

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1967)  
  
**Artikel:** Über die Wachstumsordnung eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten.  
**Autor:** Hengartner, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32131>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Wachstumsordnung eines linearen Systems von Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

WALTER HENGARTNER, Zürich

## Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit linearen Systemen von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

$$w'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} w_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Dieses System besitzt genau  $n$  linear unabhängige Lösungsvektoren. Es existiert somit zu jeder  $n$ -reihigen quadratischen Koeffizientenmatrix  $A$  eine  $n$ -reihige quadratische reguläre Matrix  $W$  (d.h. die Determinante verschwindet nicht identisch) mit

$$W' = A \cdot W. \quad (2)$$

Jeder Lösungsvektor von (1) ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren von  $W$ .  
Die lineare Differentialgleichung

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot v^{(k)}$$

ist äquivalent dem System (1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

und wir sprechen dann von einem Wronskischen System.

Im folgenden sind die Elemente der Koeffizientenmatrix  $A$  komplexwertige ganze Funktionen einer komplexen Variablen. Wir sprechen von  $A$  als einer ganzen Matrizenfunktion. Dann ist auch jede reguläre Lösungsmatrix von (2) eine ganze Matrizenfunktion.

Sind die Koeffizienten eines Wronskischen Systems Polynome, so ist nach Untersuchungen von VALIRON [4] und WITTICH [5], [6], [7] das allgemeine Integral von (3) eine ganze transzendente Funktion. Ihre Ordnung ist positiv und rational. Dieses Resultat kann nicht auf das System (1) verallgemeinert werden, denn die Gleichung

$$W' = \begin{pmatrix} z & 1 - z^2 \\ 1 & -z \end{pmatrix} \cdot W$$

besitzt nur Lösungen von der Form

$$W(z) = \begin{pmatrix} 1 + z^2 & z \\ z & 1 \end{pmatrix} \cdot C,$$

wo  $C$  eine konstante  $2 \times 2$  Matrix ist. Ist anderseits  $A$  eine  $n \times n$  Matrix über dem Ring der Polynome in  $z$  und  $W$  eine transzendente Lösung des Systems (1), so ist jedes transzendente Element  $w_{ik}$  von  $W$  vom Mitteltypus einer rationalen Ordnung  $\lambda \geq 1/n$ .

Besitzt ein Wronskisches System (3) mindestens einen transzendenten Koeffizienten  $a_k$ , so ist nach M. FREI [1] das allgemeine Integral von unendlicher Wachstumsordnung. Insbesondere gilt für die Wachstumsordnung  $\lambda$  der allgemeinen Lösung von (3) die Beziehung

$$\lambda(\log T(r, w)) = \max_k \lambda(a_k). \quad (4)$$

Ueberdies ist es M. FREI gelungen, eine obere Schranke für die Anzahl linear unabhängiger Lösungen endlicher Ordnung anzugeben. Auch diese Resultate sind, wie wir zeigen werden, für lineare Systeme (1) nicht gültig.

In der vorliegenden Arbeit vergleichen wir mit Hilfe der Werteverteilungslehre von R. NEVANLINNA [3] das Wachstum der Koeffizienten mit dem Wachstum der Lösungsvektoren des Systems (1). In einem ersten Paragraphen übertragen wir den Begriff der Wachstumsordnung auf meromorphe Vektor- und Matrizenfunktionen. In § 2 betrachten wir lineare Systeme, deren Koeffizientenmatrix eine beliebige ganze Matrizenfunktion ist. Die Sätze 2.1 und 2.2 sind Verallgemeinerungen von Resultaten, die M. FREI [1] für lineare Differentialgleichungen bewiesen hat. Setzen wir von der Koeffizientenmatrix  $A$  voraus, dass die  $a_{ik}$  mit  $i < k - 1$  identisch verschwinden, so liefert unser Hauptresultat (§ 3) eine Aussage über die maximale Anzahl linear unabhängiger Lösungsvektoren endlicher Ordnung. Satz 3.2 ergibt ueberdies eine untere und obere Schranke für das Anwachsen einer regulären (d.h. mit nicht identisch verschwindender Determinante) Lösungsmatrix  $W$ .

Einen Teil meiner Ergebnisse habe ich schon 1965 in [2] veröffentlicht.

An dieser Stelle spreche ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. PFLUGER für sein wohlwollendes Interesse und für seine wertvollen Anregungen während der Ausführung dieser Arbeit meinen verbindlichsten Dank aus.

## § 1. Die Wachstumsordnung meromorpher Vektor- und Matrizenfunktionen

Es sei  $w$  eine in der  $z$ -Ebene meromorphe Funktion:  $z \mapsto w(z)$ . Die Schmiegungsfunktion  $m$  der Funktion  $w$  ist definiert durch

$$m(r, w) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\varphi})| d\varphi \quad (1,1)$$

Es bezeichnet  $n(t, w)$  die Anzahl Pole von  $w$  im abgeschlossenen Kreis  $|z| \leq t$ .

$$N(r, w) = \int_0^r \frac{n(t, w) - n(0, w)}{t} dt + n(0, w) \cdot \log r \quad (1,2)$$

definiert die Anzahlfunktion der Pole von  $w$ . Die charakteristische Funktion  $T$  von  $w$  ist gegeben durch

$$T(r, w) = N(r, w) + m(r, w). \quad (1,3)$$

Für eine ganze Funktion  $w$  ist

$$T(r, w) = m(r, w). \quad (1,4)$$

$$\lambda(w) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, w)}{\log r} \quad (1,5)$$

ist die Wachstumsordnung der meromorphen Funktion  $w$ , d.i. die Wachstumsordnung ihrer charakteristischen Funktion  $T$ .

