

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 43 (1968)

Artikel: Über freie Untergruppen gegebener Gruppen.
Autor: Stammbach, U.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32912>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über freie Untergruppen gegebener Gruppen

U. STAMMBACH¹⁾

1. Einführung

STALLINGS zeigte in [7], Theorem 6.5, dass aus dem Verschwinden der 2. Homologiegruppe einer Gruppe G mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_p (dem Restklassenkörper zur Primzahl p) auf die Existenz von freien Untergruppen in G geschlossen werden kann. Nimmt man nämlich in G eine Menge von Elementen, deren kanonische Bilder in der 1. Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_p linear unabhängig sind, so erzeugen diese Elemente in G eine freie Untergruppe. Es gibt nun in der Präsentationstheorie der Gruppen eine Reihe von Sätzen, die Aussagen über die Existenz von freien Untergruppen machen. Es liegt nahe zu fragen, welche dieser Sätze auch mit Hilfe des Verfahrens von Stallings bewiesen werden können. Diese Frage ist auch deshalb von besonderem Interesse, weil es auf diese Art gelingt, die umfangreichen und unübersichtlichen Rechnungen zu eliminieren, die in den üblichen Beweisen dieser Sätze auftreten. Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Beantwortung der oben gestellten Frage. Unser Hauptresultat ist das folgende (siehe Abschnitt 3):

Es sei G eine Gruppe mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen. Die 1. Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_p (p prim oder $p=0$) werde durch n Elemente erzeugt. Dann enthält die Gruppe G eine freie Untergruppe mit n Erzeugenden.

Ein erstes Korollar davon ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus der Präsentationstheorie der Gruppen, der aus der speziellen Form einer Präsentation folgt, dass gewisse der Erzeugenden eine freie Untergruppe erzeugen.

Ein zweites Korollar betrifft einen Satz von MAGNUS (s. [5], [9]): *Eine Gruppe G besitze eine Präsentation mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen und auch eine Präsentation mit n Erzeugenden. Dann ist G frei.*

Ferner lässt sich ein Teil (der leichter zu beweisende Teil) des sogenannten „Freiheitssatzes“ von MAGNUS (s. [3]) ebenfalls als Korollar erhalten.

Ein weiteres Nebenresultat zeigt, dass die 2. Homologiegruppe einer Knotengruppe bezüglich einer beliebigen abelschen Koeffizientengruppe trivial ist.

2. Notation

G bezeichnet eine beliebige Gruppe. Eine exakte Sequenz von Gruppen $e \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow e$, wo F eine freie Gruppe ist, heisst eine Präsentation von G . Ist F die freie

¹⁾ Der Verfasser ist Empfänger eines Stipendiums des Schweizerischen Nationalfonds.

Gruppe mit $n+r$ Erzeugenden und wird R als Normalteiler in F durch r Elemente erzeugt, so sagt man, G besitze eine *Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen*. p bezeichne im Folgenden entweder die Zahl 0 oder eine Primzahl. Ist U eine Untergruppe von G , so definieren wir $G \#_p U$ als die Untergruppe, die von allen Elementen der Form $gug^{-1}u^{-1}v^p$ mit $g \in G, u, v \in U$ erzeugt wird (vergl. [7]). Die Gruppen $G_k^{(p)}$ (p fest) definieren wir rekursiv wie folgt (vergl. [7]):

$$G_0^{(p)} = G; \quad G_{k+1}^{(p)} = G \#_p G_k^{(p)}.$$

Die Reihen $\{G_k^{(p)}\}$ (p fest) sind offensichtlich Zentralreihen: Für $p=0$ erhalten wir die übliche absteigende Zentralreihe; für $p=\text{Primzahl}$ ergibt sich die am schnellsten absteigenden Zentralreihe, deren sukzessive Quotienten Vektorräume über dem Restklassenkörper \mathbb{Z}_p sind. Ein Gruppenhomomorphismus $f: G \rightarrow H$ bildet $G_k^{(p)}$ in $H_k^{(p)}$ ab.

