

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1967)  
  
**Artikel:** Plongements de polyèdres dans le domaine métastable.  
**Autor:** Weber, C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32128>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Plongements de polyèdres dans le domaine métastable

par C. WEBER (Genève)

## 1. Introduction

Soit  $K$  un complexe simplicial fini. Soit  $|K|$  l'espace topologique sous-jacent. Une application continue du polyèdre  $|K|$  dans le polyèdre  $|K'|$  sera dite semi-linéaire si elle est simpliciale sur une certaine subdivision de  $K$  et de  $K'$ . Une application continue de  $|K|$  dans  $R^m$  sera dite semi-linéaire si elle est simpliciale sur une certaine subdivision de  $K$ . Une application semi-linéaire injective sera appelée un plongement semi-linéaire.

Soit  $I=[0, 1]$ . Un plongement semi-linéaire  $H: K \times I \rightarrow K' \times I$ , commutant avec les projections naturelles sur le second facteur, sera appelé une isotopie semi-linéaire. Soit  $h_t: K \rightarrow K'$  le plongement semi-linéaire défini par  $H(x, t) = (h_t(x), t)$ . Les plongements  $h_0$  et  $h_1$  sont dits isotopes.

Le problème central concernant les plongements consiste à déterminer quel est l'ensemble des classes d'isotopie de plongements de  $K$  dans  $K'$ . Une première attaque de ce problème consiste à chercher dans quels cas cet ensemble n'est pas vide. Ceci semble très difficile à résoudre si  $K$  et  $K'$  sont des polyèdres quelconques. Les résultats que l'on connaît actuellement concernent tous le cas où  $K'$  est une variété semi-linéaire.

On peut distinguer historiquement deux «courants» dans l'étude de ce problème:

1° L'école anglaise, dont le point de départ a été le célèbre P.W.Z. [PENROSE-WHITEHEAD-ZEEMAN]. Cette école s'intéresse au cas où  $K$  et  $K'$  sont des variétés semi-linéaires et cherche essentiellement des conditions suffisantes (et parfois nécessaires) à l'existence d'un plongement ou d'une isotopie dans la connectivité de  $K$  et de  $K'$ . Voir, par exemple, les travaux de HUDSON, IRWIN, LICKORISH, ZEEMAN.

2° Le courant que l'on pourrait appeler du «carré symétrique réduit», et que l'on peut faire remonter à VAN KAMPEN. [VAN KAMPEN a)]. Ce courant, dont les principaux résultats dans le cas combinatoire ont été obtenus indépendamment par SHAPIRO et WU, s'intéresse au cas où  $K$  est un polyèdre et  $K'$  un espace numérique. Il cherche des conditions nécessaires et suffisantes dans le carré symétrique réduit de  $K$ .

Enfin, lorsque  $K$  et  $K'$  sont des variétés différentiables, A. HAEFLIGER a trouvé dans le carré symétrique réduit de  $K$  et de  $K'$  des conditions nécessaires et suffisantes (dans le domaine métastable) pour obtenir une classification complète des plongements différentiables. [HAEFLIGER a) et b)].

Le principal résultat de ce travail consiste à établir l'analogie du théorème de HAEFLIGER dans le cas combinatoire, pour  $K$  un polyèdre et  $K'$  un espace numérique. Il contient les résultats de SHAPIRO et WU, de même que certains théorèmes de ZEEMAN et son école, comme cas particuliers.



Je tiens à remercier très sincèrement M. le Professeur G. DE RHAM, qui a guidé mes premiers pas en topologie, de la constante et bienveillante attention qu'il m'a toujours témoignée.

Mes remerciements vont aussi à M. le Professeur E. C. ZEEMAN, qui m'a donné accès à plusieurs de ses résultats avant leur publication. Les longues conversations qu'il a bien voulu m'accorder tant à Cambridge qu'à Genève m'ont été d'un secours décisif. Je lui dois tout particulièrement l'idée de base des arguments développés dans le no. 6.

Je ne saurais dire combien l'influence de M. le Professeur A. HAEFLIGER a été primordiale tout au long de l'élaboration de ce travail. En fait, les théorèmes qui se trouvent ici ne sont que la version combinatoire d'une partie de ses résultats sur les plongements différentiables, dont il m'a longement expliqué les idées et les méthodes. Enfin, ses conseils et ses encouragements dynamiques ne m'ont jamais fait défaut. Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

## 2. Enoncé des résultats

Soit  $E$  un espace topologique. On envisage le produit  $E \times E$ . La diagonale  $\Delta_E$  est le sous-espace de  $E \times E$  constitué par les couples de la forme  $(x, x)$   $x \in E$ . L'espace différence  $E \times E - \Delta_E$  s'appelle le produit réduit de  $E$  et sera noté  $\tilde{E}$ . Soit  $s: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$  définie par  $s(x, y) = (y, x)$ ;  $s$  est une involution sans point fixe. L'espace des orbites sera appelé produit symétrique réduit de  $E$  et noté  $E^*$ . Désignons par  $t$  l'application antipodale de  $S^{m-1}$ . On dira qu'une application  $F: \tilde{E} \rightarrow S^{m-1}$  est équivariante si elle commute avec les involutions  $s$  et  $t$ , c'est-à-dire si:

$$F(x, y) = -F(y, x) \quad x \quad \text{et} \quad y \in E \quad x \neq y.$$

Une homotopie  $h: \tilde{E} \times I \rightarrow S^{m-1}$  sera dite équivariante si l'application  $h_t: \tilde{E} \rightarrow S^{m-1}$  définie par  $h_t(z) = h(z, t)$  est équivariante pour tout  $t \in I$ .

Soit  $K^n$  un polyèdre de dimension  $n$  et soit  $f: K \rightarrow R^m$  un plongement semi-linéaire. On vérifie immédiatement que l'application (continue)  $\tilde{f}: \tilde{K} \rightarrow S^{m-1}$  définie par:

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|} \quad (x, y) \in \tilde{K}$$

est équivariante.

En ce qui concerne l'existence de plongements, le théorème principal de ce travail est le suivant:

**THÉOREME 1.** *Supposons donnée une application continue équivariante  $F: \tilde{K}^n \rightarrow S^{m-1}$ . Alors, si  $2m \geq 3(n+1)$ , (domaine métastable), il existe un plongement semi-linéaire  $f: K^n \rightarrow R^m$  tel que  $\tilde{f}$  soit homotope de façon équivariante à  $F$ .*

## IDÉE DE LA DÉMONSTRATION

Soit  $T(K)$  une triangulation de  $K$ . Soit  $g:K^n \rightarrow R^m$  une application semi-linéaire. En utilisant les techniques de position générale, on voit que les restrictions de dimension impliquent largement que  $g$  n'a pas de points triples. On dira que des points doubles de  $g$  sont proches (par rapport à  $T(K)$ ), s'ils proviennent de l'intersection de l'image par  $g$  de deux simplexes de  $T(K)$  adjacents. On dira que des points doubles sont éloignés dans le cas contraire.

Ordonnons les simplexes de  $T(K)$  en dimension croissante. En raisonnant par induction, on peut supposer que  $K = L \cup \sigma^p$ ,  $p \leq n$ , et que le plongement  $f$  est déjà construit sur  $L$ . Le problème est d'étendre ce plongement à  $K$ .

On commence par construire une application semi-linéaire sans points doubles éloignés. Pour cela, on utilise une version combinatoire de la généralisation par A. HAEFLIGER du procédé de WHITNEY pour l'élimination des points doubles isolés. Voir [WHITNEY a)], [HAEFLIGER a) et b)]. Dans notre cas, le procédé consiste à attribuer des coefficients d'intersection à deux boules semi-linéaires qui s'intersectent de façon agréable dans un espace numérique. A ce propos, les noms de A. SHAPIRO et M. KERVAIRE doivent également être mentionnés. Voir [KERVAIRE a)]. L'application sans points doubles éloignés est construite pas à pas, inductivement sur les simplexes de  $T(L)$ . L'application équivariante  $F$  est utilisée essentiellement pour montrer que chaque fois que l'on veut éviter un nouveau simplexe de  $T(L)$ , on peut s'arranger pour que ses coefficients d'intersection avec l'image de  $\sigma^p$  s'annulent. On pourra alors séparer complètement l'image de deux simplexes non adjacents, tout en maintenant les bords fixes, en utilisant à fond le théorème central de la thèse d'IRWIN, [IRWIN a) et b)], qui remplace dans le cas combinatoire la construction délicate de HAEFLIGER, [HAEFLIGER b)]. Les restrictions de dimension (domaine métastable) sont essentielles.

On élimine ensuite les points doubles proches en utilisant une technique que l'on peut considérer comme une généralisation de la «construction de VAN KAMPEN». Voir [VAN KAMPEN a)]. Cette généralisation m'a été suggérée par la très bonne description qu'en donne WU dans [WU c)]. Le fait que l'on puisse étendre cette construction dans un domaine de dimensions plus grand vient du théorème suivant, dû à LICKORISH, voir [LICKORISH a)]: Soit  $P$  un polyèdre formé de deux sphères ayant une boule en commun. Alors  $P$  ne noue pas dans  $S^m$  si  $m - \dim P \geq 3$ . Des difficultés techniques m'ont empêché d'utiliser tout crûment ce théorème et ont nécessité l'argument assez long développé au no. 6, dont l'idée de base m'a été indiquée par E. C. ZEEMAN.

*Remarques:* 1° Si  $n = 0, 1, 2$  on voit que les restrictions de dimension impliquent que  $3(n+1)/2 > 2n$ , de sorte que l'on n'obtient rien de plus que ce que donne la «position générale». On ne restreint donc pas la généralité en posant  $n \geq 3$ .

2° Si  $n \geq 3$ , alors  $2n \geq 3(n+1)/2$ . Les théorèmes de WU-WEN-TSUN et SHAPIRO sont ainsi des conséquences de notre résultat. Voir [WU c)] et [SHAPIRO a)].

3° Si  $n \geq 5$ , alors  $2n-1 \geq 3(n+1)/2$ . Ainsi, notre résultat démontre un théorème que SHAPIRO avait annoncé. Voir [SHAPIRO a)].

4° Faisons agir  $\mathbb{Z}_2$  sur  $\tilde{K} \times S^{m-1}$  de la façon suivante: Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}_2$  l'élément non trivial. Posons  $\alpha(x, y) = (sx, ty)$ ,  $x \in \tilde{K}$ ,  $y \in S^{m-1}$ . L'espace quotient pour cette action de  $\mathbb{Z}_2$ , noté  $\tilde{K} \times_{\mathbb{Z}_2} S^{m-1}$ , est un fibré  $\eta$  sur  $K^*$ , de fibre  $S^{m-1}$ , et de groupe  $\mathbb{Z}_2$ . On voit facilement que l'existence d'une section de ce fibré  $\eta$  est équivalente à l'existence d'une application équivariante de  $\tilde{K}$  dans  $S^{m-1}$ . Dans le domaine métastable, le problème de l'existence d'un plongement semi-linéaire est ainsi ramené à un problème de topologie algébrique. Il est légitime d'appeler «obstructions au plongement» les obstructions à construire une section du fibré  $\eta$ .

