich mit $f(\infty)=\infty$. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *Die Doppelverhältnisse sind quasiinvariant, das heisst es gibt eine Konstante K, $K\geqslant 1$, so dass für je zwei zugeordnete Doppelverhältnisse D und D_f die Ungleichungen $K^{-1}\leqslant|D_f/D|\leqslant K$ gelten.*

b) *Die Abbildung f ist quasiisometrisch in E, das heisst es gibt eine Konstante C, $C \geqslant 1$, so dass für je zwei komplexe Zahlen u und v die Ungleichungen*

$$C^{-1}|u-v| \leqslant |f(u)-f(v)| \leqslant C|u-v|$$

richtig sind.

Natürlich ist f jeweils quasikonform.

Beweis. Für g,

$$g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{f(1)-f(0)},$$

ist $g \in \mathfrak{N}$. Gilt nun a) für f, so gilt a) auch für g. Mit Hilfe von $v=(v\ 1\ 0\ \infty)$ folgt einmal $K^{-1} \leqslant |g(v)/v| \leqslant K$. Andererseits ergibt sich für $D=(u\ 0\ v\ \infty)$ die Bedingung

$$K^{-1} \leqslant \left| \frac{g(u)-g(v)}{u-v} \frac{v}{g(v)} \right| \leqslant K.$$

Daraus erhält man bei geeignet gewähltem C, $C \geqslant 1$, die Ungleichung

$$C^{-1} \leqslant \left| \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \right| \leqslant C,$$

also b). Die Umkehrung, dass b) nämlich a) impliziert, bestätigt sich unmittelbar. Da schliesslich a) die Aussage von Satz 2. e) verschärft, ist f in beiden Fällen quasikonform.

§ 4. Die Dreiecksdilatation

1. Sei S eine beliebige Punktmenge der komplexen Zahlenebene E und f eine Funktion von S in E. Sei $z \in S$, und seien u und v in S gelegene komplexe Zahlen, die den Beziehungen $v \neq z$ und $|u-z| \leqslant |v-z|$ genügen sollen. Ferner wollen wir vereinbaren, dass ein Quotient ∞ ist, falls er nicht definiert ist.

DEFINITION. *Die Zahl*

$$\sup_{u,v} \left| \frac{f(u)-f(z)}{f(v)-f(z)} \right|$$

heisst die Dreiecksdilatation von f im Punkte z und wird mit $V(z)$ bezeichnet. Die durch die Zahlen $V(z)$ auf S definierte Funktion V heisst die Dreiecksdilatation von f auf S.

Sind die Zahlen $V(z)$ endlich beziehungsweise beschränkt, so sagen wir, f habe endliche beziehungsweise beschränkte Dreiecksdilatation V.

2. Trivialerweise gilt $V(z) \geqslant 1$. Doch ist V im allgemeinen weder beschränkt noch endlich. Vielmehr haben Funktionen f mit endlichem oder sogar beschränktem V spezielle Eigenschaften.

LEMMA 1. *Hat f endliche Dreiecksdilatation, so ist f eineindeutig.*

Beweis. Gäbe es nämlich zwei verschiedene Punkte z_1 und z_2 mit $f(z_1)=f(z_2)$, so wäre gemäss unserer Konvention $V(z_1)=V(z_2)=\infty$, also V nicht endlich.

LEMMA 2. *Hat $f, f: S \to E$, beschränkte Dreiecksdilatation, und ist z_i, $z_i \in S$, eine gegen z_0, $z_0 \in E$, konvergente Zahlenfolge mit $z_i \neq z_0$ für jedes i, so ist die Bildfolge $f(z_i)$ in E konvergent.*

Beweis. Offensichtlich gibt es einen Index k mit $z_1 \neq z_k$, so dass $|z_i - z_k| \leqslant |z_1 - z_k|$ gilt für jedes i, $i > k$. Unter Benutzung von Lemma 1 folgt daraus

$$|f(z_i) - f(z_k)| \leqslant V(z_k)|f(z_1) - f(z_k)|,$$

und somit ist die Folge $f(z_i)$ beschränkt. Also existiert eine Teilfolge z_j von z_i, für die $f(z_j)$ konvergiert. Nun gibt es zu jedem j^* einen Index $N(j^*)$, so dass für jedes i und jedes j mit $i, j > N(j^*)$ die Beziehungen $|z_i - z_j| \leqslant |z_{j^*} - z_j|$ und $z_{j^*} \neq z_j$ erfüllt sind. Daraus ergibt sich

$$|f(z_i) - f(z_j)| \leqslant V(z_j)|f(z_{j^*}) - f(z_j)|.$$

Also ist die Folge $f(z_i)$ konvergent.