Im folgenden werden einige Eigenschaften der oben definierten Grössen zusammengestellt.

a) Für  $T$  und  $m$  gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} T(r, w_1 + w_2) &\leq T(r, w_1) + T(r, w_2) + O(1) \\ T(r, w_1 \cdot w_2) &\leq T(r, w_1) + T(r, w_2) \\ T(r, 1/w) &\leq T(r, w) + O(1), \quad \text{falls } w \neq 0 \\ m(r, w_1 + w_2) &\leq m(r, w_1) + m(r, w_2) + O(1) \\ m(r, w_1 \cdot w_2) &\leq m(r, w_1) + m(r, w_2) \end{aligned} \quad (1,6)$$

b)  $T(r, w)$  ist eine mit  $r$  strikte wachsende und in  $\log r$  konvexe Funktion, ausser es sei  $w$  eine Konstante.

c) Aus

$$T(r, w_1) \leq T(r, w_2) + O(\log r)$$

folgt

$$\lambda(w_1) \leq \lambda(w_2) \quad (1,7)$$



und daraus

$$\begin{aligned}\lambda(w_1 \pm w_2) &\leq \max [\lambda(w_1), \lambda(w_2)] \\ \lambda(w_1 \cdot w_2) &\leq \max [\lambda(w_1), \lambda(w_2)]\end{aligned}\quad (1,8)$$

sowie

$$\begin{aligned}\lambda(w_1 \pm w_2) &= \lambda(w_1) \\ \lambda(w_1 \cdot w_2) &= \lambda(w_1), \quad \text{für } \lambda(w_1) > \lambda(w_2), \quad w_2 \neq 0.\end{aligned}\quad (1,9)$$

d) Für die logarithmische Ableitung von  $w$  gilt

$$m(r, w'/w) = O(\log(r \cdot T(r, w))), \quad (1,10)$$

wenn  $r$  ausserhalb einer  $r$ -Menge  $\Delta_r$ , auf der  $\int_{\Delta_r} r^{k-1} dr$ ,  $k \geq 0$ , endlich ist, gegen unendlich strebt.

Ist  $w$  von endlicher Ordnung, so gilt:

$$m(r, w'/w) = O(\log r) \quad \text{für alle } r, r \rightarrow \infty. \quad (1,11)$$

e) Ist  $w'$  die Ableitung von  $w$ , so gilt

$$\lambda(w') = \lambda(w). \quad (1,12)$$

f) Der erste Hauptsatz der Nevanlinna'schen Theorie [3] lautet: Für alle Konstanten  $a$  ist

$$T(r, w) = N(r, 1/(w - a)) + m(r, 1/(w - a)) + O(1) \quad (1,13)$$

g) Ist  $w$  eine ganze Funktion und

$$M(r, w) = \max_{|z|=r} |w(z)|,$$

so gilt

$$T(r, w) \leq \log^+ M(r, w) \leq \frac{R+r}{R-r} \cdot T(R, w), \quad \text{für } r < R,$$

und

$$\lambda(w) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, w)}{\log r}. \quad (1,14)$$

Nun betrachten wir  $n$ -tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  von Funktionen  $a_1, \dots, a_n$ , die in der  $z$ -Ebene meromorph sind, und nennen sie meromorphe Vektorfunktionen  $\vec{a}$ . Wir betrachten ferner  $n \times n$  Matrizen  $A = (a_{ik})$  über dem Ring der meromorphen Funktionen (die Elemente  $a_{ik}$  sind in der  $z$ -Ebene meromorphe Funktionen) und nennen sie meromorphe Matrizenfunktionen. Ist die Matrix regulär, d.h. die Determinante  $\Delta A(z)$  verschwindet nicht identisch, so sprechen wir von einer regulären Matrizenfunktion. Es existiert dann die inverse Matrix  $A^{-1}$ , die wieder meromorph ist.

**Definition 1.1:** Die Wachstumsordnung eines meromorphen Vektors

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  resp. einer meromorphen Matrix  $A = (a_{ik})$  wird definiert durch

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{a}) &= \max_k \lambda(a_k) \\ \lambda(A) &= \max_{i,k} \lambda(a_{ik}).\end{aligned}\tag{1,15}$$

Wird die charakteristische Funktion  $T$  von  $A$  durch

$$T(r, A) = \max_{i,k} T(r, a_{ik})\tag{1,16}$$

definiert, so gilt analog zu (1,5)

$$\lambda(A) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, A)}{\log r}.\tag{1,17}$$

Sind die Komponenten von  $\vec{a}$  resp. die Elemente von  $A$  ganze Funktionen, und setzt man

$$\begin{aligned}M(r, \vec{a}) &= \max_{|z|=r} \max_k |a_k(z)| \\ M(r, A) &= \max_{|z|=r} \max_{i,k} |a_{ik}(z)|,\end{aligned}$$

so gilt entsprechend (1,14)

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{a}) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, \vec{a})}{\log r} \\ \lambda(A) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, A)}{\log r}.\end{aligned}\tag{1,18}$$

Für meromorphe Matrizenfunktionen folgt aus (1,8) und (1,15)

$$\begin{aligned}\lambda(A \pm B) &\leq \max [\lambda(A), \lambda(B)] \\ \lambda(A \cdot B) &\leq \max [\lambda(A), \lambda(B)],\end{aligned}\tag{1,19}$$

aus (1,9) und (1,14), für  $\lambda(A) > \lambda(B)$ ,

$$\begin{aligned}\lambda(A \pm B) &= \lambda(A) \\ \lambda(A \cdot B) &= \lambda(B \cdot A) = \lambda(A), \quad \text{falls } B \text{ regulär ist.}\end{aligned}\tag{1,20}$$

**HILFSSATZ 1.1:** Die Wachstumsordnung einer regulären meromorphen Matrix  $A$  ist gleich der Wachstumsordnung ihrer inversen Matrix  $A^{-1}$ .

*Beweis:* Sei  $A = (a_{ik})$  regulär und meromorph, und sei  $(A_{ik})$  die zu  $A$  adjungierte Matrix, d.h.  $A^{-1} \cdot A = (A_{ik})$ . Dann folgt aus (1,6), (1,8) und (1,15):

$$\lambda(A^{-1}) = \lambda[(A_{ik})/A(A)] \leq \max_{i,k} \lambda(a_{ik}) = \lambda(A).$$

Da  $A$  zu  $A^{-1}$  invers ist, folgt

$$\lambda(A) \leq \lambda(A^{-1})$$

und damit

$$\lambda(A) = \lambda(A^{-1}).$$

DEFINITION 1.2: Unter  $r(A)$  einer meromorphen Matrix  $A$  verstehen wir die maximale Anzahl linear unabhängiger Linearkombinationen endlicher Wachstumsordnung, gebildet aus den Spaltenvektoren von  $A$ .

Äquivalent zur Definition 1.2 ist

DEFINITION 1.2': Es sei  $V^m$  der durch die Spalten von  $A$  erzeugte  $m$ -dimensionale Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen,  $0 \leq m \leq n$ . Unter  $r(A)$  verstehen wir die Dimension des durch die Vektorfunktionen endlicher Ordnung gebildeten Unterraumes  $U^r$  von  $V^m$ ,  $0 \leq r \leq m$ .

