

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	42 (1967)
Artikel:	Sur certaines singularités d'applications de variétés topologiques.
Autor:	Wyler, Armand
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-32129

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur certaines singularités d'applications de variétés topologiques

Par ARMAND WYLER, Zurich et Stanford University

L'exposé fait par le professeur H. HOPF à l'Université de Rome en avril 1962 et publié dans les *Rendiconti di Matematica* (21) est à l'origine de ce travail [3].

Une des questions proposées concerne les applications algébriquement essentielles de variétés dont je rappelle la définition: l'application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ où X^m et Y^n sont des variétés topologiques compactes et orientables est dite algébriquement essentielle si l'homomorphisme $f_*: H_n(X^m) \rightarrow H_n(Y^n)$ est surjectif. La question est alors: si A est un ensemble fermé de Y^n , que peut-on dire des groupes de cohomologie de l'ensemble $f^{-1}(A)$?

Avant de parler de la solution de ce problème, je mentionne l'homomorphisme inverse, introduit par H. HOPF dans «Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten» (J. reine angew. Math. 163 (1930)) et défini pour toute application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ de deux variétés combinatoires compactes et orientables [2]. Cet homomorphisme inverse, défini pour l'homologie,

$$\Phi_*: H_i(Y^n) \rightarrow H_i(X^m)$$

est construit grâce à la dualité de POINCARÉ: de même, dans le cas d'une application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ de deux variétés topologiques compactes et orientables, je construis, en employant la formulation donnée par A. DOLD du théorème de dualité d'ALEXANDER-LEFSCHETZ, un homomorphisme inverse

$$\Psi^*: h^{i+m-n}(f^{-1}A) \rightarrow h^i(A)$$

où A est un fermé de Y^n et $h(A)$ sa cohomologie de ČECH et où $\Psi^* = D^{-1}f_* D$, D étant l'isomorphisme de dualité

$$D: h^i(A) \cong H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$$

et f_* l'homomorphisme induit

$$f_*: H_i(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_i(Y^n, Y^n - A).$$

Le théorème 1 dit que $\Psi^*: h^{i+m-n}(f^{-1}A) \rightarrow h^i(A)$ est surjectif si l'application $f: X^m \rightarrow Y^n$ est algébriquement essentielle, ce qui permet, dans le cas où $A = Y^n$ et $m = n$, de retrouver un théorème de H. HOPF disant que

$$p_i(X^n) \geq p_i(Y^n)$$

où $p_i(X^n)$ et $p_i(Y^n)$ désignent les nombres de BETTI de X^n et de Y^n .

On déduit du théorème 1 quelques corollaires dont le plus important est: si

$f: X^m \rightarrow Y^n$ est algébriquement essentielle, la dimension cohomologique de l'image inverse $f^{-1}(y)$ de tout point y de Y^n est supérieure ou égale à $m-n$.

Je rappelle, à titre de comparaison, le théorème que l'on peut démontrer dans le cas général (HUREWICZ et WALLMAN: Dimension Theory, p. 91):

Soit f une application continue de deux espaces métriques compacts, $f: X \rightarrow Y$, et soit $\dim X - \dim Y = k > 0$. Alors il existe au moins un point de Y tel que son image inverse ait une dimension supérieure ou égale à k .

Dans la deuxième partie de ce travail, j'étudie les points injectifs d'applications $f: X^m \rightarrow Y^n$ de variétés topologiques compactes ($m \geq n$); un point y de Y^n est dit injectif si $f^{-1}(y)$ est formé d'un seul point.

Je démontre à ce sujet que si f possède au moins un point injectif, on peut construire une application $g: X^m \rightarrow Y^n$ homotope à f , identique à f dans le complément $X^m - U_s^*(\delta)$ d'un voisinage sphérique $U_s^*(\delta)$ du point injectif δ , et telle que dans un voisinage sphérique $U_s(\delta) \subset U_s^*(\delta)$, g soit identique à la suspension d'une application de sphères $S^{m-1} \rightarrow S^{n-1}$.

J'associe ainsi à tout point injectif δ d'une application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ un indice $\alpha \in \pi_{m-1}(S^{n-1})$ qui est la classe d'homotopie de l'application $g|_{S^{m-1}}: S^{m-1} \rightarrow S^{n-1}$; dans le cas d'une application $f: X^m \rightarrow S^n$ non homotope à l'application triviale et possédant au moins un point injectif, l'indice associé à ce point ne peut être l'élément nul de $\pi_{m-1}(S^{n-1})$: d'où un critère pour l'existence de points injectifs d'une application $f: X^m \rightarrow S^n$.

Pour une application $f: S^m \rightarrow S^n$ possédant au moins un point injectif, on obtient que f est homotope à la suspension de l'application $S^{m-1} \rightarrow S^{n-1}$ mentionnée plus haut et on retrouve ainsi un résultat de H. FREUDENTHAL [5]. Si, d'autre part, d_1 et d_2 sont deux points injectifs différents de $f: S^m \rightarrow S^n$, les éléments associés α_1 et α_2 ne seront pas nécessairement les mêmes, mais ils seront dans la même classe résiduelle du groupe $\pi_{m-1}(S^{n-1})$ par rapport au noyau de l'homomorphisme de suspension $S: \pi_{m-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$.

Grâce à la factorisation de PONTRJAGIN [6] et au théorème 1 de la première partie, on obtient dans les cas particuliers suivants des résultats bien plus précis:

Une application continue, essentielle $f: S^3 \rightarrow S^2$ ne peut avoir de singularité cohomologique (point $y \in S^2$ tel que $h^1(f^{-1}y) = 0$). Une application continue, essentielle $f: X^3 \rightarrow S^2$ d'une variété combinatoire X^3 dans une sphère S^2 a de même cette propriété de ne point posséder de singularité cohomologique.

Une application continue, essentielle $f: S^4 \rightarrow S^3$ a au plus deux points injectifs; si elle a deux points injectifs, aucun autre point de S^3 ne peut être singularité cohomologique.

Dans le cas d'une application simpliciale de deux complexes, $f: K \rightarrow L$, l'ensemble

des points injectifs est un sous-complexe. On démontre alors que si dans l'application simpliciale $f: S^m \rightarrow S^n$ l'ensemble des points injectifs contient un simplexe de dimension r , la classe d'homotopie de f est contenue dans l'image de l'homomorphisme $S^{r+1}: \pi_{m-r-1}(S^{n-r-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$.

1. Sur les applications algébriquement essentielles

DÉFINITION. Soit R un anneau commutatif avec élément unité. Une application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ de deux variétés topologiques X^m et Y^n ($m \geq n$) est dite algébriquement essentielle relativement à l'anneau R si l'homomorphisme

$$f_*: H_n(X^m; R) \rightarrow H_n(Y^n; R)$$

est surjectif. On suppose toujours les variétés compactes orientables sans frontière. (les indices m et n désignent les dimensions de X^m et Y^n)

Je me propose de démontrer le théorème:

THÉORÈME 1. Soit f une application continue, algébriquement essentielle relativement à un anneau de coefficients R , de deux variétés topologiques, compactes, orientables, X^m et Y^n .

Soient A un ensemble fermé de Y^n et $f^{-1}(A)$, image inverse, qui est un fermé de X^m ; on suppose A connexe.