LEMMA 3. *Hat $f, f: S \to E$, beschränkte Dreiecksdilatation, so ist f stetig.*

Beweis. In einem isolierten Punkt z_0 von S ist f trivialerweise stetig. Sei also z_i, $z_i \in S$, eine gegen z_0, $z_0 \in S$, konvergente Folge mit $z_i \neq z_0$ für jedes i. Nach Lemma 2 konvergiert die Bildfolge $f(z_i)$. Nun gibt es zu jedem i^* einen Index $N(i^*)$, so dass $|z_0 - z_i| \leqslant |z_{i^*} - z_i|$ und $z_{i^*} \neq z_i$ für $i > N(i^*)$ erfüllt sind. Daraus ergibt sich

$$|f(z_0) - f(z_i)| \leqslant V(z_i)|f(z_{i^*}) - f(z_i)|.$$

Also konvergiert $f(z_i)$ gegen $f(z_0)$, das heisst f ist stetig.

3. Im folgenden fassen wir jede in E gelegene Punktmenge als Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel Z auf. Speziell soll $\bar{S}$ die in Z gebildete abgeschlossene Hülle von S bezeichnen.

LEMMA 4. *Sei S nicht beschränkt, und $f, f: S \to E$, von beschränkter Dreiecksdilatation. Dann gilt* $\lim\limits_{z \in S,\, z \to \infty} f(z) = \infty$.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, es existiere eine Folge z_i, $z_i \in S$, mit $z_i \to \infty$, für die $f(z_i)$ in E konvergiert. Nun gibt es zu jedem i^* einen Index $N(i^*)$, so dass $|z_1 - z_{i^*}| \leqslant |z_i - z_{i^*}|$ für $i > N(i^*)$ gelten. Also folgt

$$|f(z_1) - f(z_{i^*})| \leqslant V(z_{i^*})|f(z_i) - f(z_{i^*})|.$$

Ist jetzt $f(z_1)$ verschieden vom Grenzwert von $f(z_i)$, so erhalten wir offenbar einen Widerspruch.

LEMMA 5. *Hat f, $f: S \to E$, beschränkte Dreiecksdilatation, so lässt sich f in eindeutiger Weise zu einer topologischen Abbildung g von $\bar{S}$ erweitern.*

Beweis. Einmal ist f nach Lemma 3 stetig. Dann gibt es gemäss den Lemmata 2 und 4 eine auf $\bar{S}$ definierte, eindeutig bestimmte stetige Erweiterung g. Ueberdies ist g nach Lemma 2 in jedem endlichen Punkte endlich.

Wäre g nicht eineindeutig, so gäbe es zwei verschiedene Punkte z_1 und z_2 in E, für die $g(z_1)=g(z_2)$ gilt und die infolge Lemma 1 nicht beide in S liegen. Sei $z_1 \notin S$, und z_0, $z_0 \in S$, derart gewählt, dass $g(z_0) \neq g(z_1)$ und $|z_0 - z_1| < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ richtig sind. Ferner seien z_i und z_j zwei Folgen aus S mit $z_i \to z_1$ und $z_j \to z_2$. Nun gibt es einen Index N, so dass $|z_0 - z_i| \leqslant |z_j - z_i|$ und $z_j \neq z_i$ für alle $i, j > N$ erfüllt sind. Somit folgt

$$|f(z_0) - f(z_i)| \leqslant V(z_i)\,|f(z_j) - f(z_i)|,$$

woraus sich für $i, j \to \infty$ sofort ein Widerspruch ergibt.

Da g auf dem kompakten $\bar{S}$ eineindeutig und stetig ist, ist g topologisch.