Zu  $V^m$  und  $U^r$  gibt es einen Unterraum  $W^j$  von  $V^m$  mit

$$V^m = U^r \oplus W^j \quad \text{und} \quad j = m - r.$$

Da  $W^j$  keine nicht identisch verschwindende Vektorfunktion endlicher Ordnung enthält, gilt

HILFSSATZ 1.2:  $A$  sei eine reguläre meromorphe Matrix und besitze  $j$  Spaltenvektoren, von denen jede nicht triviale Linearkombination von unendlicher Wachstumsordnung sei. Dann gilt

$$r(A) \leq n - j.$$

HILFSSATZ 1.3: Sind  $A$  und  $B$  reguläre meromorphe Matrizen, und ist die Wachstumsordnung von  $B$  endlich, so gilt

$$r(B \cdot A) = r(A).$$

Beweis: Seien  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  die Spalten von  $A$  und  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$  diejenigen von  $(B \cdot A)$ . Dann gilt für alle  $i$ :

$$\begin{aligned} \vec{c}_i &= B \cdot \vec{a}_i \\ \vec{a}_i &= B^{-1} \cdot \vec{c}_i. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1.1 ist  $\lambda(B) = \lambda(B^{-1}) < \infty$ , und daher gilt nach (1,8) und (1,15)

$$\lambda(\vec{a}_i) < \infty \Leftrightarrow \lambda(\vec{c}_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Also ist

$$r(B \cdot A) = r(A).$$

## § 2. Die Wachstumsordnung der Lösungsvektoren eines linearen Systems mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

Es sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix über dem Ring der ganzen Funktionen, d.h. die Elemente  $a_{ik}$  der Matrix  $A = (a_{ik})$  seien ganze Funktionen; wir sprechen von  $A$  als einer ganzen

Matrizenfunktion.  $W=(w_{ik})$  sei eine reguläre Lösungsmatrix des linearen Systems

$$W'(z) = A(z) \cdot W(z), \quad \text{d.i.}$$

$$w'_{ij}(z) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(z) \cdot w_{kj}(z), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2,1)$$

Jeder Lösungsvektor  $\vec{w}$  des Systems (2,1) ist eine Linearkombination der Spaltenvektoren von  $W$ . Ist  $A$  ganz transzendent, d.h. ist ein Element von  $A$  ganz transzendent, so braucht  $W$ , im Gegensatz zu einem Wronskischen System, nicht von unendlicher Wachstumsordnung zu sein.\*) Aus (1,12), (1,19), Hilfssatz 1.1 und der Relation  $A(z) = W'(z) \cdot W^{-1}(z)$  folgt aber

$$\lambda(A) \leq \lambda(W). \quad (2,2)$$

Wie das folgende Beispiel (2.1) zeigt, kann das Gleichheitszeichen angenommen werden.

*Beispiel (2.1):* Zur Koeffizientenmatrix

$$A(z) = \begin{pmatrix} -z \cdot e^z & z^2 \cdot e^z + 1 \\ -e^z & z \cdot e^z \end{pmatrix}$$

ist

$$W(z) = \begin{pmatrix} z & z \cdot e^z - 1 \\ 1 & e^z \end{pmatrix}$$

eine reguläre Lösungsmatrix von (2,1).

Eine obere Abschätzung für das Anwachsen einer regulären Lösungsmatrix  $W$  des Systems (2,1) erhalten wir aus den Ungleichungen

$$\max_{i,j} |w'_{ij}(z)| \leq n \cdot \max_{i,k} |a_{ik}(z)| \cdot \max_{k,j} |w_{kj}(z)|$$

resp.  $M(r, W') \leq n \cdot M(r, A) \cdot M(r, W)$

und

$$\frac{d}{dr} M(r, W) \leq M(r, W').$$

Es gilt

$$0 \leq d \log M(r, W) \leq n \cdot M(r, A) \cdot dr, \quad \text{für alle } r > 0. \quad (2,3)$$

Durch Integration folgt unter Verwendung des Maximumprinzipes für alle  $R > 0$  die Ungleichung

$$\log M(R, W) \leq n \cdot M(R, A) \cdot R + O(1). \quad (2,4)$$

Ist  $A$  nicht konstant, so ist  $M(R, A)$  nicht beschränkt, und dann folgt aus (2,4) für alle

---

\*) Siehe Einleitung.

genügend grossen  $R$  die Ungleichung

$$\frac{\log \log M(R, W)}{\log M(R, A)} \leq 1 + \frac{\log R}{\log M(R, A)} + o(1)$$

oder

$$\log \log M(R, W) \leq (K + o(1)) \cdot \log M(R, A), \quad K < \infty, \quad (2,5)$$

für alle genügend grossen  $R$ . Ist  $A$  transzendent, so kann  $K=1$  gewählt werden. Es folgt aus (2,4)

**SATZ 2.1\*):** *Ist  $A$  eine ganze  $n$ -reihige Matrizenfunktion, so gilt für jede reguläre Lösungsmatrix  $W$  des Systems (2,1) die Ungleichung*

$$\log M(R, W) \leq n \cdot M(R, A) \cdot R + O(1),$$

insbesondere gilt die Abschätzung

$$\lambda(\log T(r, W)) \leq \lambda(A).$$

Es folgen einige Resultate über die Wachstumsordnungen einzelner Lösungsvektoren des Systems (2,1).

Die Hauptunterdeterminanten von  $A$ , die Determinante von  $A$  nicht inbegriffen, seien in einer beliebigen Art angeordnet und mit  $d_j(A)$  bezeichnet, und es sei  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  ein nicht trivialer Lösungsvektor des Systems (2,1). Dann besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n [a_{ik} - (w'_i/w_i) \delta_{ik}] w_k = \sum_{k=1}^n b_{ik} w_k = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2,6)$$

eine nicht triviale Lösung. Ist die Komponente  $w_j(z)$  des Lösungsvektors  $\vec{w}$  identisch Null, so lautet die  $j$ -te Gleichung:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} w_k = 0.$$

Die  $b_{ik}(z)$  sind in der  $z$ -Ebene meromorph, und die Determinante  $\Delta(B)$  der Matrix  $B = (b_{ik})$  ist identisch Null. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta(B) = & (-1)^n \cdot \prod_i (w'_i/w_i) + \sum_{h_1=1}^n f_{h_1} \cdot \prod_{i \neq h_1} (w'_i/w_i) + \dots + \\ & + \sum_{h_1 < h_2 < \dots < h_r} f_{h_1 h_2 \dots h_r} \cdot \prod_{i \neq h_1, h_2, \dots, h_r} (w'_i/w_i) + \dots + \\ & + \Delta(A) = 0, \end{aligned} \quad (2,7)$$

wo die  $f_{h_1 h_2 \dots h_r}$  bis auf das Vorzeichen Hauptunterdeterminanten von  $A$  sind.