On déduit immédiatement du théorème 1 le corollaire suivant qui présente quelque intérêt depuis le contre-exemple de MILNER à la Hauptvermutung:

**THÉOREME 2.** *Dans le domaine métastable, la «plongeabilité» semi-linéaire d'un polyèdre  $K^n$  dans  $R^m$  ne dépend pas de la structure semi-linéaire de  $K$ .*

Comme corollaire de la méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 on a:

**THÉOREME 3.** *Tout plongement topologique  $g: K^n \rightarrow R^m$  peut être approché arbitrairement près par un plongement semi-linéaire, si  $2m \geq 3(n+1)$ .*

Les théorèmes qui suivent concernent uniquement les variétés semi-linéaires et ont été démontrés pour le cas différentiable dans [HAEFLIGER a)] et [HAEFLIGER-HIRSCH b)]. Tout découle du théorème suivant, qui est dû à HAEFLIGER, voir [HAEFLIGER a)]:

**THÉOREME.** *Soit  $M^n$  une variété semi-linéaire, close. La première obstruction à la construction d'une section du fibré  $\eta$  sur  $M^*$  s'annule si et seulement si  $\bar{W}^i = 0$  pour  $i \geq m-n$ .  $\bar{W}^i$  désigne la  $i^{\circ}$  classe de STIEFEL-WHITNEY normale de la variété  $M$ , dans les coefficients:*

*entiers si  $n$  est impair et  $M$  orientable.*

*entiers tordus si  $n$  est impair et  $M$  non-orientable.*

*entiers mod. 2 si  $n$  est pair.*

En conséquence, on a:

**THÉOREME 4.** *Soit  $M^n$  une variété semi-linéaire, close,  $(k-1)$ -connexe (homologiquement). Si  $2(k+1) < n$ ,  $M^n$  peut être plongée semi-linéairement dans  $R^{2n-k}$  si et seulement si  $\bar{W}^{n-k} = 0$ .*

Les deux conjectures suivantes font partie du «folklore» depuis plusieurs années. Voir, par exemple [ZEEMAN b)]:

a) Toute variété semi-linéaire, orientable, close, de dimension  $n$ , peut être plongée semi-linéairement dans  $R^{2n-1}$ .

b) Soit  $\alpha(n)$  le nombre de  $I$  qui apparaissent dans l'écriture binaire de  $n$ . Toute variété close de dimension  $n$  peut être plongée semi-linéairement dans  $R^{2^n - \alpha(n) + 1}$ .

Nous pouvons démontrer presque complètement l'une et faire un timide pas en direction de l'autre. Plus précisément :

**THÉORÈME 5.** *Soit  $M^n$  une variété close, orientable, de dimension  $n \geq 5$ . Alors  $M^n$  peut être plongée semi-linéairement dans  $R^{2^n - 1}$ .*

Le théorème est bien connu pour  $n=2$ . Pour  $n=3$ , il a été démontré par M. HIRSCH, voir [HIRSCH a)]. Pour  $n=4$ , le théorème a été démontré récemment par WALL et par HIRSCH, voir [WALL a)] et [HIRSCH b)].

**THÉORÈME 6.** *Soit  $M^n$  une variété close,  $n \geq 5$ . Alors, si  $\alpha(n) \geq 2$ ,  $M^n$  peut être plongée semi-linéairement dans  $R^{2^n - 1}$ .*

Ici aussi, [WALL a)] permet d'affirmer que le théorème est vrai pour  $n \geq 2$ .

Les théorèmes 5 et 6 se déduisent du Théorème 4 en utilisant les résultats de MASSEY concernant l'annulation de certaines classes de STIEFEL-WHITNEY d'une variété. Voir [MASSEY a), b), c)].

Le théorème principal concernant les isotopies est le suivant :

**THÉORÈME 1'.** *Soient  $f$  et  $g$  deux plongements semi-linéaires de  $K^n$  dans  $R^m$ . Supposons que  $2m > 3(n+1)$ , (domaine métastable pour les isotopies). Alors, si  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g} : \tilde{K} \rightarrow S^{m-1}$  sont homotopes de façon équivariante,  $f$  et  $g$  sont isotopes.*

Ce théorème est démontré au no. 7.

*Remarque.* Il est clair que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  sont homotopes de façon équivariante si et seulement si les sections correspondantes du fibré  $\eta$  sur  $K^*$  sont homotopes. Ainsi, dans le domaine métastable, l'énumération des classes d'isotopie de plongements est équivalente à l'énumération des classes d'homotopie de section d'un fibré.

On déduit immédiatement que, dans le domaine métastable, la classification des plongements semi-linéaires ne dépend pas de la structure semi-linéaire, et que si deux plongements semi-linéaires sont isotopes topologiquement, ils sont isotopes semi-linéairement.

Les théorèmes de A. HAEFLIGER et les théorèmes 1 et 1' montrent que, en ce qui concerne les variétés différentiables, l'existence et la classification des plongements dans un espace numérique coïncident pour les catégories semi-linéaires et différentiables, pour autant que l'on se trouve dans le domaine métastable.

Comme dans le cas de l'existence de plongements, on peut utiliser les calculs de HAEFLIGER pour déduire quelques conséquences du théorème principal. Voir [HAEFLIGER a)].

**THÉORÈME (HAEFLIGER).** *Soit  $V$  une variété semi-linéaire, close, orientable, homo-*

logiquement  $k$ -connexe,  $k > 0$ . Alors,

$$H^{2n-k-1}(V^*, Z_{(k)}) = H^{n-k-1}(V)$$

avec coefficients entiers ou mod 2 suivant que  $(n-k)$  est impair ou pair.  $Z_{(k)}$  désigne les entiers si  $k$  est pair et les entiers tordus par le revêtement  $\tilde{K} \rightarrow K^*$  si  $k$  est impair.

On en déduit immédiatement le théorème suivant, dont l'analogue différentiable a été démontré dans [HAEFLIGER a)].

**THÉORÈME 4'.** Soit  $V^n$  une variété close, orientable, et homotopiquement  $k$ -connexe. Si  $2(k+2) \leq n$ , les classes d'isotopie de plongements de  $V$  dans  $R^{2n-k}$  correspondent bijectivement aux éléments de  $H^{n-k-1}(V, Z)$  ou  $H^{n-k-1}(V, Z_2)$  suivant que  $(n-k)$  est impair ou pair.

Le corollaire suivant est un peu plus faible qu'un théorème dû à HUDSON. Voir {HUDSON c)}.

**COROLLAIRE.** Les classes d'isotopie de plongements de  $S^p \times S^q$  dans  $R^{p+2q+1}$  correspondent aux entiers ou aux entiers mod 2 suivant que  $q$  est pair ou impair. ( $q \geq p+2$ ) ( $p \geq 1$ ).

Dans le cas non-orientable, HAEFLIGER a le théorème de topologie algébrique suivant:

**THÉORÈME (HAEFLIGER).** Soit  $V^n$  une variété semi-linéaire, close, connexe, et non-orientable. Soit  $V_0$  le complémentaire d'un point. Alors,

$$\begin{aligned} H^{2n-1}(V^*, Z_{(q)}) &= H^{n-1}(V_0, Z)/2H^{n-1}(V, Z) & \text{si } n-q & \text{est pair} \\ &= H^{n-1}(V_0, Z_2) & \text{si } n-q & \text{est impair.} \end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant:

**THÉORÈME 4".** Soit  $V^n$  une variété semi-linéaire, close, connexe, non-orientable. Les classes d'isotopie de plongements de  $V^n$  dans  $R^{2n}$  correspondent aux éléments de

$$H^{n-1}(V_0, Z)/2H^{n-1}(V, Z) \quad \text{ou} \quad H^{n-1}(V_0, Z_2)$$

suivant que  $n$  est pair ou impair.

Nous terminons ce paragraphe en énonçant sans démonstration quelques formes relatives des théorèmes 1 et 1'.

**THÉORÈME 7:** a) Supposons  $2m \geq 3(p+1)$ . Soit  $P$  un polyèdre de dimension  $p$  et soit  $Q \subset P$  un sous-polyèdre. Supposons que l'on ait une application équivariante  $F: \tilde{P} \rightarrow S^{m-1}$  et un plongement  $c: Q \rightarrow R^m$  tel que  $\tilde{c}$  soit homotope de façon équivariante à  $F|_{\tilde{Q}}$ . Alors  $c$  s'étend en un plongement  $f: P \rightarrow R^m$  tel que  $\tilde{f}$  est homotope de façon équivariante à  $F$ .

b) Supposons  $2m > 3(p+1)$ . Supposons que  $f$  et  $g$  soient deux plongements de  $P$  dans

$R^m$  tels que  $f|_Q = g|_Q$ . Supposons que  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  soient homotopes de façon équivariante en maintenant  $Q$  fixe. Alors  $f$  et  $g$  sont isotopes en maintenant  $Q$  fixe.

### 3. Terminologie et notations

Les notes de topologie combinatoire de E. C. ZEEMAN, publiées par l'IHES, seront considérées comme un texte de référence standard. On pourra, en principe, y trouver la définition des termes utilisés ici, à condition que l'on veuille bien substituer au qualificatif «semi-linéaire» le préfixe «poly». On peut aussi se référer aux différents articles de ZEEMAN dans «Topology of 3-manifolds». Enfin, pour beaucoup de notions, on peut consulter le mémoire original de J. H. C. WHITEHEAD, [WHITEHEAD a)].

Soit  $K$  un complexe simplicial euclidien fini. L'espace sous-jacent  $|K|$  sera appelé polyèdre. En général, nous écrirons indifféremment  $K$  ou  $|K|$ . Une application semi-linéaire  $f: K \rightarrow R^m$  est une application qui est simpliciale sur une certaine subdivision de  $K$ . Une application semi-linéaire injective est un plongement semi-linéaire. Une isotopie semi-linéaire est un plongement semi-linéaire  $H: K \times I \rightarrow R^m \times I$ , qui commute avec les projections naturelles sur le second facteur.

Nous considérons les notions de:

- a) Boule et sphère semi-linéaires.
- b) Variété semi-linéaire.
- c) Voisinages réguliers.

comme standard.

Si  $M$  est une variété, son bord sera noté  $\dot{M}$  ou  $dM$  suivant les circonstances. Rappelons que si  $M$  et  $Q$  sont des variétés, un plongement  $f: M \rightarrow Q$  est dit propre si  $f^{-1}(dQ) = dM$ .

En principe, les indices supérieurs désignent la dimension.

### 4. Coefficients d'intersection

L'étude des coefficients d'intersection a été faite principalement par A. SHAPIRO, M. KERVAIRE, et A. HAEFLIGER. Voir [KERVAIRE a)] et [HAEFLIGER a)]. En général, ces auteurs se placent dans la catégorie des applications différentiables et utilisent abondamment la construction de THOM-PONTRJAGIN.

Nous allons développer ici une théorie des coefficients d'intersection dans la catégorie des applications semi-linéaires. Nous nous restreindrons au cas où la codimension est  $\geq 3$ . Les résultats que nous obtenons sont, en un certain sens, équivalents à ceux du cas différentiable.

Soit  $B^m \subset R^m$  une boule semi-linéaire de dimension  $m$ . Soient  $\sigma^p$  et  $\sigma^q$  des simplexes dans  $R^p$  et  $R^q$  respectivement, avec l'orientation naturelle.

Soient  $f: \sigma^p \rightarrow B^m$  et  $g: \sigma^q \rightarrow B^m$  deux plongements semi-linéaires propres, c'est-à-dire tels que, si l'on pose  $dB^m = S^{m-1}$ , on ait :

$$f^{-1}(S^{m-1}) = \dot{\sigma}^p \quad g^{-1}(S^{m-1}) = \dot{\sigma}^q.$$

D'autre part, on suppose que  $f(\dot{\sigma}^p) \cap g(\dot{\sigma}^q) = \emptyset$  et  $p \leq n, q \leq n, m-n \geq 3$ .

Le complémentaire de  $f(\dot{\sigma}^p)$  dans  $S^{m-1}$  a le même type d'homotopie que la sphère  $S^{m-p-1}$ . D'après les hypothèses, on a  $g(\dot{\sigma}^q) \subset (S^{m-1} - f(\dot{\sigma}^p))$ . Ainsi,  $g|_{\dot{\sigma}^q}$  définit un élément

$$I(g, f) \in \pi_{q-1}(S^{m-p-1}).$$

(La définition précise de  $I(g, f)$  est donnée au cours de la démonstration de la proposition 1.)

De façon analogue, on définit

$$I(f, g) \in \pi_{p-1}(S^{m-q-1}).$$

D'autre part, comme la boule  $B^m$  est plongée dans  $R^m$ , on peut définir une application  $a_{f,g}$  de  $d(\sigma^p \times \sigma^q)$  dans la sphère unité de  $R^m$  en posant :

$$a(x, y) = \frac{f(x) - g(y)}{\|f(x) - g(y)\|} \quad (x, y) \in d(\sigma^p \times \sigma^q)$$

Cette application est bien définie en vertu des hypothèses précédentes. Elle détermine un élément

$$\alpha(f, g) \in \pi_{p+q-1}(S^{m-1})$$

Désignons par  $E$  la suspension de FREUDENTHAL.