Unter $H_i(G, \mathbb{Z}_p)$ verstehen wir die i -te Homologiegruppe von G mit Koeffizienten in der additiven Gruppe von \mathbb{Z}_p ($\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$ bezeichnet den Ring der ganzen Zahlen), wobei G trivial auf \mathbb{Z}_p operieren soll (für eine Definition der Homologiegruppen vergl. [1]). Speziell ist $H_1(G, \mathbb{Z}_p) \cong G/G \#_p G$ (s. [7]). Ist p eine Primzahl, so ist $H_i(G, \mathbb{Z}_p)$ bekanntlich ein Vektorraum über dem Restklassenkörper \mathbb{Z}_p . Unter der Dimension von $H_i(G, \mathbb{Z}_p)$ verstehen wir die Dimension dieses Vektorraumes.

3. Hauptsatz und Folgerungen

HAUPTSATZ. Die Gruppe G besitze eine Präsentation mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen. Für ein p (p prim oder $p=0$) werde $H_1(G, \mathbb{Z}_p) \cong G/G \#_p G$ durch n Elemente erzeugt. Dann gilt für dieses p :

- (a) Ist p prim, so ist $H_1(G, \mathbb{Z}_p)$ von der Dimension n . Ist $p=0$, so ist $H_1(G, \mathbb{Z}_0)$ frei abelsch vom Rang n .
- (b) $H_2(G, \mathbb{Z}_p) = 0$.
- (c) Sind x_1, \dots, x_n Elemente aus G , deren kanonische Bilder in $G/G \#_p G$ eine Basis bilden, so erzeugen sie in G eine freie Untergruppe F .
- (d) Die Einbettung $i: F \subset G$ induziert für alle $k \geq 0$ Isomorphismen

$$i: F/F_k^{(p)} \cong G/G_k^{(p)}.$$

Den Beweis dieses Satzes führen wir in Abschnitt 4. Vorerst aber wollen wir einige Folgerungen aus diesem Hauptsatz angeben.

Korollar 1 verallgemeinert Theorem 5.14 aus [6].

KOROLLAR 1. Es sei $G = F/R$, wo F die freie Gruppe in $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_r$ bezeichnet und R in F von den Wörtern $b_i q_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_r)$ ($i=1, \dots, r$) erzeugt wird. Die Wörter q_i sollen in b_k die Exponentensumme $p \cdot t_{ki}$ ($k=1, \dots, r$) aufweisen, wobei p eine Primzahl oder 0 ist. Dann erzeugen a_1, \dots, a_n eine freie Untergruppe F vom Rang n in

G. Ausserdem induziert die Einbettung $i: F \rightarrow G$ für jedes $m \geq 0$ Isomorphismen

$$i: F/F_m^{(p)} \cong G/G_m^{(p)}.$$

Beweis: Die Gruppe $G/G \#_p G$ wird durch die Bilder von a_1, \dots, a_n erzeugt. Die Gruppe G und die Elemente a_1, \dots, a_n erfüllen also die Voraussetzungen des Hauptsatzes (c), woraus die Behauptung des obigen Korollars folgt.

Das nächste Korollar ist ein wohlbekannter Satz von MAGNUS [5]. Der Verfasser hat dafür bereits in [9] einen sehr einfachen Beweis angegeben, der ähnliche Methoden verwendet.

KOROLLAR 2. *Besitzt die Gruppe G eine Präsentierung mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen und besitzt sie auch eine Präsentierung mit n Erzeugenden, so ist G die freie Gruppe mit n Erzeugenden.*

Beweis: Die abelsch gemachte Gruppe $G/G \#_0 G$ wird durch die Bilder der n Erzeugenden x_1, \dots, x_n von G erzeugt. Die Bilder von x_1, \dots, x_n bilden also notwendigerweise eine Basis von $G/G \#_0 G$. Nach dem Hauptsatz, Abschnitt (c), ist G also frei.