---

\*) Satz 2.1 ist eine Verallgemeinerung eines Resultates von M. FREI [1] S. 205.

Hat der Lösungsvektor  $\vec{w}$  endliche Wachstumsordnung, so folgt daraus gemäss (1,6) und (1,11) für die Schmiegunsfunktion  $m$  die Ungleichung

$$m(r, \Delta(A)) \leq 2^n \cdot \max_j m(r, d_j(A)) + O(\log r) \quad (2,8)$$

und gemäss (1,4) und (1,7)

$$\lambda(\Delta(A)) \leq \lambda(d_j(A)),$$

für mindestens ein  $j$ .

Dies ergibt

**SATZ 2.2:** *Ist die (endliche oder unendliche) Wachstumsordnung der Determinante von  $A$  grösser als die Wachstumsordnungen aller ihrer Hauptunterdeterminanten  $d_j(A)$ , so ist jeder nicht triviale Lösungsvektor des linearen Systems (2,1) von unendlicher Wachstumsordnung.*

Aus (2,7) folgt überdies

**SATZ 2.3:** *Es sei die (endliche oder unendliche) Wachstumsordnung einer Hauptunterdeterminanten von  $A$  grösser als die Wachstumsordnungen der übrigen Hauptunterdeterminanten von  $A$  und der Determinante von  $A$  selbst, und es sei  $\vec{w}(z)$  ein Lösungsvektor endlicher Ordnung des Systems (2,1), der keine konstanten Komponenten enthält. Dann existiert eine Komponente  $w_p$  von  $\vec{w}$ , die unendlich viele Nullstellen besitzt, und es gilt überdies*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} n(r, 1/w_p) - n(r, 1/w'_p) = \infty.$$

Den Beweis führen wir indirekt. Es sei  $\vec{w}(z)$  ein Lösungsvektor von (2,1) mit folgenden Eigenschaften:

- a) Die Komponenten  $w_j$  von  $\vec{w}$  sind von endlicher Ordnung und nicht konstant,
- b) es gilt  $|n(r, 1/w_j) - n(r, 1/w'_j)| \leq K$  für alle  $r > 0$  und  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Nach dem ersten Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen und nach (1,11) gilt

$$m(r, w'_j/w_j) = O(\log r)$$

und

$$m(r, w_j/w'_j) = O(\log r).$$

Es sei nun

$$\lambda(d_m(A)) > \max[\lambda(\Delta(A)), \lambda(d_j(A))] \quad \text{für alle } j \neq m.$$

Wird die Gleichung (2,7) nach  $d_m(A)$  aufgelöst, so erhält man aus (1,6)

$$m(r, d_m(A)) \leq 2^n \cdot \max_{j \neq m} [\max m(r, d_j(A)), m(r, \Delta(A))] + O(\log r),$$

und aus (1,4) und (1,7) die Ungleichung

$$\lambda(d_m(A)) \leq \max_{j \neq m} [\max \lambda(d_j(A)), \lambda(\Delta(A))],$$

die zu den Voraussetzungen des Satzes im Widerspruch steht. Ein weiteres Resultat über das Wachstum der Lösungsvektoren gibt

**SATZ 2.4:** *Es besitze jede Spalte von  $A(z)$  ein nicht identisch verschwindendes Element  $a_{im}(z)$  mit  $i \neq m$ . Hat ein Lösungsvektor  $\vec{w}$  die Ordnung  $\lambda(\vec{w}) > \lambda(A)$ , so haben mindestens zwei Komponenten von  $\vec{w}$  die Ordnung  $\lambda(\vec{w})$ .*

*Beweis:* Sei  $a_{jm}(z) \neq 0$  und  $j \neq m$ . Die Gleichung  $w'_j = \sum_k a_{jk} w_k$  nach  $w_m$  aufgelöst ergibt

$$w_m = - \left[ \sum_{k \neq m} a_{jk} w_k - w'_j \right] \cdot 1/a_{jm}.$$

Daraus folgt gemäss (1,6)

$$T(r, w_m) \leq T(r, w'_j) + \sum_{k \neq m} T(r, w_k) + \sum_k T(r, a_{jk}) + O(1),$$

daraus

$$T(r, w_m) \leq 2n \cdot \max [T(r, w'_j), \max_{k \neq m} T(r, w_k), \max_k T(r, a_{jk})] + O(1),$$

und zusammen mit (1,7)

$$\lambda(w_m) \leq \max [\lambda(w'_j), \max_{k \neq m} \lambda(w_k), \max_k \lambda(a_{jk})].$$

Wegen (1,12) und  $j \neq m$ , ist dann

$$\lambda(w_m) \leq \max [\lambda(A), \max_{k \neq m} \lambda(w_k)].$$

Diese Ungleichung gilt nach Voraussetzung für alle  $m$ . Aus  $\lambda(\vec{w}) > \lambda(A)$  folgt dann die Behauptung des Satzes.

**SATZ 2.5:** *Gibt es für  $A$  ein Indexpaar  $(j, m)$  mit*

$$\lambda(a_{jm}) > \lambda(a_{jk}) \quad \text{für alle } k \neq m,$$

*so ist für jeden Lösungsvektor  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , dessen  $m$ -te Komponente  $w_m$  nicht identisch verschwindet, die Wachstumsordnung grösser oder gleich der Wachstumsordnung von  $a_{jm}$ .*

*Beweis:* Die Gleichung  $w'_j = \sum_k a_{jk} w_k$  nach  $a_{jm}$  aufgelöst ergibt

$$a_{jm} = - \left[ \sum_{k \neq m} a_{jk} w_k - w'_j \right] \cdot 1/w_m,$$

und man erhält analog zum vorangehenden Beweis

$$\lambda(a_{jm}) \leq \max [\lambda(w'_j), \max_k \lambda(w_k), \max_{k \neq m} \lambda(a_{jk})].$$

Aus  $\lambda(w'_j) = \lambda(w_j)$  und der Voraussetzung des Satzes folgt dann

$$\lambda(a_{jm}) \leq \max_k \lambda(w_k) = \lambda(\vec{w}).$$

Die Anwendung der Sätze 2.2 und 2.5 auf eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter

Ordnung

$$w^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) \cdot w^{(k)}(z) \quad (2,9)$$

führt zu

**SATZ 2.6:** *Übersteigt die Wachstumsordnung eines Koeffizienten  $a_m(z)$  jene der übrigen Koeffizienten, so ist jedes partikuläre Integral  $w(z)$  von (2,9) mit endlicher Wachstumsordnung entweder eine ganze transzendente Funktion mit unendlich vielen Nullstellen und mit  $\lambda(w) \geq \lambda(a_m)$ , oder  $w(z)$  ist ein Polynom vom Grade kleiner  $n$ .*

### § 3. Hauptresultat

Für ein Wronskisches System hat M. FREI [1] folgenden Satz bewiesen:

Wenn bei einer linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

$$w^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot w^{(k)}$$

die Wachstumsordnung eines Koeffizienten  $a_m(z)$  die Wachstumsordnungen der Koeffizienten  $a_k(z)$  mit  $k > m$  übersteigt, so existieren höchstens  $m$  linear unabhängige partikuläre Integrale von endlicher Wachstumsordnung.