PROPOSITION 1.  $(-1)^{m-p} E^p I(g, f) = \alpha(f, g) = (-1)^{p+q+m} \alpha(g, f)$ .

COROLLAIRE. Les suspensions stables de  $I(f, g)$  et de  $I(g, f)$  sont égales au signe près. De façon précise

$$E^p I(g, f) = (-1)^{p+q+p+q+m} E^q I(f, g).$$

*Preuve de la proposition 1*

En transformant toute la situation au moyen d'une isotopie ambiante de  $R^m$ , on peut supposer que  $B^m$  est une boule semi-linéaire standard de  $R^m$ . (Voir, par exemple, [GUGENHEIM a]). Par la suite, il sera utile de se représenter  $B^m$  de la façon suivante :

Soit  $R^m = R^p \times R^{m-p}$ . Soit  $\tau^p$  un simplexe de  $R^p$ , de barycentre l'origine, et soit  $\tau^{m-p}$  un simplexe de  $R^{m-p}$ , de barycentre l'origine. Nous prendrons pour  $B^m$  le joint  $\dot{\tau}^p \cdot \tau^{m-p}$ . Son bord  $S^{m-1}$  sera par conséquent le joint  $\dot{\tau}^p \cdot \dot{\tau}^{m-p}$ .

Puisque nous sommes, par hypothèse, en codimension  $\geq 3$ , on peut, en vertu du «unknotting balls» de ZEEMAN, (voir [ZEEMAN f]), trouver une isotopie de  $R^m$  qui



transforme  $f: \sigma^p \rightarrow B^m$  en un homéomorphisme semi-linéaire de  $\sigma^p$  sur  $\tau^p$ , conservant l'orientation.

Il y a une rétraction par déformation évidente  $r_t$  de  $(S^{m-1} - \dot{\tau}^p)$  sur  $\dot{\tau}^{m-p}$ . Soit  $r_1 = r: (S^{m-1} - \dot{\tau}^p) \rightarrow \dot{\tau}^{m-p}$  la rétraction obtenue pour  $t=1$ . Si nous identifions  $\dot{\sigma}^q$  avec  $S^{q-1}$  et  $\dot{\tau}^{m-p}$  avec  $S^{m-p-1}$  (par projection radiale, par exemple), l'application  $r \circ g|_{\dot{\sigma}^q} \rightarrow \dot{\tau}^{m-p}$  détermine sans ambiguïté un élément de  $\pi_{q-1}(S^{m-p-1})$  qui sera, par définition,  $I(g, f)$ .

Soit  $g'$  l'extension radiale de  $r \circ g|_{\dot{\sigma}^q}$  à  $\sigma^q$ , en prenant pour centre l'origine de  $R^m$ . Il est clair que  $g'(\sigma^q) \subset \tau^{m-p}$ . En général  $g'$  n'est pas un plongement. Cependant, l'application  $a_{f, g'}$  de  $d(\sigma^p \times \sigma^q)$  dans la sphère unité de  $R^m$  est bien définie. On vérifie facilement que  $\alpha(f, g) = \alpha(f, g')$ .

Dans  $R^p \times R^q$ , envisageons le produit  $\sigma^p \times \sigma^q$  et le joint  $\dot{\sigma}^p \cdot \dot{\sigma}^q$ . Par projection radiale à partir du « barycentre » de  $\sigma^p \times \sigma^q$ , nous identifions  $d(\sigma^p \times \sigma^q)$  avec  $\dot{\sigma}^p \cdot \dot{\sigma}^q$ . Ce sera notre modèle pour la sphère  $S^{p+q-1}$ . La suspension itérée  $p$ -fois de l'application  $r \circ g|_{\dot{\sigma}^q} \rightarrow \dot{\tau}^{m-p}$  n'est rien d'autre que le joint de cette application avec la restriction à  $\dot{\sigma}^p$  de l'homéomorphisme semi-linéaire  $f: \sigma^p \rightarrow \tau^p$ . Il est maintenant facile, en appliquant strictement les définitions, de voir que  $(-1)^{m-p} E^p I(g, f) = \alpha(f, g)$ .

L'égalité  $\alpha(f, g) = (-1)^{p+q+m} \alpha(g, f)$  découle immédiatement des conventions que nous avons faites.

Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Supposons maintenant que  $I(g, f) = 0 \in \pi_{q-1}(S^{m-p-1})$ . Soit  $N$  un voisinage régulier de  $f(\sigma^p)$  dans  $B^m$ , tel que  $N \cap S^{m-1}$  soit un voisinage régulier dans  $S^{m-1}$  de  $f(\dot{\sigma}^p)$ . Prenons  $N$  suffisamment fin pour que  $N \cap g(\dot{\sigma}^q) = \emptyset$ .  $N$  est une boule semi-linéaire. On vérifie facilement que  $\overline{B^m - N}$  est homéomorphe semi-linéairement à un tore plein  $S^{m-p-1} \times B^{p+1}$ . L'application  $g|_{\dot{\sigma}^q}$  est homotope à zéro dans  $\overline{B^m - N}$ , car, par hypothèse,  $I(g, f) = 0$ . Elle s'étend donc en une application semi-linéaire  $g_1: \sigma^q \rightarrow \overline{B^m - N}$ .

IRWIN, dans sa thèse, a démontré le théorème suivant. Voir [IRWIN a) theorem 1] et [IRWIN b) theorem 1.1].

**THÉORÈME.** Soient  $X^x$  et  $Y^y$  deux variétés semi-linéaires compactes. Soit  $\varphi: X \rightarrow Y$  une application semi-linéaire telle que  $\varphi|_{dX}$  soit un plongement de  $dX$  dans  $dY$ . Alors, si les trois conditions suivantes sont remplies,  $\varphi$  est homotope à un plongement  $\psi$ , rel  $dX$ :

- 1)  $y - x \geq 3$ .
- 2)  $X$  est  $(2x - y)$ -connexe.
- 3)  $Y$  est  $(2x - y + 1)$ -connexe.

Appliquons ce théorème d'IRWIN en prenant  $X = \sigma^q$ ,  $Y = \overline{B^m - N}$ ,  $\varphi = g_1$ . Les conditions 1) et 2) sont évidemment satisfaites. La condition 3) sera remplie si  $m - p - 2 \geq 2q - m + 1$ . Si  $p \leq n$ ,  $q \leq n$ , l'inégalité est vérifiée si  $2m \geq 3(n + 1)$ . Enfin, il est clair que l'on peut toujours choisir pour  $\psi$  un plongement propre.



D'autre part, en codimension  $\geq 3$ , deux plongements semi-linéaires, propres, d'une boule dans une autre, qui coïncident sur le bord, sont isotopes par une isotopie fixe sur le bord. [ZEEMAN e) cor. 1 to theorem 9].

En conséquence, on a la

**PROPOSITION 2.** *Dans le domaine métastable, l'annulation de  $I(g, f)$  est une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une isotopie ambiante  $H_t$  de  $B^m$ , fixe sur  $S^{m-1}$ , et telle que  $H_1 \circ g(\sigma^q) \cap f(\sigma^p) = \emptyset$ .*

Comme on peut le voir facilement sur des exemples, il y a en général plusieurs classes d'homotopie mod.  $\dot{\sigma}^q$ , dans  $\overline{B^m - N}$ , de plongements tels que  $\psi$ . Nous allons étudier ce qui se passe un peu plus en détails.

**PROPOSITION 3.** *Soient  $f: \sigma^p \rightarrow B^m$  et  $g: \sigma^q \rightarrow B^m$  deux plongements semi-linéaires propres, tels que  $f(\dot{\sigma}^p) \cap g(\dot{\sigma}^q) = \emptyset$ . Supposons que  $I(g, f) = 0$ . D'après la proposition 1, l'application  $a_{f,g}: d(\sigma^p \times \sigma^q) = S^{p+q-1} \rightarrow S^{m-1}$  est homotope à zéro. Supposons que l'on se soit donné une extension  $A: \sigma^p \times \sigma^q \rightarrow S^{m-1}$  de l'application  $a$ . Alors, si  $p \leq n$ ,  $q \leq n$ ,  $2m \geq 3(n+1)$ , il existe une isotopie propre  $h_t: \sigma^q \rightarrow B^m$ , telle que:*

1)  $h_0 = g$ .

2)  $h_t|_{\dot{\sigma}^q} = g|_{\dot{\sigma}^q}$ . (Autrement dit, l'isotopie est fixe sur  $\dot{\sigma}^q$ ).

3)  $h_1(\sigma^q) \cap f(\sigma^p) = \emptyset$ .

4) L'application  $\varphi_h: d(\sigma^p \times \sigma^q \times I) \rightarrow S^{m-1}$ , définie de la façon suivante, est homotope à zéro:

$$\begin{aligned} \varphi_h|_{\sigma^p \times \sigma^q \times \{0\}} &= A \\ \varphi_h|_{d(\sigma^p \times \sigma^q) \times \{t\}} &= \frac{f(x) - h_t(y)}{\|f(x) - h_t(y)\|} \quad 0 < t < 1 \quad (x, y) \in d(\sigma^p \times \sigma^q) \\ \varphi_h|_{\sigma^p \times \sigma^q \times \{1\}} &= \frac{f(x) - h_1(y)}{\|f(x) - h_1(y)\|} \quad (x, y) \in \sigma^p \times \sigma^q. \end{aligned}$$

*Remarque.* Les points 1), 2) et 3) ne font que reprendre la proposition 2. Le point nouveau est le 4).

Avant la démonstration, établissons le lemme suivant, qui est assez semblable à la proposition 1.

**LEMME 1.** *Soit  $f: \sigma^p \rightarrow B^m$  le plongement standard envisagé précédemment (démonstration de la proposition 1). Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux plongements propres de  $\sigma^q$  dans  $\overline{B^m - N}$ , qui étendent  $g|_{\dot{\sigma}^q}$ . Soit  $g_3: S^q \rightarrow B^m$  l'application semi-linéaire dont la restriction à l'hémisphère Nord est égale à  $g_1$  et dont la restriction à l'hémisphère Sud est égale à  $g_2$ . Soit  $g_4: B^{q+1} \rightarrow B^m$  une application semi-linéaire qui soit une extension de  $g_3$ , telle que  $g_4(\dot{B}^{q+1}) \subset \dot{B}^m$ . (Il est clair que  $g_4$  n'est en général pas un plongement. De plus,  $g_4(B^{q+1})$  peut très bien rencontrer  $N$ ). Soit  $\beta \in \pi_q(S^{m-p-1})$  la classe d'homotopie de l'application*

$g_3 \circ r: S^q \rightarrow S^{m-p-1}$ . Soit  $\gamma \in \pi_{p+q}(S^{m-1})$  la classe d'homotopie de l'application  $c_{f,g_4}: d(\sigma^p \times B^{q+1}) \rightarrow S^{m-1}$  définie par:

$$c(x, y) = \frac{f(x) - g_4(y)}{\|f(x) - g_4(y)\|} \quad (x, y) \in d(\sigma^p \times B^{q+1}).$$

Alors:

$$(-1)^{m-p} E^p \beta = \gamma.$$

### Preuve du lemme 1

Désignons par  $g_5: B^{q+1} \rightarrow B^m$  l'extension radiale de  $r \circ g_3: S^q \rightarrow S^{m-p-1}$ . On vérifie facilement que l'application  $c_{f,g_4}$  est homotope à l'application  $c_{f,g_5}$ . Le reste se démontre sans difficultés, comme pour la proposition 1.

Ceci achève la démonstration du lemme 1.

### Preuve de la proposition 3

Soit  $\eta^q$  un  $q$ -simplexe appartenant à  $S^{m-1} - (S^{m-1} \cap N)$ . Il est clair que tout élément de  $\pi_q(\overline{B^m - N})$  peut être représenté par une application semi-linéaire de  $S^q$  dans  $\overline{B^m - N}$ , dont la restriction à l'hémisphère Nord soit un homéomorphisme semilinéaire sur  $\eta^q$ .