KOROLLAR 3. *Es sei G eine Gruppe mit $n+1$ Erzeugenden a_1, \dots, a_n, b und einer Relation. Die Exponentensumme s von b in der Relation sei nicht 0. Dann erzeugen a_1, \dots, a_n eine freie Untergruppe F . Ist p eine Primzahl, die s nicht teilt, so induziert die Einbettung $i: F \rightarrow G$ für jedes $m \geq 0$ Isomorphismen*

$$i: F/F_m^{(p)} \cong G/G_m^{(p)}.$$

Beweis: Ist p eine Primzahl, die s nicht teilt, dann ist $H_1(G, \mathbb{Z}_p)$ von der Dimension n , und die Bilder von a_1, \dots, a_n in $H_1(G, \mathbb{Z}_p)$ bilden eine Basis. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind folglich erfüllt, und die Behauptungen des Korollars folgen aus (c) und (d).

Bemerkung. Das obige Korollar ist ein Teil des berühmten „Freiheitssatzes“ von MAGNUS [3]. Dieser sagt aus, dass die von a_1, \dots, a_n erzeugte Untergruppe frei ist, wenn b in der Relation „wirklich“ vorkommt, d.h. wenn b aus der Relation durch Transformationen nicht entfernt werden kann. Der Freiheitssatz ist ein Beispiel eines Satzes, der *nicht* mit Hilfe des Verfahrens von Stallings bewiesen werden kann. Man zeigt nämlich leicht, dass die 2. Homologiegruppe einer Gruppe $G \cong F/(q)$, wo q in der Kommutatoruntergruppe von F liegt, für jedes p (prim oder 0) eine nicht triviale 2. Homologiegruppe besitzt (s. [8]).

Auch das nächste Korollar betrifft einen bereits bekannten Satz:

KOROLLAR 4. *Für eine Knotengruppe G ist die 2. Homologiegruppe bezüglich einer beliebigen abelschen Koeffizientengruppe trivial.*

Beweis: Nach [2] besitzt eine Knotengruppe G eine Präsentation mit $1+r$ Erzeugenden und r Relationen. Ebenfalls nach [2] ist $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Mit unserem Hauptsatz folgt nun $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$. Mit dem universellen Koeffiziententheorem ergibt sich schliesslich $H_2(G, A) = H_2(G, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A = 0$.

4. Beweis des Hauptsatzes

Wir entnehmen der bereits zitierten Arbeit von STALLINGS [7] oder einer Arbeit des Verfassers [8] die folgende exakte Sequenz, die einer Präsentation $e \rightarrow R' \rightarrow F' \rightarrow G \rightarrow e$ von G zugeordnet ist (p prim oder $p=0$):

$$(I) \quad 0 \rightarrow H_2(G, \mathbb{Z}_p) \rightarrow R'/F' \#_p R' \rightarrow H_1(F', \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$$

Wir spalten (I) in zwei kurze exakte Sequenzen auf:

$$(II) \quad 0 \rightarrow H_2(G, \mathbb{Z}_p) \rightarrow R'/F' \#_p R' \rightarrow A \rightarrow 0$$

$$(III) \quad 0 \rightarrow A \rightarrow H_1(F', \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$$

Es sei nun im Folgenden $e \rightarrow R' \rightarrow F' \rightarrow G \rightarrow e$ eine Präsentation mit $n+r$ Erzeugenden und r Relationen.

1) Wir behandeln zuerst den Fall $p=0$. Für $G \#_0 U$ schreiben wir hier wie üblich $[G, U]$. Wir betrachten zuerst die Sequenz (III). $H_1(F', \mathbb{Z})$ ist die freie abelsche Gruppe vom Rang $n+r$. Der Rang von $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$ ist $\leq n$, da G laut Voraussetzung durch n Elemente erzeugt wird. Daraus folgt, dass der Rang von $A \geq r$ ist. Andererseits wird $R'/[F', R']$ durch r Elemente, nämlich die Relationen erzeugt. Also wird auch A als Quotient dieser Gruppe von r Elementen erzeugt. Daraus folgt