Wir werden im folgenden dieses Resultat auf solche lineare Differentialgleichungssysteme

$$w'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot w_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2,1)$$

verallgemeinern, wo die Koeffizienten  $a_{ik}(z)$  für  $i < k - 1$  identisch verschwinden, die Koeffizientenmatrix also die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & s_2 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & s_{n-1} & p_{n-1} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & & s_n \end{pmatrix} \quad (3,1)$$

hat; dabei sind die  $s_i(z)$ ,  $p_i(z)$  und  $a_{ik}(z)$  mit  $i > k$  ganze Funktionen endlicher Ordnung.

Es werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Aus der Gestalt der Matrix (3,1) folgt unmittelbar

**HILFSSATZ 3.1:** *Ist im System (2,1) die Matrix  $A$  von der Form (3,1) und ist kein  $p_i$  identisch Null, so besitzt jeder nicht triviale Lösungsvektor  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  eine nicht identisch verschwindende erste Komponente  $w_1$ .*



**HILFSSATZ 3.2:** *Es sei  $A$  eine Matrix von der Form (3,1), und es sei kein  $p_i$  identisch Null. Ist  $\vec{u}=(u_1, u_2, \dots, u_n)$  ein nicht trivialer Lösungsvektor von (2,1), so gilt für alle  $m=1, 2, \dots, n-1$*

$$(-1)^m \cdot (u_{m+1}/u_1) \cdot \prod_{j=1}^m p_j = \text{Det}[a_{ik} - (u'_i/u_i) \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m] \quad (3,2)$$

Wir bezeichnen die rechte Seite kurz mit

$$Q_m(A, \vec{u}).$$

Der Beweis wird geführt durch vollständige Induktion nach  $m$ .

a) Aus (2,1) erhalten wir für  $m=1$

$$Q_1(A, \vec{u}) = -p_1 \cdot u_2/u_1 = s_1 - u'_1/u_1.$$

b) (3,2) gelte für  $m=1, 2, \dots, k-1$ . Dann gilt sie auch für  $m=k$ . Die Entwicklung der Determinante  $Q_k(A, \vec{u})$  nach der letzten Zeile ergibt

$$Q_k(A, \vec{u}) = (-1)^{k-1} \cdot a_{k,1} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} p_j + \sum_{h=2}^{k-1} (-1)^{k-h} \cdot a_{k,h} \cdot Q_{h-1}(A, \vec{u}) \cdot \prod_{j=h}^{k-1} p_j + \\ + (s_k - u'_k/u_k) \cdot Q_{k-1}(A, \vec{u}),$$

und man erhält nach der Induktionsvoraussetzung

$$Q_k(A, \vec{u}) = [(-1)^{k-1} \cdot (1/u_1) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} p_j] \cdot [(s_k - u'_k/u_k) u_k + \sum_{h=1}^{k-1} a_{kh} \cdot u_h] \\ = (-1)^k \cdot (u_{k+1}/u_1) \cdot \prod_{j=1}^k p_j.$$

Wir bezeichnen die  $(n+1-j)$  Hauptunterdeterminanten von der Form

$$\begin{vmatrix} s_k & p_k & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & s_{k+1} & p_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k+j-1,1} & a_{k+j-1,2} & \dots & \dots & \dots & s_{k+j-1} \end{vmatrix} \quad (3,3)$$

mit  $h_{jk}, j=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, n+1-j$ , und setzen

$$H_j(A) = \sum_{k=1}^{n+1-j} h_{jk}(A). \quad (3,4)$$

Wird  $h_{ok}(A)=0$  gesetzt, so lautet das Hauptergebnis dieser Untersuchung

**SATZ 3.1:** *Es sei  $A(z)$  eine Matrix von der Form (3,1). Wenn die Wachstumsordnung eines  $H_m(A)$  die Wachstumsordnungen der  $h_{jk}(A)$  mit  $j < m$  und  $k=1, 2, \dots, n+1-j$*

übersteigt, so besitzt (2,1) höchstens  $n-m$  linear unabhängige Lösungsvektoren von endlicher Wachstumsordnung.

*Beweis:* Im Falle  $m=1$  gilt der Satz allgemein, d.h. auch für Matrizen  $A$ , die nicht von der Form (3,1) sind. Denn ist die Spur von  $A(z)$  eine ganze transzendente Funktion, so wird die Determinante von jeder regulären Lösungsmatrix  $W(z)$  des Systems (2,1) von unendlicher Wachstumsordnung. Es existieren somit höchstens  $n-1$  linear unabhängige Lösungsvektoren, die von endlicher Ordnung sind.

Für  $m=n$  reduziert sich Satz 3.1 auf Satz 2.2, da bei Matrizen von der Gestalt (3,1) jede Hauptunterdeterminante vom Grad  $j$  durch ein Produkt der  $h_{ik}(A)$  mit  $i \leq j$  dargestellt werden kann.

Es verbleibt also, den Beweis zu führen für  $1 < m < n$ , und dies tun wir zunächst für den Fall, dass kein  $p_i(z)$  identisch verschwindet. Wir beschreiben vorerst einen Reduktionsprozess von  $n$  auf  $n-1$ .