D'autre part, comme  $I(g, f) = 0$ ,  $g|_{\sigma^q}$  est homotope à un homéomorphisme semi-linéaire de  $\sigma^q$  sur  $\eta^q$ . En faisant usage de l'extension des homotopies et du théorème d'IRWIN cité plus haut, on voit que tout élément de  $\pi_q(\overline{B^m - N})$  peut être représenté par une application semi-linéaire de  $S^q$  (envisagée comme suspension de  $\sigma^q$ ) dans  $\overline{B^m - N}$ , telle que:

- 1) Sa restriction à l'équateur soit égale à  $g|_{\sigma^q}$ .
- 2) Sa restriction à l'hémisphère Nord soit un plongement propre  $G'$ , fixe (c'est-à-dire le même pour tous les éléments de  $\pi_q(\overline{B^m - N})$ .)
- 3) Sa restriction à l'hémisphère Sud soit un plongement propre.

Soit  $h'_t$  une isotopie propre entre  $g$  et  $G'$  et soit  $\theta \in \pi_{p+q}(S^{m-1})$  l'élément déterminé par  $\varphi_{h'}$ .

D'après les théorèmes de suspension, on pourra trouver un élément  $\beta \in \pi_q(\overline{B^m - N})$  tel que  $(-1)^{m-p} E^p \beta = -\theta$  si  $q \leq 2(m-p-1)-1$ , ce qui est toujours vrai dans le domaine métastable.

Soit  $G$  la restriction à l'hémisphère Sud d'une application de  $S^q$  dans  $\overline{B^m - N}$ , du type décrit plus haut, et représentant  $\beta$ . Soit  $h''_t$  une isotopie propre reliant  $G'$  à  $G$ . L'isotopie  $h_t$  obtenue en effectuant  $h'_t$  puis  $h''_t$  est l'isotopie cherchée.

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.

**PROPOSITION 4.** Soit  $S^d$  une sphère semi-linéaire de dimension  $d$ . Soient  $S^a$  et  $S^b$  des sphères semi-linéaires de dimension  $a$  et  $b$  respectivement, plongées semi-linéairement dans  $S^d$ . Soit  $B^d$  une boule semi-linéaire de dimension  $d$ , contenue dans  $S^d$  et telle que:

1)  $B^d \cap S^a =$  une boule semi-linéaire  $B^a$ , plongée proprement dans  $B^d$ .

$B^d \cap S^b =$  une boule semi-linéaire  $B^b$ , plongée proprement dans  $B^d$ .

2)  $S^a \cap S^b \subset \dot{B}^d$ .

Posons  $dB^d = S^{d-1}$ ,  $dB^a = B^a \cap S^{d-1} = S^{a-1}$  et  $dB^b = B^b \cap S^{d-1} = S^{b-1}$ .

On suppose que  $d-3 \geq \max(a, b)$ .

Alors, on peut trouver une isotopie ambiante  $h_t$  de  $B^d$ , fixe sur  $S^{d-1}$ , telle que:

(i)  $h_1(B^a) \cap B^b = \emptyset$ . Soit  $S^{*a} = (S^a - B^a) \cup h_1(B^a)$

On a:  $S^{*a} \cap S^b = \emptyset$

(ii)  $S^{*a}$  et  $S^b$  soient le bord de boules plongées proprement dans  $B^{d+1}$  et qui n'intersectent pas. En particulier, les coefficients d'enlacement de  $S^{*a}$  et  $S^b$  dans  $S^d$  seront nuls.

#### Preuve de la proposition 4

Nous allons choisir pour  $S^d$  le modèle suivant:  $S^0 \subset R^1$  est composée des points  $\{+1\}$  et  $\{-1\}$ . Par récurrence, à l'aide du plongement standard  $R^m \subset R^{m+1}$ ,  $S^{m-1}$  est contenue dans  $R^{m+1}$ ,  $S^m \subset R^{m+1}$  sera alors la suspension de  $S^{m-1}$ , de sommets  $(0, 0, \dots, 0, +1)$  et  $(0, 0, \dots, 0, -1)$ .

Par homogénéité des variétés semi-linéaires {GUGENHEIM a)}, ou par les théorèmes de ZEEMAN, notes de l'IHES chap. 3, on peut supposer que  $B^d$  est l'hémisphère «droit» de  $S^d$ , c'est-à-dire l'intersection de  $S^d$  avec le demi-espace  $x_1 \geq 0$ .

En appliquant plusieurs fois les théorèmes de «unknotting balls and spheres» de ZEEMAN, on voit sans difficulté que l'on peut supposer que  $S^b$  est la sphère standard de dimension  $b$ , c'est-à-dire l'intersection avec  $S^d$  du plan  $x_{b+2} = x_{b+3} = \dots = x_{d+1} = 0$ .

Soient

$$B'^a = \overline{S^a - B^a} \quad B'^b = \overline{S^b - B^b} \quad B'^d = \overline{S^d - B^d}.$$

Par hypothèse,  $B'^a \cap B'^b = \emptyset$ . De plus,  $B'^a$  et  $B'^b$  sont plongées proprement dans  $B'^d$ . Désignons par  $B^{*a}$  la boule semi-linéaire contenue dans  $B^d$ , symétrique de  $B'^a$  par rapport au plan  $x_1 = 0$ .

Il est clair que  $B^{*a} \cap B^b = \emptyset$ , et donc, si l'on pose  $S^{*a} = B'^a \cup B^{*a}$ , on aura  $S^{*a} \cap S^b = \emptyset$ . On voit maintenant facilement que l'on peut trouver dans la boule  $B^{d+1}$  de bord  $S^d$ , des boules  $B^{*a+1}$  et  $B^{b+1}$ , de bord  $S^{*a}$  et respectivement  $S^b$ , qui ne s'intersectent pas.

Le fait que l'on puisse passer de  $B^a$  à  $B^{*a}$  par isotopie de  $B^d$ , fixe sur le bord, découle immédiatement de [ZEEMAN e) cor. 1 to theorem 9].

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.

**PROPOSITION 5.** Soit  $S^k$  une sphère semi-linéaire de dimension  $k$ , et soit  $S^i \subset S^k$  une sous-sphère semi-linéaire de dimension  $i$ , avec  $k-i \geq 3$ . Soit  $f: S^j \rightarrow (S^k - S^i)$  une application continue.  $f$  détermine un élément  $\alpha \in \pi_j(S^{k-i-1})$ . Soit  $g: S^{j+1} \rightarrow (S^{k+1} - S^i)$  la suspension de l'application  $f$ .  $g$  détermine un élément  $\beta \in \pi_{j+1}(S^{k-i})$ .

Alors:  $E\alpha = \beta$ .

La preuve est laissée au lecteur.

### 5. Construction d'une application sans points doubles éloignés

Nous commençons dans ce paragraphe la démonstration du théorème 1.

Soit  $K^n$  un polyèdre (compact) de dimension  $n$ . Choisissons une triangulation  $T(K)$  de  $K$ . Posons:

$$\tilde{K} = K \times K - \Delta_K.$$

$\tilde{T}$  = Le sous-complexe (cellulaire) de  $T(K) \times T(K)$  constitué par les cellules de la forme  $\sigma \times \tau$ , avec  $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ,  $\sigma$  et  $\tau$  étant des simplexes de  $T(K)$ .

Il est « bien connu » que  $\tilde{T}$  est un rétracte par déformation de  $\tilde{K}$ , et ceci par une homotopie équivariante. Pour une démonstration correcte, voir [HU a)]. Sur cette question, on peut aussi se référer à [PATTY a)].

**PROPOSITION 6.** *Soit  $F: \tilde{K}^n \rightarrow S^{m-1}$  une application équivariante,  $2m \geq 3(n+1)$ . Alors, il existe une application semi-linéaire  $f_1: K^n \rightarrow R^m$ , qui ne possède aucun point double éloigné; c'est-à-dire telle que l'intersection de l'image par  $f_1$  de deux simplexes de  $T(K)$  disjoints soit vide.*

*De plus, soit  $\tilde{f}_1: \tilde{T} \rightarrow S^{m-1}$  définie par:*

$$\tilde{f}_1(x, y) = \frac{f_1(x) - f_1(y)}{\|f_1(x) - f_1(y)\|}.$$

*Soit  $i: \tilde{T} \rightarrow \tilde{K}$  l'inclusion naturelle. Alors, on peut construire  $f_1$  de telle façon que  $\tilde{f}_1$  soit homotope de façon équivariante à  $F \circ i$ .*

#### Preuve de la proposition 6

En raisonnant par récurrence sur les simplexes de  $T(K)$ , ordonnés par dimension croissante, on voit facilement que l'on peut supposer que:

a)  $K = L \cup \sigma^n$ ,  $\sigma^n$  étant le dernier simplexe de la triangulation  $T(K)$ .

b) Il existe une application semi-linéaire  $\phi': K \rightarrow R^m$  telle que:

1) La restriction de  $\phi'$  à chaque simplexe de la triangulation  $T(K)$  soit un plongement.

2) Les images par  $\phi'$  de deux simplexes de  $T(K)$  non adjacents soient disjointes.

3) Il existe un simplexe  $\sigma^s$  de  $T(K)$ , non adjacent à  $\sigma^n$ , tel que, si l'on désigne par  $P$  le sous-complexe de  $T(K)$  formé des simplexes qui précèdent  $\sigma^s$  (celui-ci non compris) et qui sont non adjacents à  $\sigma^n$  (N.B.:  $P$  peut être vide), on ait pour tout simplexe  $\tau \in P$ :

$$\phi'(\sigma^n) \cap \phi'(\tau) = \emptyset.$$

Posons:

$$J' = \tilde{T}(L) \cup \{(\sigma^n \times P) \cup (P \times \sigma^n)\} \subset \tilde{T}(K)$$

$$J = \tilde{T}(L) \cup \{(\sigma^n \times (P \cup \sigma^s)) \cup ((P \cup \sigma^s) \times \sigma^n)\} \subset \tilde{T}(K)$$

Définissons  $\psi': J' \rightarrow S^{m-1}$  par:

$$\psi'(x, y) = \frac{\phi'(x) - \phi'(y)}{\|\phi'(x) - \phi'(y)\|}.$$

Cette définition a un sens en vertu des hypothèses précédentes.

4)  $\psi' = F|J'$ .

Le pas principal de la démonstration par récurrence est contenu dans l'affirmation suivante:

*Affirmation:* On peut modifier,  $\phi'$  en une application  $\phi$ , égale à  $\phi'$  sur  $L$ , jouissant toujours des propriétés 1) et 2), et telle que:

3bis)  $\bar{\phi}(\sigma^n) \cap (\tau) = \emptyset$  pour tout simplexe  $\tau$  appartenant à  $P \cup \sigma^s$ .

On définit  $\psi: J \rightarrow S^{m-1}$  par:

$$\psi(x, y) = \frac{\phi(x) - \phi(y)}{\|\phi(x) - \phi(y)\|}$$

4bis)  $\psi$  soit homotope de façon équivariante à  $F|J$ .

*Remarque.* La construction de l'application  $f_1$  sans points doubles éloignés sera évidemment terminée avec  $\sigma^s$  = le dernier simplexe de  $T(K)$  non adjacent à  $\sigma^n$ .

La démonstration de l'affirmation repose essentiellement sur la technique des coefficients d'intersection et sur le lemme suivant:

LEMME 2. *On peut construire dans  $R^m$  une boule semi-linéaire  $B^m$ , dont l'intersection avec  $\phi'(\sigma^n)$  est une boule semi-linéaire de dimension  $n$ , plongée proprement dans  $B^m$ , et dont l'intersection avec  $\phi'(\sigma^s)$  est une boule semi-linéaire de dimension  $s$ , plongée proprement dans  $B^m$  et telle que:*

$$\phi'(\sigma^n) \cap \phi'(\sigma^s) \subset \hat{B}^m$$

$$\hat{B}^m \cap P = \emptyset.$$

*Preuve de l'affirmation à l'aide du lemme 2*

Soit  $B^m$  la boule semi-linéaire construite dans le lemme 2. Soit  $f: \sigma^s \rightarrow B^m$  un homéomorphisme semi-linéaire de  $\sigma^s$  sur  $B^m \cap \phi'(\sigma^s)$ . Soit  $g: \sigma^n \rightarrow B^m$  un homéomorphisme semi-linéaire de  $\sigma^n$  sur  $B^m \cap \phi'(\sigma^n)$ . D'après le lemme 2,  $f$  et  $g$  jouissent bien des propriétés nécessaires pour pouvoir appliquer la théorie développée au no. 4.