LEMMA 6. *Sei S eine in einem Teilgebiet G von E dichte Punktmenge und f, $f: S \to E$, von beschränkter Dreiecksdilatation. Dann lässt sich f in eindeutiger Weise zu einer topologischen Abbildung g, $g: G \to E$, erweitern, die auf G beschränkte Dreiecksdilatation besitzt.*

Beweis. Gemäss Lemma 5 kann f in eindeutiger Weise zu einer topologischen Abbildung g von G erweitert werden. Nach Voraussetzung ist die bezüglich f berechnete Dreiecksdilatation V_f beschränkt, das heisst es gibt eine Konstante C, $C \geqslant 1$, für die $V_f(z) \leqslant C$ auf S gilt. Wir zeigen jetzt, dass das für g berechnete V_g dieselbe Schranke C besitzt.

Andernfalls gibt es drei Punkte z, u, v in G mit

$$|u - z| \leqslant |v - z|, \qquad v \neq z \qquad \text{und} \qquad C < \left|\frac{g(u) - g(z)}{g(v) - g(z)}\right|.$$

Offenbar kann man jetzt drei in S gelegene Punkte z', u', v' bestimmen, die die Beziehungen $|u' - z'| \leqslant |v' - z'|$ und $v' \neq z'$ erfüllen und für die

$$C < \left|\frac{g(u') - g(z')}{g(v') - g(z')}\right|$$

gültig bleibt. Daraus folgt $C < V_f(z')$, also ein Widerspruch.

4. Nun gehen wir auf den Zusammenhang zwischen den Funktionen von beschränkter Dreiecksdilatation und den quasikonformen Abbildungen ein.

SATZ 4. *Sei S eine in einem Teilgebiet G von E dichte Punktmenge und f eine Abbildung von S in E. Hat f beschränkte Dreiecksdilatation, so lässt sich f in eindeutiger Weise zu einer topologischen Abbildung h der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$, $\bar{G} \subset Z$, er-*

weitern. Ueberdies ist entweder die Beschränkung g von h auf G oder ihre konjugierte Funktion $\bar{g}$ quasikonform in G.

Beweis. Dass die Erweiterungen g und h eindeutig bestimmt und topologisch sind, folgt aus Lemma 5. Folglich ist entweder g oder ihre konjugierte $\bar{g}$ orientierungstreu. Nun hat g gemäss Lemma 6 beschränkte Dreiecksdilatation, und es gilt offenbar zwischen der Kreisdilatation H und der Dreiecksdilatation V die Beziehung $H(z) \leqslant V(z)$ in G. Somit ist die Kreisdilatation beschränkt und demnach entweder g oder $\bar{g}$ quasikonform (l.c.).

5. Im allgemeinen ist die Dreiecksdilatation einer quasikonformen Abbildung nicht beschränkt. Doch gelten die folgenden Aussagen:

ZUSATZ 1. *Sei f ein orientierungstreuer Homöomorphismus von E auf E. Die Abbildung f ist genau dann quasikonform, falls sie beschränkte Dreiecksdilatation besitzt.*

Beweis. Infolge Satz 4 muss nur mehr die Umkehrung bewiesen werden. Wir erweitern f durch $f(\infty)=\infty$ zu einer quasikonformen Abbildung von Z auf Z. Nun können wir Satz 2 anwenden. Gemäss der Aussage von Satz 2.d) ist

$$|D(f(z_1)\, f(z_2)\, f(z_3)\, \infty)| \leqslant M(1)$$

für $|D(z_1\, z_2\, z_3\, \infty)| \leqslant 1$, also hat f beschränkte Dreiecksdilatation.

ZUSATZ 2. *Sei G ein Teilgebiet von E und f eine quasikonforme Abbildung von G in E. Ist S eine beliebige kompakte Teilmenge von G, so hat die Beschränkung von f auf S beschränkte Dreiecksdilatation auf S.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, es gäbe in S Zahlenfolgen z_i, u_i, v_i mit $|u_i - z_i| \leqslant |v_i - z_i|$ und $v_i \neq z_i$, so dass

$$\left|\frac{f(u_i) - f(z_i)}{f(v_i) - f(z_i)}\right| \to \infty$$

gilt. Man darf voraussetzen, dass die Folge z_i bereits gegen eine Zahl z_0 in S konvergiert. Da das kompakte S endlichen Durchmesser besitzt, muss auch die Folge v_i gegen z_0 konvergieren. Weil z_0 in G liegt, gibt es eine Kreisscheibe U, $U \subset G$, um z_0, in der man ein Resultat von A. MORI ([9], Lemma 4; [8], p. 111) anwenden kann. Sei nun N derart gewählt, dass für alle i, $i > N$, die Kreise $V_i = \{z : |z - z_i| = |v_i - z_i|\}$ in U liegen. Dann gilt