Soit Ψ^* l'homomorphisme inverse, pour la cohomologie de ČECH,

$$\Psi^*: h^{i+m-n}(f^{-1}(A)) \rightarrow h^i(A)$$

obtenu par la composition des homomorphismes:

$$h^{i+m-n}(f^{-1}(A)) \xrightarrow{D} H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}(A)) \xrightarrow{f_*} H_{n-i}(Y^n, Y^n - A) \xrightarrow{D^{-1}} h^i(A)$$

où D est l'isomorphisme de dualité et f_* l'homomorphisme induit par l'application f .

Alors Ψ^* est un épimorphisme pour tous les i .

COROLLAIRE 1. Gardons les hypothèses du théorème.

Alors, si $p_i(X^m)$ et $p_i(Y^n)$ sont les nombres de BETTI de X^m et de Y^n pour l'homologie singulière, on a:

$$p_{i+m-n}(X^m) \geq p_i(Y^n).$$

Démonstration du corollaire.

Prenons dans le théorème 1 $A = Y^n$. Comme X^m et Y^n sont des variétés, la cohomologie de ČECH est isomorphe à la cohomologie singulière, donc le théorème 1 dit que l'homomorphisme

$$\Psi^*: H^{i+m-n}(X^m) \rightarrow H^i(Y^n)$$

est surjectif, d'où

$$p_{i+m-n}(X^m) \geq p_i(Y^n).$$

Démonstration du théorème 1. Nous prendrons la formulation suivante du théorème de dualité, donnée par A. DOLD [4]:

Si Y^n est une variété topologique compacte, orientable, on a:

$$D: h^i(A) \cong H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$$

où l'isomorphisme D est obtenu de la façon suivante:

soit V un voisinage de A ; le cap-produit donne l'application

$$H^i(V) \otimes H_n(V, V - A) \rightarrow H_{n-i}(V, V - A)$$

et par excision

$$H^i(V) \otimes H_n(Y^n, Y^n - A) \rightarrow H_{n-i}(Y^n, Y^n - A).$$

On peut considérer cette application comme un homomorphisme

$$H^i(V) \xrightarrow{\cap} H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$$

obtenu en formant le cap-produit de chaque élément de $H^i(V)$ avec le cycle fondamental o_A de $H_n(Y^n, Y^n - A)$. Si V' est un voisinage de A tel que $V \supset V'$ on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^i(V) & \rightarrow & H_{n-i}(Y^n, Y^n - A) \\ \downarrow & & \parallel \\ H^i(V') & \rightarrow & H_{n-i}(Y^n, Y^n - A). \end{array}$$

$\Gamma(A)$ étant le système des voisinages de A , le cap-produit donne à la limite l'homomorphisme

$$\lim_{V \in \Gamma(A)} H^i(V) \rightarrow H_{n-i}(Y^n, Y^n - A).$$

Le terme de gauche est le groupe de cohomologie de ČECH $h^i(A)$ et le théorème de dualité dit que cet homomorphisme

$$\cap o_A: h^i(A) \rightarrow H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$$

est un isomorphisme que nous désignerons par D .

Après ce rappel, commençons la démonstration proprement dite du théorème 1.

Prenons un cycle $\eta_{n-i} \in H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$ et suivons le dans les homomorphismes du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-i}(Y^n, Y^n - A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_i(f^{-1}V) & \xleftarrow{f^*} & H^i(V) \end{array}$$

où f_* et f^* sont les homomorphismes induits en homologie et en cohomologie, et où V est un voisinage de A obtenu de la façon suivante.

Comme l'homomorphisme de la limite inductive $\lim H^i(V)$ dans $H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$

est un isomorphisme, il existe un voisinage V de A et un cocycle $\eta^i \in H^i(V)$ tel que

$$\eta^i \cap o_A = \eta_{n-i}.$$

Démontrons que l'application $f_*: H_n(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_n(Y^n, Y^n - A)$ est surjective.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^m) & \xrightarrow{j} & H_n(X^m, X^m - f^{-1}A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_n(Y^n) & \xrightarrow{j} & H_n(Y^n, Y^n - A). \end{array}$$

Comme, par hypothèse, l'homomorphisme

$$f_*: H_n(X^m) \rightarrow H_n(Y^n)$$

est surjectif pour l'anneau de coefficients considéré, il existe un cycle $\xi_n \in H_n(X^m)$ tel que

$$f_*(\xi_n) = o_Y$$

Or, par construction, l'homomorphisme

$$j: H_n(Y^n) \rightarrow H_n(Y^n, Y^n - A)$$

est un isomorphisme, car Y^n est orientable et A connexe. Donc $jf_*(\xi_n) = o_A$, ce qui signifie que l'homomorphisme jf_* est surjectif.

Comme le diagramme est commutatif, on a:

$$f_* j(\xi_n) = o_A.$$

L'homomorphisme

$$f_* j: H_n(X^m) \rightarrow H_n(Y^n, Y^n - A)$$

est donc un épimorphisme de même que l'homomorphisme

$$f_*: H_n(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_n(Y^n, Y^n - A).$$

Donc il existe un cycle $\zeta_n \in H_n(X^m, X^m - f^{-1}A)$ tel que

$$f_*(\zeta_n) = o_A.$$

On a donc:

$$\eta_{n-i} = \eta^i \cap o_A = \eta^i \cap f_*(\zeta_n).$$

Or la naturalité du cap-produit donne:

$$\eta^i \cap f_*(\zeta_n) = f_*(f^*(\eta^i) \cap \zeta_n)$$

$f^*(\eta^i) \cap \zeta_n$ est un cycle de $H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A)$ car le cap-produit est un homomorphisme indépendamment de toute hypothèse de variété, en employant comme précédemment l'excision :

$$H^i(f^{-1}V) \otimes H_n(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A).$$

Nous obtenons donc, sans avoir utilisé l'hypothèse que X^m est une variété :

$$\eta_{n-i} = f_*(f^*(\eta^i) \cap \zeta_n).$$

Comme η_{n-i} était un cycle quelconque de $H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$, nous avons le résultat suivant : l'homomorphisme

$$f_*: H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_{n-i}(Y^n, Y^n - A)$$

est surjectif pour les i .

Appliquons maintenant le théorème de dualité dans la variété X^m pour l'ensemble compact $f^{-1}A$:

$$D: h^{i+m-n}(f^{-1}A) \cong H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A).$$

L'homomorphisme inverse Ψ^* , défini par la composition des homomorphismes

$$\begin{aligned} h^{i+m-n}(f^{-1}A) &\rightarrow H_{n-i}(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_{n-i}(Y^n, Y^n - A) \rightarrow h^i(A) \\ \Psi^* &= D^{-1}f_*D \\ \Psi^* &= D^{-1}f_*D: h^{i+m-n}(f^{-1}A) \rightarrow h^i(A) \end{aligned}$$

est surjectif.

Remarque sur la démonstration. Nous avons obtenu, sans employer le fait que X^m est une variété, que l'homomorphisme

$$f_*: H_i(X^m, X^m - f^{-1}A) \rightarrow H_i(Y^n, Y^n - A)$$

est surjectif. On a donc le théorème :

THÉORÈME 1'. *Soit X un espace topologique compact; soient, d'autre part, Y^n une variété topologique compacte, orientable, et $f: X \rightarrow Y^n$ une application continue. Supposons que l'homomorphisme*

$$f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y^n)$$

est surjectif pour un certain anneau R de coefficients. Alors, l'homomorphisme

$$f_*: H_i(X, X - f^{-1}A) \rightarrow H_i(Y^n, Y^n - A)$$

où A est un ensemble fermé de Y^n , est surjectif, pour tout i . En particulier, si $A = Y^n$, on a : l'homomorphisme

$$f_*: H_i(X) \rightarrow H_i(Y^n)$$

est un épimorphisme pour tous les i .