Par hypothèse de récurrence, l'application  $a_{f,g}: d(\sigma^s \times \sigma^n) \rightarrow S^{m-1}$  est homotope à zéro. En effet, considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 d(\sigma^s \times \sigma^n) & \xrightarrow{h} & d[(\phi'^{-1}f(\sigma^s)) \cap \sigma^s \times (\phi'^{-1}g(\sigma^n)) \cap \sigma^n] \\
 a_{f,g} \downarrow & & \downarrow \psi'|d[\dots] \\
 & S^{m-1} &
 \end{array}$$

$h$  désignant l'homéomorphisme semi-linéaire évident. Par hypothèse,  $\psi'|d[\dots]$  est homotope à  $F|d[\dots]$ .  $F$  étant définie sur  $\tilde{K}$ ,  $a_{f,g}$  est homotope à zéro.

D'après la proposition 1, on a  $E^s I(g, f) = 0$ . En vertu des théorèmes classiques de suspension,  $E^s$  est injectif si  $n-1 < 2(m-s-1)-1$ , ce qui est toujours le cas dans le domaine métastable. En fait, c'est là un des points essentiels où l'inégalité  $2m \geq 3(n+1)$  est nécessaire.

Les propriétés de la boule  $B^m$  et la proposition 2 assurent la validité de 3bis).

La proposition 3 assure la validité de 4bis).

Ceci achève la démonstration de l'affirmation, et donc de la proposition 6.

### Preuve du lemme 2

a) La preuve du lemme 2 repose en majeure partie sur une partie assez banale du théorème «d'engulfing» de ZEEMAN. Voir [ZEEMAN d) lemme 2] et [ZEEMAN e) chap. 7].

LEMME 3. Soit  $B^z$  une boule semi-linéaire de dimension  $z$ . Soit  $Y^y$  un sous-polyèdre  $\subset \mathring{B}^z$ . Alors il existe un sous-polyèdre  $C \subset \mathring{B}^z$ , de dimension  $\leq (y+1)$ , contenant  $Y$ , et collapsible.

La preuve de ce lemme, très facile, est laissée au lecteur. Elle utilise essentiellement le fait que l'on peut réordonner les collapsés en dimension décroissante.

Par hypothèse de récurrence:

$$\phi'(\dot{\sigma}^n) \cap \phi'(\sigma^s) = \emptyset = \phi'(\sigma^n) \cap \phi'(\dot{\sigma}^s).$$

Soit  $Q = \phi'(\sigma^n) \cap \phi'(\sigma^s)$ . Par position générale, [ZEEMAN e) chap. 6], on peut modifier  $\phi'$  de telle façon que les hypothèses de récurrence soient encore satisfaites et que  $\dim Q \leq n+s-m$ .

Pour simplifier les notations, posons:

$$\phi'(\sigma^n) = B^n \quad \text{et} \quad \phi'(\sigma^s) = B^s.$$

b) D'après ce qui précède,  $Q \subset \mathring{B}^n$ . On applique le lemme 3 en prenant:  $B^z = B^n$  et  $Y = Q$ .

Appelons  $Q_1$  le polyèdre collapsible que l'on obtient. On a  $\dim Q_1 \leq n+s-m+1$ .

c) D'après ce qui précède, on a aussi  $Q \subset \mathring{B}^s$ . On applique à nouveau le lemme 3 en posant:  $B^z = B^s$  et  $Y = Q$ . On obtient un polyèdre collapsible  $Q_2$  et on a  $\dim Q_2 \leq n+s-m+1$ .

d) Par hypothèse de récurrence,  $B^n \cap P = \emptyset$ . Donc  $Q_1 \cap P = \emptyset$ . En revanche, il se

peut très bien que  $B^s \cap P = T \neq \emptyset$ . Mais par position générale, on peut s'arranger pour que  $\dim T \leq 2s - m$ .

Par position générale,  $T \cap Q_2 = \emptyset$  si  $(2s - m) + (n + s - m + 1) < s$  ce qui est toujours le cas dans le domaine métastable.

e) Posons  $Q_3 = Q_1 \cup Q_2$ . On a  $\dim Q_3 \leq n + s - m + 1$ . On applique encore le lemme d'engulfing en prenant :

$B^z$  = une boule semi-linéaire de dimension  $m$  de  $R^m$ , contenant  $Q_3$  dans son intérieur.

$$Y = Q_3.$$

On obtient un polyèdre collapsible  $Q_4$  et l'on a  $\dim Q_4 \leq n + s - m + 2$ .

f) Par position générale (plus précisément [ZEEMAN e) chap. 6 theorem 15]), on pourra s'arranger pour que l'intersection de  $Q_4$  avec  $B^n$  soit exactement  $Q_1$  si :

$n + (n + s - m + 2) < m$ , ce qui est toujours le cas dans le domaine métastable.

g) De façon semblable, on pourra s'arranger pour que l'intersection de  $Q_4$  avec  $B^s$  soit exactement  $Q_2$ .

h) Encore par position générale, on pourra s'arranger pour que  $Q_4$  ne rencontre pas  $P$  si

$s + (n + s - m + 2) < m$ , ce qui est toujours le cas dans le domaine métastable.

k) Il est clair maintenant que l'on peut trouver une triangulation suffisamment fine de  $R^m$  pour que :

(i)  $Q_4$  soit un sous-complexe «full» dans cette triangulation.

(ii) Le premier voisinage dérivé de  $Q_1$  dans  $B^n$  ne rencontre pas  $dB^n$ .

(iii) Le premier voisinage dérivé de  $Q_2$  dans  $B^s$  ne rencontre pas  $dB^s$ .

(iv) Le premier voisinage dérivé de  $Q_4$  dans  $R^m$  ne rencontre pas  $P$ .

Le premier voisinage dérivé de  $Q_4$  dans cette triangulation sera la boule  $B^m$  cherchée.

Ceci achève la démonstration du lemme 2.

Nous allons clore ce paragraphe en énonçant un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une immersion soit régulièrement homotope à un plongement. La démonstration découle immédiatement des techniques développées dans ce paragraphe.

Posons auparavant quelques définitions : Une application semi-linéaire  $f: K^n \rightarrow R^m$  est dite une immersion semi-linéaire si elle est localement injective. Une homotopie régulière est une application semi-linéaire  $F: K \times I \rightarrow R^m \times I$ , commutant avec les projections sur  $I$ , et qui est une immersion pour chaque valeur du paramètre. Remarquons enfin que si  $f$  est une immersion, il existe un voisinage équivariant  $V$  de  $\Delta_K$  dans  $K \times K$ , tel que l'application  $\tilde{f}: (V - \Delta_K) \rightarrow S^{m-1}$  définie ci-dessous ait un sens :

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

**THÉORÈME 8.** *Soit  $g: K^n \rightarrow R^m$  une immersion, et soit  $2m \geq 3(n+1)$ . Supposons qu'il existe une application équivariante  $F: \tilde{K} \rightarrow S^{m-1}$  telle que  $F|(V - \Delta_K)$  soit homotope de façon équivariante à  $\bar{g}$ . Alors  $g$  est régulièrement homotope à un plongement  $f$  tel que  $\tilde{f}$  est homotope de façon équivariante à  $F$ .*

## 6. Elimination des points doubles proches

### COLLAPSES ADMISSIBLES

Dans sa thèse, M. C. IRWIN a introduit une précision à la notion de collapse, qui intervient lorsque l'on travaille avec des variétés à bord. Voir [IRWIN a) et b)]. Soit  $M$  une variété semi-linéaire, de bord  $dM$ . Soit  $X$  un polyèdre contenu dans  $M$  et soit  $Y$  un sous-polyèdre de  $X$ . On dit qu'il y a un collapse élémentaire de  $X$  sur  $Y$ , s'il existe une boule semi-linéaire  $B^n \subset X$  et une face  $B^{n-1}$  de  $B^n$  telles que :

$$Y \cup B^n = X \quad Y \cap B^n = B^{n-1}.$$

Soit  $B'^{n-1} = dB^n - \dot{B}^{n-1}$ . On dit que ce collapse élémentaire est admissible dans  $M$  si :

$$\dot{B}^n \cup \dot{B}'^{n-1} \subset \dot{M} \quad \text{ou} \quad \dot{B}^n \cup \dot{B}'^{n-1} \subset dM.$$

Plus généralement, si l'on peut passer de  $X$  à  $Y$  par une suite finie de collapses élémentaires admissibles dans  $M$ , on dit que  $X$  se collapse sur  $Y$  de façon admissible dans  $M$ . On note ce fait :  $X \searrow^A Y$ .

Une raison essentielle de l'intérêt de cette notion est un théorème «d'engulfing admissible» dû à IRWIN. Voir [IRWIN a) lemme p. 26], [IRWIN b) theorem 4.3] et aussi [ZEEMAN e) chap. 7]. Nous utiliserons seulement le lemme suivant, dont la démonstration est assez simple.

**LEMME 4.** *Soit  $D^k$  une boule semi-linéaire de dimension  $k$ , et soit  $D^{k-1}$  une face de  $D^k$ . Soit  $X^x \subset D^k$  un sous-polyèdre de  $D^k$  tel que  $X^x \cap dD^k \subset \dot{D}^{k-1}$ . Alors, il existe un sous-polyèdre  $C$  de  $D^k$ , qui jouit des propriétés suivantes :*

- (i)  $C$  se collapse de façon admissible dans  $D^k$ , c'est-à-dire :  $C \searrow^A \text{point}$ .
- (ii)  $C \supset X$ .
- (iii)  $\dim C \leq x+1$ .
- (iv)  $C \cap dD^k \subset \dot{D}^{k-1}$ .
- (v) Si  $\dim(X \cap dD^k) < x$ , alors  $\dim(C \cap dD^k) < x+1$ .

### UN THÉORÈME DE LICKORISH

Si  $X$  et  $Y$  sont des polyèdres, nous désignerons par  $\text{Iso}(X, Y)$  l'ensemble des classes d'isotopie ambiante, semi-linéaire, de plongements de  $X$  dans  $Y$ .

$EX$  désignera la suspension du polyèdre  $X$ .



Par suspension, on obtient une application

$$\text{Iso}(X^x, S^n) \rightarrow \text{Iso}(EX, S^{n+1}).$$

Il n'est pas difficile de voir que cette application est toujours injective, utilisant [HUDSON-ZEEMAN b) theorem 2].

THÉORÈME (LICKORISH). Cette application est bijective si  $n - x \geq 3$ .

Pour la démonstration voir [LICKORISH a)].

Nous revenons maintenant à la démonstration du théorème 1. En ordonnant les simplexes de  $T(K)$  en dimension croissante, et en raisonnant par induction, on voit que le théorème 1 découlera de la proposition suivante; où l'on suppose  $2m \geq 3(n+1)$ .

PROPOSITION 7. Soit  $K^n = L \cup \sigma^p$ ,  $p \leq n$ . Soit  $f_1: K \rightarrow R^m$ , une application semi-linéaire sans points doubles éloignés et telle que  $f_1|_L$  soit un plongement. Soit  $\sigma^q$  le premier simplexe de  $T(K)$  tel que  $f_1(\sigma^p) \cap f_1(\sigma^q) = f_1(\sigma^p \cap \sigma^q) \neq \emptyset$ . Alors, on peut modifier  $f_1$  en  $f_2$  telle que:

- 1)  $f_2$  n'ait pas de points doubles éloignés et  $f_2|_L$  soit un plongement.
- 2)  $\tilde{f}_2: \tilde{T} \rightarrow S^{m-1}$  soit homotope de façon équivariante à  $\tilde{f}_1$ .
- 3) Si  $\sigma^{q^1}$  est le premier simplexe de  $T(K)$  tel que  $f_1(\sigma^p) \cap f_1(\sigma^{q^1}) = f_1(\sigma^p \cap \sigma^{q^1}) \neq \emptyset$ , alors  $\sigma^q$  précède  $\sigma^{q^1}$ .