$$\left|\frac{f(u_i) - f(z_i)}{f(v_i) - f(z_i)}\right| \leqslant \frac{M_i}{m_i},$$

wobei M_i beziehungsweise m_i das Maximum beziehungsweise das Minimum von $|f(z) - f(z_i)|$ auf V_i bezeichnen. Nach dem erwähnten Satz von A. MORI sind die Zahlen M_i/m_i für $i > N$ beschränkt. Damit erhalten wir den gewünschten Widerspruch.

§ 5. Quasikonforme Fortsetzung

1. Wir bezeichnen mit R die als Teilmenge der komplexen Zahlenebene E aufgefasste reelle Zahlengerade, und mit R^*, $R^* = R \cup \{\infty\}$, die Abschliessung von R bezüglich der Riemannschen Zahlenkugel Z. Aus den Lemmata 4 und 5 ergibt sich

LEMMA 7. *Hat f, $f: R \to E$, beschränkte Dreiecksdilatation, so lässt sich f durch $f(\infty) = \infty$ zu einer topologischen Abbildung von R^* erweitern, und somit ist $f(R^*)$ eine Jordankurve in Z.*

2. Die Abbildungen von beschränkter Dreiecksdilatation können zur Charakterisierung der quasisymmetrischen Funktionen wie auch der Quasigeraden benutzt werden. Dabei heisst eine stetige zunehmende Funktion f von R auf R quasisymmetrisch, falls eine Konstante C, $C \geqslant 1$, existiert, so dass für jedes x, $x \in R$, und jedes t, $t > 0$, die Beziehungen

$$C^{-1} \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leqslant C$$

erfüllt sind (cf. [8], II. § 7.1). Ferner nennen wir das Bild einer Geraden bei einer quasikonformen Abbildung von E auf E eine Quasigerade. Schliesslich heisse eine Abbildung f von R auf R quasikonform, falls eine quasikonforme Abbildung von E auf E existiert, deren Beschränkung auf R mit f zusammenfällt.

Dass jede quasisymmetrische Funktion von R auf R quasikonform ist und umgekehrt, haben A. BEURLING und L. AHLFORS bewiesen [3]. Wir zeigen nun zusätzlich

SATZ 5. *Sei f ein zunehmender Homöomorphismus von R auf R. Dann sind äquivalent: a) f ist quasikonform; b) f hat beschränkte Dreiecksdilatation; c) f ist quasisymmetrisch.*

Beweis. Gilt a), so gibt es eine quasikonforme Abbildung von E auf E, die f erweitert. Da diese gemäss Zusatz 1 beschränkte Dreiecksdilatation besitzt, ergibt sich b). Aus b) erhält man sofort c). Dass schliesslich c) die Aussage a) impliziert, folgt aus der bekannten Konstruktion von A. BEURLING und L. AHLFORS (l.c.; [8], II. § 6.5).

3. Nun werden wir zeigen, dass die Quasigeraden ebenfalls durch Funktionen von beschränkter Dreiecksdilatation gekennzeichnet werden können. Zum Beweise benutzen wir die von L. AHLFORS gegebene Charakterisierung solcher Kurven [1].

SATZ 6. *Hat f, $f: R \to E$, beschränkte Dreiecksdilatation, so ist $f(R)$ eine Quasigerade. Umgekehrt gibt es zu jeder Quasigeraden eine Parameterdarstellung f, $f: R \to E$, die beschränkte Dreiecksdilatation besitzt.*

Beweis. Hat f beschränkte Dreiecksdilatation, so gibt es eine Konstante C, $C \geqslant 1$, so dass für $x_1 < x_3 < x_2$ oder $x_2 < x_3 < x_1$ die Beziehung

$$\left| \frac{f(x_3) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \right| \leqslant C$$

gültig ist. Dies vereint mit Lemma 7 kennzeichnet aber eine Quasigerade (l.c.; [2], IV.E). Umgekehrt gibt es zu jeder Quasigeraden eine quasikonforme Abbildung f von E auf E, deren Beschränkung auf R diese darstellt. Nach Zusatz 1 hat f beschränkte Dreiecksdilatation, also a fortiori deren Beschränkung auf R.