Nous nous proposons d'étudier quelques exemples et cas particuliers du théorème 1.

DÉFINITION. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application de deux ensembles.

Un élément $y \in fX$ est dit injectif si son image inverse $f^{-1}y$ est formée d'un seul élément.

$x \in X$ est dit injectif si fx est injectif.

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME 1. Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application continue, algébriquement essentielle de deux variétés topologiques compactes, orientables ($m > n$).

f ne peut alors avoir de points injectifs et, pour tout point $y \in Y^n$, la dimension cohomologique de l'ensemble compact $f^{-1}y$ est supérieure ou égale à $m - n$ et $h^{m-n}(f^{-1}(y)) \neq 0$.

Démonstration. Nous employons la propriété suivante de la dimension cohomologique d'un compact C : cette dimension est supérieure ou égale à tout i tel qu'il existe un fermé B de C avec $h^i(B) \neq 0$. En employant le théorème 1 pour $A = y$, on obtient

$$\Psi^*: h^{m-n}(f^{-1}y) \rightarrow h^0(y) = R$$

est surjectif, donc la dimension cohomologique de $f^{-1}y$ est supérieure ou égale à $m - n$.

A fortiori, il ne peut y avoir de point injectif.

qed.

Remarque 1. Si X^m et Y^n sont des variétés triangulables et si f est une application simpliciale, alors $f^{-1}y$ est un complexe et la cohomologie de ČECH est isomorphe à la cohomologie singulière, elle-même isomorphe à la cohomologie simpliciale.

Donc la dimension de $f^{-1}y$ est $\geq m - n$.

Remarque 2. Ni le théorème 1, ni le corollaire 2, ne valent si X^m est une pseudo-variété. En effet, considérons l'exemple suivant: soit p la projection de $S^1 \times S^1$ sur S^1 ; identifions une fibre s^1 à un point. L'espace $S^1 \times S^1 / s^1$ ainsi obtenu est une pseudo-variété, et p est algébriquement essentiel.

Le point avec lequel s^1 est identifié est un point injectif de l'application.

COROLLAIRE 3 DU THÉORÈME 1. Soit $f: X^n \rightarrow Y^n$ une application continue de deux variétés topologiques compactes, orientables avec $d = \text{degré}(f) \geq 1$. Alors l'endomorphisme

$$\Psi^* f^*: H^i(Y^n) \rightarrow H^i(Y^n)$$

s'obtient en multipliant tout cocycle de $H^i(Y^n)$ par d . D'autre part, si on prend comme coefficients le corps des nombres rationnels, l'homomorphisme

$$\Psi^*: h^i(f^{-1}A) \rightarrow h^i(A)$$

est surjectif pour tout fermé connexe A de Y^n .

Démonstration. Soit η un cocycle de $H^i(Y^n)$; comme $\Psi^* = D^{-1}f_* D$, on a

$$\Psi^* f^*(\eta) = D^{-1}f_* D f^*(\eta) = D^{-1}f_*(f^*(\eta) \cap o_X),$$

En employant la propriété du cap-produit

$$\Psi^* f^*(\eta) = D^{-1}(\eta \cap f_* o_X) = d D^{-1}(\eta \cap o_Y) = d\eta$$

car $f_*(o_X) = d o_Y$.

Dans la seconde partie de ce corollaire, il suffit de remarquer que $f_*(o_X) = d o_Y$ implique dans le corps des rationnels que $f: X^n \rightarrow Y^n$ est algébriquement essentiel, d'où la surjectivité de

$$\Psi^*: h^i(f^{-1}A) \rightarrow h^i(A).$$

Remarque. Dans ce cas où $m=n$, il peut naturellement y avoir des points injectifs. Si l'application f est simpliciale, l'ensemble D des points injectifs est un complexe de dimension $n-2$ et on a le résultat suivant de H. HOPF [3]:

THÉORÈME. *Soit $f: X^n \rightarrow Y^n$ une application simpliciale de degré $d > 2$ de deux variétés combinatoires.*

Supposons d premier avec l'ordre du groupe de torsion à une dimension de X^n .

Alors on a l'inégalité pour les nombres de BETTI de X^n et de D

$$p_{n-2}(D) \leq 1 + p_1(X^n) + p_2(X^n).$$

Exemple 1 du théorème 1. Soient M^r et M^s deux variétés triangulables, compactes, orientables, $M^r \times M^s$ leur produit cartésien et

$$p: M^r \times M^s \rightarrow M^s$$

la projection sur M^s .

L'application p est algébriquement essentielle; on peut donc appliquer le théorème 1.

Prenons un complexe A de M^s ; $p^{-1}(A) = A \times M^r$ est un complexe de $M^r \times M^s$, donc la cohomologie de ČECH est isomorphe à la cohomologie simpliciale.

Le théorème 1 dit que l'homomorphisme

$$\Psi^*: H^{i+r}(p^{-1}A) \rightarrow H^i(A)$$

est surjectif, donc que $H^i(A)$ est isomorphe à un facteur direct de $H^{i+r}(p^{-1}A)$.

Nous pouvons retrouver ce résultat par la formule de KÜNNETH. Dans un corps de coefficients, cette formule donne, pour les groupes d'homologie

$$H_{i+r}(p^{-1}A) \cong \sum_{\mu+v=i+r} H_\mu(A) \otimes H_v(M^r)$$

le produit tensoriel étant effectué par rapport au corps F .

Or un des éléments de cette somme est

$$H_i(A) \otimes_F H_r(M^r)$$

Comme $H_r(M^r) = F$, on a

$$H_i(A) \otimes_F H_r(M^r) = H_i(A) \otimes_F F = H_i(A).$$

Donc $H_i(A)$ est isomorphe à un facteur direct de $H_{i+r}(p^{-1}A)$ pour tout i .

Exemple 2 du théorème 1. Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application continue de deux variétés topologiques compactes, orientables.

Supposons que $H^i(f^{-1}y) = 0$ pour tout $y \in Y$ et pour $i = 1, \dots, n$.

Employons le théorème de BEGLE-VIETORIS qui dit que si $f: X \rightarrow Y$ est une application de deux espaces topologiques telle que

$$H^i(f^{-1}y) = 0$$

pour tout $y \in Y$ et pour $0 < i \leq n$, alors l'homomorphisme

$$f_*: H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

est bijectif, $i = 1, \dots, n$.

Donc, dans notre cas:

$$f_*: H_n(X^m) \rightarrow H_n(Y^n)$$

est bijectif; l'application f est algébriquement essentielle d'où en prenant dans le théorème 1 $A = y$, on obtient que le groupe de cohomologie $H^{m-n}(f^{-1}y)$ n'est pas trivial.

Si l'application f est simpliciale, $f^{-1}y$ est un complexe, donc la cohomologie de ČECH de $f^{-1}y$ est isomorphe aux cohomologies singulières et simpliciales; la comparaison du résultat $H^{m-n}(f^{-1}y)$ non trivial et de l'hypothèse $H^i(f^{-1}y) = 0$ pour $0 < i \leq n$ donne $m - n > n$, d'où $m > 2n$.