$$\text{Rang } A = r.$$

Aus der Sequenz (III) erhält man nun: $\text{Rang } G/[G, G] = n$, d.h. $G/[G, G]$ ist frei abelsch mit n Erzeugenden. Da A als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe frei abelsch ist, zerfällt die Sequenz (II). Die Gruppe $R'/[F', R']$ enthält also die freie abelsche Gruppe A vom Rang r als direkten Summanden. Sie wird andererseits durch r Elemente erzeugt. Daraus folgt, dass $A = R'/[F', R']$ ist. Also gilt:

$$H_2(G, \mathbb{Z}) = 0.$$

Es sei nun weiter F die freie Gruppe mit den n Erzeugenden y_1, \dots, y_n . Mit $\{x_1, \dots, x_n\}$ bezeichnen wir eine Menge von Elementen aus G , deren kanonische Bilder in $G/[G, G]$ eine Basis bilden. Dann induziert die Abbildung $\varphi: F \rightarrow G$, definiert durch $y_i \rightarrow x_i$ ($i=1, \dots, n$), offensichtlich einen Isomorphismus $\varphi: H_1(F, \mathbb{Z}) \cong H_1(G, \mathbb{Z})$ und einen Epimorphismus $\varphi: H_2(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(G, \mathbb{Z})$. Daraus folgt mit einem Satz von STALLINGS (s. [7], Theorem 3.4; [8], Satz II.2), dass φ Isomorphismen

$$\varphi: F/F_k^{(0)} \cong G/G_k^{(0)}$$

induziert. Ausserdem ist $\cap F_k^{(0)} = e$ (s. [4]). Somit induziert φ eine Einbettung $\varphi: F \subset G$.

Damit ist der Hauptsatz für $p=0$ bewiesen.

2) Es sei p eine Primzahl.

Auch $R'/F' \#_p R'$ ist als Quotient von $R'/[F', R']$ durch die r Relationen erzeugt. Daraus folgt genau wie oben, dass der \mathbb{Z}_p -Vektorraum A die Dimension r besitzt. Folglich ist einerseits $H_1(G, \mathbb{Z}_p)$ von der Dimension n und andererseits $H_2(G, \mathbb{Z}_p)=0$.

Nach einem Satz von STALLINGS (s. [7], Theorem 6.5) erzeugen dann Elemente von G , deren kanonische Bilder in $H_1(G, \mathbb{Z}_p)$ linear unabhängig sind, eine freie Untergruppe F in G . Ausserdem ergibt sich beim Beweis dieses Satzes von STALLINGS, dass φ für jedes $k \geq 0$ Isomorphismen

$$\varphi: F/F_k^{(p)} \cong G/G_k^{(p)}$$

induziert.

Damit ist der Hauptsatz auch für eine Primzahl p bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CARTAN, H. und EILENBERG, S., *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press (1956).
- [2] CROWELL, R. und FOX, R., *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Company (1963).
- [3] MAGNUS, W., *Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)*, J. reine u. angew. Math. 163 (1930), 411–165.
- [4] MAGNUS, W., *Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring*, Math. Ann., 111 (1935), 259–280.
- [5] MAGNUS, W., *Über freie Faktorgruppen und freie Untergruppen gegebener Gruppen*, Monatshefte für Math. und Phys. 47 (1939), 307–313.
- [6] MAGNUS, KARRAS, SOLITAR, *Combinatorial Group Theory*, Wiley (1965).
- [7] STALLINGS, J., *Homology and Central Series of Groups*, J. of Algebra, 2 (1965), 170–181.
- [8] STAMMBACH, U., *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen*, Math. Z. 94 (1966), 157–177.
- [9] STAMMBACH, U., *Ein neuer Beweis eines Satzes von Magnus*, wird in Proc. Cambridge Phil. Soc. erscheinen.

Eingegangen den 3. Juli 1967.

Forschungsinstitut für Mathematik der E.T.H., 8006 Zürich