4. Der Begriff der Funktionen von beschränkter Dreiecksdilatation kann auch auf weitere Fragen der quasikonformen Fortsetzung angewendet werden. Es bezeichne H, $H \subset E$, die obere Halbebene. Dann gilt

SATZ 7. *Eine quasikonforme Abbildung f von H in E lässt sich genau dann zu einer quasikonformen Abbildung von E auf E erweitern, falls f beschränkte Dreiecksdilatation auf H besitzt. Ist zusätzlich f quasiisometrisch, so gibt es eine quasiisometrische Erweiterung.*

Beweis. Seien x, u, v drei beliebige Punkte auf R mit $|u-x| \leqslant |v-x|$ und $v \neq x$. Hat nun f beschränkte Dreiecksdilatation auf H, so gibt es eine nur von f abhängige Konstante C, $C \geqslant 1$, so dass

$$\left|\frac{f(u+iy)-f(x+iy)}{f(v+iy)-f(x+iy)}\right| \leqslant C \quad \text{für} \quad y>0 \quad \text{gültig ist.}$$

Da sich f nach Lemma 5 topologisch auf $H \cup R$ erweitern lässt, erhält man

$$\left|\frac{f(u)-f(x)}{f(v)-f(x)}\right| \leqslant C \quad \text{auf} \quad R.$$

Also hat f beschränkte Dreiecksdilatation auf R, und $f(R)$ ist nach Satz 6 eine Quasigerade. Somit kann f durch quasikonforme Spiegelung fortgesetzt werden (cf. [2], IV. D). Aus Zusatz 1 folgt die Umkehrung. Schliesslich ergibt sich die gesuchte quasiisometrische Fortsetzung mit Hilfe von ([2], IV. D. Lemma 3).

5. In Ergänzung zu den Sätzen von G. SPRINGER über quasikonforme Abbildungen von Gebieten endlichen Zusammenhangs ([11]; [8], II. § 8.3) beweisen wir

LEMMA 8. *Sei G ein von endlich vielen getrennt gelegenen Kreisen berandetes Teilgebiet von E, und f eine quasikonforme Abbildung von G in Z. Genau dann kann f zu einer quasikonformen Abbildung von Z auf Z erweitert werden, falls eine Konstante C, $C \geqslant 1$, existiert, so dass für jedes Doppelverhältnis D aus Punkten in G die Ungleichung $|D_f| \leqslant C$ gilt, sobald $|D| \leqslant 1$ erfüllt ist.*

Beweis. Sei S ein Randkreis von G, und T das Innere der Komponente von $Z-G$, die S enthält. Wir werden zuerst zeigen, dass sich f topologisch auf S erweitern lässt. Mit den Randwerten von f auf S werden wir dann eine quasikonforme Abbildung von T konstruieren. Wenden wir dies auf alle Randkreise an, so erhalten wir schliesslich eine auf Z definierte Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei $r \in G$, und seien l_{I} und l_{II} zwei Möbiustransformationen mit $l_{\mathrm{I}}(r)=\infty$ und

$l_{\mathrm{II}}(\infty)=f(r)$. Sei $p=l_{\mathrm{II}}^{-1}\circ f\circ l_{\mathrm{I}}^{-1}$, und seien z, u, v drei verschiedene Punkte in $l_{\mathrm{I}}(G)$ mit $|u-z|\leqslant|v-z|$. Da die Möbiustransformationen die Doppelverhältnisse invariant lassen und f sie gemäss Voraussetzung verändert, ergibt sich aus $|D(u\,v\,z\,\infty)|\leqslant 1$ die Beziehung $|D(p(u)\,p(v)\,p(z)\,\infty)|\leqslant C$. Demnach hat p beschränkte Dreiecksdilatation auf $l_{\mathrm{I}}(G)$, und man kann p nach Lemma 5 topologisch erweitern. Sei nun S ein Randkreis von G und D ein Doppelverhältnis aus Punkten in S mit $|D|\leqslant 1$. Da sich f, $f=l_{\mathrm{II}}\circ p\circ l_{\mathrm{I}}$, topologisch auf S erweitern lässt und die Doppelverhältnisse in G sich gemäss Voraussetzung verändern, erhält man durch eine einfache Stetigkeitsbetrachtung $|D_f|\leqslant C$ auf S.