Du point de vue heuristique, la démonstration du théorème 1 a été précédée par la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application simpliciale, algébriquement essentielle de deux variétés triangulables, orientables ($m > n$).*

Alors il ne peut y avoir de point $y \in Y^n$ tel que

$$f^{-1}y \subset \bigcup_{i=1}^N e_i$$

les e_i ($i = 1, \dots, N$) étant des simplexes à m dimensions de X^m , et tels que $\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 2. *Dans les hypothèses du théorème 2, f ne peut avoir de point injectif.*

Démonstration du théorème 1. Comme l'homomorphisme

$$f_*: H_n(X^m) \rightarrow H_n(Y^n)$$

est un épimorphisme, il existe au moins un cycle ζ_n que nous pouvons supposer réalisé par un complexe, tel que

$$f_*(\zeta_n) = o_Y$$

o_Y étant le cycle fondamental de la variété Y^n .

Supposons qu'il existe un point $y \in Y^n$ tel que

$$f^{-1}y \subset \bigcup_{i=1}^N e_i$$

les e_i étant des simplexes à m dimensions, disjoints deux à deux.

Nous nous proposons de construire un cycle ξ'_n homologue à ξ_n et tel que

$$\xi'_n \cap \bigcup_{i=1}^N e_i = \emptyset.$$

Donc $f_*(\xi'_n)$ ne peut représenter le cycle fondamental o_Y de la variété Y^n . Or $f_*(\xi'_n)$ est homologue à $f_*(\xi_n)$; notre hypothèse sur l'existence d'un point $y \in Y^n$ tel que

$$f^{-1}y \subset \bigcup_{i=1}^N e_i$$

se révèle ainsi fausse.

Construisons le cycle ξ'_n : pour chaque i l'intersection de ξ_n avec $\partial e_i = \Sigma_i$ est un cycle ζ_{n-1}^i ; ce cycle borde dans Σ_i un complexe ζ_n^i . Prenons pour ξ'_n :

$$\xi'_n = \left(\xi_n - \bigcup_{i=1}^N (e_i \cap \xi_n) \right) \bigcup_{i=1}^N \zeta_n^i.$$

qed.

2. Sur les points injectifs d'applications de variétés

Soient X^m et Y^n deux variétés topologiques compactes ($m \geq n$) et soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application continue essentielle, c'est à dire non homotope à l'application triviale $t: X^m \rightarrow y \in Y^n$. Désignons par $\Delta \subset X^m$ l'ensemble des points injectifs de X et par $D = f(\Delta)$ l'ensemble des points injectifs de Y^n .

Supposons $D \neq \emptyset$ et soit $\delta \in \Delta$, $d = f(\delta)$.

Nous appellerons voisinage sphérique $V_s(d)$ de d l'image par un homéomorphisme i de l'intérieur e^n d'une sphère S^{n-1} . Soit $\partial V_s(d)$ la frontière de $V_s(d)$.

L'exemple de la suspension Sf d'une application $f: S^m \rightarrow S^n$ où d serait un des pôles de suspension nous amène à étudier l'image inverse $f^{-1}V_s(d)$. Est-ce un voisinage sphérique de δ ?

Nous n'avons, dans le cas où f est continu, que la formule

$$H^q(\delta) = \lim_{V \ni d} H^q(f^{-1}V) = \begin{cases} R & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

R étant l'anneau de coefficients.

Nous verrons (chapitre 5) que, si f est une application simpliciale de deux variétés combinatoires, on peut construire $V_s(d)$ de telle manière que $f^{-1}V_s(d)$ soit un voisi-

nage sphérique de δ . Dans le cas général d'une application continue, nous nous proposons de démontrer le théorème:

THÉORÈME 3. *Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application continue de deux variétés topologiques et soit δ un point injectif de $f(X^m)$ et Y^n sont compactes). On peut alors construire deux voisinages sphériques $U_s^*(\delta)$ et $U_s(\delta)$ avec $U_s^*(\delta) \supset U_s(\delta)$ tels qu'il existe une application $g: X^m \rightarrow Y^n$ ayant les propriétés suivantes:*

- a) $g|_{X^m - U_s^*(\delta)} = f|_{X^m - U_s^*(\delta)}$;
- b) $g(U_s(\delta))$ est un voisinage sphérique $V_s(d)$ de d et $g^{-1}V_s(d) = U_s(\delta)$, $g\partial U_s(\delta) = \partial g U_s(\delta)$;
- c) g est homotope à f .

Pour la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME. Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application continue de deux variétés topologiques compactes et soit $d \in Y^n$ un point injectif.

Alors, à tout ouvert $U \ni d = f^{-1}d$, il existe un voisinage sphérique $V_s(d)$ tel que $U \supset f^{-1}(V_s(d))$.

Démonstration du lemme. Supposons qu'il n'existe pas de tel voisinage sphérique de d . Alors, pour tout voisinage sphérique $V_s(d)$ de rayon $1/i$, il existe un point $x^i \in X^m$ tel que $x^i \notin U$ et $f(x^i) \in V_s(d)$.

La suite $\{f(x^i)\}$ converge vers d ; d'autre part la suite $\{x^i\}$ a un point d'accumulation dans $X^m - U$ puisque $X^m - U$ est compact. Or il est impossible que l'image de ce point d'accumulation soit d car d est un point injectif.

Donc il existe bien un voisinage sphérique $V_s(d)$ tel que $f^{-1}(V_s(d)) \subset U$. qed.

Démonstration du théorème 3. Prenons dans X^m un voisinage sphérique $U_s^*(\delta)$ qui soit tel que $fU_s^*(\delta)$ soit contenu dans un voisinage euclidien de d ; ceci est possible car f est continu.

D'après le lemme nous pouvons construire un voisinage sphérique $V_s(d)$ tel que $f^{-1}V_s(d) \subset U_s^*(\delta)$.

Naturellement, $V_s(d) \subset fU_s^*(\delta)$ et $fU_s^*(\delta)$ est un ouvert de Y^n . Que peut donc dire de l'image par l'application f de la frontière $\partial U_s^*(\delta) = \Sigma_*^{m-1}$?

Un point intérieur de $fU_s^*(\delta)$ peut être l'image d'un point de Σ_*^{m-1} mais un point de $\partial fU_s^*(\delta)$ n'a pas dans son image inverse de point de $U_s^*(\delta)$; donc $f\Sigma_*^{m-1} \supset \partial fU_s^*(\delta)$.

D'autre part $\partial fU_s^*(\delta) \cap V_s(d) = \emptyset$ et $f\Sigma_*^{m-1}, d$, puisque d est un point injectif. Ceci permet de construire la projection π de l'ensemble $f\Sigma_*^{m-1}$ sur la sphère (de centre d) $\Sigma^{n-1} = \partial V_s(d)$.

La composition des applications f et π donne donc une application

$$\pi f: \Sigma_*^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}.$$

Prenons maintenant un voisinage sphérique $U_s(\delta)$ de δ qui soit contenu dans $f^{-1}V_s(d)$.

Construisons l'application $g: X^m \rightarrow Y^n$ mentionnée dans l'énoncé du théorème.

Prenons $g(x) = f(x)$ sur l'ensemble fermé $X^m - U_s^*(\delta)$.