Le reste du paragraphe 6 est consacré à la démonstration de la proposition 7.

#### a) CONSTRUCTIONS PRÉLIMINAIRES

On a donc:

$$\sigma^p \cap \sigma^q = \sigma^r \neq \emptyset \quad \sigma^r \neq \sigma^p \quad \sigma^r \neq \sigma^q.$$

Choisissons une subdivision  $T'(K)$  de  $T(K)$  et une triangulation  $T(R^m)$  de  $R^m$ , pour lesquelles  $f_1$  est simpliciale. Subdivisons barycentriquement  $T(R^m)$  deux fois et prenons dans cette triangulation  $T''(R^m)$  le voisinage simplicial  $N$  de  $f_1(\sigma^r)$ , mod  $f_1(d\sigma^r)$ . Voir [HUDSON-ZEEMAN b)].  $N$  est une boule semi-linéaire de dimension  $m$ , contenant  $f_1(d\sigma^r)$  dans son bord.

Subdivisons  $T'(K)$  barycentriquement deux fois, obtenant ainsi une triangulation  $T''(K)$ .  $f_1$  étant non dégénérée,  $f_1: T''(K) \rightarrow T''(R^m)$  est simpliciale. Soit  $\eta^r$  un simplexe de dimension  $r$  de  $T''(K)|\sigma^r$ , contenu dans l'intérieur de  $\sigma^r$ . Soient:

$$v^{p-r-1} = \text{le link de } \eta^r \text{ dans } T''(K)|\sigma^p.$$

$$v^{q-r-1} = \text{le link de } \eta^r \text{ dans } T''(K)|\sigma^q.$$

Ce sont évidemment des boules semi-linéaires.

Soit  $S^{m-r-1}$  le link de  $f_1(\eta^r)$  dans  $T''(R^m)$ .  $S^{m-r-1}$  est une sphère semi-linéaire, de dimension  $(m-r-1)$ , contenue dans le bord  $dN$  de  $N$ , et ne rencontrant pas  $f_1(d\sigma^r)$ . En fait,  $dN$  est homéomorphe semi-linéairement au joint  $f_1(d\sigma^r) \cdot S^{m-r-1}$ .

D'autre part,  $f_1^{-1}(N) \cap \sigma^p$ , n'est pas autre chose que le voisinage simplicial de  $\sigma^r \bmod d\sigma^r$ , dans  $T''(K)|_{\sigma^p}$ . C'est un voisinage régulier dans  $T''(K)|_{\sigma^p}$  de  $\sigma^r \bmod d\sigma^r$ , rencontrant le bord de façon régulière. Voir [HUDSON-ZEEMAN b)]. De même pour  $f_1^{-1}(N) \cap \sigma^q$ , dans  $\sigma^q$ . Posons:

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(N) \cap \sigma^p &= B_1^p & f_1^{-1}(N) \cap \sigma^q &= B_1^q \\ \overline{\sigma^p - B_1^p} &= B_2^p & \overline{\sigma^q - B_1^q} &= B_2^q \\ B_1^p \cap B_2^p &= v^{p-1} & B_1^q \cap B_2^q &= v^{q-1}. \end{aligned}$$

Tous ces polyèdres sont des boules semi-linéaires. Il est clair que:

- 1)  $v^{p-r-1} \subset v^{p-1}$      $v^{q-r-1} \subset v^{q-1}$ .
  - 2)  $v^{p-1}$  est homéomorphe semi-linéairement au joint  $v^{p-r-1} \cdot d\sigma^r$ .  
 $v^{q-1}$  est homéomorphe semi-linéairement au joint  $v^{q-r-1} \cdot d\sigma^r$ .
  - 3)  $f_1^{-1}(S^{m-r-1}) \cap \delta^p = v^{p-r-1}$ .  $f_1^{-1}(S^{m-r-1}) \cap \sigma^q = v^{q-r-1}$ .
- Soit  $\hat{\eta}^r$  le barycentre de  $\eta^r$ . Posons:

$$\tau_1^{p-r} = \hat{\eta}^r \cdot v^{p-r-1} \quad \tau_1^{q-r} = \hat{\eta}^r \cdot v^{q-r-1}.$$

#### b) MODÈLE DÉCRIVANT LA SITUATION

Soit  $\mu^p$  un simplexe de dimension  $p$ . Soit  $\mu^r$  une face de  $\mu^p$ , avec  $0 \leq r \leq p-1$ . Soit  $\lambda^{p-r-1}$  la face de  $\mu^p$  opposée à  $\mu^r$ . Soit  $\hat{\mu}^r$  le barycentre de  $\mu^r$ , et soit  $\lambda^{p-r} = \hat{\mu}^r \cdot \lambda^{p-r-1}$ .

Envisageons maintenant la première subdivision barycentrique de  $\mu^p$ . Dans cette triangulation, soit  $D_1^p$  le voisinage simplicial de  $\mu^r$ , mod.  $d\mu^r$ . C'est un voisinage régulier de  $\mu^r \bmod d\mu^r$ , rencontrant le bord de façon régulière. Soient:

$$\begin{aligned} D_2^p &= \overline{\mu^p - D_1^p} & \omega^{p-1} &= D_1^p \cap D_2^p \\ \lambda_1^{p-r} &= \lambda^{p-r} \cap D_1^p & \lambda_2^{p-r} &= \lambda^{p-r} \cap D_2^p \\ \omega^{p-r-1} &= \lambda^{p-r} \cap \omega^{p-1}. \end{aligned}$$

En utilisant les théorèmes d'unicité des voisinages réguliers de {HUDSON-ZEEMAN b)}, il est facile de voir que l'on peut trouver un homéomorphisme semi-linéaire  $h: \mu^p \rightarrow \sigma^p$ , surjectif, tel que:

- 1)  $h(\mu^r) = \sigma^r$
- 2)  $h(\lambda^{p-r-1}) = \tau^{p-r-1}$  (face de  $\sigma^p$  opposée à  $\sigma^r$ ).
- 3)  $h(\hat{\mu}^r) = \hat{\eta}^r$
- 4)  $h(D_1^p) = B_1^p$      $h(D_2^p) = B_2^p$      $h(\omega^{p-1}) = v^{p-1}$ .
- 5)  $h(\lambda_1^{p-r}) = \tau_1^{p-r}$      $h(\omega^{p-r-1}) = v^{p-r-1}$ .

Choisissons un tel  $h$  et posons:

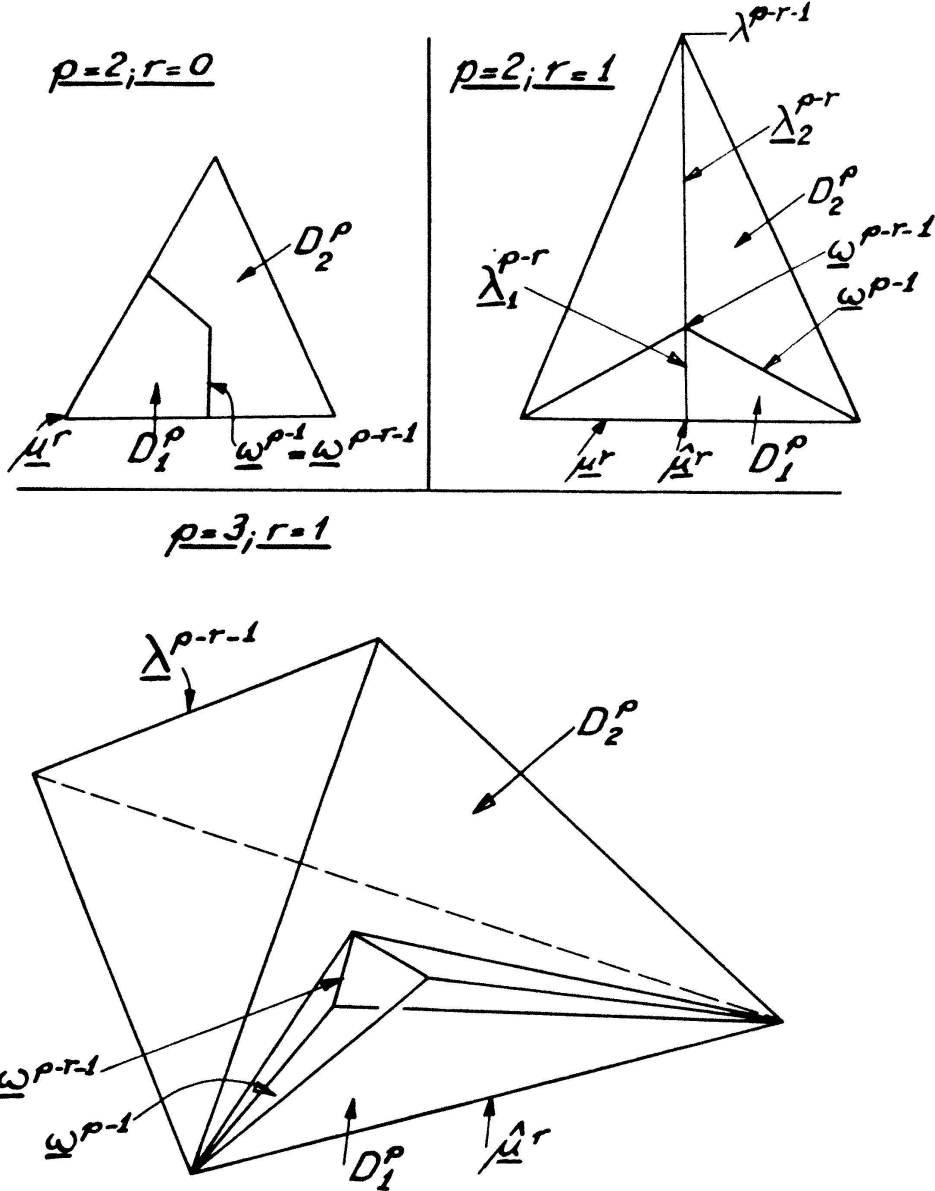
$$\tau^{p-r} = h(\lambda^{p-r}) \quad \tau_2^{p-r} = h(\lambda_2^{p-r}).$$

Enfin, posons  $S^{p-r-2} = f_1(dv^{p-r-1})$ . Si  $p-r-1=0$ , nous conviendrons que  $S^{p-r-2}$  est vide. De même, posons  $S^{q-r-2} = f_1(dv^{q-r-1})$ .

D'après les hypothèses sur  $f_1$  et d'après le choix de  $\sigma^p$  et  $\sigma^q$ , on a :

$$\begin{aligned} S^{p-r-2} &\subset S^{m-r-1} & S^{q-r-2} &\subset S^{m-r-1} \\ f_1(v^{p-r-1}) \cap S^{q-r-2} &= \emptyset & f_1(v^{q-r-1}) \cap S^{p-r-2} &= \emptyset \end{aligned}$$

Le lecteur est invité à se reporter aux figures.