Sei $t\in S$, und seien l_1 und l_2 zwei Möbiustransformationen mit $l_1(S)=R, l_1(G)\subset H$, $l_1(t)=\infty$ und $l_2(\infty)=f(t)$. Sei $g=l_2^{-1}\circ f\circ l_1^{-1}$, und seien x, u, v drei verschiedene Punkte auf R mit $|u-x|\leqslant|v-x|$. Nun ergibt sich wie vorhin $|D(g(u)\,g(v)\,g(x)\,\infty)|\leqslant C$ aus $|D(u\,v\,x\,\infty)|\leqslant 1$. Demnach hat g beschränkte Dreiecksdilatation auf R, und es ist $g(R)$ nach Satz 6 eine Quasigerade. Folglich gibt es eine quasikonforme Abbildung k von E auf E, die R auf $g(R)$ abbildet und für die $(k^{-1}\circ l_2^{-1}\circ f)(G)\subset H$ gilt. Setzen wir $h=k^{-1}$ und erweitern h durch $h(\infty)=\infty$ auf Z, so gibt es nach Satz 2 für h eine Verzerrungsfunktion M für die Veränderung der Doppelverhältnisse. Sei $M^*=M(C)$ und $m=h\circ g$. Nun gilt $|D(m(u)\,m(v)\,m(x)\,\infty)|\leqslant M^*$ für $|D(u\,v\,x\,\infty)|\leqslant 1$ bezüglich der durch m induzierten Abbildung von R auf R. Somit hat m beschränkte Dreiecksdilatation auf R und ist gemäss Satz 5 quasikonform. Bezeichnet H^* die untere Halbebene, so gibt es also eine quasikonforme Abbildung m^* von H^* auf H^* mit den durch m auf R gegebenen Randwerten. Jetzt bildet $l_2\circ k\circ m^*\circ l_1$ das von S berandete Gebiet T quasikonform auf das Innere der von $f(S)$ berandeten Komponente von $Z-f(G)$ ab, löst demnach das angekündigte Randwertproblem.

Es gibt also eine topologische Abbildung f^* von Z auf Z, die f erweitert und auf jedem T quasikonform ist. Nach der analytischen Definition der quasikonformen Abbildungen (cf. [2], II.B) sind die Randkreise von G quasikonform hebbar. Also ist f^* die gesuchte Erweiterung.

Die Umkehrung des Lemmas folgt aus Satz 2.

6. Schliesslich beweisen wir

SATZ 8. *Sei G ein Teilgebiet von E, dessen Randkomponentenmenge derart aus Punkten und Kreisen bestehen soll, dass die Menge der Kreise sich in höchstens endlich vielen Randkomponenten häuft.*

Eine quasikonforme Abbildung f von G in Z kann genau dann zu einer quasikonformen Abbildung von Z auf Z erweitert werden, falls eine Konstante C, $C\geqslant 1$, existiert, so dass für jedes Doppelverhältnis D aus Punkten in G die Ungleichung $|D_f|\leqslant C$ gilt, sobald $|D|\leqslant 1$ erfüllt ist.

Beweis. Sei W die Punktmenge, die die Komponenten von $Z-G$ enthält, die ihrerseits die Häufungsrandkomponenten der Randkreise von G enthalten. Nun

fassen wir die Komponenten der Menge $(Z-G)-W$, die aus abgeschlossenen Kreisscheiben bestehen, zu einer Punktmenge V zusammen, und vereinigen die übrigen Komponenten von $(Z-G)-W$ zu einer Punktmenge U. Somit ist U total unzusammenhängend, und es bilden die Mengen G, U, V, W eine Zerlegung von Z. Sukzessive soll f auf U, V, W quasikonform erweitert werden.