Es sei  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ein nichttrivialer Lösungsvektor von endlicher Ordnung und  $W$  eine reguläre Lösungsmatrix, die  $\vec{u}$  als ersten Spaltenvektor enthält. Nach Hilfssatz 3.1 ist  $u_1(z) \neq 0$ . Daher hat die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ u_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & 0 & \cdot & & \cdot \\ u_n & 0 & \dots\dots\dots & & 1 \end{pmatrix} \quad (3,5)$$

eine inverse, nämlich die meromorphe Matrixfunktion

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/u_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ -u_2/u_1 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & & \cdot & \cdot \\ -u_n/u_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3,6)$$

Setzen wir

$$V = U^{-1}W \quad (3,7)$$

so ist  $V$  von der Form

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \dots\dots\dots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & \dots\dots\dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & v_{n2} & \dots\dots\dots & v_{nn} \end{pmatrix} \quad (3,8)$$

Aus  $W' = A W$  folgt dann

$$V' = U^{-1}(A U - U') \cdot V. \quad (3,9)$$

Dies ist ein lineares System für  $V$  mit der gegebenen Matrix

$$B = U^{-1}(A U - U'), \quad (3,10)$$

und eine kleine Rechnung ergibt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/u_1 & a_{13}/u_1 & \dots & a_{1n}/u_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & B_1 & & \end{pmatrix} \quad (3,11)$$

mit

$$B_1 = \begin{pmatrix} s_2 - p_1 \cdot u_2/u_1, & p_2, & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} - p_1 \cdot u_3/u_1, & s_3, & p_3, & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n2} - p_1 \cdot u_n/u_1, & a_{n3}, & \dots & \dots & \dots & s_n \end{pmatrix} \quad (3,12)$$

Die Matrix  $B_1$  ist wieder von der Form (3,1), ihre Elemente sind aber jetzt meromorphe Funktionen.

Setzt man analog

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & Y_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (3,13)$$

so genügt die meromorphe Matrizenfunktion  $Y_1$  dem System

$$Y_1' = B_1 Y_1, \quad (3,14)$$

wo  $Y_1$  und  $B_1$  nur noch  $n-1$  reihige Matrizen sind und  $B_1$  wiederum von der Form (3,1) ist.

Ferner ist

$$v'_{1r} = \sum_{k=2}^n (a_{1k}/u_1) \cdot v_{kr}, \quad r = 2, 3, \dots, n, \quad (3,15)$$

und daraus lassen sich die  $v_{1r}$  mit Hilfe einer Lösungsmatrix  $Y_1$  von (3,14) durch Integration berechnen.

Wir werden nun die analog zu (3,3) für  $B_1$  definierten  $h_{jk}(B_1)$ ,  $j=1, 2, \dots, n-1$  und  $k=2, 3, \dots, n+1-j$ , durch die  $h_{jk}(A)$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  und  $k=1, 2, \dots, n+1-j$ , ausdrücken. Aus (3,12) folgt für  $j=1, 2, \dots, n-2$  und  $k>2$

$$h_{jk}(B_1) = h_{jk}(A). \quad (3,16)$$

Ist  $k=2$ , so erhält man durch Entwickeln der Determinante  $h_{j2}(B_1)$  nach der ersten

Zeile für  $j = 1, 2, \dots, n-1$

$$h_{j2}(B_1) = h_{j2}(A) + \sum_{k=1}^{j-1} p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot (u_{k+1}/u_1) (-1)^k \cdot h_{j-k, 2+k}(A) + (-1)^j \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_j (u_{j+1}/u_1), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3,17)$$

Hilfssatz 3.2 ergibt

$$h_{j2}(B_1) = h_{j2}(A) + \sum_{k=1}^{j-1} Q_k(A, \vec{u}) \cdot h_{j-k, 2+k}(A) + Q_j(A, \vec{u}).$$

Entwickelt man die Determinanten  $Q_k(A, \vec{u})$  analog zu (2,7), so erhält man

$$h_{j2}(B_1) = h_{j2}(A) + h_{j1}(A) + P[(u'_i/u_i); h_{rk}(A), r < j]^*. \quad (3,18)$$

Zwischen den zum System (2,1) und den zum um 1 reduzierten System (3,14) gehörigen  $H_j$  besteht die Beziehung

$$H_j(B_1) = H_j(A) + P[(u'_i/u_i); h_{rk}(A), r < j], \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3,19)$$

Da nach Voraussetzung der Lösungsvektor  $\vec{u}$  von endlicher Wachstumsordnung ist, folgt für die maximale Anzahl linear unabhängiger Linearkombinationen endlicher Wachstumsordnung von Spaltenvektoren von  $W$  und  $Y_1$  nach Def. 1.2, (3,7), (3,14), (3,15) und Hilfssatz 1.3:

$$1 + r(Y_1) = r(V) = r(W). \quad (3,20)$$

Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zurück zum Beweis von Satz 3.1: Es sei für  $1 < m < n$ :

$$\lambda(H_m(A)) > \lambda(h_{jk}(A)) \quad \text{für} \quad j < m \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \dots, n+1-j$$

und es seien alle Elemente  $p_i(z) \neq 0$ . Wir nehmen an, es existieren  $n-m$  linear unabhängige Lösungsvektoren  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{n-m}$  des Systems (2,1), die alle von endlicher Wachstumsordnung seien, und wir werden zeigen, dass jeder weitere linear unabhängige Lösungsvektor von unendlicher Ordnung ist. (Es kann durchaus vorkommen, dass kein Lösungsvektor von endlicher Ordnung existiert.)

Mit Hilfe von  $\vec{u}_1$  führen wir die oben erwähnte Reduktion durch und erhalten das System

$$Y'_1 = B_1 \cdot Y_1. \quad (3,14)$$

Nach (3,20) ist  $1 + r(Y_1) = r(W)$ . Es existieren somit nach unserer Annahme  $(n-m-1)$  linear unabhängige Lösungsvektoren  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n-m-1}$  des Systems (3,14), die von endlicher Ordnung sind. Da nach (3,12)  $B_1$  wieder von der Form (3,1) ist, kann das

---

\*) Im folgenden bezeichnet  $P[ \ ]$  ein Polynom in den angegebenen Variablen. (Nicht immer dasselbe.)