### c) CONSTRUCTION D'UNE CERTAINE BOULE SEMI-LINÉAIRE

LEMME 5. On peut construire une boule  $J^m$ , située dans  $R^m - \dot{N}$  et jouissant des propriétés suivantes :

- Son intersection avec  $dN$  est une boule semi-linéaire  $J^{m-1}$ , située dans le bord de  $J^m$ .
- Son intersection avec  $f_1(\tau_2^{q-r})$  est une boule de dimension  $(q-r)$ , plongée proprement.
- Son intersection avec  $f_1(B_2^p)$  est une boule de dimension  $p$ , plongée proprement.
- $J^m$  et  $J^{m-1}$  ne contiennent pas l'image par  $f_1$  des simplexes de  $T(K)$  non adjacents à

$\sigma^p$ , ni  $f_1(Q)$ . Par définition,  $Q$  est l'ensemble des simplexes de  $st(\sigma^r, T(K))$  qui précèdent  $\sigma^q$ . ( $\dim Q \leq q$ ).

e)  $f_1(\tau_2^{q-r}) \cap f_1(B_2^p) \subset J^m \cup J^{m-1}$ .

f) Il existe une boule  $B^{m-r-1} \subset J^{m-1} \cap S^{m-r-1}$  telle que :

- 1)  $B^{m-r-1} \cdot f_1(d\sigma^r) \subset J^{m-1}$ .
- 2)  $f_1(v^{p-r-1}) \cap f_1(v^{q-r-1}) \subset \dot{B}^{m-r-1}$ .
- 3)  $B^{m-r-1} \cap f_1(v^{p-r-1}) = \text{boule } B^{p-r-1} \text{ plongée proprement.}$
- 4)  $B^{m-r-1} \cap f_1(v^{q-r-1}) = \text{boule } B^{q-r-1} \text{ plongée proprement.}$

*Preuve du lemme 5*

(i) Envisageons la variété semi-linéaire  $R^m - \dot{N}$ , de bord  $dN$ .  $f_1|_{\tau_2^{q-r}}$  est un plongement de  $\tau_2^{q-r}$  dans cette variété. Par construction,  $f_1(\tau_2^{q-r}) \cap dN = f_1(v^{q-r-1})$ . De même,  $f_1|_{B_2^p}$  est un plongement semi-linéaire de  $B_2^p$  dans  $R^m - \dot{N}$ . On a :  $f_1(B_2^p) \cap dN = f_1(v^{p-1})$ . Par position générale, (voir [ZEEMAN e) theorem 15, corollary 3]) on a :

$$\dim \{f_1(B_2^p) \cap f_1(\tau_2^{q-r})\} \leq p + q - r - m,$$

et

$$\dim \{f_1(B_2^p) \cap f_1(\tau_2^{q-r}) \cap dN\} \leq p + q - r - m - 1.$$

(ii) Appliquons maintenant le lemme 4 à la situation suivante :

$$D^k = f_1(\tau_2^{q-r}) \quad D^{k-1} = f_1(v^{q-r-1}) \quad X^x = f_1(B_2^p) \cap f_1(\tau_2^{q-r})$$

On a  $x \leq p + q - r - m$ .

On vérifie sans peine que, par construction, les hypothèses du lemme 4 sont satisfaites. Soit  $C_1$  un polyèdre collapsible de façon admissible, jouissant des propriétés (i) à (v) du lemme 4. On a :

$$\dim C_1 \leq p + q - r - m + 1 \quad \text{et} \quad \dim \{C_1 \cap f_1(v^{q-r-1})\} \leq p + q - r - m.$$

(iii) Appliquons une seconde fois le lemme 4, à la situation suivante :

$$D^k = f_1(B_2^p) \quad D^{k-1} = f_1(v^{p-1}) \quad X^x = f_1(B_2^p) \cap f_1(\tau_2^{q-r})$$

On a  $x \leq p + q - r - m$ .

Soit  $C_2$  un polyèdre collapsible de façon admissible, jouissant des propriétés (i) à (v) du lemme 4. On a :

$$\dim C_2 \leq p + q - r - m + 1 \quad \text{et} \quad \dim \{C_2 \cap f_1(v^{p-1})\} \leq p + q - r - m.$$

(iv) Utilisons maintenant le lemme 3 pour la situation suivante :

$B^z =$  Une boule de dimension  $(m-r-1)$ , contenue dans  $S^{m-r-1}$ , et contenant  $Y = \{C_2 \cap f_1(v^{p-1})\} \cup \{C_1 \cap f_1(v^{q-r-1})\}$ . Soit  $C_3$  un polyèdre collapsible situé dans  $S^{m-r-1}$ , contenant  $Y$ , obtenu en utilisant le lemme 3.

On a  $\dim C_3 \leq p + q - r - m + 1$ .

(v) Appliquons une troisième fois le lemme 4, à la situation suivante:

$D^k = R^m - \dot{N}$ , compactifié, si l'on veut, en ajoutant le «point à l'infini.»

$D^{k-1} = dN -$  (un voisinage d'un point ne rencontrant pas  $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .)

$$X^x = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

On a  $x \leq p + q - r - m + 1$ .

Soit  $C_4$ : polyèdre collapsible de façon admissible, jouissant des propriétés (i) à (iv).

On a:

$$\dim C_4 \leq p + q - r - m + 2.$$

(vi) Rappelons que  $Q$  est l'ensemble des simplexes de  $st(\sigma^r, T(K))$  qui précèdent  $\sigma^q$ .  $\dim Q \leq q$ .

Soit  $V = lk(\eta^r, T''(K)|Q)$ .  $\dim V \leq q - r - 1$ .

On a, d'après les constructions du début de ce paragraphe,  $f_1^{-1}(S^{m-r-1}) \cap Q = V$ .

Par position générale dans  $S^{m-r-1}$ , on voit que, dans le domaine métastable, on pourra toujours s'arranger pour que:

$$C_3 \cap f_1(V) = \emptyset.$$

Un calcul analogue montre que l'on peut également s'arranger pour que:

$$C_3 \cap f_1(v^{p-1}) = C_2 \cap f_1(v^{p-1}).$$

$$C_3 \cap f_1(v^{q-r-1}) = C_1 \cap f_1(v^{q-r-1}).$$

(vii) Par position générale dans  $R^m - \dot{N}$ , on pourra obtenir que:

1)  $C_4$  ne rencontre pas  $f_1(Q)$ , ni l'image par  $f_1$  des simplexes de  $T(K)$  non adjacents à  $\sigma^p$ .

2)  $C_4 \cap f_1(\tau_2^{q-r}) = C_1$      $C_4 \cap f_1(B_2^p) = C_2$ .

(viii) Triangulons  $R^m - \dot{N}$  de telle façon que  $C_4$  soit un sous-complexe de cette triangulation. Prenons le deuxième voisinage dérivé barycentrique de  $C_4$ . Par construction, ce voisinage est une boule semi-linéaire  $E^m$  de dimension  $m$ , dont l'intersection avec  $dN$  est une boule semi-linéaire  $E^{m-1}$ . On a:

$E^m \cap f_1(v^{p-1}) =$  une boule semi-linéaire  $E^{p-1}$ , située à l'intérieur de  $f_1(v^{p-1})$ .

Prenons dans  $R^m - \dot{N}$  un voisinage dérivé suffisamment fin de  $f_1(v^{p-1}) - \dot{E}^{p-1} \bmod f_1(dv^{p-1})$ . La réunion de ce voisinage dérivé avec  $E^m$  fournit la boule semi-linéaire  $J^m$ .

Ceci achève la démonstration du lemme 5.

d) UNE PREMIÈRE MODIFICATION DE L'APPLICATION  $f_1$

LEMME 6. On peut modifier l'application  $f_1$  en une application  $f'_2$ , telle que les bonnes propriétés de  $f_1$  (cf. proposition 7, énoncé) soient conservées et que, de plus:

1)  $f'_2(B_1^p) \cap f'_2(B_1^q) = f'_2(\sigma^r)$ .

2)  $f'_2(B_2^p) \cap f'_2(\tau_2^{q-r}) = \emptyset$ .

*Preuve du lemme 6*

Soit  $Q^+ = Q \cup \sigma^q$  et soit  $V^+ = V \cup v^{q-r-1}$ .

D'après le théorème de LICKORISH énoncé au début de ce paragraphe, on peut, par une isotopie ambiante de  $R^m$ , s'arranger pour que :

$$f_1(Q^+) \cap dN = f_1(V^+) \cdot f_1(d\sigma^r), \quad f_1(dv^{p-1}) = f_1(dv^{p-r-1}) \cdot f_1(d\sigma^r)$$

si l'on envisage  $dN$  comme le joint  $S^{m-r-1} \cdot f_1(d\sigma^r)$ .

Appliquons la proposition 4 en prenant :

$$\begin{aligned} S^d &= dJ^m, & S^a &= d\{f_1(B_2^p) \cap J^m\}, & S^b &= d\{f_1(\tau_2^{q-r}) \cap J^m\} \\ B^d &= B^{m-r-1} \cdot f_1(d\sigma^r). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que toutes les hypothèses de la proposition 4 sont satisfaites. En conséquence, nous pouvons modifier le plongement de  $B^{p-r-1} \cdot f_1(d\sigma^r)$  en maintenant le bord fixe, de telle façon que les deux sphères  $S^a$  et  $S^b$  aient des coefficients d'enlacement nuls dans  $S^d$ .

D'après la proposition 5, on pourra choisir comme nouveau plongement de  $B^{p-r-1} \cdot f_1(d\sigma^r)$ , le joint par  $f_1(d\sigma^r)$  d'un plongement de  $B^{p-r-1}$  dans  $B^{m-r-1}$  si le groupe d'homotopie  $\pi_{p-r-1}(S^{m-r-2-(q-r-2)-1}) = \pi_{p-r-1}(S^{m-q-1})$  est stable, ce qui est toujours le cas dans le domaine métastable.

Définissons un nouveau plongement de  $\sigma^p$  de la façon suivante :

- a) Sur  $d\sigma^p$ , le plongement sera le même que  $f_1|_{d\sigma^p}$ .
- b) Sur  $B_1^p$ , on prend l'extension cônica sur  $f_1(\hat{h}^r)$  du nouveau plongement de  $v^{p-1}$  que l'on vient de définir.

Ceci implique que  $\sigma^p$  et  $\sigma^q$  n'auront pas de points de branchement à l'intérieur de  $\sigma^r$ .

- c) On choisit sur  $B_2^p$  un plongement qui ne rencontre pas  $f_1(\tau_2^{q-r})$ . Ceci est possible grâce à la proposition 4.

D'après la construction elle-même, on peut passer de l'ancien au nouveau plongement de  $\sigma^p$  par une isotopie de  $R^m$ , fixe en dehors de  $J^m \cup \{J^{m-1} \cdot f_1(\hat{h}^r)\}$ . Cette isotopie fournit un nouveau plongement de  $st(\sigma^p, T(K))$ .

On définit  $f'_2: K \rightarrow R^m$  comme étant égal à ce nouveau plongement sur  $st(\sigma^p, T(K))$  et égal à  $f_1$  en dehors.

Ceci achève la démonstration du lemme 6.

## e) CONSTRUCTION DE L'APPLICATION CHERCHÉE

Nous allons achever la construction de l'application  $f_2$  annoncée dans la proposition 7 à l'aide d'une démonstration par récurrence. Pour cela, nous revenons à la nomenclature et au modèle du début de ce paragraphe.

Nous envisageons la subdivision de  $\sigma^p$  que l'on obtient en prenant l'image par l'ho-

méomorphisme semi-linéaire  $h$  de la première subdivision barycentrique du simplexe modèle  $\mu^p$ . Nous désignerons par  $\delta$  l'image par  $h$  de tels simplexes. Nous procédons de même avec  $\sigma^q$  et nous désignons les images par un homéomorphisme analogue à  $h$  des simplexes de la première subdivision barycentrique de  $\mu^q$  par  $\varepsilon$ .

Par construction de  $f'_2$ , il est clair que si  $\delta \subset B_1^p$ , alors:  $f'_2(\delta) \cap f'_2(\sigma^q) = f'_2(\delta \cap \sigma^q)$ .

De même, si  $\varepsilon \subset B_1^q$ , on a:  $f'_2(\varepsilon) \cap f'_2(\sigma^p) = f'_2(\varepsilon \cap \sigma^p)$ .