Pour $x \in U_s^*(\delta) - U_s(\delta)$, menons le rayon $\vec{\delta x}$ qui coupe les sphères Σ^{m-1} et Σ_*^{m-1} respectivement en x_1 et x_2 .

Menons le rayon $\vec{df}(x_2)$; il coupe la sphère $\Sigma^{n-1} = \partial V_s(d)$ en un point que nous nommerons $g(x_1)$.

Nous définissons $\underline{g(x)}$ comme le point divisant le segment $g(x_1) \underline{f(x_2)}$ dans le même rapport que x divise $x_1 x_2$.

Pour $x \in U_s(\delta)$, le rayon $\vec{\delta x}$ coupe la sphère Σ^{m-1} en un point x_1 ; $\underline{g(x)}$ est le point divisant le segment $\underline{dg(x_1)}$ dans le même rapport que x divise le segment $\vec{\delta x}_1$.

L'application $g: X^m \rightarrow Y^n$ ainsi obtenue est continue et admet toujours δ et d comme points injectifs.

Par construction, les propriétés a) et b) énoncées dans le théorème 3 sont remplies par l'application g .

Démontrons que f est homotope à g : pour cela il faut construire une homotopie $\Phi_t(x): X^m \times I \rightarrow Y^n$ telle que $\Phi_0(x) = f(x)$, $\Phi_1(x) = g(x)$. Prenons $f = g$ dans le complément $X^m - U_s^*(\delta)$ de la cellule $U_s^*(\delta)$; on peut donc utiliser la structure euclidienne dans $fU_s^*(\delta)$ avec d comme origine de l'espace vectoriel.

Considérons l'application $\Phi_t(x) = \vec{f(x)} + t(\vec{g(x)} - \vec{f(x)})$, $x \in U_s^*(\delta)$

Cette application est continue et possède les propriétés suivantes.

$$\begin{cases} \Phi_0(x) = f(x) \\ \Phi_1(x) = g(x) \end{cases} \text{ pour } x \in U_s^*(\delta)$$

$\Phi_t(x) = f(x) = g(x)$ pour tout $t \in I$ et pour $x \in \partial U_s^*(\delta) = \Sigma_*^{m-1}$.

Donc, pour $x \in X^m - U_s^*(\delta)$, on peut bien étendre l'homotopie $\Phi_t(x)$ en posant $\Phi_t(x) = f(x)$ pour tout t .

Nous avons ainsi la propriété c): g est homotope à f .

qed.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le problème: si l'application $f: X^m \rightarrow Y^n$ est essentielle, en est-il de même de l'application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$?

Supposons que $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ soit homotope à l'application triviale $t: \Sigma^{m-1} \rightarrow y \in \Sigma^{n-1}$; sous quelles hypothèses peut-on en déduire que $g: X^m \rightarrow Y^n$ et par suite $f: X^m \rightarrow Y^n$, homotope à g d'après le théorème 3, est homotope à l'application triviale $t: X^m \rightarrow y \in Y^n$? Pour pouvoir employer la théorie de l'obstruction, supposons que X^m et Y^n sont des variétés combinatoires, orientables.

Nous cherchons à construire une homotopie $\Psi_t(x): X^m \times I \rightarrow Y^n$ telle que $\Psi_0(x) = g(x)$ et $\Psi_1(x) = t(x)$.

Par hypothèse, $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ n'est pas essentielle, donc $\Psi_t(x)$ est déjà défini sur le complexe Σ^{m-1} ; on peut naturellement étendre cette homotopie à l'intérieur $U_s(\delta)$ de la sphère Σ^{m-1} .

En étendant l'homotopie $\Psi_t(x)$ à $X^m - U_s(\delta)$, on rencontre des cocycles d'obstruction contenus dans les groupes

$$H^i(X^m - U_s(\delta), \Sigma^{m-1}; \pi_i(Y^n - V_s(d)))$$

où $V_s(d)$ est l'intérieur de la sphère Σ^{n-1} ; l'ensemble $X^m - U_s(\delta)$ est une variété combinatoire à bord Σ^{m-1} : on peut donc appliquer le théorème de dualité

$$H^i(X^m - U_s(\delta), \Sigma^{m-1}; \pi_i(Y^n - V_s(d))) \cong H_{m-i}(X^m - U_s(\delta); \pi_i(Y^n - V_s(d)))$$

Si la variété Y^n est une sphère S^n , $S^n - V_s(d)$ est une cellule e^n : donc, comme $\pi_i(e^n) = 0$ pour tout i , il n'y a pas d'obstruction et $g: X^m \rightarrow S^n$ est homotope à l'application triviale t si $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ l'est elle-même.

Par contre, si X^m est une sphère S^m et Y^n une variété quelconque, le groupe

$$H^m(S^m - U_s(\delta), \Sigma^{m-1}; \pi_m(Y^n - V_s(d)))$$

n'est pas trivial puisqu'il est isomorphe à

$$H_0(S^m - U_s(\delta); \pi_m(Y^n - V_s(d)))$$

et il peut donc y avoir une obstruction.

Nous obtenons ainsi le théorème

THÉORÈME 4. *Soient X^m une variété combinatoire et $f: X^m \rightarrow S^n (m \geq n)$ une application continue, essentielle, ayant au moins un point injectif. Alors l'application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ obtenue dans le théorème 3 est essentielle.*

COROLLAIRE. Soit X^m une variété combinatoire de dimension $m > 2$; une application $f: X^m \rightarrow S^2$ continue, essentielle, ne peut avoir de point injectif. Il en est de même pour $X^{22} \rightarrow S^{10}$.

Démonstration du corollaire.

S'il y avait un point injectif, on pourrait lui associer une application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^1$ essentielle d'après le théorème 4. Or le groupe d'homotopie $\pi_{m-1}(S^1)$ est nul et de même $\pi_{21}(S^9) = 0$.

Remarque. L'application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ n'est pas nécessairement essentielle: nous allons donner l'exemple d'une application essentielle $f: X^m \rightarrow Y^n$ ayant des points injectifs tels que les applications $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ soient homotopes à l'application triviale.

Pour cela, nous aurons besoin de la proposition

PROPOSITION. Soit $f: A \rightarrow B$ une application continue, essentielle, de deux espaces

topologiques. Alors, l'application

$$f \times f: A \times A \rightarrow B \times B$$

est essentielle.

Démonstration. Supposons que $f \times f$ ne soit pas essentielle: soit alors Φ une homotopie

$$\Phi: A \times A \times I \rightarrow B \times B$$

telle que $\Phi|A \times A \times 0 = f \times f$ et $\Phi|A \times A \times 1 = t$ (application triviale).

Projetons sur les facteurs $A \times I$ et B :

$$\begin{array}{ccc} A \times A \times I & \xrightarrow{\Phi} & B \times B \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ A \times I & \xrightarrow{\Psi} & B \end{array}$$

$\Psi|A \times 0 = f$ et $\Psi|A \times 1 = t$; donc l'application $f: A \rightarrow B$ n'est pas essentielle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. qed.

Revenons à la construction de l'exemple: prenons la suspension $S\alpha$ de la fibration de HOPF $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$; $S\alpha$ est essentiel d'après le théorème de FREUDENTHAL et possède deux points injectifs.

Considérons le produit cartésien

$$(S\alpha)^4: S^4 \times S^4 \times S^4 \times S^4 \rightarrow S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^3$$

$(S\alpha)^4$ est une application essentielle d'après la proposition précédente et possède 16 points injectifs.