System (3,14) mit Hilfe von  $\tilde{y}_1$  weiter reduziert werden. Diese Operation kann  $n-m$  Mal durchgeführt werden. Wir erhalten das Differentialgleichungssystem

$$Y'_{n-m} = B_{n-m} \cdot Y_{n-m} \quad (3,21)$$

und es folgt

$$(n-m) + r(Y_{n-m}) = r(W). \quad (3,22)$$

Für die analog zu (3,3) definierten Determinanten  $h_{jk}(B_{n-m})$ ,  $j=1, 2, \dots, m$  und  $k=n-m+1, n-m+2, \dots, n-j+1$ , gilt nach (3,16) und (3,18)

$$h_{jk}(B_{n-m}) = h_{jk}(A), \quad k = n-m+2, n-m+3, \dots, n-j+1, \\ j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3,23)$$

und

$$h_{j, n-m+1}(B_{n-m}) = \sum_{k=1}^{n-m+1} h_{jk}(A) \\ + P[(f'_i/f_i; h_{rk}(A), r < j)], \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3,24)$$

wobei die  $f_i(z)$  meromorphe Funktionen endlicher Ordnung sind. Für die analog zu (3,4) definierten  $H_j(B_{n-m})$  gilt

$$H_j(B_{n-m}) = H_j(A) + P[(f'_i/f_i; h_{rk}(A), r < j)], \quad j = 1, 2, \dots, m-1 \quad (3,25)$$

Aus (3,23) und (3,24) folgt gemäss (1,6) und (1,7)

$$m(r, h_{jk}(B_{n-m})) \leq K \cdot \max_{\substack{k \\ i \leq j}} m(r, h_{ik}(A)) + O(\log r)$$

und analog aus (3,25)

$$m(r, H_m(A)) \leq K \max [m(r, H_m(B_{n-m})), \max_{\substack{k \\ i < m}} m(r, h_{ik}(A))] + O(\log r)$$

Jede Hauptunterdeterminante von  $B_{n-m}$  lässt sich durch ein Produkt der  $h_{jk}(B_{n-m})$  darstellen. Besitzt das System (3,21) einen nicht trivialen Lösungsvektor endlicher Ordnung, d.h. ist  $r(W) > n-m$ , so folgt nach Satz 2.2

$$m(r, H_m(B_{n-m})) \leq K \cdot \max_{\substack{k \\ j < m}} m(r, h_{jk}(B_{n-m})) + O(\log r)$$

und daraus

$$\lambda(H_m(A)) \leq \max_{\substack{k \\ j < m}} \lambda(h_{jk}(A)),$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes steht.

Bisher wurde angenommen, dass die  $p_i(z)$  nicht identisch verschwindende ganze

Funktionen seien. Sind nun  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r}$  identisch Null, so hat  $A$  die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ & A_2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & * & & \cdot & \cdot \\ & & & & A_{r+1} \end{pmatrix} \quad (3,26)$$

mit

$$A_j = \begin{pmatrix} s_{i_{j-1}+1} & p_{i_{j-1}+1} & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ a_{i_{j-1}+2, i_{j-1}+1} & s_{i_{j-1}+2} & p_{i_{j-1}+2} & 0 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & & \cdot & \vdots \\ a_{i_j, i_{j-1}+1} & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & p_{i_{j-1}} & s_{i_j} \end{pmatrix} \quad (3,27)$$

$$0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r < i_{r+1} = n.$$

Dann existiert zu (2,1) eine reguläre Lösungsmatrix  $W_0$  von der Form

$$W_0 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ & W_2 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ & & \vdots & \cdot & \vdots \\ & & & \cdot & \vdots \\ & * & & & W_{r+1} \end{pmatrix} \quad (3,28)$$

wobei die  $W_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r+1$ , reguläre Lösungsmatrizen der Differentialgleichungssysteme

$$W_i' = A_i \cdot W_i. \quad (3,29)$$

sind. \*) Ist nun

$$\lambda(H_m(A)) > \lambda(h_{jk}(A)) \quad \text{für alle } j < m \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \dots, n+1-j,$$

so folgt unmittelbar aus der Darstellung (3,28)

$$m \leq \max[i_j - i_{j-1}], \quad j = 1, 2, \dots, r+1,$$

und es existiert ein  $A_p$  mit

$$\lambda(H_m(A_p)) > \lambda(h_{jk}(A_p)) \quad \text{für alle } j < m \quad \text{und alle } k.$$

Da  $A_p$  von der Form (3,1) ist und alle Elemente  $p_i(z)$  von  $A_p$  nicht identisch Null sind, gibt es höchstens  $(j_p - j_{p-1} - m)$  linear unabhängige Lösungsvektoren des Systems

---

\*) Man findet  $W_0$ , indem man nacheinander inhomogene Systeme der Form  $W_i' = A_i W_i + F_i$  auflöst.

$W'_p = A_p \cdot W_p$ , die von endlicher Wachstumsordnung sind. Es existieren also in der Lösungsmatrix  $W_0$   $m$  linear unabhängige Spaltenvektoren mit der Eigenschaft, dass jede nicht triviale Linearkombination von unendlicher Ordnung ist. Nach Hilfssatz 1.2 ist daher  $r(W_0) \leq n-m$ , d.h. es existieren höchstens  $n-m$  linear unabhängige Lösungsvektoren des Systems (2,1), die von endlicher Ordnung sind. Somit ist unser Hauptsatz 3.1 bewiesen.

Im folgenden seien die Lösungsvektoren  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$  ein Fundamentalsystem des Systems (2,1), dessen Koeffizientenmatrix  $A$  von der Gestalt (3,1) sei, und es werde mit Hilfe der Vektoren  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n-m}$  das im Beweis von Satz 3.1 beschriebene Reduktionsverfahren  $n-m$  mal auf (2,1) angewendet, und man erhält das lineare System

$$Y'_{n-m} = B_{n-m} \cdot Y_{n-m} \quad (3,21)$$

mit den linear unabhängigen Lösungsvektoren  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m$ .

Wie man aus der Darstellung (3,7) leicht sieht, sind die Komponenten  $y_{jp}$ ,  $j, p = 1, 2, \dots, m$ , rationale Funktionen der Komponenten  $w_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-m, n-m+j$ . Daraus folgt für alle  $j, p = 1, 2, \dots, m$

$$T(r, y_{jp}) = O(\max_{i=1,2,\dots,n} T(r, w_{ik})) = O(T(r, W)) \quad (3,30)$$

und nach (1,10)

$$m(r, y'_{jp}/y_{jp}) = O(\log r \cdot T(r, W)) \quad (3,31)$$

ausserhalb einer  $r$ -Menge  $\Delta_r$ , auf der die Variation von  $r^k/k$ ,  $k > 0$ , endlich ist. Es gilt somit ausserhalb dieser  $r$ -Menge  $\Delta_r$  nach (1,6), (1,11), (2,7), (3,23), (3,24) und (3,25) für  $m = 1, 2, \dots, n-1$  die Beziehung

$$T(r, H_m(A)) = O(\max_{\substack{j < m \\ k}} T(r, h_{jk}(A))) + O(\log T(r, W)). \quad (3,32)$$