Supposons maintenant que  $\delta \subset B_2^p$  soit un simplexe dont l'image par  $f'_2$  rencontre l'image par  $f'_2$  d'un simplexe  $\varepsilon \subset B_2^q$ , non adjacent à  $\delta$ . Nous allons indiquer un procédé qui permet de pousser cette intersection dans un simplexe  $\varepsilon' \subset B_2^q$ , adjacent à  $\delta$ . Pour commencer, nous pouvons supposer inductivement que l'intersection de  $f'_2(\varepsilon)$  avec  $f'_2(\delta)$  se trouve dans  $f'_2(\hat{\varepsilon})$ , et dans  $f'_2(\hat{\delta})$ , (grâce à la deuxième partie du lemme 6). En utilisant la même technique que dans le lemme 2, nous pouvons trouver une boule  $B^m$  de dimension  $m$  dans  $R^m$ , qui rencontre  $f'_2(\varepsilon)$  et  $f'_2(\delta)$  selon des boules plongées proprement dans  $B^m$ , situées dans  $f'_2(\hat{\varepsilon})$  et  $f'_2(\hat{\delta})$ , et contenant l'intersection de  $f'_2(\varepsilon)$  avec  $f'_2(\delta)$  dans son intérieur. Par position générale, (cf. la démonstration du lemme 2), nous pouvons nous arranger pour que  $B^m$  évite tout ce qu'il est souhaitable d'éviter. Ensuite, on peut choisir un chemin dans  $f'_2(\varepsilon)$  qui relie le bord de la boule  $B^m$  à une face de dimension  $(\dim \varepsilon - 1)$ , adjacente à un simplexe  $\varepsilon' \subset B_2^q$ , lui-même adjacent à  $\delta$ . En pipant l'intersection le long d'un petit voisinage régulier du chemin, on obtient la situation désirée.

En deux mots, le «piping» consiste, dans notre cas, à effectuer l'opération suivante: On a une boule  $D^m$  contenant une boule  $D^r$  et une boule  $D^s$  plongées proprement, avec  $dD^r \cap dD^s = \emptyset$ .

De plus  $D^r$  = la réunion de deux boules  $D_1^r$  et  $D_2^r$ , collées le long d'une face commune.

On a:  $T = D^r \cap D^s \subset \hat{D}_2^r$ .

Il est clair que l'on peut trouver une isotopie ambiante de  $D^r$ , fixe sur le bord  $dD^r$ , amenant  $T$  dans  $\hat{D}_1^r$ .

Comme on est en codimension  $\geq 3$ , le «unknotting balls» de ZEEMAN implique que l'on peut étendre cette isotopie en une isotopie ambiante de  $D^m$ , fixe sur  $dD^m$ .

Ici,  $D^m = B^m \cup$  un voisinage régulier du chemin.

$$D_1^r = D^m \cap f'_2(\varepsilon') \quad D_2^r = D^m \cap f'_2(\varepsilon) \quad D^s = f'_2(\delta).$$

Ainsi, l'intersection de  $f'_2(\sigma^p)$  avec  $f'_2(\sigma^q)$  se trouve concentrée dans des simplexes adjacents et dont la face commune est de dimension au plus  $(r-1)$ . En itérant les constructions décrites dans ce paragraphe, nous arrivons à des intersections concentrées en des simplexes ayant exactement un seul sommet en commun. En appliquant une dernière fois les constructions, nous éliminons complètement les points singuliers de  $\sigma^p$  avec  $\sigma^q$ .

Enfin, puisque  $\sigma^p$  ne rencontre jamais l'image de simplexes non adjacents lors des isotopies, il est clair que l'application  $f_2$  finalement obtenue sera telle que  $\tilde{f}_2$  est homotope de façon équivariante à  $\tilde{f}_1$ .

Ceci achève la démonstration de la proposition 7 et donc du théorème 1.

## 7. Démonstration du théorème concernant les isotopies

La démonstration du théorème 1' se fait en deux parties. Dans la première partie, à l'aide du lemme 7 et d'une relativisation du théorème 1, on construit une concordance entre les deux plongements. Dans la deuxième partie, on passe de concordance à isotopie grâce à un théorème de LICKORISH.

LEMME 7. Soit  $h: \tilde{K} \times I \rightarrow S^{m-1}$  une homotopie équivariante. Alors, il existe une application équivariante  $H$  du carré réduit de  $K \times I$  dans  $S^m$  telle que, si  $j_i$  désigne l'inclusion naturelle de  $\tilde{K} \times \{i\}$  dans le carré réduit de  $K \times I$  ( $i=0, 1$ ), on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} \times \{i\} & \xrightarrow{h|_{\tilde{K} \times \{i\}}} & S^{m-1} \\ j_i \downarrow & & \downarrow \text{inclusion naturelle} \\ \text{Carré réduit} & \xrightarrow{H} & S^m \\ \text{de } K \times I. & & \end{array}$$

### Preuve du lemme

Supposons que l'on ait une application équivariante  $w: K \times K \rightarrow R^m$  telle que  $w^{-1}(0) = \Delta_K$ . Comme  $R^m - \{0\}$  se rétracte par déformation de façon équivariante sur  $S^{m-1}$ , on déduit une application équivariante  $W: \tilde{K} \rightarrow S^{m-1}$ .

On définit ainsi une application  $\psi$  de l'ensemble des classes d'homotopie équivariante d'applications équivariantes  $w$  de  $K \times K$  dans  $R^m$  telles que  $w^{-1}(0) = \Delta_K$  dans l'ensemble des classes d'homotopie équivariante d'applications équivariantes de  $\tilde{K}$  dans  $S^{m-1}$ .

Or, cette application  $\psi$  est une bijection. En effet, d'après [HU a)],  $\tilde{K}$  se rétracte par déformation équivariante sur  $\tilde{T}$  (voir définition au début du paragraphe 5) et le bord de  $\tilde{T}$  est le bord d'un «voisinage régulier» équivariant de la diagonale  $\Delta_K$ .

Ainsi, on peut considérer  $h$  comme une homotopie équivariante  $h: K \times K \times I \rightarrow R^m$  telle que  $h^{-1}(0) = \Delta_K \times I$ .

Définissons  $H: (K \times I) \times (K \times I) \rightarrow R^{m+1}$  en posant.

$$H(x, t, x', t') = \left( h\left(x, x', \frac{t+t'}{2}\right), t-t' \right).$$

On vérifie immédiatement que  $H$  a toutes les propriétés requises.



Ceci achève la démonstration du lemme 7.

Appliquons maintenant le théorème 7.

Si l'on prend  $P = K \times I$ ,  $Q = K \times \{0\} \cup K \times \{1\}$  et  $F = H$ , et si  $2(m+1) \geq 3(n+2)$  c'est-à-dire si  $2m > 3(n+1)$ , on voit que le lemme 7 et la forme relative du théorème 1 permettent d'affirmer l'existence d'un plongement:

$$\varphi: K \times I \rightarrow R^m \times I \quad \text{tel que} \quad \varphi(x, 0) = (f(x), 0) \quad \varphi(x, 1) = (g(x), 1).$$

En utilisant des cols, on peut toujours supposer que

$$\varphi^{-1}(R^m \times \{0\}) = K \times \{0\} \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}(R^m \times \{1\}) = K \times \{1\}.$$

$\varphi$  est ainsi une concordance entre les plongements  $f$  et  $g$ .

Le théorème 6 de [LICKORISH a)] affirme que:

Si  $m-n \geq 3$  (ce que l'on peut toujours supposer dans le domaine métastable) deux plongements semi-linéaires de  $K^n$  dans  $S^m$  (ou  $R^m$ ) qui sont concordants sont isotopes par une isotopie ambiante.

Ceci achève la démonstration du théorème 1'.

#### BIBLIOGRAPHIE

- V. K. A. M. GUGENHEIM a). *Piecewise linear isotopy and embeddings of elements and spheres*. Proc. London Math. Soc. 3 (1953), 29–53 et 129–153.
- A. HAEFLIGER a). *Plongements de variétés dans le domaine stable*. Séminaire Bourbaki no. 245 (Déc. 1962) 15p.
- b). *Plongements différentiables dans le domaine stable*. Comment. Math. Helv. 37 (1963), 155–176.
- A. HAEFLIGER et M. HIRSCH a). *Immersion in the stable range*. Ann. of Math. 75 (1962) p. 231–241.
- b). *On the existence and classification of differentiable embeddings*. Topology 2 (1963), 129–135.
- M. HIRSCH a). *The embedding of bounding manifolds in euclidean space*. Ann. of Math. 74 (1961), 494–497.
- b). *On embedding 4-manifolds in  $R^7$* . Proc. Cambridge Phil. Soc. 61 (1965), 657–658.
- S. T. HU a). *Isotopy invariants of topological spaces*. Proc. Royal Soc. [Ser. A.] 255 (1960), 331–366.
- J. F. P. HUDSON a). *A non-embedding theorem*. Topology 2 (1963), 123–128.
- b). *Combinatorially knotted manifolds* (à paraître).
- c). *Knotted tori*. Topology 2 (1963), 11–12.
- J. F. P. HUDSON et E. C. ZEEMAN a). *On combinatorial isotopy*. Publ. Math. de l'IHES no. 19, 69–94.
- b). *On regular neighborhoods*. Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 719–745.
- M. C. IRWIN a). *Combinatorial embeddings of manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 25–27.
- b). *Embeddings of polyhedral manifolds*. Ann. of Math. 82 (1965), 1–14.
- E. R. VAN KAMPEN a). *Komplexe in euklidischen Raumen*. Abh. Math. Sem. Hamburg 9 (1932), 72–78 et 152–153.
- M. Kervaire a). *An interpretation of G. WHITEHEAD's generalisation of HOPF's invariant*. Ann. of Math. 69 (1959), 345–365.
- R. LICKORISH a). *The piecewise linear unknotting of cones*. Topology 4 (1965) 67–91.
- W. S. MASSEY a). *On the STIEFEL-WHITNEY classes of a manifold. 1<sup>e</sup> partie*. Amer. Jour. Math. 82 (1960), 92–102.
- b). *STIEFEL-WHITNEY classes of a non-orientable manifold*. Notices Amer. Math. Soc. 9 (1962), 219.
- c). *On the STIEFEL-WHITNEY classes of a manifold. 2<sup>e</sup> partie*. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 938–942.

- C. W. PATTY a). *Isotopy invariants of trees*. Duke Math. J. 31 (1964), 183–197.
- R. PENROSE, J. H. C. WHITEHEAD et E. C. ZEEMAN a). *Embeddings of manifolds in euclidean space*. Ann. of Math. 73 (1961), 613–623.
- A. SHAPIRO a). *Obstructions to the embedding of a complex in a euclidean space. The first obstruction*. Ann. of Math. 66 (1957), 256–269.
- C. T. C. WALL a). *All 3-manifolds imbed in 5-space*. Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 564–567.
- J. H. C. WHITEHEAD a). *Simplicial spaces, nuclei, and  $m$ -groups*. Proc. London Math. Soc. 45 (1939), 243–327.
- H. WHITNEY a). *The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space*. Ann. of Math. 45 (1944), 220–246.
- W. T. WU a). *On the realisation of complexes in euclidean space I*. Acta Math. Sinica 5 (1955), 505–552 (en chinois); Scientia Sinica 7 (1958), 251–297 (en anglais).
- b). *Idem 2*. Acta Math. Sinica 7 (1957), 79–101 (en chinois); Scientia Sinica 7 (1958), 365–387 (en anglais).
- c). *Idem 3*. Acta Math. Sinica 8 (1959), 133–150 (en chinois); Scientia Sinica 8 (1959), 133–150 (en anglais).
- E. C. ZEEMAN a). *Polyhedral  $n$ -manifolds. Foundations in 3-manifolds and related topics*, M. K. Fort Jr. éditeur (1961), 57–63.
- b). *Polyhedral  $n$ -manifolds. Embeddings*. Idem, 64–70.
- c). *Isotopies and knots in manifolds*. Idem 187–195.
- d). *The POINCARÉ conjecture for  $n \geq 5$* . Idem, 198–203.
- e). *Seminar on combinatorial topology*. Notes polycopiées. IHES (1963).
- f). *Unknotting combinatorial balls*. Ann. of Math. 78 (1963), 501–526.
- g). *Isotopies of manifolds* (à paraître).
- h). *On polyhedral manifolds* (à paraître).

Reçu le 21 mars 1966