Pour chacun de ces points on peut construire selon le théorème 4 une application $g: \Sigma^{15} \rightarrow \Sigma^{11}$. Or g est homotope à t car le groupe $\pi_{15}(S^{11})$ est nul.

3. Sur les points injectifs d'applications de sphères

Soit $f: S^m \rightarrow S^n$ ($m \geq n$) une application continue, essentielle de deux sphères. Que peut-on déduire de l'existence de points injectifs?

Les théorèmes 3 et 4 du chapitre précédent donnent: si il existe au moins un point injectif $d \in Y^n$, on peut lui associer une application $g: S^m \rightarrow S^n$ homotope à f et telle que $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ soit essentielle. Nous nous proposons de démontrer le théorème.

THÉORÈME 5. *La classe d'homotopie d'une application $f: S^m \rightarrow S^n$, possédant au moins un point injectif, est dans l'image de l'homomorphisme de suspension $S: \pi_{m-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$.*

Plus précisément, la suspension de l'application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ est dans la classe d'homotopie de $f: S^m \rightarrow S^n$.

COROLLAIRE 1. *Si d_1 et d_2 sont deux points injectifs de l'application $f: S^m \rightarrow S^n$ les*

classes d'homotopie $[g_1]$ et $[g_2]$ des deux applications $g_1: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ et $g_2: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ sont dans la même classe résiduelle du groupe $\pi_{m-1}(S^{n-1})$ par rapport au noyau de l'homomorphisme de suspension $S: \pi_{m-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$

Dans la démonstration du théorème 5, nous aurons besoin du lemme suivant (ALEXANDROFF-HOPF p. 502)

LEMME. Soient f_1 et f_0 deux applications d'un espace métrique compact dans la sphère S^n ; supposons qu'il existe un ensemble ouvert G de S^n possédant la propriété suivante: en chaque point $y \in G$, les images inverses $f_0^{-1}(y)$ et $f_1^{-1}(y)$ sont identiques.

Alors les applications f_0 et f_1 sont homotopes.

Démonstration du théorème. Considérons l'application $g: S^m \rightarrow S^n$ construite dans le théorème 3; elle est homotope à l'application f .

A l'intérieur de Σ^{m-1} , c'est-à-dire dans le voisinage sphérique $U_s(\delta)$, l'application g a été construite comme la suspension de l'application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$.

Faisons de même pour le complément $S^m - U_s(\delta)$ de $U_s(\delta)$; on obtient ainsi une application $h: S^m \rightarrow S^n$ qui est par construction la suspension de $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$. L'application h est telle que $h^{-1}(y) = g^{-1}(y)$ pour tous les points y du voisinage sphérique $V_s(d)$. Donc, d'après le lemme, les applications g et h sont homotopes: f et g étant homotopes, f est homotope à h . qed.

Remarque. Il peut y avoir des applications $f: S^m \rightarrow S^n$ qui ne sont pas essentielles mais qui possèdent des points injectifs tels que l'application associée $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ soit essentielle.

Il suffit de prendre la suspension d'une application $g: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ comprise dans le noyau de l'homomorphisme de suspension, si ce noyau est différent de zéro.

COROLLAIRE 2. Soit $f: S^m \rightarrow S^n$ une application continue avec $m \leq 2n-2$: quelle que soit la classe d'homotopie de f , il y a dans cette classe des applications possédant des points injectifs.

Si $m < 2n-2$, les applications $g_1: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ et $g_2: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ associées à deux points injectifs d_1 et d_2 définissent le même élément du groupe $\pi_{m-1}(S^{n-1})$.

Démonstration. D'après le théorème de FREUDENTHAL, l'homomorphisme de suspension $S: \pi_{m-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$ est surjectif si $m \leq 2n-2$ et bijectif si $m < 2n-2$, ce qui démontre le corollaire.

COROLLAIRE 3. Désignons par $\pi_{2n-1}(S^n)_0$ le sous-groupe de $\pi_{2n-1}(S^n)$ formé par les éléments d'invariant de HOPF nul.

Si l'application continue $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ a des points injectifs, la classe d'homotopie de f est nécessairement un élément de $\pi_{2n-1}(S^n)_0$.

Démonstration. D'après le théorème de FREUDENTHAL, $S\pi_{2n-2}(S^{n-1}) = \pi_{2n-1}(S^n)_0$, donc comme une application $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ avec au moins un point injectif est dans la classe d'homotopie d'une suspension, f est nécessairement dans le sous-groupe $\pi_{2n-1}(S^n)_0$. qed.

Remarque. Si l'application $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$ est simpliciale, l'invariant de HOPF est défini par

$$\gamma = V(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$$

où y_1 et y_2 sont deux points différents de S^n .

Il ne peut donc y avoir de point injectif si $\gamma \neq 0$, ni de point y tel que $f^{-1}(y)$ soit d'homologie triviale.

4. Sur des cas particuliers d'applications de variétés

Pour certaines valeurs de m et de n dans une application $f: X^m \rightarrow S^n$, on peut donner des résultats plus précis sur les images inverses $f^{-1}(y)$ des points de S^n .

Considérons une application continue $f: X^m \rightarrow S^1$ où X^m est une variété combinatoire. Si cette application est essentielle, elle est algébriquement essentielle (ALEXANDROFF-HOPF, p. 517).

On peut donc appliquer le corollaire 2 du théorème 1 et on obtient le résultat

THÉORÈME 6. *Dans une application continue, essentielle $f: X^m \rightarrow S^1$ d'une variété combinatoire, orientable X^m dans un cercle S^1 , le groupe de cohomologie de ČECH $h^{m-1}(f^{-1}(y))$, où y est un point quelconque de S^1 , n'est pas trivial et la dimension cohomologique de $f^{-1}(y)$ est donc supérieure ou égale à $m-1$.*

Le théorème 4 du chapitre 2 donne: une application essentielle $f: S^3 \rightarrow S^2$ ne peut avoir de point injectif, car s'il y avait un tel point, on pourrait lui associer une application essentielle $g: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^1$ ce qui est impossible puisque le groupe d'homotopie $\pi_2(S^1)$ est nul. Ce raisonnement vaut pour $f: X^m \rightarrow S^2$.

Rappelons le théorème de factorisation de PONTRJAGIN (Recueil mathématique de l'université de Moscou, T. 9, 1941) [6].

THÉORÈME. Si une application continue $f: K^m \rightarrow S^2$ d'un complexe de dimension $m > 2$ dans une sphère S^2 n'est pas algébriquement essentielle, on peut factoriser f par la fibration de HOPF $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$

$$\begin{array}{ccc} K^m & \xrightarrow{\varphi} & S^3 \\ & \searrow f & \downarrow \alpha \\ & & S^2 \end{array}$$

Grâce à ce résultat de PONTRJAGIN, nous nous proposons de démontrer le théorème

THÉORÈME 7. *Dans une application essentielle $f: S^3 \rightarrow S^2$, le groupe de cohomologie de ČECH $h^1(f^{-1}(y))$, où y est un point quelconque de S^2 , est différent de zéro.*

Dans une application essentielle $f: S^m \rightarrow S^2 (m \geq 3)$, l'image inverse de tout point y de S^2 est formée d'un nombre infini de points.