Da  $H_m(A)$  eine ganze transzendente Funktion endlicher Ordnung ist, so existiert nach M. Frei [1] für jeden Ausnahmewert  $r'$  ein regulärer Wert  $r$ ,  $r < r'$ , mit

$$T(r', H_m(A)) = T(r, H_m(A)) + O(1). \quad (3,33)$$

Somit gilt die Beziehung (3,32) für alle  $r$ . Wird zudem vorausgesetzt, dass

$$\lambda(H_m(A)) > \max_{\substack{j < m \\ k}} \lambda(h_{jk}(A)),$$

so folgt aus (3,32) die Ungleichung

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, H_m(A))}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, W)}{\log r}.$$

Es gilt somit

**SATZ 3.2:** Es sei  $A(z)$  eine  $n$ -reihige ganze Matrizenfunktion endlicher Ordnung von der Form (3,1). Übersteigt die Wachstumsordnung eines  $H_m(A)$  die Wachstumsordnungen der  $h_{jk}(A)$ ,  $j < m$  und  $k = 1, 2, \dots, n+1-j$ , so gilt

$$\lambda(H_m(A)) \leq \lambda(\log T(r, W)) \leq \lambda(A).$$

Es existieren höchstens  $(n-m)$  linear unabhängige Lösungsvektoren  $\vec{w}$  mit

$$\lambda(\log T(r, \vec{w})) < \lambda(H_m(A)).$$

Wie die zwei folgenden Beispiele zeigen, können die Gleichheitszeichen angenommen werden.

*Beispiel 3.1:* Es sei

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}'(z) = \begin{pmatrix} e^z + e^{z^2}, & 1 \\ -e^{2z^2}, & e^z - e^{z^2} \end{pmatrix} \cdot \vec{w}(z).$$

Umgeformt in eine Differentialgleichung 2. Ordnung für  $w_1$  ergibt dies

$$w_1'' = 2e^z w_1' + w_1 \cdot (e^z - e^{2z} + 2ze^{z^2}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(H_2(A)) &= 1 < \lambda(h_{1k}(A)), \\ \lambda(H_1(A)) &= 1 > 0, \\ \lambda(A) &= 2, \end{aligned}$$

und nach einem Satz von M. FREI (4) ist

$$\lambda(\log T(r, W)) = 2.$$

*Beispiel 3.2:* Ist

$$A(z) = \begin{pmatrix} e^z, & 2z \cdot e^{z^2} \\ 0, & e^z \end{pmatrix},$$

so ist

$$W(z) = e^{e^z} \cdot \begin{pmatrix} 1, & e^{z^2} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

eine reguläre Lösungsmatrix des Systems (2,1). Dabei ist

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= 2 \\ \lambda(H_2(A)) &= \lambda(h_{1k}(A)) \\ \lambda(H_1(A)) &= 1 > 0 \\ \lambda(\log T(r, W)) &= 1. \end{aligned}$$



Diese zwei Beispiele zeigen, dass im Gegensatz zu einem Wronskischen System

$$\lambda(\log T(r, W)) < \lambda(A)$$

und

$$\lambda(\log T(r, W)) > \lambda(H_j(A))$$

für alle  $j$  vorkommen kann.

Wir bezeichnen die  $\binom{n}{j}$  verschiedenen, in beliebiger Art angeordneten Hauptunterdeterminanten vom Grade  $j$

$$\begin{vmatrix} s_{i_1} & p_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{i_2, i_1} & s_{i_2} & p_{i_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_j, i_1} & a_{i_j, i_2} & \dots & \dots & s_{i_j} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n, \quad (3,34)$$

mit  $d_{jk}(A)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, \binom{n}{j}$ .

Ferner sei

$$D_j(A) = \sum_{k=1}^{\binom{n}{j}} d_{jk}(A) \quad (3,35)$$

und

$$d_{0k}(A) = 0.$$

Da jedes  $d_{jk}(A)$  durch ein Produkt der  $h_{ip}(A)$  mit  $i \leq j$  darstellbar ist, gilt

$$D_m(A) = H_m(A) + P[h_{jk}(A); j < m].$$

Unser Hauptsatz 3.1 ist äquivalent zu

**SATZ 3.1':** *Es sei  $A(z)$  eine Matrix von der Form (3,1). Wenn die Wachstumsordnung eines  $D_m(A)$  die Wachstumsordnungen der  $d_{jk}(A)$  mit  $j < m$  und  $k = 1, 2, \dots, \binom{n}{j}$  übersteigt, so besitzt (2,1) höchstens  $n - m$  linear unabhängige Lösungsvektoren, die von endlicher Wachstumsordnung sind.*

Für  $m = 1$  und  $m = n$  ist Satz 3.1' für beliebige ganze Koeffizientenmatrizen gültig. Beispiel 3.3 zeigt aber, dass weder Satz 3.1 noch Satz 3.1' für allgemeine ganze Koeffizientenmatrizen richtig ist.

**Beispiel 3.3:** Zur Koeffizientenmatrix

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & , & -e^z & , & 1 \\ e^z - e^{5z} & , & 0 & , & e^{3z} \\ 3e^{2z} + e^{4z} & , & -e^{3z} - e^z & , & 0 \end{bmatrix}$$

ist

$$W(z) = \begin{bmatrix} 1 & , & e^{2z} + 2z & , & e^{3z} + 6e^z \\ e^z & , & e^{3z} + 2ze^z - 2e^z & , & e^{4z} + 3e^{2z} - 3 \\ e^{2z} & , & e^{4z} + 2ze^{2z} + 2 & , & e^{5z} + 6e^{3z} + 3e^z \end{bmatrix}$$

eine reguläre Lösungsmatrix von  $(2,1)$ . Obwohl  $D_2(A) = -2e^{2z}$ ,  $H_2(A) = e^{4z} + e^{2z}$  und alle  $d_{1k}(A) = h_{1k}(A) = 0$  sind, ist dennoch jeder Lösungsvektor von endlicher Ordnung.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. FREI, *Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten*. Comment. Math. Helv. 35, (1961), 201–222.
- [2] W. HENGARTNER, *Sur l'ordre de croissance des solutions d'un système linéaire d'équations différentielles à coefficients entiers*. C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965), 766–767.
- [3] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*. Berlin, Springer, 1936.
- [4] G. VALIRON, *Lectures on the general theory of integral functions*, Toulouse, 1923.
- [5] H. WITTICH, *Ueber das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen*. Math. Ann. 124 (1952), 277–288.
- [6] H. WITTICH, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1955.
- [7] H. WITTICH, *Zur Theorie linearer Differentialgleichungen im Komplexen*. Ann. Acad. Sci. Fenn. 379, Serie A, 1966.

(Eingegangen, 11. Juli 1966)