Offenbar ist $G \cup U$ ein Gebiet. Wir gehen nun wie im Beweise von Lemma 8 vor und werden die dort eingeführten Bezeichnungen übernehmen. So hat das analog definierte p beschränkte Dreiecksdilatation auf $l_1(G)$. Somit kann p nach Lemma 5 topologisch erweitert werden, und man kann überdies Satz 4 anwenden. Speziell ist also p in $l_1(G \cup U)$ quasikonform. Nun lässt sich auch f sowohl topologisch auf den Rand von G wie auch quasikonform auf $G \cup U$ fortsetzen.

Ist S ein Randkreis von G, so kann man wie im Beweise von Lemma 8 mit den Randwerten von f auf S eine quasikonforme Abbildung der zugeordneten Menge T konstruieren, unabhängig ob T zu V oder W gehört. Doch müssen wir zusätzlich zeigen, dass die Maximaldilatationen der dabei auftretenden Abbildungen beschränkt sind. Gemäss der Konstruktion für Lemma 8 genügt es zu zeigen, dass dies für die jedem T zugeordneten Abbildungen k und m^* der Fall ist. Einmal gibt es solche k, deren Maximaldilatationen unterhalb einer nur von C abhängigen Schranke liegen (cf. [2], IV. E). Fassen wir andererseits die Abbildungen h, $h=k^{-1}$, zu einer Schar $\mathfrak{H}$ zusammen, so ergibt sich gemäss Satz 2 eine für die ganze Schar $\mathfrak{H}$ gültige Verzerrungsfunktion M. Setzen wir jetzt $M^*=M(C)$, so kann man schliesslich jeweilen solche m^* konstruieren, deren Maximaldilatationen unterhalb einer nur von M^* abhängigen Schranke liegen (cf. [8], II. § 6.5).

Wir können also f zu einer auf $G \cup U \cup V$ definierten Funktion erweitern, die in jedem T, $T \subset V$, quasikonform ist und dort beschränkte Maximaldilatation besitzt. Da jedes S, $S \subset V$, eine isolierte Randkomponente von $G \cup U$ darstellt, ist die so erweiterte Abbildung f analog dem Beweise in Lemma 8 quasikonform in $G \cup U \cup V$. Schliesslich enthält W nach Voraussetzung nur endlich viele Kreisscheiben, für die wir übrigens bereits quasikonforme Abbildungen konstruiert haben. Es genügt also, die verbleibenden endlich vielen Kreise und Punkte quasikonform zu heben. Somit gibt es eine solche Erweiterung.

Die Umkehrung des Satzes folgt aus Satz 2.

BEMERKUNG 2. *Ohne Aenderung der übrigen Voraussetzungen nehmen wir an, dass die Punktmenge W aus endlich vielen Kreisscheiben und einer Punktmenge O_{AD} bestehen soll. Nun lässt sich der obige Beweis übertragen. Man hat dabei einzig zu beachten, dass eine Menge O_{AD} quasikonform hebbar ist* ([10], p. 67; [8], V. § 3).

LITERATUR

[1] L. V. AHLFORS, *Quasiconformal reflections*, Acta Math. *109* (1963), 291–301.

[2] L. V. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand Math. Studies (D. van Nostrand 1966).
[3] A. BEURLING und L. AHLFORS, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, Acta Math. *96* (1956), 125–142.
[4] F. W. GEHRING, *The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings*, Ann. ac. sc. fenn. [A] I, 281 (1960).
[5] F. W. GEHRING, *The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space*, Ann. ac. sc. fenn. [A] I, 336/11 (1963).
[6] H. P. KÜNZI, *Quasikonforme Abbildungen*, Ergebnisse der Math. (Springer-Verlag 1960).
[7] O. LEHTO, K. I. VIRTANEN und J. VÄISÄLÄ, *Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings*, Ann. ac. sc. fenn. [A] I, 273 (1959).
[8] O. LEHTO und K. I. VIRTANEN, *Quasikonforme Abbildungen*, Grundlehren der Math. Wissensch. (Springer-Verlag 1965).
[9] A. MORI, *On quasiconformality and pseudoanalyticity*, Trans. Amer. Math. Soc. *84* (1957), 56–77.
[10] H. RENGGLI, *Quasiconformal mappings and extremal lengths*, Amer. J. Math. *86* (1964), 63–69.
[11] G. SPRINGER, *Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping*, Acta Math. *111* (1964), 121–142.

Eingegangen den 22. Mai 1967

ETH Zürich und Univ. of New Mex.