Démonstration. L'application $f: S^m \rightarrow S^2$ remplit les hypothèses du théorème de

PONTRJAGIN: on a donc la factorisation de $f: S^m \rightarrow S^2$ par les applications $\varphi: S^m \rightarrow S^3$ et $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$.

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\varphi} & S^3 \\ & \searrow f & \downarrow \alpha \\ & & S^2 \end{array}$$

L'application $f = \alpha \varphi$ étant essentielle, de même que la fibration $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$, l'application $\varphi: S^m \rightarrow S^3$ est essentielle.

Comme l'image inverse $\alpha^{-1}(y)$ est un cercle, $f^{-1}(y)$ sera formé d'un nombre infini de points.

Si $m=3$, le degré de $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$ est supérieur ou égal à 1 et on peut appliquer le corollaire 3 du théorème 1 en prenant $A = S^1$, d'où le résultat. qed.

On peut aussi combiner le théorème 1 et la factorisation de PONTRJAGIN pour obtenir le théorème

THÉORÈME 8. *Pour une application continue essentielle $f: X^3 \rightarrow S^2$ d'une variété combinatoire X^3 dans une sphère S^2 , le groupe de cohomologie de ČECH $h^1(f^{-1}(y))$ n'est pas trivial.*

Démonstration. Il faut distinguer deux cas:

a) $f: X^3 \rightarrow S^2$ est algébriquement essentielle et on peut alors employer le corollaire 2 du théorème 1.

b) $f: X^3 \rightarrow S^2$ n'est pas algébriquement essentielle, ce qui permet d'appliquer la factorisation de PONTRJAGIN

$$\begin{array}{ccc} X^3 & \xrightarrow{\varphi} & S^3 \\ & \searrow f & \downarrow \alpha \\ & & S^2 \end{array}$$

L'application $\varphi: X^3 \rightarrow S^3$ est algébriquement essentielle et le corollaire 3 du théorème 1 où on prendra $A = S^1$ donne le résultat cherché. qed.

Dans le cas d'une application $f: S^4 \rightarrow S^3$, comme $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$, il y a une seule classe d'homotopie non triviale et cette classe est engendrée par la suspension de la fibration $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$.

Nous pouvons démontrer grâce à la factorisation de PONTRJAGIN le résultat suivant

THÉORÈME 9. *Une application essentielle $f: S^4 \rightarrow S^3$ a au plus deux points injectifs. Si elle possède deux points injectifs d_1 et d_2 , le groupe de cohomologie de ČECH $h^1(f^{-1}(y))$ est différent de zéro pour tout y de S^3 différent de d_1 et d_2 .*

Démonstration. Supposons que l'application $f: S^4 \rightarrow S^3$ ait au moins deux points injectifs; nous nous proposons de démontrer que pour tout point y différent de d_1 et d_2 , $h^1(f^{-1}(y)) \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point y différent de d_1 et d_2 tel que $h^1(f^{-1}(y))=0$.

Faisons simultanément en d_1 et d_2 la construction décrite dans le théorème 3: prenons les voisinages sphériques $U_s^*(\delta_1)$ et $U_s^*(\delta_2)$ dans le complément de $f^{-1}(y)$.

On obtient ainsi une application $g: S^4 - U_s^*(\delta_1) \cup U_s^*(\delta_2)$ continue, homotope à $f: S^4 \rightarrow S^3$, possédant aussi les deux points injectifs d_1 et d_2 et telle que:

$f(x)=g(x)$ pour $x \in S^4 - U_s^*(\delta_1) \cup U_s^*(\delta_2)$
 $g^{-1}(V_s(d_i))=U_s(\delta_i)$ $i=1, 2$ où $V_s(d_1)$ et $V_s(d_2)$ sont des voisinages sphériques de d_1 et d_2 .

D'après le théorème de PONTRJAGIN, on peut factoriser $g: \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^2$ où $\Sigma^3 = \partial U_s(\delta_1)$, par la fibration $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$.

Considérons la suspension $S\alpha$ de pôles d_1 et d_2 : dans le complément $S^4 - \bar{U}_s(\delta_1) \cup \bar{U}_s(\delta_2)$, $S\alpha$ est une fibration ce qui nous permet d'étendre à $S^4 - U_s(\delta_1) \cup U_s(\delta_2)$ la factorisation définie sur $\Sigma^3 = \partial U_s(\delta_1)$ qui est un déformation-retract du cylindre $S^4 - U_s(\delta_1) \cup U_s(\delta_2)$.

Comme g et $S\alpha$ sont définies à l'intérieur de $U_s(\delta_i)$ par la suspension des applications $g: \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^2$ et $\alpha: S^3 \rightarrow S^2$, on peut étendre la factorisation sur toute la sphère S^4 . On obtient donc

$$\begin{array}{ccc} S^4 & \xrightarrow{\varphi} & \bar{S}^4 \\ & \searrow f & \downarrow S\alpha \\ & & S^3 \end{array}$$

Le point y considéré est par construction dans $S^3 - V_s(d_1) \cup V_s(d_2)$ donc $(S\alpha)^{-1}(y)$ est un cercle S^1 ; l'application $\varphi: S^4 \rightarrow S^4$ étant essentielle, puisque $S\alpha$ et $f = S\alpha \cdot \varphi$ le sont, on peut employer le corollaire 3 du théorème 1, en prenant $A = S^1$. qed.

5. Etude des points injectifs d'applications simpliciales

Prenons une application essentielle simpliciale $f: S^3 \rightarrow S^2$. Elle ne peut avoir de point injectif et sa suspension $Sf: S^4 \rightarrow S^3$ aura comme points injectifs les pôles de suspension. Par itération, l'application $S^r f: S^{3+r} \rightarrow S^{2+r}$ qui est aussi simpliciale, aura comme ensemble de points injectifs une sphère Σ^{r-1} , complexe de S^{2+r} .

Réiproquement, nous nous proposons de démontrer que si une application simpliciale $f: S^m \rightarrow S^n$ possède un simplexe, à r dimensions, de points injectifs, alors f est homotope à une $(r+1)$ ème suspension.

LEMME. Soit $f: M^m \rightarrow N^n$ une application simpliciale de deux complexes M^m et N^n , respectivement à m et à n dimensions ($m \geq n$).

Alors l'ensemble Δ des points injectifs dans M^m est un complexe de M^m , dans la triangulation initiale et

$$\Delta \subset K^{n-1}(M^m)$$

où $K^{n-1}(M^m)$ est le squelette à $(n-1)$ dimensions de M .

Démonstration. Comme f est une application simpliciale

$$f: K^0(M^m) \rightarrow K^0(N^n)$$

et, si x_1, x_2, \dots, x_q sont les sommets d'un simplexe de $K^{q-1}(M^m)$, $f(x_1), \dots, f(x_q)$ sont les sommets d'un simplexe de $K^{q-1}(N^n)$, qui ne sera d'ailleurs pas nécessairement de dimension $q-1$.

Je me propose de démontrer qu'un point intérieur d'un simplexe à n dimensions de $K^n(N^n)$ ne peut être un point injectif de f et, plus généralement, si d est un point injectif intérieur d'un simplexe à q dimensions, alors tout ce simplexe est formé de points injectifs.

Soient y_1, \dots, y_{q+1} les sommets du simplexe σ en question.

Soient $\sigma_1^q, \dots, \sigma_1^{q+1}, \dots, \dots$ les simplexes de $K^m(M^m)$, qui seront de dimension supérieure ou égale à q , qui sont appliqués sur le simplexe σ .

Tous les simplexes $\sigma_1^q, \dots, \sigma_1^{q+1}, \dots$ ont en commun le point $f^{-1}d$. Or dans un complexe les simplexes sont tous disjoints, donc il n'y a qu'un seul simplexe $\sigma^{q'}$ à être appliqué sur σ .

Les λ_i étant les coordonnées barycentriques, on a pour l'application $f|\sigma^{q'}$

$$f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i f(x_i).$$

L'image inverse d'un point intérieur est donc toujours à $q'-q$ dimensions; or $f^{-1}d$ est formée d'un seul point.

Par suite, $q'=q$ et $f|\sigma^q$ est un homéomorphisme.

Nous avons donc démontré que si $d \in D$ est un point d'un simplexe σ^q de $K^q(N^n)$, alors $\sigma^q \subset D$.

Etudions le cas où $q=n$.

Plus généralement, on a:

L'ensemble $D \subset Y^n$ des points injectifs d'une application continue $f: X^m \rightarrow Y^n$ de deux variétés topologiques X^m et Y^n ($m > n$) ne peut contenir de cellule e^n .

En effet, la frontière ∂e^n de e^n sépare Y^n en deux parties connexes alors que $f^{-1}\partial e^n$ qui est une sphère topologique de dimension $n-1$ ne sépare pas la variété X^m qui est une variété de Cantor. Cette démonstration vaut pour $m > n$.

Pour $m=n$, il faut supposer que le degré de l'application f soit supérieur ou égal à 2.

Donc en revenant à la démonstration du lemme, on voit que D ne peut contenir de simplexes à n dimensions.

C'est-à-dire, $D \subset K^{n-1}(N^n)$.

qed.

Soit $f: X^m \rightarrow Y^n$ une application simpliciale de deux variétés combinatoires; soit $d \in Y^n$ un point injectif de f .

D'après le lemme précédent, on a $d \subset K^{n-1}(Y^n)$; désignons par Φ_d l'ensemble des simplexes de $K^n(Y^n)$ tels que d soit dans l'un de ces simplexes ou leur fermeture.

Définissons de même Ψ_s pour $\delta = f^{-1}d$.

Y^n étant une variété, nous pouvons construire un voisinage sphérique $V_s(d)$, simplicial, convexe et tel que

$$V_s(d) \subset \bigcup_{\sigma \in \Phi_d} \sigma \quad \text{et} \quad f^{-1}(V_s(d)) \subset \bigcup_{\sigma \in \Psi_\delta} \sigma,$$

La frontière $\partial V_s(d)$ est une sphère Σ^{n-1} de centre d .

Nous nous proposons de démontrer le théorème

THÉORÈME 10. *Le complexe $f^{-1}\Sigma^{n-1}$ est une sphère, l'application $f: f^{-1}\Sigma^{n-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ étant naturellement simpliciale.*

Si l'application f est essentielle et si la variété Y^n est une sphère S^n , alors $f: f^{-1}\Sigma^{n-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ est aussi essentielle.

Démonstration. L'application étant simpliciale, $\partial f^{-1}V_s(d)$ est un complexe. Menons avec δ comme origine les rayons dans $\bigcup_{\sigma \in \Psi_\delta} \sigma$ et considérons leur image dans l'application f .

Cette application étant linéaire en chacun des simplexes σ , l'image de chacun de ces rayons sera un rayon issu de d et compris dans $\bigcup_{\sigma \in \Phi_d} \sigma$.

Chaque rayon coupe la sphère Σ^{n-1} en un seul point; il en est de même pour l'intersection des rayons issus de δ et de l'ensemble $\partial f^{-1}V_s(d)$ qui est donc une sphère Σ^{m-1} et naturellement l'application $f: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ est simpliciale.

Pour la deuxième partie du théorème, supposons maintenant que Y^n est une sphère S^n .

Nous pouvons alors, pour démontrer que l'application $f: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$ est essentielle si $f: X^m \rightarrow Y^n$ l'est, répéter le raisonnement fait dans le chapitre 2. En effet, l'obstruction

$$H^i(X^m - f^{-1}V_s(d), \Sigma^{m-1}; \pi_i(S^n - e^n))$$

est toujours nulle.

qed.

COROLLAIRE. *Si dans l'application simpliciale $f: S^m \rightarrow S^n$ l'ensemble D des points injectifs contient un simplexe σ^r de dimension r , alors la classe d'homotopie de f est dans l'image de l'homomorphisme*

$$S^{r+1}: \pi_{m-r-1}(S^{n-r-1}) \rightarrow \pi_m(S^n)$$

obtenu en itérant l'homomorphisme de suspension

$$\pi_{m-r-1}(S^{n-r-1}) \rightarrow \pi_{m-r}(S^{n-r}) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_m(S^n).$$

Démonstration. Pour $r=0$, le théorème précédent donne le résultat; en effet, l'application $f: S^m \rightarrow S^n$ est homotope à la suspension de l'application $f: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$, car f et la suspension que nous appellerons h satisfont aux hypothèses du lemme (chap. 3).

Pour $r \geq 1$, prenons un point d intérieur au simplexe σ^r .

La sphère Σ^{n-1} qui intervient dans le théorème précédent coupe le simplexe σ^r en

deux complexes σ_1^{r-1} et σ_2^{r-1} qui forment l'ensemble injectif de l'application $f: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$.

L'application $f: S^m \rightarrow S^n$ est dans la classe d'homotopie de la suspension de $f: \Sigma^{m-1} \rightarrow \Sigma^{n-1}$.

Nous sommes donc ramenés au cas $r-1$. On voit en particulier que la dimension de D est inférieure ou égale à $n-3$ (si $m > n$). qed.

Exemple. Une application simpliciale $f: S^{25} \rightarrow S^{13}$ ne peut avoir, si elle est essentielle, de simplexe de points injectifs à 3 dimensions.

En effet, si c'était le cas, on aurait que l'application $f: S^{25} \rightarrow S^{13}$ est dans l'image de l'homomorphisme

$$S^4: \pi_{21}(S^9) \rightarrow \pi_{25}(S^{13})$$

ce qui est impossible, puisque $\pi_{21}(S^9) = 0$.

Remarque. Une application essentielle $f: S^{m+1} \rightarrow S^m$ est toujours homotope à une application $h: S^{m+1} \rightarrow S^m$ ayant pour ensemble injectif une sphère à $m-3$ dimensions et cela sans hypothèse de simplicialité pour f . En effet, on a le résultat de FREUDENTHAL: $\pi_{m+1}(S^m) = S^{m-2} \pi_3(S^2)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ALEXANDROFF und H. HOPF: Topologie I (Springer 1935).
- [2] H. HOPF: *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, J. reine angew. Math. 163 (1930) 71–88.
- [3] H. HOPF: *Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rend. Mat. e Appl. Univ. Roma 21 (1962), 273–285.
- [4] A. DOLD: Cours de topologie algébrique donné à l'Université de Zurich pendant le semestre d'été 1963: en particulier „Topologische Mannigfaltigkeiten und Dualitätssätze“.
- [5] H. FREUDENTHAL: *Über die Klassen von Sphärenabbildungen*, Compositio Math. 5 (1938), 299–314.
- [6] L. PONTRJAGIN: *A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere*, Mat. Sbornik 9 (1941), 331–359.